УДК 517.1
ББК 22.16
Д998

Дятлов Г. В.

Основы математического анализа для студентов-физиков. Лекции. 3. Интеграл Римана. 4. Числовые ряды / Г. В. Дятлов. — Новосибирск: Издательство Института математики, 2014. — 66 с.

ISBN 978–5–86134–151–6

Третий и четвертый разделы курса лекций, прочитанных автором студентам физического факультета Новосибирского государственного университета в 2014/15 учебном году. Включает в себя изложение интерала Римана и числовых рядов.

Для студентов специальностей с углубленным изучением математического анализа.

УДК 517.1
ББК 22.16
Д998

Д $\frac{1602070000\text{–}02}{\text{Я}82(03)\text{–}14}$ Без объявл.

ISBN 978–5–86134–151–6

Глава 3. ИНТЕГРАЛ РИМАНА

§ 1. Определение интеграла Римана и его свойства

1.1. Определение интеграла Римана.

Определение разбиения и разбиения с выделенными точками. Пусть $[a, b]$ — отрезок числовой прямой. Множество точек x_i, $i = 1, \dots, n+1$, таких, что $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$, называют *разбиением* отрезка $[a, b]$ и обычно обозначают буквой P. Наибольшую из длин $\tau(P) = \max\limits_{i=1,\dots,n} \Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, называют *параметром разбиения* P. Разбиение называют *разбиением с выделенными точками*, если в каждом из промежутков $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n$, выбрана некоторая точка $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Разбиение с выделенными точками обозначают через (P, ξ).

Определений интеграла несколько, наиболее традиционный из них — интеграл Римана, поэтому если не сказано, о каком интеграле идет речь, то подразумевается интеграл Римана.

Определение интеграла Римана. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — заданная на отрезке числовой прямой функция. Говорят, что f *интегрируема по Риману* и *ее интеграл равен* I, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения с выделенными точками (P, ξ), у которого $\tau(P) < \delta$, выполняется неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i - I \right| < \varepsilon.$$

Сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$ называют *интегральной суммой Римана.* Интеграл обозначают символом $\int\limits_a^b f(x)\, dx$. Множество всех функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$, будем обозначать через $\mathscr{R}[a, b]$.

Вопрос о том, будет ли функция интегрируема и будет ли данное число ее интегралом, решается в ходе выработки правила поиска требуемого δ по заданному ε. Можно представить себе эту процедуру как бесконечную серию экспериментов, в ходе которой, постепенно уменьшая ε, мы пытаемся найти для него соответствующее δ, и если это всегда удается сделать, то результат положительный.

По форме определение интеграла Римана напоминает предел функции. Иногда говорят, что интеграл Римана — это предел интегральных сумм, и пишут

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\tau(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Правда, этот предел понимается в некоем особом смысле, потому что в качестве аргумента выступает разбиение, а не числовой аргумент, и суммы неоднозначно определяются точками разбиения, там еще участвуют дополнительно точки из промежутков разбиения.

1.2. Геометрическая интерпретация интеграла.

Изобразим координатную плоскость и нарисуем на ней график функции f, для определенности положительной (рис. 1.1). Отметим какое-то разбиение (P,ξ) отрезка $[a,b]$ с выделенными точками и для него составим интегральную сумму Римана. Ее можно представить как площадь набора прямоугольников шириной $x_{i+1}-x_i$ и высотой $f(\xi_i)$ (см. рис. 1.1).

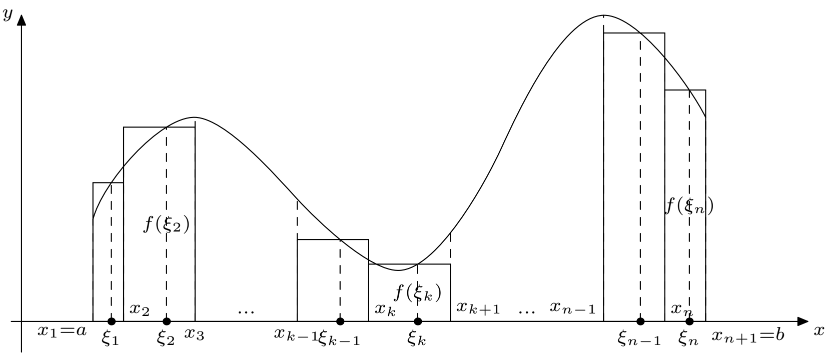

Рис. 1.1.

Что произойдет при уменьшении параметра разбиения, т. е. уменьшении длин составляющих его промежутков? При неограниченном уменьшении параметра разбиения интегральные суммы неограниченно приближаются к интегралу от функции f по $[a, b]$, а с геометрической точки зрения соответствующие площади наборов прямоугольников неограниченно приближаются к площади подграфика функции f. Поэтому интеграл ассоциируется с площадью подграфика функции. Если функция где-то отрицательна, то площади для этих участков берутся со знаком минус.

1.3. Интегральные суммы Дарбу.

Есть еще один подход к интегралу, близкий к изложенному, и ввиду его полезности мы его рассмотрим.

Определение интегральных сумм Дарбу. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — заданная на отрезке функция. Для разбиения P отрезка $[a, b]$ определим *верхнюю* и *нижнюю суммы Дарбу*

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{\xi \in [x_i, x_{i+1}]} f(\xi) \Delta x_i,$$

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{\xi \in [x_i, x_{i+1}]} f(\xi) \Delta x_i.$$

Для представления верхней или нижней суммы Дарбу на рисунке надо взять на каждом из промежутков разбиения прямоугольники с такими высотами, чтобы соответствующая часть графика целиком содержалась в построенном прямоугольнике для верхних сумм или целиком содержала такой прямоугольник для нижних.

Ясно, что верхняя сумма Дарбу больше нижней, соответствующей тому же разбиению. А что произойдет при измельчении разбиения? Нетрудно понять, что верхние и нижние суммы сближаются, при этом верхние суммы убывают, а нижние возрастают в некотором смысле. Естественно, что если в результате такого сближения суммы неограниченно сближаются, то функция интегрируема.

Теорема 1 (критерий Дарбу). *Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману на $[a, b]$ и ее интеграл равен I тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall P \quad \tau(P) < \delta \to |S(f, P) - I| < \varepsilon,$$
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall P \quad \tau(P) < \delta \to |s(f, P) - I| < \varepsilon.$$

Критерий Дарбу позволяет выяснять, интегрируема функция или нет, а также дает следующее необходимое условие интегрируемости.

Замечание 1 (о необходимом условии интегрируемости). Для того чтобы заданная на отрезке функция была интегрируемой, необходимо, чтобы она была ограниченной.

Иначе говоря, не надо пытаться проинтегрировать по Риману неограниченную функцию. Действительно, если функция интегрируема, то ее суммы Дарбу должны быть конечными. Однако если функция неограниченная, к примеру, сверху, то любая из ее верхних сумм Дарбу равна $+\infty$, так как в разбиении есть такой промежуток, на котором супремум функции равен $+\infty$. Тем самым конечного предела таких сумм нет.

Замечание 2. Некоторые функции не интегрируемы по Риману. К таким относится, например, функция Дирихле на отрезке $[0, 1]$, определяемая так:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [0,1] \text{ рационально}, \\ 0, & \text{если } x \in [0,1] \text{ иррационально}. \end{cases}$$

Ясно, что точная верхняя граница значений этой функции на любом содержащемся в $[0, 1]$ промежутке равна 1, а точная нижняя — 0 (по той причине, что в каждом открытом промежутке есть как рациональное число, так и иррациональное). Стало быть, любая верхняя сумма Дарбу этой функции равна 1, а любая нижняя — 0, и разность между ними, равная всегда 1, не может стремиться к нулю. Значит, функция Дирихле неинтегрируема.

Теорема 2 (о линейности и аддитивности интеграла). (1) *Если* $f, g \in \mathscr{R}[a, b]$ *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *то* $\alpha f + \beta g \in \mathscr{R}[a, b]$, *при этом*

$$\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)\, dx + \beta \int\limits_a^b g(x)\, dx.$$

(2) *Если* $f \in \mathscr{R}[a, b]$, *то для любого* $c \in (a, b)$ *функция* f *интегрируема как по* $[a, c]$, *так и по* $[c, b]$, *при этом*

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_a^c f(x)\, dx + \int\limits_c^b f(x)\, dx.$$

Свойство (1) называют *линейностью интеграла*, свойство (2) — *аддитивностью*.

Мы не будем доказывать утверждения теоремы 2 — они вытекают непосредственно из определения интеграла в результате технических манипуляций. Оба утверждения достаточно прозрачны с геометрической точки зрения. Так, если сложить две функции, то площади их подграфиков также сложатся, если умножить функцию на число, то площадь изменится пропорционально этому числу. Наконец, если подграфик разбить вертикальной прямой на две части, то площадь всего подграфика будет равна сумме площадей полученных в результате разбиения частей.

Выше мы увидели, что есть неинтегрируемые функции. Естественно возникает вопрос: каковы признаки интегрируемости функции, т. е. какие свойства функции гарантируют ее интегрируемость?

Теорема 3 (об интегрируемости непрерывной и монотонной функций). (1) *Если функция* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ограничена и непрерывна, возможно, за исключением конечного множества точек, то она интегрируема на* $[a, b]$.

(2) *Если функция* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ограничена и монотонна, то она интегрируема на* $[a, b]$.

Мы оставим без доказательства оба утверждения теоремы 3. Они обосновываются, естественно, с привлечением критерия Дарбу. Кроме того, в доказательстве первого используется теорема Кантора о равномерной непрерывности, которая осталась за рамками нашего курса.

Теорема 4 (о монотонности интеграла). (1) *Пусть* $f, g \in \mathscr{R}[a, b]$ *таковы, что* $f(x) \leqslant g(x)$ *для любого* $x \in [a, b]$. *Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

(2) *Если* $f \in \mathscr{R}[a, b]$, *то* $|f| \in \mathscr{R}[a, b]$ *и*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

Мы оставим без доказательства и это утверждение. Интуитивно ясно, что если график одной из функций расположен не выше графика другой, то и площадь сохранит это сопоставление — у нижней функции она будет не больше чем у верхней. Кстати, второе утверждение является простым следствием первого ввиду неравенства $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$.

Иногда вместо свойства монотонности говорят о свойстве положительности интеграла в том смысле, что если функция неотрицательна на отрезке, то и интеграл от нее также неотрицателен. Ввиду линейности ясно, что монотонность и положительность означают одно и то же — монотонность следует из положительности в результате применения этого свойства к разности большей и меньшей функций.

Теорема 5 (первая теорема о среднем). *Пусть*
(1) *функция* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *непрерывна на* $[a,b]$,
(2) $g \in \mathscr{R}[a,b]$ *и* $g(x) \geqslant 0$ *для любого* $x \in [a,b]$.
Тогда существует такое $\xi \in [a,b]$, *что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство. По теореме Вейерштрасса непрерывная на отрезке функция достигает на нем наименьшего и наибольшего значений. Тем самым существуют такие $x_1, x_2 \in [a,b]$, что

$$f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2) \qquad (*)$$

для любого $x \in [a,b]$. Поскольку умножение на положительное число сохраняет неравенство, умножая $(*)$ на $g(x)$, получаем

$$f(x_1)g(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant f(x_2)g(x),$$

откуда, применяя теорему о монотонности интеграла и вынося константы за интеграл, имеем

$$f(x_1)\int\limits_a^b g(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant f(x_2)\int\limits_a^b g(x)\,dx. \qquad (\dagger)$$

Если $\int\limits_a^b g(x)\,dx = 0$, то требуемое равенство очевидно. Пусть

$$\int\limits_a^b g(x)\,dx > 0.$$

Тогда из (†) следует, что

$$f(x_1) \leqslant \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int\limits_a^b g(x)\,dx} \leqslant f(x_2).$$

По теореме Больцано — Коши существует такое $\xi \in [a, b]$, для которого

$$f(\xi) = \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int\limits_a^b g(x)\,dx}.$$

Умножая обе части последнего неравенства на $\int\limits_a^b g(x)\,dx$, приходим к требуемому.

Теорема доказана.

Замечание 1. Если $g(x) = 1$, то результат теоремы выглядит так: существует такое $\xi \in [a, b]$, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a),$$

и имеет простой геометрический смысл.

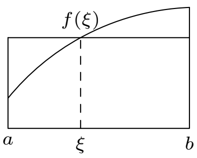

Рис. 1.2.

Пусть для определенности f неотрицательна. Тогда площадь подграфика функции равна площади некоторого прямоугольника, высота которого расположена между наименьшим и наибольшим значениями функции (рис. 1.2).

Замечание 2. Теорему о среднем можно использовать для оценки интеграла от функции. А именно, если известны границы изменения функции $f(x)$, например $m \leqslant f(x) \leqslant M$ для любого $x \in [a, b]$, то

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

§ 2. Интеграл и первообразная

В определении интеграла было существенно использовано то, что рассматривалась функция, заданная на отрезке, т. е. заранее предполагалось, что нижний предел интегрирования меньше верхнего. Полезно распространить определение интеграла на тот случай, когда это условие не выполнено. А именно, для $a < b$ по определению положим

$$\int\limits_b^a f(x)\,dx = -\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Если $a = b$, то ясно, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0.$$

Нетрудно показать, что при расширении определения интеграла сохраняется свойство его аддитивности: при естественном предположении об интегрируемости для любых a, b, c имеет место равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Теорема 6 (о связи интеграла и первообразной). *Пусть* $f \in \mathscr{R}[a,b]$. *Положим*

$$F(x) = \int\limits_a^x f(y)\,dy, \quad x \in [a,b].$$

(1) *Функция* $F(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$.
(2) *Если* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$, *то* $F(x)$ *дифференцируема и* $F'(x) = f(x)$ *для любого* $x \in [a,b]$, *т. е.* $F(x)$ *является первообразной функции* $f(x)$.

Доказательство. Шаг 1 (непрерывность). Фиксируем $x \in [a,b]$ и докажем, что F непрерывна в точке x. Действительно, пусть

h таково, что $x + h \in [a, b]$. Оценим модуль разности:

$$
\begin{aligned}
|F(x+h) - F(x)| &= \left| \int\limits_a^{x+h} f(y)\,dy - \int\limits_a^{x} f(y)\,dy \right| \\
&= \left| \int\limits_a^{x+h} f(y)\,dy + \int\limits_x^{a} f(y)\,dy \right| \\
&= \left| \int\limits_x^{x+h} f(y)\,dy \right| \leqslant \left| \int\limits_x^{x+h} |f(y)|\,dy \right|
\end{aligned}
$$

(в последнем интеграле модуль поставлен на случай $h < 0$)

$$
\leqslant \sup_{y \in [a,b]} |f(y)| \cdot \left| \int\limits_x^{x+h} dy \right| = |h| \sup_{y \in [a,b]} |f(y)| \to 0,\ \ h \to 0.
$$

В процессе оценки мы воспользовались тем, что интегрируемая функция ограничена.

Шаг 2 (дифференцируемость $F(x)$). Предположим, что f непрерывна на $[a, b]$, и фиксируем $x \in [a, b]$. Докажем, что

$$
\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).
$$

По теореме о среднем для разностного отношения, записанного с учетом определения F, существует такое $\xi(h)$ между x и $x + h$, что

$$
\begin{aligned}
\frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h} \left(\int\limits_a^{x+h} f(y)\,dy - \int\limits_a^{x} f(y)\,dy \right) \\
&= \frac{1}{h} \int\limits_x^{x+h} f(y)\,dy = \frac{1}{h} f(\xi(h)) \int\limits_x^{x+h} dy = f(\xi(h)).
\end{aligned}
$$

Из расположения точки ξ ясно, что $\xi(h) \to x$ при $h \to 0$. Ввиду непрерывности функции f будет

$$
\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f(\xi(h)) = f(x),
$$

что и требовалось.

Теорема доказана.

Замечание. Условие непрерывности подынтегральной функции в утверждении (2) теоремы 6 существенно. Так, для функции $\operatorname{sgn} x$, разрывной в нуле, функция

$$F(x) = \int\limits_0^x \operatorname{sgn} y \, dy$$

есть не что иное, как модуль:

$$F(x) = |x|,$$

который имеет производную во всех точках, кроме нуля.

Теорема 7 (формула Ньютона — Лейбница). *Пусть функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a, b]$. Тогда имеет место формула Ньютона — Лейбница*

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \tag{$*$}$$

где F — некоторая первообразная функции f.

Доказательство. Согласно теореме 6 функция

$$x \mapsto \int\limits_a^x f(y)\, dy$$

является первообразной для функции f. Пусть $F(x)$ — некоторая первообразная для $f(x)$. Тогда эти первообразные отличаются на константу, т. е.

$$F(x) = \int\limits_a^x f(y)\, dy + C. \tag{$\dagger$}$$

Подставляя в (†) значение $x = a$, получаем, что $C = F(a)$, и далее, подставляя в (†) значение $x = b$, приходим к требуемому равенству

$$F(b) = \int\limits_a^b f(y)\, dy + F(a).$$

Теорема доказана.

Формула Ньютона — Лейбница и интегрирование по частям дают еще один способ вывести формулу Тейлора, на этот раз с интегральным остаточным членом. Он позволяет оценивать остаток и наиболее удобен в применении.

Теорема 8 (формула Тейлора с интегральным остаточным членом). *Пусть функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ имеет на $[a, b]$ производные до порядка $n + 1$ и $(n + 1)$-я производная непрерывна. Тогда имеет место равенство, называемое формулой Тейлора с остаточным членом в интегральной форме:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{1}{n!} \int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n \, dt, \qquad (*)$$

где x_0 — некоторая фиксированная точка из $[a, b]$.

Доказательство. При $n = 0$ равенство $(*)$ представляет собой формулу Ньютона — Лейбница

$$f(x) = f(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f'(t) \, dt \qquad (\dagger)$$

и доказано выше. Преобразуем подынтегральное выражение в $(\dagger)$, подготовившись интегрировать по частям, и проделаем эту операцию:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) - \int\limits_{x_0}^{x} f'(t) \frac{d}{dt}(x - t) \, dt \\ &= f(x_0) - f'(t)(x - t)\Big|_{t=x_0}^{t=x} + \int\limits_{x_0}^{x} f''(t)(x - t) \, dt \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f''(t)(x - t) \, dt. \end{aligned}$$

Рассуждая по индукции, предположим, что формула верна для некоторого натурального n, и докажем ее справедливость для $n + 1$. Иначе говоря, предположим, что верно равенство $(*)$, и преобразуем его, считая, что f обладает требуемым набором производных:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k - \frac{1}{(n+1)!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\frac{d}{dt}((x-t)^{n+1})\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k - \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)((x-t)^{n+1})\Big|_{t=x_0}^{t=x} \\
&\qquad + \frac{1}{(n+1)!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1} \\
&\qquad + \frac{1}{(n+1)!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\,dt.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Замечание. Из интегрального вида остаточного члена, применяя теорему о среднем, нетрудно вывести форму Лагранжа.

§ 3. Несобственный интеграл

3.1. Несобственный интеграл в случае одной особенности.

Интеграл Римана определен для ограниченной функции на замкнутом ограниченном промежутке. Однако нередко возникает потребность интегрировать либо неограниченную функцию, либо функцию, заданную на неограниченном множестве. Опираясь на геометрическую интерпретацию интеграла, можно предложить такой путь распространения, особенно ярко видный в случае бесконечного промежутка вида $[a, +\infty)$. Можно рассматривать отрезки от левого конца интегрирования до какого-то конечного числа, и в предположении, что по любому такому отрезку интеграл есть, устремить правый конец к бесконечности. Если в итоге площадь подграфика на отрезках сойдется к какому-то числу, его естественно считать площадью всего подграфика.

Рассмотрим промежуток $[a, \omega)$, где $a \in \mathbb{R}$, $\omega \in \overline{\mathbb{R}}$, и определенную на $[a, \omega)$ функцию f. Говорят, что ω — *особая точка функции* f, если либо $\omega = +\infty$, либо f неограниченная в любой окрестности точки ω.

Определим понятие несобственного интеграла по отдельности для случая бесконечной и конечной особых точек, так будет нагляднее, хотя достаточно ясно, что это модификации одной и той же конструкции.

Определение несобственного интеграла.

(1) Пусть функция f задана на ограниченном промежутке $[a, \omega)$ и ω — ее особая точка. Предположим, что на любом отрезке $[a, b] \subset [a, \omega)$ функция f интегрируема. Если существует предел

$$\lim_{b \to \omega} \int\limits_a^b f(x)\, dx,$$

то говорят, что f *интегрируема в несобственном смысле по промежутку* $[a, \omega)$, а само значение предела называют *несобственным интегралом от* f *по* $[a, \omega)$ и обозначают символом $\int\limits_a^\omega f(x)\, dx$.

(2) Пусть функция f задана на промежутке $[a, +\infty)$. Предположим, что на любом отрезке $[a, b] \subset [a, +\infty)$ функция f интегрируема. Если существует предел

$$\lim_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)\, dx,$$

то говорят, что f *интегрируема в несобственном смысле по промежутку* $[a, +\infty)$, а само значение предела называют *несобственным интегралом от* f *по* $[a, +\infty)$ и обозначают символом $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$.

Если конечного предела в определении несобственного интеграла не существует, то говорят, что интеграл *расходится*.

Мы будем рассматривать функцию, заданную на промежутке вида $[a, \omega)$. Все утверждения очевидным образом переносятся на промежуток вида $(\omega, a]$.

Далее будем использовать обозначение $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ для несобственных интегралов как в случае конечного промежутка, так и бесконечного, где ω — особая точка.

Первый вопрос, возникающий при рассмотрении несобственного интеграла, — о его сходимости. В принципе, поскольку он был определен как предел функции

$$F(b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

казалось бы, можно использовать все общие теоремы о существовании предела для ответа на вопрос, сходится или нет несобственный интеграл. Однако проблема в том, что исследуется предел не самой функции, а ее интеграла $F(b)$ как функции верхнего предела, и использовать регулярные средства можно только в том случае, если есть возможность выразить этот интеграл, например, с использованием первообразной. Так как вопрос нахождения первообразной не столь прост, сколь хотелось бы, надо иметь набор средств, позволяющий по информации о подынтегральной функции судить, сходится интеграл или нет. Такого рода достаточные условия далее будут доказаны и названы признаками сходимости несобственного интеграла.

Второй вопрос — о нахождении интеграла. Если функция $f(x)$ непрерывна, то значение интеграла находится по формуле Ньютона — Лейбница с той лишь разницей, что в особой точке берется не значение, а предел:

$$\int\limits_a^\omega f(x)\,dx = \lim_{b\to\omega} F(b) - F(a).$$

Несобственный интеграл может сходиться либо за счет скорости роста или убывания функции (в зависимости от того, конечна особая точка или бесконечна), а также за счет компенсации участков, где она положительна, участками, где она отрицательна. Мы будем различать эти ситуации в соответствии со следующим определением.

Определение абсолютной и условной сходимости несобственного интеграла. Говорят, что интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ *сходится абсолютно*, если сходится интеграл от модуля подынтегральной функции, т. е. интеграл $\int\limits_a^\omega |f(x)|\,dx$. Если интеграл сходится, но не абсолютно, то говорят, что он *сходится условно*.

Ясно, что для положительных функций сходимость равносильна абсолютной сходимости.

Теорема 9 (критерий Коши сходимости несобственного интеграла). *Несобственный интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $B \in (a, \omega)$, что для любых $b_1, b_2 \in (B, \omega)$ выполнено неравенство $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$.*

Условие Коши для несобственного интеграла с использованием кванторов выглядит так:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists B \in (a, \omega)\ \forall b_1, b_2 \in (B, \omega) \quad \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Замечание о пределе в случае несобственного интеграла. Одной из особенностей рассматриваемого случая несобственного интеграла является то, что ω — правый конец промежутка, стало быть, предел рассматривается всегда слева. Напомним, что критерий Коши для функций был у нас сформулирован в случае (двустороннего) предела в конечной точке. Модификация условия Коши для левостороннего предела функции $F : [a, \omega) \to \mathbb{R}$ в конечной точке $\omega \in \mathbb{R}$ выглядит так:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x_1, x_2 \in (a, \omega) \begin{cases} \omega - \delta < x_1 < \omega, \\ \omega - \delta < x_2 < \omega \end{cases} \Rightarrow |F(x_1) - F(x_2)| < \varepsilon.$$

Ясно, что найти подходящее δ в последнем высказывании равносильно возможности найти левый конец $\omega - \delta$, который можно обозначить отдельной буквой. Тогда условие Коши будет выглядеть так:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists B \in (a, \omega)\ \forall x_1, x_2 \in (B, \omega) \quad |F(x_1) - F(x_2)| < \varepsilon.$$

Кстати, в таком виде условие Коши подходит и для бесконечной точки $\omega = +\infty$.

Доказательство. По определению сходимость несобственного интеграла $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ означает, что функция

$$F(b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

имеет конечный предел при $b \to \omega$. Согласно критерию Коши применительно к функции F существование предела $\lim\limits_{b\to\omega} F(b)$ равносильно тому, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists B \in (a, \omega) \ \forall b_1, b_2 \in (B, \omega) \quad |F(b_2) - F(b_1)| < \varepsilon.$$

Ввиду аддитивности интеграла

$$F(b_2) - F(b_1) = \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx,$$

и предыдущее условие совпадает с условием Коши для несобственного интеграла из формулировки теоремы.

Теорема доказана.

3.2. Абсолютная сходимость.

В этом пункте будем обсуждать сходимость интегралов от положительных функций. Для таких функций сходимость равносильна абсолютной сходимости. Сначала покажем, как абсолютная сходимость связана со сходимостью для функций без ограничений на знак.

Теорема 10 (о сходимости абсолютно сходящегося интеграла). *Абсолютно сходящийся интеграл сходится, т. е. если* $\int\limits_a^\omega |f(x)|\,dx$ *сходится, то интеграл* $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ *также сходится.*

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши. По условию интеграл $\int\limits_a^\omega |f(x)|\,dx$ сходится, следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists B \in (a, \omega) \ \forall b_1, b_2 \in (b, \omega) \quad \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} |f(x)|\,dx \right| < \varepsilon.$$

В силу монотонности интеграла

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int_{b_1}^{b_2} |f(x)|\,dx\right|. \qquad (*)$$

Здесь интеграл от модуля функции взят также по модулю ввиду произвольности взаимного расположения точек b_1, b_2: если $b_1 \leqslant b_2$, то интеграл неотрицателен и модуль можно опустить. С учетом неравенства $(*)$ имеем

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in (a, \omega)\ \forall b_1, b_2 \in (B, \omega) \quad \left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

что согласно критерию Коши влечет сходимость интеграла $\int\limits_a^{\omega} f(x)\,dx$.

Теорема доказана.

Кстати, критерий Коши был здесь использован дважды: один раз из сходимости интеграла от модуля функции следовало выполнение условия Коши, а в другой — из справедливости условия Коши для интеграла от функции вытекала сходимость интеграла от нее.

Как отмечено выше, рассмотрение несобственного интеграла начинается с изучения его сходимости. Для начала покажем сходимость интегралов от некоторых конкретных функций. Затем докажем мажорантный признак и теорему сравнения для интегралов, которые позволят сводить вопрос сходимости интегралов от более сложных функций к изучению интегралов от более простых. Начнем с интегралов от некоторых простых функций.

Теорема 11 (об интегрировании основных особенностей).

(1) *Интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{dx}{x^{\alpha}}$, $a > 0$, *сходится тогда и только тогда, когда* $\alpha > 1$.

(2) *Интеграл* $\int\limits_0^{b} \dfrac{dx}{x^{\alpha}}$, $b < +\infty$, *сходится тогда и только тогда, когда* $\alpha < 1$.

(3) *Интеграл* $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx$ *сходится при любом* $\alpha > 0$.

Доказательство. Обоснуем утверждение теоремы путем вычисления интегралов и непосредственного предельного перехода.

(1) Имеем

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \left.\dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_{x=a}^{x=b} & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \ln x\big|_{x=a}^{x=b} & \text{при } \alpha = 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{b^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \dfrac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \ln b - \ln a & \text{при } \alpha = 1. \end{cases}$$

Функция $\dfrac{b^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$ как функция от b имеет конечный предел при $b \to +\infty$ тогда и только тогда, когда $\alpha > 1$, ибо в таком случае показатель степени $-\alpha+1$ отрицателен. Функция $\ln b$ стремится к бесконечности при $b \to +\infty$. Случай (1) доказан.

(2) Это утверждение доказывается точно так же, как первое, надо только принять во внимание, что на этот раз предельный переход совершается при $a \to +0$. Тогда функция $\dfrac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$ имеет конечный предел в том и только в том случае, если показатель степени положителен, т. е. при $-\alpha+1 > 0$ или, что то же, $\alpha < 1$. Функция $\ln a$ имеет бесконечный предел при $a \to +0$.

(3) Интеграл

$$\int\limits_0^b e^{-\alpha x}\,dx = \left.\frac{e^{-\alpha x}}{-\alpha}\right|_{x=0}^{x=b} = \frac{e^{-\alpha b}}{-\alpha} + \frac{1}{\alpha}$$

имеет при $b \to +\infty$ конечный предел для любого $\alpha > 0$.

Теорема доказана

Степенные функции составляют тот набор функций, к которым будем сводить изучение сходимости несобственного интеграла от положительной функции с помощью следующей теоремы.

Теорема 12 (мажорантный признак и теорема сравнения). *Пусть функции* $f, g : [a,\omega) \to \mathbb{R}$ *неотрицательны и интегрируемы по любому промежутку* $[a,b] \subset [a,\omega)$. *Тогда*

(1) (мажорантный признак). *Если* $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ *по крайней мере для* x *из некоторой окрестности точки* ω *и интеграл* $\int\limits_a^\omega g(x)\,dx$ *сходится, то интеграл* $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ *также сходится, а если интеграл* $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ *расходится, то интеграл* $\int\limits_a^\omega g(x)\,dx$ *тоже расходится.*

(2) (признак сравнения). *Если функции* f *и* g *асимптотически эквивалентны при* $x \to \omega$, *т. е.* $f(x) = g(x) + o(g(x))$, *то интегралы* $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ *и* $\int\limits_a^\omega g(x)\,dx$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. Шаг 1 (мажорантный признак). Не уменьшая общности, можно считать, что неравенство $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ выполняется для всех $x \in [a, \omega)$. Пусть интеграл $\int\limits_a^\omega g(x)\,dx$ сходится. Воспользуемся критерием Коши. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Согласно критерию Коши для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $B \in (a, \omega)$, что для любых $b_1, b_2 \in (B, \omega)$ выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} g(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Тогда ввиду монотонности интеграла

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} g(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

стало быть, и для интеграла от функции f выполнено условие Коши, и согласно критерию Коши он сходится.

Шаг 2 (признак сравнения). Пусть $f(x) = g(x) + o(g(x))$, т. е., подробнее, $f(x) = g(x)(1 + \alpha(x))$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to \omega$. По определению предела существует окрестность (B, ω) точки ω, в которой $|\alpha(x)| < 1/2$ и, следовательно,

$$1 + \alpha(x) \geqslant 1 - |\alpha(x)| > \frac{1}{2},$$

а значит, и

$$f(x) = g(x)(1 + \alpha(x)) > g(x) \cdot \frac{1}{2},$$

или $2f(x) > g(x)$. Предположим, что $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ сходится. Тогда $\int\limits_a^\omega 2f(x)\,dx$ тоже сходится, а следовательно, по мажорантному признаку интеграл $\int\limits_a^\omega g(x)\,dx$ сходится.

Для доказательства утверждения (2) в обратную сторону достаточно поменять местами функции f и g, заметить, что если g — главная часть f, то, обратно, f — главная часть g, и воспользоваться только что доказанным утверждением.

Теорема доказана.

Пример 1. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$.

Решая вопрос о сходимости интегралов, стоит всегда начинать с абсолютной сходимости. Поэтому рассмотрим интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right|\,dx$. Ввиду неравенства $|\cos x| \leqslant 1$ имеем

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2},$$

и так как интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ сходится, наш интеграл сходится абсолютно.

Пример 2. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

Попытка найти первообразную в элементарных функциях к успеху не приведет, но нам этого и не надо — мы занимаемся изучением лишь сходимости интеграла. Заметим, что для достаточно далеких значений x, а именно для $x \geqslant 1$, имеет место неравенство $e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$, а интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} e^{-x}\,dx$ сходится, стало быть, ввиду мажорантного признака интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ сходится.

Пример 3. Исследуем сходимость интеграла $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x^4)^{1/2}}\,dx$.

Здесь одна особая точка, это $+\infty$. Неочевидно, как найти первообразную рассматриваемой функции, более того, сразу трудно утверждать, есть ли таковая среди элементарных функций. Стало быть, надо пользоваться признаком сравнения. Попытаемся выделить у подынтегральной функции главную часть на бесконечности. Запишем функцию так: $\sqrt{x}(1+x^4)^{-1/2}$. Имея в составе функции выражение биномиального вида, естественно воспользоваться асимптотической формулой для бинома в окрестности нуля (см. формулу (5) в теореме 12 гл. 2):

$$(1+y)^{\mu} = 1 + \mu y + o(y).$$

Но у нас аргумент стремится к $+\infty$, поэтому сразу этой формулой воспользоваться невозможно и надо подготовить вид функции к такому, в котором ясно будет выделен агрегат, стремящийся к нулю. Вынесем за скобки выражение x^4 и воспользуемся формулой Тейлора для бинома относительно $\frac{1}{x^4}$:

$$\begin{aligned}\sqrt{x}(1+x^4)^{-1/2} &= x^{1/2}\cdot x^{-2}\cdot\left(\frac{1}{x^4}+1\right)^{-1/2} \\ &= x^{-3/2}\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right).\end{aligned}$$

Для простоты обозначив

$$\alpha(x) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

и заметив, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x)=0$, обнаруживаем, что

$$\frac{\sqrt{x}}{(1+x^4)^{1/2}} = \frac{1}{x^{3/2}}+o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right),$$

так что главная часть нашей функции при $x \to +\infty$ имеет вид $\dfrac{1}{x^{3/2}}$. Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{1}{x^{3/2}}\,dx$, $a > 0$, сходится, поскольку степень в знаменателе больше 1, следовательно, и исходный интеграл сходится.

3.3. Условная сходимость.

Функцию, которая меняет знак на промежутке интегрирования, нередко можно представить в виде произведения $f(x)g(x)$, где $f(x)$ меняет знак, а $g(x)$ нет, но обладает каким-то свойством, способствующим сходимости интеграла от произведения, типа монотонности и сходимости к нулю. Например, в интеграле $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x}\,dx$ функция $f(x) = \sin x$ знакопеременная, а $g(x) = \dfrac{1}{x}$ монотонно стремится к нулю.

Теорема 13 (признаки Абеля и Дирихле для несобственных интегралов). *Пусть функции $f, g : [a, \omega) \to \mathbb{R}$ интегрируемы на каждом промежутке $[a, b] \subset [a, \omega)$. Если выполнен хотя бы один из наборов условий*

(D1) *функция $F(b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ ограничена,*

(D2) *функция $g(x)$ монотонно стремится к нулю при $x \to \omega$,*

или

(A1) *интеграл $\int\limits_a^{\omega} f(x)\,dx$ сходится,*

(A2) *функция $g(x)$ монотонна и ограничена,*

то интеграл $\int\limits_a^{\omega} f(x)g(x)\,dx$ сходится.

Если выполнены условия (D1), (D2), *то об утверждении теоремы говорят как о признаке Дирихле, если* (A1), (A2), *то — Абеля.*

Доказательство. Шаг 1 (признак Дирихле). Для обоснования сходимости воспользуемся критерием Коши. Для этого надо оценить модуль интеграла $\left|\int\limits_{b_1}^{b_1} f(x)g(x)\,dx\right|$. Доказательство проведем при несколько более сильных условиях, чем сформулированы в теореме, на практике они всегда выполняются. Предположим дополнительно, что функция $f(x)$ непрерывна на $[a,\omega)$, а тогда функция $F(b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx,\ b \in (a,\omega)$, является первообразной функции $f(x)$. Относительно функции $g(x)$ предположим, что она дифференцируема и ее производная непрерывна. Также для определенности предположим, что $g(x)$ неубывающая. В терминах производной это означает, что $g'(x) \geqslant 0$. При этих условиях преобразуем интеграл и проведем интегрирование по частям:

$$\int\limits_{b_1}^{b_1} f(x)g(x)\,dx = \int\limits_{b_1}^{b_2} F'(x)g(x)\,dx = F(x)g(x)\Big|_{b_1}^{b_2} - \int\limits_{b_1}^{b_2} F(x)g'(x)\,dx.$$

Поскольку $g'(x) \geqslant 0$, по первой теореме о среднем существует точка $\xi \in [b_1, b_2]$ такая, что

$$\int\limits_{b_1}^{b_2} F(x)g'(x)\,dx = F(\xi)\int\limits_{b_1}^{b_2} g'(x)\,dx.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{b_1}^{b_1} f(x)g(x)\,dx == F(b_2)g(b_2) - F(b_1)g(b_1) - F(\xi)g(b_2) + F(\xi)g(b_1). \quad (1)$$

Дано. Согласно условию функция $F(x)$ ограничена, т. е.

$$\exists C > 0\ \forall x \in (a,\omega) \quad |F(x)| \leqslant C. \quad (2)$$

Кроме того, функция $g(x)$ стремится к нулю при $x \to \omega$, т. е.

$$\forall \varepsilon_1 > 0\ \exists B_1 \in (a,\omega)\ \forall x \in (B_1,\omega) \quad |g(x)| < \varepsilon_1. \quad (3)$$

Надо. Обеспечить выполнение высказывания

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in (a,\omega)\ \forall b_1, b_2 \in (B,\omega) \quad \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)\,dx\right| < \varepsilon. \quad (4)$$

Для получения «Надо» из «Дано» есть формула (1), согласно которой ввиду неравенства треугольника

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_1} f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant |F(b_2)g(b_2)| + |F(b_1)g(b_1)| + |F(\xi)g(b_2)| + |F(\xi)g(b_1)|. \tag{5}$$

Пусть дано $\varepsilon > 0$. По этому ε надо сориентироваться в выборе ε_1, которым мы можем распоряжаться, так как оно участвует в разделе «Дано». В правой части неравенства (5) четыре слагаемых, в каждом из них есть множитель, связанный с ограниченной функцией F, и выполнено (2), т. е. каждый из этих множителей ограничен сверху константой C. Поскольку в итоге надо получить оценку $< \varepsilon$ для всей суммы, естественно принять $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{4C}$. Согласно (3) найдется соответствующее B_1. Возьмем в качестве B в высказывании (4) найденное B_1, т. е. положим $B = B_1$. Тогда для любых $b_1, b_2 \in (B, \omega)$ имеем

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Шаг 1, т. е. признак Дирихле, доказан.

Шаг 2 (признак Абеля). В условиях этого признака функция $g(x)$, будучи монотонной и ограниченной, имеет предел, пусть

$$\lim_{x\to\omega} g(x) = \gamma.$$

Тогда на любом ограниченном отрезке $[a, b]$ имеем

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)(g(x)-\gamma)\,dx + \gamma\int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{6}$$

Функция $g(x)-\gamma$ монотонно стремится к 0, а функция $f(x)$ удовлетворяет условиям признака Дирихле. Действительно, $F(b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ имеет конечный предел при $b \to \omega$ и непрерывна, а стало быть, ограничена, в чем можно убедиться следующим образом. Пусть $\lim\limits_{b\to\omega} F(b) = A$. Ввиду наличия конечного предела функции найдется такое B', что для всех $b \in (B', \omega)$ выполнено неравенство $A - 1 \leqslant$

$F(b) \leqslant A+1$. На оставшемся замкнутом ограниченном промежутке $[a, B']$ функция F, будучи непрерывной, достигает своих наименьшего и наибольшего значений, пусть это m и M. Тогда для любого $b \in [a, \omega)$ имеем
$$\min\{A-1, m\} \leqslant F(b) \leqslant \max\{A+1, M\}.$$
Таким образом, согласно признаку Дирихле первый интеграл в (6) имеет конечный предел при $b \to \omega$. Второй интеграл в (6) имеет конечный предел по условию. Следовательно, их сумма имеет конечный предел, так что интеграл $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx$ сходится.

Теорема доказана.

На практике чаще применяется признак Дирихле. Дело в том, что сходимость исследуемого интеграла должна обеспечиваться какой-то сходимостью в условиях. В признаке Дирихле предполагается сходимость к нулю некоторой функции, а в условиях признака Абеля — сходимость некоторого интеграла. Ясно, что доказывать сходимость к нулю функции, скорее всего, проще, чем сходимость интеграла.

Пример 4. Изучим сходимость интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Во-первых, отметим, что подынтегральная функция особенности в нуле не имеет, так как у нее есть в нуле предел, а стало быть, она в некоторой окрестности нуля ограничена. Поэтому особая точка одна — это $+\infty$. Выделим в подынтегральной функции монотонную часть, это функция $g(x) = \frac{1}{x}$. Она имеет пределом 0 при $x \to +\infty$. Следовательно, надо ориентироваться на применение признака Дирихле, согласно которому от второй функции $f(x) = \sin x$ надо ожидать ограниченность первообразной, что достаточно очевидно, так как таковой является функция $\cos x$. Следовательно, по признаку Дирихле интеграл сходится.

Докажем сходимость этого интеграла вручную, без использования признака Дирихле, а применяя интегрирование по частям, как мы поступали в доказательстве теоремы 13. При этом во избежание появления в процессе преобразований особенности в нуле отступим от нуля и будем исследовать сходимость интеграла $\int\limits_c^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ (интеграл по оставшемуся промежутку $[0,c]$ проблем не приносит, ибо это число). Пусть $b \in (c,+\infty)$. Имеем

$$\int\limits_c^b \frac{\sin x}{x}\,dx = -\int\limits_c^b \frac{1}{x}\,d\cos x = -\frac{\cos x}{x}\bigg|_c^b + \int\limits_c^b \cos x\,d\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$= -\frac{\cos x}{x}\bigg|_c^b - \int\limits_c^b \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

Первое слагаемое имеет конечный предел при $b \to +\infty$:

$$-\frac{\cos x}{x}\bigg|_c^b = -\frac{\cos b}{b} + \frac{\cos c}{c} \to 0 + \frac{\cos c}{c}.$$

Здесь второе слагаемое есть число, а первое стремится к нулю как произведение ограниченной на бесконечно малую. Сходимость оставшегося интеграла исследована выше при изучении абсолютной сходимости (см. пример 1). В итоге оказалось, что весь интеграл сходится.

Покажем, что этот интеграл сходится условно, т. е. что интеграл абсолютно расходится. Для этого оценим интеграл от модуля подынтегральной функции снизу функцией, интеграл от которой расходится. Имеем

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \geqslant \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1-\cos 2x}{2x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos 2x}{x}.$$

Интеграл $\int\limits_c^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ расходится, а интеграл $\int\limits_c^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,dx$ сходится по признаку Дирихле (обосновывается аналогично тому, как это было сделано для интеграла из примера). Разность расходящегося и сходящегося интегралов расходится (докажите). Тем самым удалось ограничить снизу подынтегральную функцию в изучаемом интеграле функцией, интеграл от которой расходится, значит, и наш интеграл также расходится по мажорантному признаку.

Замечание 1. Просматривая процесс интегрирования по частям, можно заметить причину, по которой мы отошли от нуля. Если оставить нуль в качестве левого конца промежутка интегрирования, то появились бы проблемы при осуществлении предельного перехода в выражении $\left.\dfrac{\cos x}{x}\right|_c^b$, ибо надо было подставлять нуль в знаменатель как нижний предел интегрирования, что невозможно.

Можно заметить, что в исходном интеграле в нуле особенности не было, так что ее не должно было появиться. Дело в том, что эта особенность появляется не только в первом слагаемом, но и во втором, т. е. в интеграле $\int\limits_c^b \dfrac{\cos x}{x^2}\,dx$, и эти особенности взаимно уничтожаются. Но такое рассуждение не вполне корректно, поэтому предпочтительнее отойти от нуля и обосновывать честно.

Замечание 2. Что происходит при интегрировании по частям, когда есть осциллирующая функция? Мы заносим ее под дифференциал, затем в процессе интегрирования по частям происходит дифференцирование второй функции, и при этом появляется функция с большей скоростью убывания на бесконечности по сравнению со скоростью убывания имевшейся в интеграле. Так, здесь появилась функция $\dfrac{1}{x^2}$, а была $\dfrac{1}{x}$. Но этот эффект можно использовать только тогда, когда осциллирующая функция имеет ограниченную первообразную.

Процедуру интегрирования по частям можно проделать несколько раз, при этом на каждом шаге повышается степень знаменателя. Это иногда может оказаться полезным. Например, если надо найти приближенное значение интеграла из примера 4, то надо брать конечные промежутки, сначала там приближать интеграл суммами Римана, а затем удалять правый конец промежутка интегрирования, но это процесс довольно медленный. Если же несколько раз проинтегрировать по частям, то выделится некоторый блок, который можно посчитать по формулам, а в оставшемся интеграле подынтегральная функция будет иметь высокую скорость убывания, и чтобы его посчитать, точек в сумме Римана можно брать меньше, сразу ограничиться достаточно протяженным конечным промежутком интегрирования, и процесс приведет к результату быстрее.

3.4. Случай нескольких особенностей.

Функция может иметь на промежутке несколько особенностей. Особой может оказаться конечная точка, в любой окрестности которой функция неограниченная, а может бесконечно удаленная точка. При наличии нескольких особенностей каждую из них надо рассматривать отдельно, и если все особенности интегрируемы, то говорят, что интеграл сходится.

Точнее, если функция на промежутке (ω_1, ω_2) имеет в качестве особых только точки ω_1, ω_2, т. е. внутри интервала особенностей нет, то берут какую-либо точку $c \in (\omega_1, \omega_2)$, представляют интеграл как сумму интегралов по получившимся промежуткам:

$$\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)\,dx = \int\limits_{\omega_1}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{\omega_2} f(x)\,dx$$

и исследуют сходимость каждого из получившихся интегралов с одной особенностью. Если особой точкой оказывается внутренняя точка интервала, т. е. функция рассматривается на объединении $[a, \omega) \cup (\omega, b]$, то интеграл по $[a, b]$ разбивают на сумму интегралов по $[a, \omega)$ и $(\omega, b]$, в каждом из которых одна особенность. В любом случае ситуацию приводят к случаю одной особенности и сходимость интеграла означает сходимость всех участвующих в процессе интегралов.

Пример 5. Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}$ имеет три особые точки, это 0, 1 и $+\infty$. Следовательно, надо представить его, например, в виде

$$\int\limits_0^{a} \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)} + \int\limits_a^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)} + \int\limits_1^{b} \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)} + \int\limits_b^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)},$$
$$0 < a < 1 < b < +\infty,$$

и изучать сходимость получившихся несобственных интегралов, в каждом из которых особая точка одна. Кстати, нетрудно показать, что этот интеграл расходится за счет особенности в единице.

Кстати, контрольный вопрос: когда сходится интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$? Слышны ответы: «когда $\alpha > 1$», «когда $\alpha < 1$», и, наконец, «никогда не сходится». А Вы как думаете?

3.5. Сходимость несобственного интеграла в смысле главного значения.

Пусть функция $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ имеет особенность во внутренней точке $c \in (a,b)$. При изучении интеграла в такой ситуации надо разбить промежуток на два, представить интеграл в виде суммы:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx,$$

и исследовать каждый из интегралов отдельно. Если они оба сходятся, то весь интеграл сходится. Однако есть подход, при котором эти интегралы рассматриваются не по-отдельности, а совместно, и иногда в сумме они могут дать сходящийся интеграл, даже если каждый из них расходится.

Говорят, что интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ с одной особой точкой $c \in (a,b)$ *сходится в смысле главного значения*, и используют указанное ниже обозначение, если существует конечный предел

$$v.p. \int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx \right).$$

Например, для интеграла $\int\limits_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$ в смысле главного значения имеем

$$v.p. \int\limits_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int\limits_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\,dx + \int\limits_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x}\,dx \right) = 0,$$

так как оба интеграла в сумме равны по модулю, но имеют противоположные знаки (что очевидно из известного графика гиперболы). Однако в классическом смысле интеграл расходится.

Еще одна ситуация, в которой появляется интеграл в смысле главного значения, это интегрирование по всей числовой прямой. Тогда говорят, что интеграл от функции $f(x)$ понимается *в смысле главного значения*, если рассматривается предел

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx.$$

Например, интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x\, dx$ расходится, но если его рассматривать в смысле главного значения, то он, как нетрудно понять, равен нулю, потому что на каждом симметричном относительно начала координат промежутке интеграл от нечетной функции равен нулю и в пределе получится нуль.

§ 4. Эйлеровы интегралы: Γ-функция и B-функция

Определение 1. Гамма- и бета-функции $\Gamma(\alpha)$ и $\mathrm{B}(\alpha, \beta)$ определяются следующим образом:

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx, \quad \alpha > 0,$$

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\, dt, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

Это так называемые специальные функции в том смысле, что они не выражаются через элементарные. Они встречаются в приложениях, так что неслучайны. Забегая вперед, можно сказать, что гамма-функция — непрерывный аналог факториала, а бета-функция — непрерывный аналог биномиальных коэффициентов. С помощью этих функций много что выражается, и будущим физикам о них полезно знать.

Теорема 14 (о свойствах гамма- и бета-функций).

(1) *Функция* $\Gamma(\alpha)$ *определена при* $\alpha > 0$.

(2) *Имеет место формула понижения*

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha).$$

В частности, для $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\Gamma(n + 1) = n!$$

(по определению полагают $0! = 1$).

(3) *Имеет место формула дополнения*

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

(4) *Функция* $\mathrm{B}(\alpha, \beta)$ *определена при* $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

(5) *Имеет место связь между гамма- и бета-функциями:*

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Доказательство. Докажем утверждения (1), (2) и (4). Остальные доказывать не будем ввиду значительных технических трудностей при их доказательстве.

Шаг 1. (1) Интеграл $\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$ имеет две особенности. Во-первых, это бесконечно удаленная точка, а во-вторых, нуль. В нуле особенность может возникнуть, если показатель степени $\alpha-1$ отрицателен, и тогда подынтегральная функция стремится к бесконечности при $x \to +0$. Подынтегральная функция неотрицательна, значит, надо применять теорему сравнения или мажорантный признак.

Разобьем интеграл на два:

$$\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx = \int\limits_0^c x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx + \int\limits_c^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx, \quad 0 < c < \infty,$$

и исследуем сходимость каждого из них. Начнем с интеграла

$$\int\limits_0^c x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx.$$

При $x \to 0$ имеем $x^{\alpha-1}e^{-x} \sim x^{\alpha-1}$. Действительно,

$$x^{\alpha-1}e^{-x} = x^{\alpha-1}(1 + (e^{-x} - 1)),$$

где $e^{-x} - 1 \to 0$ при $x \to 0$. По признаку сравнения сходимость нашего интеграла имеет место тогда и только тогда, когда есть сходимость интеграла $\int\limits_0^c x^{\alpha-1}\,dx$, а это произойдет, когда $\alpha - 1 > -1$, т. е. при $\alpha > 0$.

Исследуем сходимость интеграла

$$\int\limits_c^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx.$$

Обратим внимание на поведение функции на $[c, +\infty)$. Она представляет собой произведение быстро убывающей экспоненты и степенной функции, которая может доставить какие-то проблемы, если она растет, т. е. при положительном показателе степени. Но по теореме о сравнении показательной и степенной функций предел на бесконечности отношения степенной и показательной функций, если основание у показательной больше 1, равен нулю. Следует ли из равенства нулю такого предела сходимость интеграла? Как известно, нет. Так что хотя у нас $x^{\alpha-1}e^{-x} \to 0$ при $x \to +\infty$, этого недостаточно для сходимости интеграла.

Преобразуем подынтегральное выражение:

$$x^{\alpha-1}e^{-x} = x^{\alpha-1}e^{-x/2}e^{-x/2}.$$

Функция $g(x) = x^{\alpha-1}e^{-x/2}$ ограничена на $[c, +\infty)$ некоторой константой C. Действительно, по определению предела существует такое $\Delta > 0$, что для всех $x > \Delta$ будет $|g(x)| < 1$, поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. А на ограниченном промежутке $[c, \Delta]$ функция $g(x)$ ограничена по теореме Вейерштрасса, и тогда для любого $x \in [c, +\infty)$ выполнена оценка

$$|g(x)| \leqslant C = \max\{1, \sup_{x\in[c,\Delta]} |g(x)|\}.$$

Тогда

$$0 \leqslant x^{\alpha-1}e^{-x} \leqslant Ce^{-x/2},$$

и поскольку интеграл от функции $Ce^{-x/2}$ сходится, по мажорантному признаку и интеграл $\int\limits_c^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$ также сходится.

Утверждение (1) доказано.

Шаг 2. (2) Применим формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha+1) &= \int\limits_0^\infty x^{\alpha+1-1}e^{-x}\,dx \\
&= -\int\limits_0^\infty x^\alpha\,de^{-x} = -x^\alpha e^{-x}\Big|_0^\infty + \int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx^\alpha \\
&= -x^\alpha e^{-x}\Big|_0^\infty + \alpha\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx = \alpha\Gamma(\alpha),
\end{aligned}$$

поскольку первое слагаемое равно нулю. Формула понижения доказана.

Докажем равенство $\Gamma(n+1) = n!$ по индукции. Действительно, для $n = 0$ имеем

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty x^{1-1} e^{-x}\, dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1 = 0!.$$

Предположим, что равенство $\Gamma(n+1) = n!$ верно. Тогда

$$\Gamma(n+2) = \Gamma((n+1)+1) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!,$$

так что формула верна и для $n+1$. Согласно принципу математической индукции формула справедлива для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Шаг 3. (4) Заметим, что интеграл $\int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\, dt$ при некоторых значениях понимается как несобственный. Действительно, если какой-либо из показателей степени отрицателен, то подынтегральная функция становится неограниченной либо в окрестности нуля, либо в окрестности единицы, и тогда соответствующая точка становится особой.

Исследуем сходимость нашего интеграла в окрестности нуля при $\alpha - 1 < 0$, т. е. сходимость интеграла $\int\limits_0^c t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\, dt$, где c — какая-то фиксированная точка интервала $(0, 1)$. Выделим главную часть подынтегральной функции в окрестности нуля:

$$t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} \sim t^{\alpha-1}, \quad t \to 0,$$

а интеграл $\int\limits_0^c t^{\alpha-1}\, dt$ сходится при $\alpha - 1 > -1$, т. е. при $\alpha > 0$. По теореме сравнения и интеграл $\int\limits_0^c t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\, dt$ сходится при $\alpha > 0$.

Аналогично можно доказать, что интеграл $\int\limits_c^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\, dt$ сходится при $\beta > 0$, и в итоге весь интеграл $\int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\, dt$ сходится при $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Теорема доказана.

Замечание (свойства функции $\Gamma(\alpha)$). Легко найти, что $\Gamma(1) = 1$, а по формуле понижения и $\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$. Гамма-функция имеет производные любого порядка, иначе говоря, она бесконечно дифференцируема. Обоснование этого факта будет дано позже, в другом разделе, здесь можно воспользоваться тем, что вторая производная, равная

$$\Gamma''(\alpha) = \int\limits_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} \ln^2 x \, dx,$$

положительна, так что гамма-функция выпукла и где-то между единицей и двойкой у нее есть минимум. При стремлении аргумента к нулю она ведет себя как функция $\dfrac{1}{\alpha}$. Это следует из формулы понижения $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$. В самом деле, записав последнее равенство так:

$$\Gamma(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\Gamma(\alpha+1),$$

заметим, что при $\alpha \to +0$ значения $\alpha + 1$ близки к 1, а для них значения $\Gamma(\alpha+1)$ также близки к 1. Следовательно, вблизи нуля гамма-функция имеет вертикальную асимптоту.

При удалении аргумента в бесконечность гамма-функция очень быстро возрастает, что видно по ее значениям в точках $n \in \mathbb{N}$. Можно также сказать, что она возрастает быстрее чем e^α, т. е.

$$\frac{e^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \to 0 \quad \text{при } \alpha \to \infty.$$

Возникает естественный вопрос: насколько она растет быстрее экспоненты? Укажем взаимоотношение между гамма-функций и экспонентой для натуральных значений аргумента.

Замечание (формула Стирлинга). Имеет место *формула Стирлинга*

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta(n)}{12}},$$

где $\theta(n)$ — некоторое число такое, что $0 < \theta(n) < 1$. При использовании формулы Стирлинга можно использовать основную часть в правой части, а именно выражение $\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$, опуская множитель $e^{\frac{\theta(n)}{12}}$, поскольку он расположен между 1 и $e^{\frac{1}{12}}$ и влияния на асимптотику не оказывает. Ясно, что корень $\sqrt{2\pi n}$ большого роста не дает, основной рост — в выражении $\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

На практике пользуются асимптотикой для $n! = \Gamma(n+1)$, хотя асимптотика верна и для непрерывного изменения аргумента.

Зачем гамма-функция студентам-физикам? Одно из приложений — нахождение интегралов.

Пример 1. Найдем интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$, называемый *интегралом Эйлера — Пуассона* или *интегралом Гаусса*. Функция e^{-x^2} четная, стало быть, можно ограничиться интегрированием по промежутку $[0,\infty)$, удваивая получаемый результат. Сделаем замену переменной $x^2 = y$, $x = \sqrt{y}$, $dx = \dfrac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\,dy$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \int\limits_{0}^{\infty} y^{-\frac{1}{2}}e^{-y}\,dy = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Осталось найти $\Gamma(1/2)$. По формуле дополнения имеем

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi,$$

откуда

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

В итоге получили, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Пример 2. Найдем интеграл $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^{\alpha} x \cos^{\beta} x\,dx$. Обратим внимание на то, что мы ищем определенные интегралы на вполне конкретных промежутках, и если взять другие пределы интегрирования, то предлагаемые средства для их нахождения не работают. Так что надо обращать внимание на пределы интегрирования.

Если α и β — небольшие натуральные числа, то этот интеграл можно найти элементарными средствами. Но если натуральная степень большая, то трудоемкость при таком нахождении велика и найти его нереально. Если степень не натуральная, то элементарные средства могут и не сработать, а свести его к бета-функции можно всегда и впоследствии разбираться уже с гамма- и бета-функциями.

Сделаем замену, полагая $\sin^2 x = t$. Тогда $\cos^2 x = 1 - t$, и, продифференцировав характеризующее замену равенство, имеем $2\sin x \cos x \, dx = dt$. Перейдем к новой переменной:

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{\pi/2} \sin^\alpha x \cos^\beta x \, dx =& \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{\alpha-1} x \cos^{\beta-1} x \cdot (2\sin x \cos x) \, dx \\ =& \frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{\frac{\alpha-1}{2}}(1-t)^{\frac{\beta-1}{2}} \, dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{\frac{\alpha+1}{2}-1}(1-t)^{\frac{\beta+1}{2}-1} \, dt \\ =& \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}\right).\end{aligned}$$

В принципе, на этом результате можно остановиться, а можно продолжить преобразования, выражая результат через гамма-функцию и пользуясь связью между ними, и прийти к такому результату:

$$\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\big(\frac{\alpha+1}{2}\big)\Gamma\big(\frac{\beta+1}{2}\big)}{\Gamma\big(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\big)}.$$

В частном случае, когда α, β натуральные, можно воспользоваться формулами понижения и прийти либо к натуральному числу, либо к результату с участием $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

§ 5. Примеры и приложения

Интеграл используется для нахождения площадей, длин, объемов, масс и т. п. Начнем с самого простого, с того, с чего начинается сам интеграл.

5.1. Площадь подграфика.

Пусть функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна и неотрицательна. Тогда площадь подграфика

$$F = \{(x, y) \mid x \in [a, b], \ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\},$$

представляющего собой криволинейную трапецию, находится по формуле

$$S(F) = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Это получается из наших интуитивных представлений о площади и происходит следующим образом (см. рис. 1.1 в § 1). Зададим какое-нибудь разбиение $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1} = b$ и точки $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \ldots, n$. Интуитивно ясно, что площадь фигуры, составленной из прямоугольников, близка к площади, которую хотим определить и найти. При неограниченном уменьшении максимальной из длин промежутков разбиения площади объединения прямоугольников все лучше и лучше приближают площадь подграфика. Мы не даем строгого определения площади, а лишь опираемся на интуитивные соображения, что площадь объединения прямоугольников неограниченно приближается к площади подграфика.

Таким образом, собирая площади прямоугольников и измельчая разбиение, получаем, что, с одной стороны, суммы стремятся к интегралу, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \to \int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

а с другой эти суммы стремятся к площади подграфика, и мы договариваемся, что площадь подграфика равна указанному интегралу, т. е.

$$S(F) = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

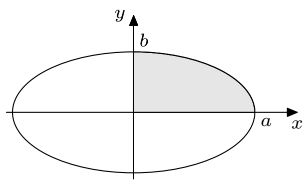

Рис. 5.1.

Пример (площадь эллипса). Найдем площадь фигуры (рис. 5.1)

$$F = \left\{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1,\ a > 0,\ b > 0\right\}.$$

Из симметричности фигуры ясно, что достаточно найти площадь той ее части, где $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, и результат умножить на 4. А такая фигура уже представляет собой подграфик функции

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Имеем

$$S(F) = 4\int\limits_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx$$

(положим $x = a\sin t$, тогда $dx = a\cos t$, $t = 0$ переходит в $x = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$ переходит в $x = a$)

$$= 4ab\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = 4ab\cdot\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right) = 2ab\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)} = \pi ab.$$

5.2. Площадь фигуры, ограниченной кривой в полярных координатах.

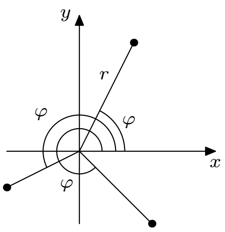

Рис. 5.2.

Сначала коротко обсудим суть полярных координат. Точки плоскости можно описывать при помощи *полярных координат*, т. е. расстояния r от начала координат до данной точки и углом φ между положительным направлением оси абсцисс и лучом, идущим из начала координат через данную точку (рис. 5.2). Связь полярных координат с декартовыми задается равенствами

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Можно дать выражения и для обратного отображения. С расстоянием r достаточно ясно, а именно $r = \sqrt{x^2+y^2}$, а с углом хитрее, ибо важно, в каком квадранте плоскости расположена точка. Так, если она в первом квадранте, то $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, в остальных надо добавлять соответствующий сдвиг.

При обращении к полярным координатам надо внимательно относиться к точке $(0,0)$, иногда ее присутствие критично, иногда нет, это зависит от рассматриваемых задач. Во всяком случае в ней теряется однозначность, и это надо принимать во внимание.

Обратимся теперь к содержанию нашего вопроса. Пусть задана функция $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$, которая непрерывна, неотрицательна и $f(0) = f(2\pi)$. Эта функция каждому углу φ сопоставляет расстояние от начала координат до точки на луче, соответствующем углу φ. Получается некоторая замкнутая кривая, как на рис. 5.3, состоящая из точек с полярными координатами $(f(\varphi),\varphi)$. Найдем площадь фигуры

$$F = \{(x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \mid \varphi\in[0,2\pi],\ 0\leqslant r\leqslant f(\varphi)\}.$$

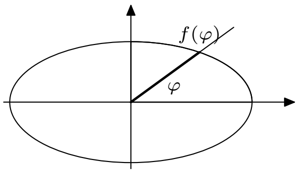

Рис. 5.3.

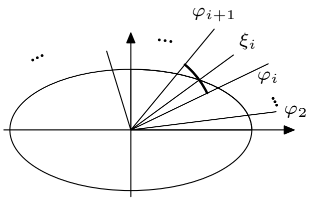

Рис. 5.4.

Разобьем промежуток $[0, 2\pi]$ точками $0 = \varphi_1 < \cdots < \varphi_{n+1} = 2\pi$ на отрезки. В полярных координатах это соответствует разбиению фигуры на секторы (рис. 5.4). В каждом из участков разбиения выберем по точке: $\xi_i \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}]$, $i = 1, \ldots, n$. Ясно, что площадь, ограниченная круговым сектором с центром в начале координат и радиусом ξ_i, будет близка к площади сектора нашей фигуры, и чем мельче будут исходные секторы, тем лучше приближение. Стало быть, сумма площадей круговых секторов приближает площадь фигуры. При измельчении качество приближения улучшается.

Площадь одного кругового сектора радиусом $f(\xi_i)$, находится как часть площади круга, соответствующая доле $\Delta\varphi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i$ угла этого сектора относительно полного угла 2π. Стало быть, сумма площадей равна

$$\sum_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i) \frac{\Delta\varphi_i}{2\pi},$$

и по определению интеграла

$$\sum_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i) \frac{\Delta\varphi_i}{2\pi} \to \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} f^2(\varphi)\, d\varphi \quad \text{при } \max \Delta\varphi_i \to 0.$$

С другой стороны, эта же сумма согласно нашим интуитивным представлениям стремится к площади фигуры, ограниченной данной кривой. Тем самым

$$S(F) = \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} f^2(\varphi)\, d\varphi.$$

5.3. Масса и центр тяжести стержня.

Пусть функция $\rho : [0, l] \to \mathbb{R}$ непрерывна и положительна. Пусть ρ задает линейную плотность стержня длиной l. Считаем, что в поперечном сечении стержень однороден. Расположим его вдоль координатной прямой так, что его левый конец совпадет с началом координат, а правый соответствует точке l.

Как найти массу стержня? Как и выше, разбиваем отрезок на промежутки $[x_i, x_{i+1}]$, считаем, что длина каждого из отрезков небольшая, плотность в пределах такого отрезка меняется мало и можно считать ее приближенно равной значению функции ρ в некоторой точке $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. При измельчении разбиения точность приближения будет возрастать. Масса стержня на каждом из отрезков разбиения приближенно равна произведению $\rho(\xi_i)\Delta x_i$. Сложив массы всех таких отрезков, получим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)\Delta x_i,$$

приближающую массу всего стержня. Устремляя к нулю максимальную из длин промежутков разбиения, в пределе, с одной стороны, получаем интеграл

$$\int\limits_0^l \rho(x)\, dx,$$

а с другой согласно нашим интуитивным представлениям — массу стержня. Тем самым масса стержня выражается указанным интегралом.

Перейдем к нахождению центра масс. Фиксируем в пределах стержня точку $c \in [0, l]$. Пусть стержень лежит горизонтально в однородном вертикальном гравитационном поле с ускорением g, т. е. на каждую точку действует сила тяжести. Найдем момент силы тяжести относительно точки c. Это делается так же, как при нахождении массы: отрезок $[0, l]$ разбиваем на небольшие куски, выбираем точки $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \ldots, n$, и считаем момент силы для каждого из кусков, предполагая, что часть стержня вдоль отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ однородна. На выбранную часть стержня действует сила тяжести, равная произведению массы на ускорение, т. е. $\rho(\xi_i)\Delta x_i g$. При подсчете момента силы надо выбрать направление относительно точки c. Будем считать, что для точек, расположенных справа от точки c, направление положительно, а слева — отрицательно. Посчитаем моменты всех кусочков:

$$\sum_{i=1}^{n} g\rho(\xi_i)\Delta x_i(\xi_i - c),$$

где $\xi_i - c$ — плечо силы. Получили интегральную сумму Римана, которая по определению при устремлении к нулю максимальной из длин промежутков разбиения в пределе даст интеграл

$$g\int\limits_0^l \rho(x)(x-c)\,dx,$$

а с другой стороны, эта же сумма стремится к моменту M.

Естественно появляется вопрос: как найти такую точку c, относительно которой момент нулевой? Она и является центром тяжести. Ясно, что надо приравнять к нулю интеграл, выражающий момент инерции. Получаем уравнение

$$\int\limits_0^l \rho(x)(x-c)\,dx = 0.$$

Воспользовавшись линейностью интеграла и разбивая его на два интеграла, а затем выражая c, получим формулу

$$c = \frac{\int\limits_0^l \rho(x)x\,dx}{\int\limits_0^l \rho(x)\,dx}$$

для координаты центра тяжести.

Интеграл

$$\int\limits_0^l \rho(x)\,dx$$

называют *нулевым моментом*, так как в нем множитель x отсутствует или, можно сказать, присутствует в нулевой степени. Интеграл

$$\int\limits_0^l \rho(x)x\,dx$$

называют *первым моментом*, потому что добавляется множитель x в первой степени. Можно определить второй момент, третий и т. д., но обычно ограничиваются вторым моментом. Так что масса — это нулевой момент, а центр тяжести — отношение первого момента к нулевому.

5.4. Объем тела вращения.

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — неотрицательная непрерывная функция, а тело B получается вращением графика f вокруг оси Ox, т. е.

$$B = \{(x, y, z) \mid x \in [a, b],\ 0 \leqslant y^2 + z^2 \leqslant f^2(x)\}.$$

Изобразим такое тело (рис. 5.5). Надо найти объем тела B.

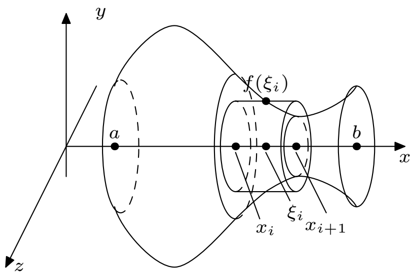

Рис. 5.5.

Поступаем, как обычно: берем разбиение $a = x_1 < \cdots < x_{n+1} = b$ отрезка $[a, b]$. Для тела B это означает, что мы разрезаем его на части плоскостями $x = x_i$, $i = 1, \ldots, n$, параллельными плоскости yOz и проходящими через точки разбиения. Изобразим одну из получающихся при этом фигур (см. рис. 5.5). Возьмем какую-либо точку $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ и рассмотрим цилиндр с основанием, радиус которого $f(\xi_i)$. Объем части тела между x_i и x_{i+1} приближенно равен объему соответствующего цилиндра. Сложив объемы всех таких цилиндров, придем к приближению объема всего тела: $\sum\limits_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i$. Получилась сумма Римана, которая при стремлении к нулю максимальной из длин промежутков разбиения, с одной стороны, стремится к интегралу $\pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx$, а с другой стороны, на основании интуитивных представлений, — к объему $V(B)$ тела B. Тем самым для объема тела вращения получается формула

$$V(B) = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,dx.$$

Пример (объем шара). Найдем объем шара радиусом R, т. е. тела

$$B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2\}.$$

Ясно, что это тело получается в результате вращения графика функции

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

вокруг оси Ox.

Объем шара согласно формуле для объема тела вращения равен

$$V(B) = \pi \int\limits_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\, dx = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

5.5. Длина кривой.

(*Параметризованной*) *кривой в* $\mathbb{R}^3$ называют множество точек

$$\gamma = \{(x(t), y(t), z(t)) \mid t \in [a, b]\},$$

где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — непрерывные функции, а отображение $\varphi : t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, взаимно однозначно. Это отображение называют *параметризацией кривой*, а функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — *компонентами параметризации*. Всегда будем предполагать, что компоненты дифференцируемы и их производные непрерывны. Это предположение позволяет получать вектор скорости в каждый момент t. Производные $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ характеризуют скорость изменения соответствующих координат и вместе они составляют *вектор мгновенной скорости* $v(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.

Наша задача — найти длину этой кривой. Покажем, что длина кривой находится по формуле

$$l(\gamma) = \int\limits_{a}^{b} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt.$$

Если кривая плоская, то последняя компонента отсутствует. Легко заметить, что под интегралом стоит длина вектора скорости.

Поясним записанную формулу. Разобьем, как обычно, весь промежуток изменения времени на промежутки точками $a = t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+1} = b$. Если длины промежутков разбиения малы, то на каждом из промежутков можно считать скорость постоянной во всех его точках. Пусть на промежутке $[t_i, t_{i+1}]$ скорость равна $|v(\tau_i)|$, где

τ_i — некоторая точка из $[t_i, t_{i+1}]$. Тогда длина пути, соответствующего промежутку $[t_i, t_{i+1}]$, приближенно равна $|v(\tau_i)|\Delta t_i$. Как обычно, просуммировав длины на всех промежутках разбиения, получим сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} |v(\tau_i)|\Delta t_i$ и, с одной стороны, она стремится к интегралу $\int\limits_a^b |v(\tau_i)|\, dt$ при стремлении к нулю максимальной из длин промежутков разбиения, а с другой, исходя из интуитивных представлений, — к длине кривой. Если расписать длину кривой через координаты, придем к записанной выше формуле.

Возникает вопрос: кривая на самом деле — это множество точек в $\mathbb{R}^3$, но задаем мы его при помощи параметризации, т. е. указываем закон прохождения по кривой. Ясно, что по той же кривой можно пройти по иному закону движения, с другой скоростью. Есть много параметризаций одной и той же кривой, они получаются одна из другой заменой переменной, т. е. заменой времени. Длина кривой была нами определена с использованием параметризации. Имея две параметризации и находя с их помощью длину кривой, мы получим один результат или могут быть разные? Иначе говоря, зависит длина кривой от выбранной параметризации или нет? Не должна, и это можно доказать.

Теорема 15 (о длине кривой). *Пусть* $(x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, *и* $(\xi(\tau), \eta(\tau), \zeta(\tau))$, $\tau \in [\alpha, \beta]$, *— две параметризации одной и той же кривой* γ. *Пусть эти параметризации связаны следующим образом:*

$$x(t) = \xi(\tau(t)), \quad y(t) = \eta(\tau(t)), \quad z(t) = \zeta(\tau(t))$$

и

$$\xi(\tau) = x(t(\tau)), \quad \eta(\tau) = y(t(\tau)), \quad \zeta(\tau) = z(t(\tau)),$$

где функции $t(\tau)$ *и* $\tau(t)$, *связывающие времена* t *и* τ, *дифференцируемы и их производные непрерывны.*

Тогда

$$\int\limits_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(\xi'(\tau))^2 + (\eta'(\tau))^2 + (\zeta'(\tau))^2}\, d\tau.$$

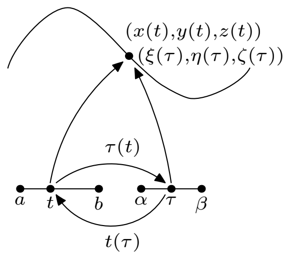

Рис. 5.6.

Замечание. Поясним замену времени на рисунке (рис. 5.6). Изобразим кривую и отдельно два промежутка $[a, b]$ и $[\alpha, \beta]$. Пусть в момент $t \in [a, b]$ мы попадаем в точку $(x(t), y(t), z(t))$ кривой. В эту же точку мы попадем и в некоторый момент τ промежутка $[\alpha, \beta]$. Ясно, что поднявшись в момент t на кривую и пройдя в обратном направлении по стрелке, идущей из промежутка $[\alpha, \beta]$, получим отображение $\tau(t)$, которое каждому $t \in [a, b]$ взаимно однозначно сопоставляет некоторое $\tau \in [\alpha, \beta]$. Есть и обратное отображение $t(\tau)$. Возникает пересчет времени. Мы предполагаем, что функции $\tau(t)$ и $t(\tau)$ не только взаимно обратные, но также дифференцируемы и имеют отличные от нуля производные. Такое будет, если движение осуществляется плавно и без остановок.

Доказательство. Для простоты доказательства предположим, что в обеих параметризациях движение происходит в одну и ту же сторону, т. е. большему времени в одной параметризации соответствует большее время в другой. Это предположение в терминах функций $\tau(t)$ и $t(\tau)$ означает их возрастание. Начнем считать один из интегралов и придем ко второму, выполнив замену переменных $t = t(\tau)$ и заметив при этом, что $dt = t'(\tau)\,d\tau$ и $a = t(\alpha)$, $b = t(\beta)$. Пользуясь формулой замены переменной, получаем

$$\int\limits_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t(\tau)))^2 + (y'(t(\tau)))^2 + (z'(t(\tau)))^2} \cdot t'(\tau)\,d\tau$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t(\tau))t'(\tau))^2 + (y'(t(\tau))t'(\tau))^2 + (z'(t(\tau))t'(\tau))^2}\,d\tau$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{d}{d\tau}x(t(\tau))\right)^2 + \left(\frac{d}{d\tau}y(t(\tau))\right)^2 + \left(\frac{d}{d\tau}z(t(\tau))\right)^2}\,d\tau$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(\xi'(\tau))^2 + ((\eta'(\tau))^2 + ((\zeta'(\tau))^2}\,d\tau.$$

Теорема доказана.

Замечание. Если отображения между t и τ убывают, то в процессе доказательства изменится следующее. Во-первых, поменяются пределы интегрирования, а во-вторых, производная функции $t'(\tau)$ будет отрицательна, и эти два обстоятельства приведут к сохранению знака.

Пример (длина графика функции). Если кривая γ является графиком функции f, т. е.

$$\gamma = \{(x, f(x)) \mid x \in [a, b]\},$$

то параметризация — это отображение $x \mapsto (x, f(x))$ и длина такой кривой находится по формуле

$$l(\gamma) = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Пример (длина дуги эллипса). Найдем четверть длины эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ a > 0,\ b > 0.$$

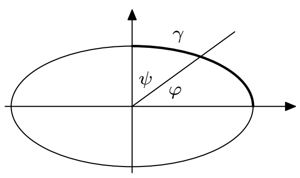

Рис. 5.7.

Можно параметризовать эту кривую как график функции, а можно с помощью угла. В качестве параметра можно взять угол φ между положительным направлением оси абсцисс и идущим через данную точку лучом, а можно с помощью угла ψ между положительным направлением оси ординат и этим лучом (рис. 5.7). Эти параметризации задаются формулами

$$\begin{aligned} x &= a\cos\varphi = a\sin\psi, \\ y &= b\sin\varphi = b\cos\psi. \end{aligned}$$

Будем использовать параметризацию с помощью угла ψ. Согласно формуле для длины кривой имеем

$$l(\gamma) = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\cos^2\psi + b^2\sin^2\psi}\, d\psi.$$

Если a и b равны, под интегралом оказывается константа и он легко находится. Для различных a и b так не получается. Предполагая, что $a > b$, преобразуем выражение под корнем так, чтобы там остался синус:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\cos^2\psi + b^2\sin^2\psi}\,d\psi = a\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2\psi + \frac{b^2}{a^2}\sin^2\psi}\,d\psi$$

$$= a\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2\psi}\,d\psi = a\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi,$$

где $k^2 = \dfrac{a^2-b^2}{a^2}$ — квадрат эксцентриситета эллипса, показывающий его вытянутость.

Тем самым длина дуги эллипса является функцией от величины большей полуоси и эксцентриситета. Чтобы найти длину численно, надо посчитать интеграл. Однако оказывается, что этот интеграл как функция от k в элементарных функциях не выражается. Как обычно, в тех случаях, когда полезный интеграл в элементарных функциях не выражается, для него придумывают название и дают обозначение. Функцию

$$E(k) = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi$$

называют (*полным*) *эллиптическим интегралом второго рода в форме Лагранжа.* Такое длинное название намекает на то, что эллиптических интегралов по крайней мере два и эти эллиптические интегралы можно записывать в разных видах.

Глава 4. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

§ 1. Определение и основные свойства ряда

Определение числового ряда. Пусть x_n — числовая последовательность. Формальную запись $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ называют *числовым рядом*. Сумму $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ называют *n-й частичной суммой ряда*, а элементы последовательности x_n, из которой формируется ряд, — *общим членом ряда*. Если последовательность частичных сумм S_n имеет конечный предел, то говорят, что *ряд сходится*, а сам предел называют *суммой ряда* и обозначают тем же символом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$. Иначе говоря, ряд — это последовательность плюс указание нашего желания найти сумму всех ее членов.

Определение ряда — это, по существу, еще один предельный переход. Заметим, что ряд, с одной стороны, похож на последовательность, ибо сумма ряда определяется как предел соответствующей последовательности. С другой стороны, ряд похож на несобственный интеграл. Поэтому результаты, касающиеся рядов, будут похожи на результаты либо для последовательностей, либо для несобственных интегралов. Утверждений, специфических для рядов, будет немного.

Теорема 1 (критерий Коши сходимости ряда). *Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится тогда и только тогда, когда выполнено условие Коши*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m, n \geqslant n_0 \ (m > n) \quad \left| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Вспомним критерий Коши для последовательностей и применим его к последовательности частичных сумм: последовательность S_n сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m, n \geqslant n_0 \ (m > n) \quad |S_m - S_n| < \varepsilon.$$

Остается заметить, что

$$|S_m - S_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} x_k\right|.$$

Теорема доказана.

Теорема 2 (необходимое условие сходимости ряда). *Если ряд сходится, то предел его общего члена равен нулю.*

Доказательство. Если ряд сходится, то для него выполнено условие Коши, применяя которое к двум соседним номерам $n-1$ и n, в частности, имеем

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0 \quad |x_n| = |S_n - S_{n-1}| < \varepsilon,$$

а это и означает, что $\lim x_n = 0$.

Теорема доказана.

Замечание (о сравнении с несобственным интегралом). Ответим на такой вопрос: если несобственный интеграл на промежутке $[a, +\infty)$ сходится, то должна ли подынтегральная функция стремиться к нулю? Оказывается, что необязательно. Это ясно с геометрической точки зрения и нетрудно подтвердить аналитически. Дело в том, что интеграл, например, от положительной функции, ассоциируется с площадью ее подграфика, которая, в свою очередь, может быть сделана конечной не только за счет малой высоты, т. е. значений функции, но и за счет узости тех промежутков, на которых она поднимается вверх. Нетрудно понять, что, взяв весьма малый по длине промежуток из области интегрирования, мы можем поднять значения функции на нем довольно высоко, при этом согласовав длину и высоту так, чтобы площадь соответствующего кусочка подграфика была малой, настолько, что сумма всех таких площадей оказалась бы конечной.

Утверждение теоремы 2 показывает, что для рядов такое невозможно, и ясно, по какой причине — для рядов ширина полоски, над которой берется соответствующее значение x_n последовательности, всегда равна единице, и сходимость может быть только в случае, когда формирующая ряд последовательность стремится к нулю.

Определение абсолютной и условной сходимостей. Говорят, что *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *сходится абсолютно*, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|$, составленный из модулей его членов. Если ряд сходится, но не абсолютно, его называют *условно сходящимся.*

Это определение подчеркивает, что причиной сходимости ряда может оказаться быстрое стремление к нулю его общего члена, а может сработать эффект сложения членов с разными знаками, при котором вклад в сумму ряда положительных членов компенсируется вкладом отрицательных.

Теорема 3 (о сходимости абсолютно сходящегося ряда). *Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.*

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|$ сходится. Тогда согласно критерию Коши

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \ \exists n_1 \in \mathbb{N} \ \forall m, n \geqslant n_1 \ (m > n) \quad \sum_{k=n+1}^{m} |x_n| < \varepsilon_1. \tag{$*$}$$

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Возьмем в утверждении $(*)$ $\varepsilon_1 = \varepsilon$ и примем $n_0 = n_1$. Тогда для любых $m, n \geqslant n_0$, $m > n$, по неравенству треугольника имеем

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} x_n \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} |x_n| < \varepsilon.$$

Стало быть, для исходного ряда выполнено условие Коши и согласно критерию Коши он сходится.

Теорема доказана.

§ 2. Абсолютная сходимость

Теорема 4 (мажорантный признак и теорема сравнения). *Пусть* $x_n \geqslant 0$ *и* $y_n \geqslant 0$.

(1) (мажорантный признак). *Если начиная с некоторого номера имеет место неравенство* $0 \leqslant x_n \leqslant y_n$, *то сходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ *влечет сходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.

(2) (теорема сравнения). *Если* $x_n \sim y_n$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$.

Доказательство. (1) Воспользуемся критерием Коши.
Дано:

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_1 \quad 0 \leqslant x_n \leqslant y_n, \tag{$*$}$$

$$\forall \varepsilon_2 > 0\ \exists n_2 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geqslant n_2\ (m > n) \quad \sum_{k=n+1}^{m} y_k < \varepsilon_2. \tag{$\dagger$}$$

Надо:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geqslant n_0\ (m > n) \quad \sum_{k=n+1}^{m} x_k < \varepsilon. \tag{$\ddagger$}$$

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Согласно $(*)$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall m > n \geqslant n_1 \quad \sum_{k=n+1}^{m} x_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} y_k.$$

Ориентируясь на $(\dagger)$, возьмем $\varepsilon_2 = \varepsilon$ и по нему найдем номер n_2. В качестве требуемого в $(\ddagger)$ номера возьмем $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Из $(*)$ и $(\dagger)$ следует, что n_0 удовлетворяет требованиям в $(\ddagger)$.

(2) По определению сравнение $x_n \sim y_n$ означает, что

$$x_n = y_n(1 + \alpha_n), \quad \text{где } \alpha_n \to 0.$$

Стало быть, существует номер n_0 такой, что для любого $n \geqslant n_0$ выполнено неравенство $|\alpha_n| < \dfrac{1}{2}$. Для таких номеров n имеем $1+\alpha_n > \dfrac{1}{2}$. Стало быть,

$$x_n > \frac{1}{2} y_n, \quad n \geqslant n_0.$$

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится, то ряд $2\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ также сходится, а тогда и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ сходится по мажорантному признаку. Поскольку ситуация с эквивалентностью симметрична, можно поменять ряды местами и получить утверждение в обратную сторону.

Теорема доказана.

Для рядов есть несколько специфических признаков сходимости, не имеющих аналогов для несобственных интегралов. Они основаны на получении сходимости какого-то ряда путем сравнения его с одним из более просто устроенных рядов.

Докажем еще один полезный признак, затем, используя его, установим сходимость некоторых эталонных рядов, и с ними впоследствии другие ряды будем сравнивать.

Теорема 5 (интегральный признак сходимости). *Пусть функция* $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ *неотрицательна, невозрастающая и интегрируема на каждом промежутке* $[1,b]\subset[1,+\infty)$.

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ *сходится в том и только в том случае, если интеграл* $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ *сходится.*

Доказательство. Введем функцию $F(b)=\int\limits_1^b f(x)\,dx$ и последовательность частичных сумм $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$.

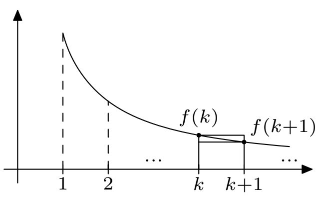

Рис. 1.1.

Заметим, что F неубывающая ввиду неотрицательности функции f. Рассмотрим промежуток $[k,k+1]$ (рис. 1.1). Ясно, что подграфик функции f на этом промежутке содержит прямоугольник высотой $f(k{+}1)$ и содержится в прямоугольнике высотой $f(k)$. Сопоставляя интегралы от функции f и от постоянных функций, равных $f(k)$ и $f(k{+}1)$, по промежутку $[k,k+1]$, или, что то же, сравнивая соответствующие площади, видим, что

$$f(k+1)\leqslant\int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx\leqslant f(k).$$

Просуммируем все такие оценки по промежуткам вида $[k,k+1]$, $k=$

$1, \ldots, n$:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leqslant \int\limits_{1}^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

или, иначе,

$$S_{n+1} - S_1 \leqslant F(n+1) \leqslant S_n.$$

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится. Тогда последовательность S_n имеет конечный предел, стало быть, она ограничена сверху некоторой константой. А тогда и последовательность значений $F(n+1)$ функции F в целочисленных точках ограничена сверху той же константой. Ввиду монотонности функции F она ограничена всюду той же константой. Следовательно, функция F как неубывающая и ограниченная сверху имеет конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b)$, а это и означает сходимость несобственного интеграла $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)\,dx$.

Пусть сходится интеграл $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)\,dx$. Тогда существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b)$. Функция F непрерывна и имеет на бесконечности конечный предел, следовательно, она ограничена. Но тогда и последовательность S_n ограничена. Кроме того, она монотонна, так как является последовательностью частичных сумм ряда с неотрицательными членами, и тем самым имеет конечный предел, а это и означает сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Теорема доказана.

Теорема 6 (о сходимости эталонных рядов). (1) *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ *сходится тогда и только тогда, когда* $|q| < 1$.

(2) *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ *сходится тогда и только тогда, когда* $\alpha > 1$.

(3) *Ряд* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln^\alpha n}$ *сходится тогда и только тогда, когда* $\alpha > 1$.

Доказательство. (1) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|q|^n$ согласно интегральному признаку сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int\limits_1^{\infty}|q|^x\,dx$. Под интегралом стоит показательная функция, и интеграл от нее сходится в том и только в том случае, если $|q|<1$ согласно теореме 11 об интегрировании основных особенностей применительно к $|q|=e^{-\alpha}$. Далее, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|q|^n$ сходится, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n$ также сходится. Осталось заметить, что если $q\leqslant -1$, то общий член последнего ряда не стремится к нулю, а тогда ряд расходится, ибо не выполнено необходимое условие его сходимости.

(2) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int\limits_1^{\infty}\dfrac{1}{x^\alpha}\,dx$, а этот интеграл сходится при $\alpha>1$.

(3) Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^\alpha n}$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int\limits_2^{\infty}\dfrac{1}{x\ln^\alpha x}\,dx$. Заметив, что

$$\int\limits_2^{\infty}\frac{1}{x\ln^\alpha x}\,dx=\int\limits_2^{\infty}\frac{1}{\ln^\alpha x}\,d\ln x=\int\limits_{\ln 2}^{\infty}\frac{dy}{y^\alpha},$$

находим, что последний интеграл, а с ним и изучаемый, сходится при $\alpha>1$.

Теорема доказана.

Замечание 1. Зачем может понадобиться ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^\alpha n}$? Если в ряде $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}$ окажется $\alpha=1$, т. е. получается гармонический ряд, то он расходится. Возникает вопрос: сколько надо добавить в знаменателе, чтобы ряд стал сходящимся? Можно сколько-то повысить степень, но на самом деле можно добавить множитель в виде логарифма в степени, большей единицы. Кроме того, этот ряд используется в доказательстве некоторых признаков сходимости, на которых мы, впрочем, останавливаться не будем.

Замечание 2 (о гармоническом ряде). Гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, и это надо хорошо помнить. Название ряда связано с тем, что для последовательности $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ каждый член является средним гармоническим своих соседей. Наконец, у этого ряда есть хорошая физическая иллюстрация его расходимости.

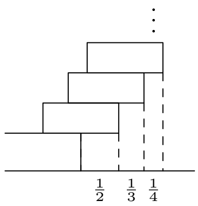

Рис. 1.2.

Представьте себе, что выкладывается карниз из кирпичей. Можно положить первый кирпич на подставку так, чтобы за пределами подставки была половина кирпича (рис. 1.2). Следующий кирпич можно положить на первый так, чтобы вся конструкция не упала, выдвинув его на треть. Следующий кирпич можно выдвинуть на четвертую часть, следующий — на пятую, и т. д. Тем самым выступающие части кирпичей образуют гармонический ряд. Получается, что расстояние, на которое можно продлить карниз за пределы стены, равно частичной сумме гармонического ряда, а ввиду расходимости такого ряда оказывается, что выдвинуть карниз можно на любую длину и он при этом не упадет.

Следующие результаты специфичны для рядов, т. е. нет их аналогов для последовательностей и несобственных интегралов.

Теорема 7 (признак Коши сходимости ряда). *Рассмотрим ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *с* $x_n \geqslant 0$. *Предположим, что существует предел*

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}.$$

Тогда

(1) *если* $r < 1$, *то ряд сходится;*
(2) *если* $r > 1$, *то ряд расходится;*
(3) *если* $r = 1$, *то ряд может сходиться, а может расходиться.*

Доказательство. (1) Пусть $r < 1$. Возьмем такое число q, что $r < q < 1$. Тогда по определению предела найдется такой номер n_0, что $\sqrt[n]{x_n} < q$ для любого $n \geqslant n_0$, или, иначе, $0 \leqslant x_n < q^n$. Поскольку $0 < q < 1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится. Стало быть, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится по мажорантному признаку.

(2) Пусть $r > 1$. Тогда по определению предела существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $\sqrt[n]{x_n} > 1$ для любого $n \geqslant n_0$, или, что то же, $x_n > 1$. Стало быть, нет сходимости к нулю общего члена ряда и не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

(3) Приведем два ряда, у которых $r = 1$, но один из них сходится, а другой расходится. Действительно, легко проверить, что $r = 1$ для рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, тогда как первый ряд расходится, а второй сходится.

Теорема доказана.

Выполнение условия $r = 1$ в теореме 7 говорит о том, что в случае этот признак недостаточно чувствителен для определения сходимости или расходимости исследуемого ряда. Это происходит по той причине, что признак Коши основан на сравнении с довольно быстро сходящимся рядом, а именно с геометрической прогрессией, и оказывается слишком грубым для не столь быстро сходящихся рядов.

В следующем признаке за основу берется, как и в признаке Коши, сравнение с геометрической прогрессией, но признак выражается не в терминах корня степени n, а в терминах отношения двух соседних членов ряда.

Теорема 8 (признак Даламбера сходимости ряда). *Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ с $x_n > 0$. Предположим, что существует предел*

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

(1) *если $\alpha < 1$, то ряд сходится,*
(2) *если $\alpha > 1$, то ряд расходится,*
(3) *если $\alpha = 1$, то ряд может сходиться, а может расходиться.*

Доказательство. (1) Пусть $\alpha < 1$. Возьмем такое число q, что $\alpha < q < 1$. По определению предела существует такое n_0, что

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < q \qquad (*)$$

для любого $n \geqslant n_0$. Перемножим все неравенства $(*)$, начиная с n_0 и заканчивая некоторым $n-1 > n_0$:

$$\frac{x_{n_0+1}}{x_{n_0}}\frac{x_{n_0+2}}{x_{n_0+1}}\cdot\ldots\cdot\frac{x_n}{x_{n-1}} < q^{n-n_0}.$$

После сокращения одинаковых элементов в числителе и знаменателе дроби в левой части и простого преобразования получим оценку

$$x_n < (x_{n_0}q^{-n_0})q^n.$$

Тем самым общий член нашего ряда мажорируется общим членом сходящегося ряда, стало быть, по мажорантному признаку и теореме 6 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится.

(2) Пусть $\alpha > 1$. По определению предела существует такое n_0, что $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ для любого $n \geqslant n_0$, или, иначе, $x_{n+1} > x_n$. Стало быть, последовательность x_n возрастает и, будучи положительной, не может сходиться к нулю. Значит, не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

(3) Легко проверить, что $\alpha = 1$ для рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$, в то время как первый ряд расходится, а второй сходится.

Пример 1. Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^n}$, где x — некоторое число. Поскольку в общем члене ряда есть возведение в степень n, изучим абсолютную сходимость ряда и применим признак Коши. Найдем

$$r = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x^n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n} = 0,$$

стало быть, согласно признаку Коши ряд сходится при любом $x \in \mathbb{R}$ и даже абсолютно.

Пример 2. Изучим сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$. Докажем абсолютную сходимость этого ряда, воспользовавшись признаком Даламбера. Найдем

$$\alpha = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{|x|^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0,$$

следовательно, ряд сходится и даже абсолютно при любом $x \in \mathbb{R}$.

Замечание (еще раз о ряде Тейлора). У нас уже появлялись суммы $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Действительно, в гл. 2 мы видели, что

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + r_n(x).$$

С другой стороны, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ сходится. Означает ли последнее обстоятельство, что

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}?$$

Конечно, безусловно верный ответ «да, нет, не знаю», но он не очень содержателен. Ответ «да» — это ответ уверенного физика, который не задумывается над лишним, ответ «нет» — это ответ физика, запуганного математиками, который уже начинает задумываться, но еще не знает правильного ответа. Здесь ответ: да, но следует он не из совпадения выражений в полиноме Тейлора с общим членом ряда и сходимости ряда, а из сходимости к нулю остаточного члена $r_n(x)$! Все зависит от остаточного члена: если он стремится к нулю, то, разумеется, последовательность полиномов Тейлора как последовательность частичных сумм соответствующего ряда сойдется к сумме ряда. Однако такое бывает не всегда — есть функции, у которых сумма ряда Тейлора не совпадает с самой функцией. К примеру, таковой будет функция $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ у которой все производные в нуле равны нулю, так что ряд Тейлора нулевой, однако функция отлична от тождественного нуля. Эта функция вся остается в остатке.

Докажем, что в нашем примере $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ для любого фиксированного $x \in \mathbb{R}$. Действительно, запишем остаточный член в форме Лагранжа:

$$r_n(x) = \frac{e^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!},$$

где ξ — некоторая точка между 0 и x. Тогда

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{e^{|x|} x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty,$$

так что для любого фиксированного x остаток стремится к нулю.

§ 3. Условная сходимость

Знакопеременные ряды, т. е. ряды, члены которых меняют знак, удобно представлять в виде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$, где x_n — знакопеременная последовательность, а y_n знакопостоянна.

Теорема 9 (признаки Абеля и Дирихле для рядов). *Пусть выполнена одна из пар условий:*

(A1) *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *сходится,*

(A2) *последовательность* y_n *монотонна и ограничена*

или

(D1) *последовательность* $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ *частичных сумм ограничена,*

(D2) *последовательность* y_n *монотонна и стремится к нулю.*

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ *сходится.*

Доказательство. Шаг 1 (начало доказательства признака Дирихле с использованием критерия Коши).

Дано. Последовательность S_n ограничена:

$$\exists C > 0\ \forall n \in \mathbb{N} \quad |S_n| \leqslant C,$$

последовательность y_n монотонна, пусть для определенности убывает:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad y_{n+1} \leqslant y_n,$$

последовательность y_n стремится к нулю:

$$\forall \varepsilon_1 > 0\ \exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_1 \quad |y_n| < \varepsilon_1.$$

Надо:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geqslant n_0\ (m > n) \quad \left|\sum_{k=n+1}^{m} x_k y_k\right| < \varepsilon.$$

Оценим сумму $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{m} x_k y_k\right|$ путем суммирования по частям, аналога интегрирования по частям.

Шаг 2 (преобразование Абеля — суммирование по частям). Преобразуем сумму, заметив, что $x_k = S_k - S_{k-1}$:

$$\sum_{k=n+1}^{m} x_k y_k = \sum_{k=n+1}^{m} (S_k - S_{k-1}) y_k = \sum_{k=n+1}^{m} S_k y_k - \sum_{k=n+1}^{m} S_{k-1} y_k$$

(выровняем суммирование по S_k в суммах, сдвинув индексы)

$$= \sum_{k=n+1}^{m} S_k y_k - \sum_{k=n}^{m-1} S_k y_{k+1}$$

$$= S_m y_m - S_n y_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{m-1} S_k (y_k - y_{k+1}).$$

Перейдем к оценке:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} x_k y_k \right| \leqslant |S_m||y_m| + |S_n||y_{n+1}| + \sum_{k=n+1}^{m-1} |S_k||y_k - y_{k+1}|$$

$$\leqslant C|y_m| + C|y_{n+1}| + C \sum_{k=n+1}^{m-1} (y_k - y_{k+1})$$

(модуль снят ввиду монотонности)

$$= C|y_m| + C|y_{n+1}| + C(y_{n+1} - y_{n+2} + y_{n+2} - y_{n+3} + \dots + y_{m-1} - y_m)$$

$$\leqslant C|y_m| + C|y_{n+1}| + C|y_{n+1}| + C|y_m|.$$

Мы оценили величину $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{m} x_k y_k \right|$ четырьмя слагаемыми, каждое из которых можно сделать меньше чем ε_1 начиная с некоторого номера. А нам надо обеспечить оценку $< \varepsilon$. Естественно взять $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{4C}$. Найдя по такому ε_1 номер n_1, возьмем $n_0 = n_1$. Тогда для любого $k \geqslant n_0$ имеем $|y_k| < \varepsilon_1$ и тем самым для $m > n \geqslant n_0$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} x_k y_k \right| \leqslant C|y_m| + C|y_{n+1}| + C|y_{n+1}| + C|y_m| < \varepsilon.$$

Итак, правило выбора по заданному ε требуемого n_0 сформировано, значит, для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ выполнено условие Коши, и он по критерию Коши сходится.

Шаг 4 (признак Абеля). Последовательность y_n, будучи монотонной и ограниченной, сходится. Пусть $y = \lim y_n$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n} x_k (y_k - y) + y \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

и первый ряд в правой части сходится по признаку Дирихле, ибо последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_n$ ограничена, так как сходится, последовательность $y_n - y$ монотонна и сходится к нулю, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ сходится по условию.

Теорема доказана.

Пример. Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$.

Заметим, что если $x = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, то $\sin x = 0$, и наш ряд нулевой, так что сходится, даже абсолютно. Будем рассматривать $x > 0$ и $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{N}$.

Если бы общий член ряда сходился к нулю достаточно быстро, можно было бы, воспользовавшись признаком сравнения, доказать абсолютную сходимость и тем самым сходимость данного ряда. Однако здесь общий член ряда сходится к нулю довольно медленно, так что признак сравнения не сработает. Поэтому обратимся к признакам, приспособленным для исследования сходимости знакопеременных рядов.

Сначала выделим монотонную составляющую. Это, конечно, последовательность $\dfrac{1}{n}$. Она сходится к нулю, тем самым мы ориентируемся на применение признака Дирихле. Согласно этому признаку остается доказать ограниченность частичных сумм $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx$. Найдем сумму S_n. Умножив равенство

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$$

на $2 \sin \dfrac{x}{2}$ и воспользовавшись формулой для произведения синусов, получим

$$\begin{aligned}2S_n\sin\frac{x}{2} &= 2\left(\sin x\cdot\sin\frac{x}{2}+\sin 2x\cdot\sin\frac{x}{2}+\dots+\sin nx\cdot\sin\frac{x}{2}\right)\\ &=\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{5x}{2}+\dots\\ &\qquad\dots+\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\\ &=\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x=2\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2},\end{aligned}$$

откуда

$$S_n=\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Значит, $|S_n|\leqslant\dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}}$. Итак, суммы S_n ограничены, а следовательно, по признаку Дирихле ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$ сходится при любом x.

Обратимся к изучению абсолютной сходимости, т. е. рассмотрим сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin nx|}{n}.$$

Ввиду медленной сходимости к нулю общего члена этого ряда ограничить его сверху общим членом сходящегося ряда не удастся. Поэтому попробуем обосновать гипотезу о его расходимости. Здесь можно воспользоваться критерием Коши, однако проще применить искусственный прием. Ясно, что $|\sin nx|\geqslant\sin^2 nx=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2nx)$, поэтому

$$\frac{|\sin nx|}{n}\geqslant\frac{1}{2n}(1-\cos 2nx)=\frac{1}{2n}-\frac{\cos 2nx}{2n}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}$ расходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2nx}{2n}$ сходится (по признаку Дирихле). Тем самым ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2n}-\dfrac{\cos 2nx}{2n}\right)$ расходится как разность расходящегося и сходящегося рядов. Общий член исследуемого ряда оказался ограниченным снизу общим членом расходящегося ряда, значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|\sin nx|}{n}$ расходится.

Оглавление

Основы математического анализа
для студентов-физиков. Лекции.
3. Интеграл Римана
4. Числовые ряды

Дятлов Глеб Владимирович

Подписано в печать 01.12.2014. Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 4.0. Уч.-изд. л. 4.0. Тираж 200 экз. Заказ № 241.

Лицензия ЛР № 065614 от 8 января 1998 г.
Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.

Отпечатано в ООО «Омега Принт»,
пр. Академика М. А. Лаврентьева, 6, 630090 Новосибирск, Россия.