Будет дальше знать предел меру, норму и предел.

26.10.2009

лекция

Глава X Меры

Замечания (об интеграле Римана и Лебега).

Пришло время строить современный интеграл. Чем же плох инт R.
Во-первых от 1-мерный. Но его легко можно сделать мн-мерным

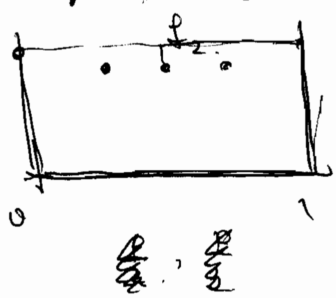
1. 1. Неполнота $R[a,b]$

Естественно снабдить $R[a,b]$ нормой $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,dt$.

Это действ. норма: 1, 2, 3

Рассмотрим послед. функц $f_n : [0,1] \to R$

$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{если } x \text{ рац и знаменатель } \cancel{\text{кратен}}\ \text{дающие несокращ. } p/q \ \ n! \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$



Эта послед. сход. поточечно к ф. Дирихле

$\int_0^1 f_n\,dx = 0$ и $\int_0^1 |f_n - f_m|\,dx = 0 \to$

$\|f_n - f_m\|_1 \to 0$ и f_n фунд. Однако ее предел не лежит в $R[a,b]$. Так что $R[a,b]$ неполно!

В случае $C(K)$ мы видели что полнота есть и это дает явн пр-ва (см. ФА).

2. Слабые Теоремы о пред. переходе

Нужна равномерная сходимость там где можно было и без нее.

$x^n : [0,1] \to 0$, и $\int x^n dx \to \int 0\,dx$.

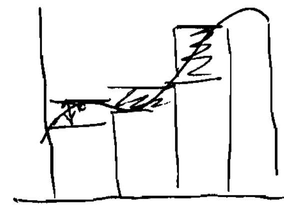
Значит эти условия обременительны

Мы еще не изучали несобств. интегралы зависящ от параметров

Как же строить интеграл?

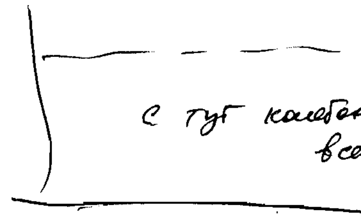
Вспомним, как строим инт Р:

$$\int_a^b f\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$



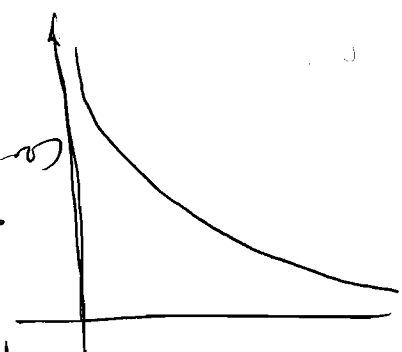
~~$\int_a^b$~~ необх и дост условие

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f,\Delta_i)\Delta_i \to 0$$

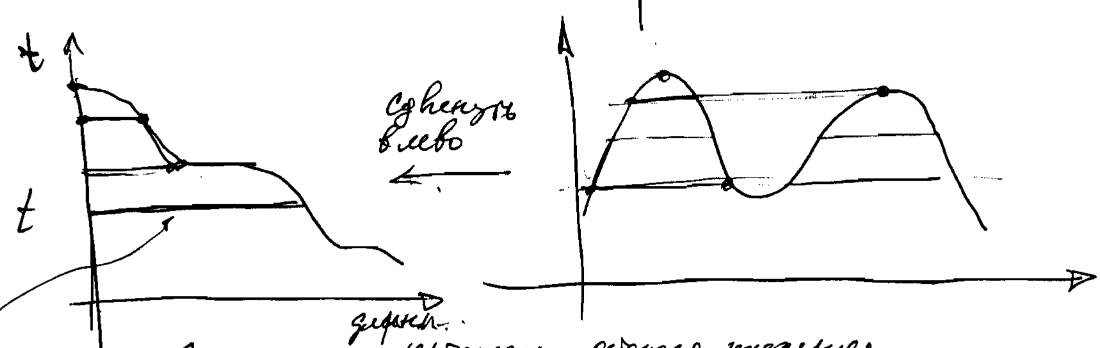


с тут колебание = 1 всегда

Однако монотонная ф-ция всегда инт-ма независимо от числа точек разрыва



Вопрос можно ли превратить (переразбить) ф-цию в монотонную так, чтобы площадь осталась прежней?



интеграл остался прежним

ф монотонна значит можно инт-ть

Дальше посмотрим что представляют собой длины горизонтальных отрезков на высоте t

это (суммарная) длина мн-ва $\{x \mid f(x) \geq t\}$ = Обозначим эту длину $\mu(\{x \mid f(x) \geq t\})$ и назовем умным словом „мера".

Тогда нужный интеграл - это $\int_{\text{нижн зн } f}^{\text{верх зн } f} \underbrace{\mu(\{t < f(x)\})}_{\text{это уже монот функц}}\,dt$.

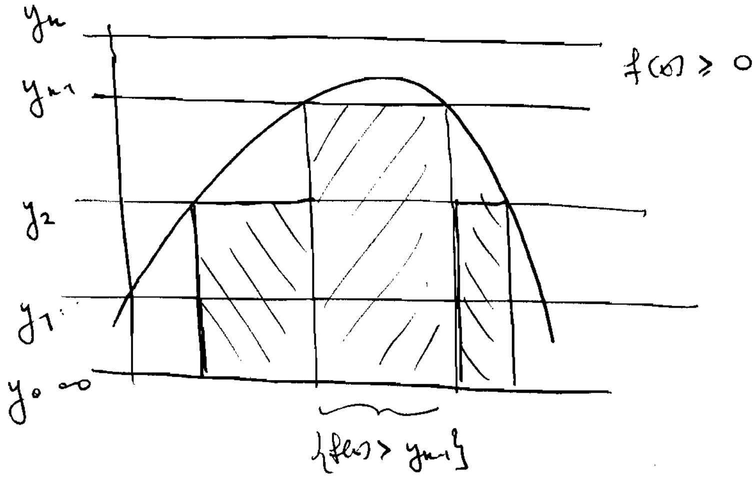
Тут уже хорошо видна основная идея построения инт-ла Лебега: нарезать полоски не по вертикали, а по гор

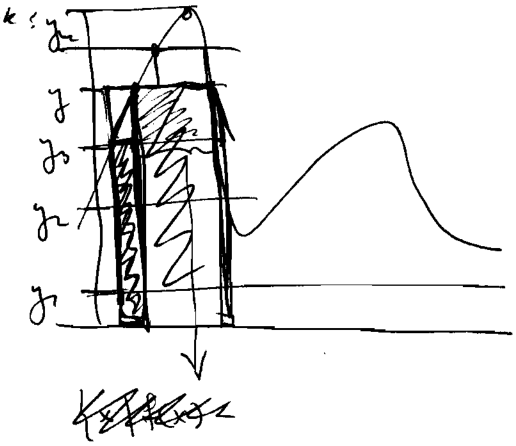
инт Р

инт Л.

Метод Суммирования меньше по Лебегу.

Можно определить инт-л Лебега так:





$$y_{n-1}\,\mu\overbrace{\{f(x)>y_{n-1}\}}^{y_n>} + y_{n-2}\,\mu\{x \mid y_{n-3}\leq f(x)<y_{n-2}\} + \dots$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} y_j\,\mu\{x \mid y_j \leq f(x) < y_{j+1}\} \xrightarrow[\max \Delta y_j \to 0]{} (L)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Это основная идея. Какие сложности ждут нас на этом пути: 1. измерим-ная сложность, — это длинный путь — конструкц...

Посуди в данном f мы должны знать как считать «длину» (меру) мн-в $\{x \mid f(x)\leq y\}$. Это может быть сложная задача. Например для ф-и Дирихле это $\mathbb{Q}\cap[0,1]$. $\mu(\mathbb{Q}\cap[0,1])=?$

Здесь мы поступим так: сначала определим μ для максимально возможного набора мн-в (эти мн-ва будут наз. измеримыми), а затем будем брать только такие функции у которых $\{x \mid f(x)\leq b\}$ измерим для всех b. Такие ф-ии тоже наз. измеримыми.

Для измеримых ф-ий и опред. инт-л Л.

Теперь подробнее о мере. Как ее строить. Было бы чудесно если бы для любого мн-ва можно было опред. и его «длину» или меру. Однако, мера — обобщение понятия длины, площади и объема и должна обладать теми св-ми, которые они об...

Св-ва длины:

1. длина ≥ 0

2. длина $(A \cup B) =$ дл $(A) +$ дл (B) если $A \cap B = \varnothing$.

— аддит-ть

Таким обр. $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$. — аддитивность

Но этого мало для того, чтобы инт-л обладал нужными св-вами нужна счетная аддит. $\mu\left(\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$!

Оказывается в $\mathbb{R}^n$ нельзя определить меру μ на всех подмн-вах $\mathbb{R}^n$ так, чтобы выполнялись все эти св-ва! В итоге получится

$$m \xrightarrow{(*)} \mu.$$

Мн-ва параллелепипедов и их объединения $\subset$ ~~измер.~~ мн-во измеримых мн-в $\notin$ мн-во всех подмн-в

μ M

M очевидно должно обладать некоторой структурой, т.е. если $A, B \in M$ то $A \cup B \in M$, $A \cap B \in M$, $A \setminus B \in M$,

еще $A_i \in M$ $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in M$.

Такие мн-ва называются σ-алгебр.

для счетных объед.

Т.о. M будет <u>σ-алгеброй</u>, а μ - будет счетно аддит. мерой на M.

Итак, план на остаток семестра: мера $\to$ интегр. $\to$ инт. Л.

§1 Системы множеств

Определение полукольца. S – полукольцо, если

1. $\varnothing \in S$
2. $A, B \in S \to A \cap B \in S$
3. $\forall A, A_1 \in S \ \exists A_2, \dots, A_n \in S \mid A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n = A.$

Если в S есть $E \mid \forall A \in S \ A \subset E$, то E называют единицей, а S – п.к. с единицей.

Примеры 1. $\{[\alpha, \beta) \mid [\alpha, \beta) \subset [a, b)\}$ – п.к. с ед.

2. $\{[\alpha, \beta] \mid [\alpha, \beta] \subset [a, b]\}$ – п.к. с ед

3. $\{[\alpha, \beta) = [\alpha_1, \beta_1) \times \dots \times [\alpha_n, \beta_n) \subseteq \}$ – п.к. (без един)

4. $\{(\alpha, \beta) \subset [a, b]\}$ – не п.к. – не получится дополнить

Опр. кольца. Сист. мн. R называется кольцом, если

1. $A, B \in R \to A \Delta B \in R$
2. $A, B \in R \to A \cap B \in R$

Если $\exists$ единица в R, то R называется алгеброй.

Теорема 1 (о кольце). Пусть R – кольцо. Тогда

1. $\varnothing \in R$
2. ~~$A, B \in R \to A \cap B \in R$~~
2. $\forall A, A_1 \in R \to \exists A_2, \dots, A_n \in R \mid A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$
3. $A, B \in R \to A \cup B \in R$
4. $A, B \in R \to A \setminus B \in R$

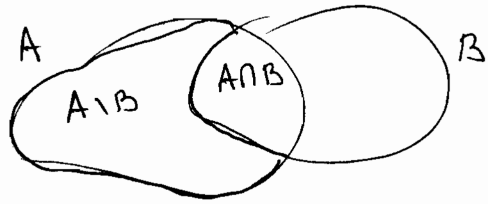
R – п.к.

Док-во. 1. $\varnothing = A \Delta A$

~~1~~. $A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$

2. Взять $A_2 = A \setminus A_1$

3. $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$.



Теорема доказана

Замечание (о кольце). Кольцо — система, которая выдерживает все операции с мн-вами. Операции Δ и $\cap$ берут потому, что все остальные через них выражаются.

Ясно, что кольцо — п.к. Обратное, очевидно неверно. Вопрос: как дополнить п.к. до кольца и при этом взять как можно меньше множеств? Во-первых, это возможно.

Теорема 2 (о $\exists$ мин кольца) Пусть S — п.к. Тогда $\exists$ такое кольцо $R(S)$, что

1. $S \subset R(S)$
2. если R_1 — кольцо $\mid S \subset R_1$, то $R(S) \subset R_1$

Если в S была единица, то $R(S)$ — алгебра

$R(S)$ называется миним. кольцом, содержащим S.

Док-во. Пусть $S = \{A_\alpha\}$. Положим $B = \bigcup_\alpha A_\alpha$, ...

Возьмем ~~мн-во в~~ $M(S)$ — мн-во всех подмн-в B. Ясно, что $S \subset M(S)$ и $M(S)$ — кольцо. Однако вряд ли минимальное. Будем уменьшать. Пусть P_α — все кольца $\mid S \subset P_\alpha \subset M(X)$. Положим $R(S) = \bigcap_\alpha P_\alpha$. Тогда $S \subset R(S)$. Покажем, что $R(S)$ — кольцо. Действительно, $\varnothing \in P_\alpha \to \varnothing \in R(S)$. Если $A, B \in R(S)$, то $A, B \in P_\alpha\ \forall \alpha$ $\to A \cap B, A \Delta B \in P_\alpha \to A \cap B, A \Delta B \in R(S)$.

30.10.2009

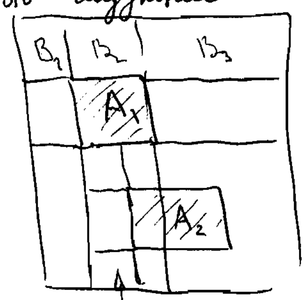
лекция

Далее нам несколько раз потребуется ~~обобщ~~ сл. свойство п.к.

Лемма (о дополнении). Пусть S — п.к. Если $A, A_1, \dots, A_n \in S$, то $A_1, \dots, A_n \subset A$ и непересек.

$\exists A_{n+1}, \dots, A_k \in S \mid \bigsqcup_{i=1}^{k} A_i = A$.

Док-во. По индукции



дополнить B_j до $A_2 \cap B_j$ и вместо B_j взять новые мн-ва.

Лемма доказана.

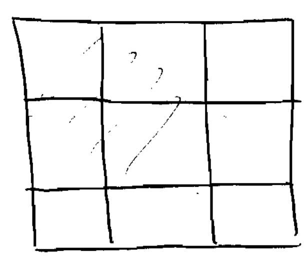
Теорема 3 (о структуре мин. кольца). Мин кольцо $R(S)$ п.к. S имеет след структуру: $R(S) = K(S) = \{\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \mid A_i \in S\}$ — совокупность всех конечных дизъюнктных объединений.

Док-во. Покажем, что $K(S)$ — кольцо. Пусть $A, B \in K(S)$.

Тогда $A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$ $B = \bigsqcup_{j=1}^{k} B_j$. Положим $C_{ij} = A_i \cap B_j$

Теперь (1) $A \cap B = \bigsqcup_{ij} C_{ij}$

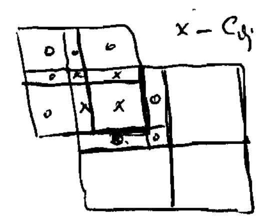
(2) Каждое из C_{ij} можно дополнить до A_i или B_j



M

~~30.10.2001 лекция~~

Тогда $A \triangle B = \bigsqcup$ мн-ва дополняющие C_{ij} до A_i и B_j



Т.о. $K(S)$ — кольцо. Очевидно, $S \subset K(S)$.

Покажем, что $K(S)$ минимально. Это очевидно т.к. кольцо содержит все конечные объединения. Если $S \subset P$, то $\forall A_i \in S$ $A_i \in P$.

Возьмем $A = \bigsqcup A_i$ ок, т.к. $A_i \in P$ $\bigsqcup A_i$ тоже элемент ~~P~~ как ~~...~~ конечн. объед.

Теорема док.

~~Лемма. Если $A_1, \dots, A_n \in S$, то $\exists$ конечно непересекающ~~

Определение (σ-кольца, δ-кольца)

Кольцо называется σ-кольцом, если оно выдерживает счетные объединения. Если σ-кольцо содержит единицу, то оно называется σ-алгеброй.

Замечание. Если кольцо выдерживает счетные объединения, то это выдерживает и счетные пересечения. Действительно пусть $A_i \in R \to \bigcup A_i \in R$, тогда

$$\bigcap A_i = A_1 \setminus \left(\bigcup_{i=2}^{\infty} A_1 \setminus A_i \right)$$ и все в порядке.

Обратное вообще говоря неверно. Можно взять δ-кольцо огр. множ-в в $\mathbb{R}^1$. (~~Если~~ объединени счетного числа может быть неогр.)

§2. Конечные меры

Определение (мера на полукольце). Пусть S – п.к. (это может быть и кольцо и алгебра, но по крайней мере п.к.).

Отображение $m: S \to [0, +\infty)$ называется мерой, если ~~если~~ для любых $A_1, \dots, A_n, A \in S \mid A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$ верно

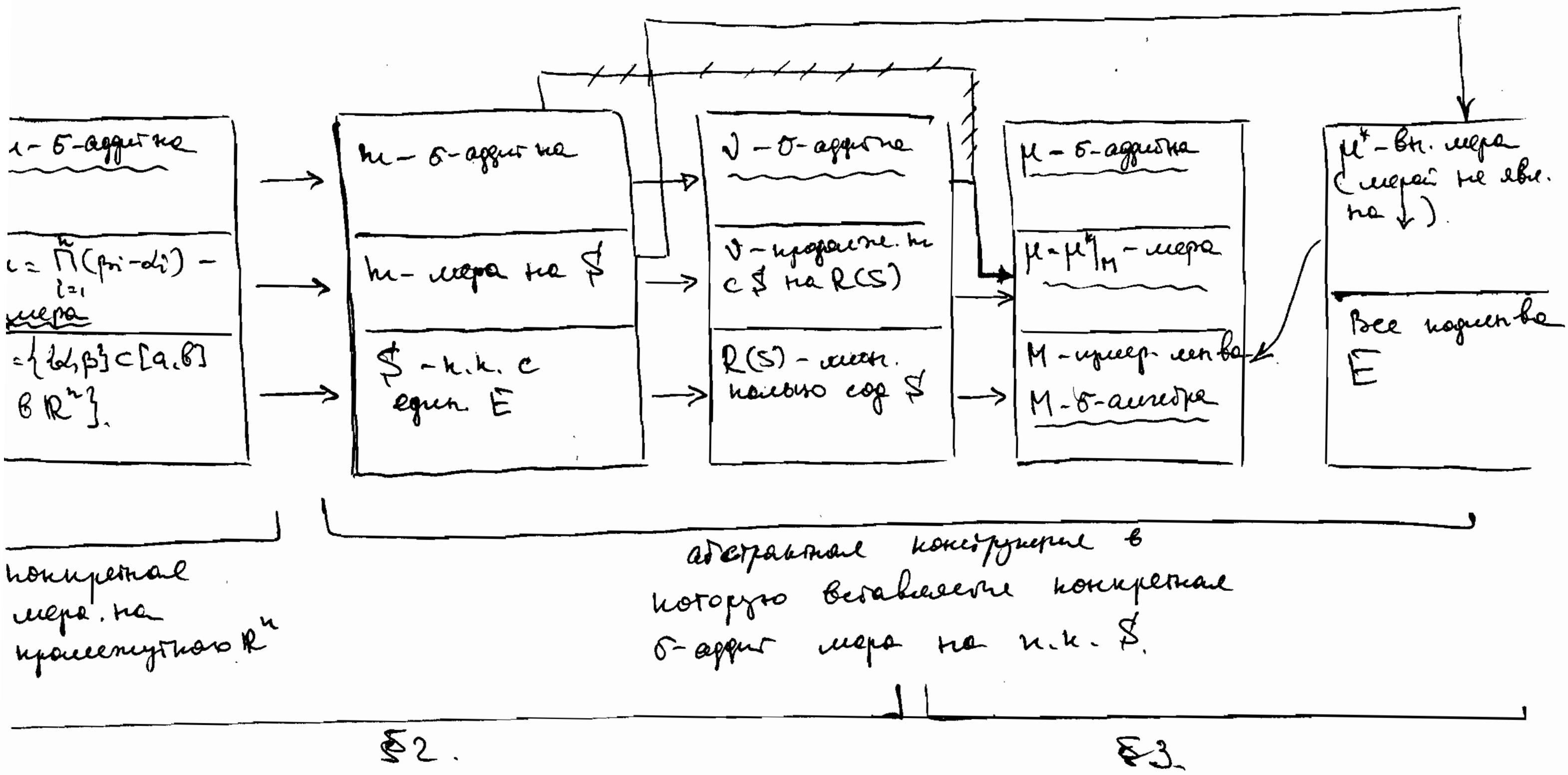
$$m(A) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$$

Если это верно для ~~для~~ счетного числа мн-в, т.е. для любых $A, A_i \in S \mid A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$ верно

$$m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i),$$

то m называется счетно-аддитивной или σ-аддитивная

Замечание (об общей стратегии построения измеримых мн-в и меры Лебега).



Определение (стандартной меры на промежутках $\mathbb{R}^n$). Пусть

S – п.к. интервалов в $[A,B] = [A_1,B_1] \times \dots \times [A_n,B_n] \subset \mathbb{R}^n$.

Для $\langle\alpha,\beta\rangle = \langle\alpha_1,\beta_1\rangle \times \dots \times \langle\alpha_n,\beta_n\rangle \in S$ определим

$$m(\langle\alpha,\beta\rangle) = \prod_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i)$$

Теорема 4 (о стандартной мере на промежутках в $\mathbb{R}^n$).

(1) m – мера, т.е. функция m аддитивна

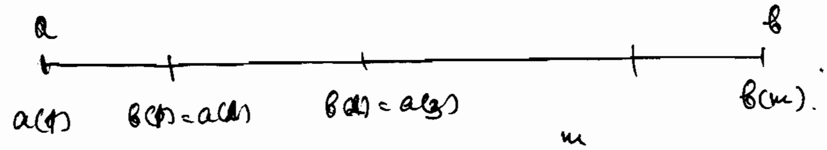
(2) m – σ-аддитивная мера.

Док-во. Шаг 1. (аддитивность m для $n=1$ и $n=2$)

В случае $n=1$ аддитивность очевидна. Пусть

$\{a,b\} = \bigsqcup_{j=1}^{m} \{a(j), b(j)\}$. Тогда можно переставить промежутки

так, что



Далее по определению $m_1(\{a,b\}) = \sum_{j=1}^{m} m_{(1)}(\{a(j),b(j)\})$

↑ мера в $\mathbb{R}^1$.

Теперь $n=2$. Общий случай аналогично, по индукции.

Пусть $\{a,b\} = \{a_1,b_1\}\times\{a_2,b_2\} = \bigsqcup_{j=1}^{m} \{a(j),b(j)\}$

Возьмем все точки $a_2(j)$ и $b_2(j)$

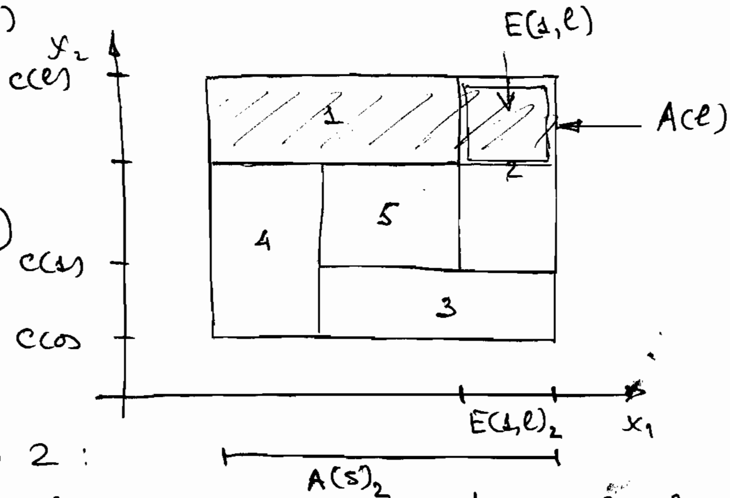
и перенумеруем по порядку:

$c(0),\dots,c(\ell)$

Определим $A(s) = \{a_1,b_1\}\times(c(s),c(s-1))$

$s=1,\dots,\ell$

далее $E(j,s) = \{a(j),b(j)\}\cap A(s)$.



Индекс 2 — означает проекцию вдоль 2:

Ясно, что $E(j,s)_2 = \begin{cases} \{a_1(j),b_1(j)\} & \text{если } (c(s-1),c(s)) \subset \{a_2(j),b_2(j)\} \quad (*) \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

$$A(s)_2 = \bigsqcup_{j=1}^{m} E(j,s)_2$$

$$m(\{a,b\}) = (b_1-a_1)(b_2-a_2) = (b_1-a_1)\sum_{s=1}^{\ell}(c(s)-c(s-1)) =$$

$$\sum_{s=1}^{\ell} m_1(A(s)_2)(c(s)-c(s-1)) = |\text{по аддит. при } n=1| =$$

$$= \sum_{s=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{m} m_1(E(j,s)_2)(c(s)-c(s-1)) = \sum_{j=1}^{m}\underbrace{\sum_{s=1}^{\ell}}_{s\,|\,\text{пересеч. } (*)} m_1(\underset{(b_1(j),a(j))}{\underset{\shortparallel}{E(j,s)_2}})(c(s)-c(s-1)) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}(b_1(j),a_1(j)) \underbrace{\sum_{s\,|\,\text{пересек}}(c(s)-c(s-1))}_{=(b_2(j)-a_2(j))} = \sum_{j=1}^{m}(b_1(j)-a_1(j))(b_2(j)-a_2(j)) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} m(\{a(j),b(j)\})$$

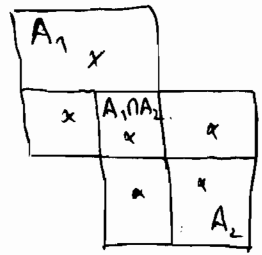
Доказано.

Шаг 2 (свойства меры). Если $A, A_i \in S$ и $A \subset \bigcup_{i=1}^{m} A_i$, то

$m(A) \le \sum_{i=1}^{m} m(A_i)$. Для A_i, A определим $B_j \in S$ |

B_j попарно не пересекаются и A, A_i – объединение некоторых B_j

Покажем это геометрически для двух A_1 и A_2.



$B_1 = A_1 \cap A_2$ – это одно из B_j. Далее дополним B_1 до A_1 конечным набором элементов S, аналогично с A_2. Меньших B_j нет! $\bigcup A_i = \bigsqcup B_j$

Далее очевидно $m(A_i) = \sum_{j \mid B_j \text{ сост } A(i)} m(B_j) = \sum_{j=1}^{M} \chi_{ij} m(B_j)$ $\quad \chi_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{иначе} \\ 1 & B_j \subset A_i \end{cases}$

$$\sum_{i=1}^{m} m(A_i) \ge \underset{\text{все!}}{\sum_{j=1}^{M}} m(B_j) = \cancel{\sum m\Big(\bigsqcup_{j=1}^{M} B_j\Big) \ge m(A)}.$$

$$\ge \sum_{j \mid B_j \text{ в } A} m(B_j) = m(A)$$

2.11.2009

Свойство доказано. лекция

Шаг 3 (еще одно свойство меры).

Если $A_i, A \in S$ и $\bigsqcup_{i=1}^{m} A_i \subset A$, то $\sum_{i=1}^{m} m(A_i) \le m(A)$.

Действительно, A_i можно дополнить до A: $A = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_m \sqcup A_{m+1} \dots \sqcup A_M$.

$$m(A) = \sum_{i=1}^{M} m(A_i) \ge \sum_{i=1}^{m} m(A_i).$$

Кроме того это верно для счетного мн-ва: если $A_i, A \in S$ | $\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset A$, то $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) \le m(A)$. Для любого конечного m верно $\sum_{i=1}^{m} m(A_i) \le m(A)$. а далее переходим к пределу при $m \to \infty$.

Св-во док-во

Шаг 4 (σ-аддитивность стандартной меры) Пусть

$\{a, b\} = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} \{a(i), b(i)\}$. Докажем $m(\{a,b\}) = \sum_{i=1}^{\infty} m(\{a(i), b(i)\})$

Неравенство $\sum_{i=1}^{\infty} m(\{a(i), b(i)\}) \le m(\{a,b\})$ есть вообще для любой меры. Вопрос только с обратным неравенством.

Для его док-ва пойдём на хитрость. Уменьшим $\{a,b\}$ до $[\alpha,\beta] \subset \{a,b\}$ так что $m([\alpha,\beta]) > m(\{a,b\}) - \frac{\varepsilon}{2}$

замкнутость важна

А множества $\{a(j), b(j)\}$ увеличим до $(\alpha(j), \beta(j))$ так, что

открытость важна

$$m((\alpha(j),\beta(j))) < m(\{a(j),\beta(j)\}) + \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1}{2^j}$$

Очевидно, что $(\alpha(j),\beta(j))$ – открытое покрытие для $[\alpha,\beta]$ и значит из него можно выбрать конечное (под)покрытие:

$$[\alpha,\beta] \subset \bigcup_{j=1}^{N} (\alpha(j),\beta(j))$$

По шагу 2 имеем $m([\alpha,\beta]) \le \sum_{j=1}^{N} m((\alpha(j),\beta(j)))$ и далее

$$m(\{a,b\}) - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{j=1}^{N} m(\{a(j),b(j)\}) + \underbrace{\frac{\varepsilon}{2}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2^j}}_{\le \varepsilon/2}$$

Теперь можно заменить N на ∞ и заметить, что ε произвольно.

Теорема доказана.

Теорема 5 (о продолжении меры на мин. кольцо)

Пусть m – мера на п.к. S, а $R(S)$ – мин. кольцо, содерж. S.

(1). Функция $\nu(A)$ на $R(S)$ определенная след. образом $\nu(A) = \sum_{i=1}^{m} m(A_i)$, где $A = \bigsqcup_{i=1}^{m} A_i$ (по ~~опр~~ Теор 3), — мера

(2) Если m σ-аддитивна, то ν тоже σ-аддитивна. ~~Кроме~~

В частности это означает, что $A \subset \bigcup A_i \to \nu(A) \le \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$.

Док-во (1). Представлений $A = \bigsqcup_{i=1}^{m} A_i$ может быть несколько. Докажем сразу независимость $\nu(A)$ от пр-ния. Пусть $A = \bigsqcup_{j=1}^{k} B_j$

Положим $D_{ij} = A_i \cap B_j$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{m} m(A_i) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} m(D_{ij}) = \sum_{j=1}^{k} m(B_j)$$

Неотрицательность очевидна. Докажем аддитивность. Пусть $A = \bigsqcup_{i=1}^{m} A_i$, $\underline{A_i \in R(S)}$, тогда $A_i = \bigsqcup_{j=1}^{k} A_{ij}$, где $A_{ij} \in S$.

$$\nu(A) = \sum_{ij}^{mk} m(A_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} \nu(A_i)$$

(2) Пусть $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$, где $A, A_i \in R(S)$. Надо $\nu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$

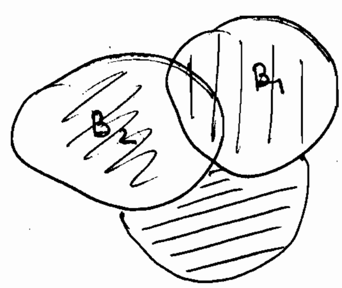
По теор 3 $A = \bigsqcup_{j=1}^{N} B_j$ $A_i = \bigsqcup_{k=1}^{N_i} B_{ik}$. Возьмем $C_{jik} = B_j \cap B_{ik}$

$$\nu(A) = \sum_{j=1}^{N} m(B_j) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{ik} m(C_{jik}) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N_i} m(C_{jik}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i).$$

перестановка суммирования законна т.к. их предел только один, остальные — конечные.

Наконец, пусть $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, где $A, A_i \in R(S)$. Превратим объединение в дизъюнктное.



$B_1 = A_1 \cap A$

$B_2 = A \cap A_2 \setminus A_1$

$B_3 = (A_3 \cap A) \setminus \bigcup_{i=1}^{2} A_i$

Тогда $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i$ причем $\nu(B_i) \le \nu(A_i)$

$$\nu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(B_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$$

Теорема доказана

§3. Внешняя мера. Продолжение меры.

Итак наш исходный материал: S – п.к. с единицей E, m – σ-аддитивная мера на S.

Определение (Внешней меры Лебега). Пусть $A \subset E$ произвольное.

~~Тогда~~ Внешняя мера Лебега опр-ся так:

$$\mu^*(A) = \inf_{\substack{A_i \in S \\ A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}} \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

Замечание (о вн. мере). Важно что $\bigcup^{\infty}$. Если взять $\bigcup^{n}$ получим меру Жордана и в конечном мн-ом интеграле Римана. Сообщ обозначение μ_J^*

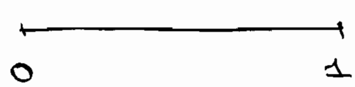
1. Разница хорошо видна на примере мн-ва $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$.

Оказывается $\mu^*(A) = 0$, а $\mu_J^*(A) = 1$. Действительно, A счетно значит можно взять $A_i = (a_i, b_i)$ – интервал содерж точку x_i длины $\frac{\varepsilon}{2^i}$. Тогда

2. E – для конечности

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) = \varepsilon.$$ Значит $\mu^*(A) \le \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$.

Теперь $\mu_J^*(A)$. Пусть $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$



Очевидно что A_i перекрываются за исключением лишь может быть случаев, когда A_i соприкасаются по крайним точкам. Таких точек конечное число. Т.о. $[0,1] \setminus \{y_1, \dots, y_k\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ и значит

$$1 \le m\left(\bigcup A_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} m(A_i).$$

2. Можно показать, что в определении μ^* достаточно ограничиться дизъюнктными объединениями: $\mu^*(A) = \inf_{A \subset \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i,\, A_i \in S} \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$.

Теорема 6 (о совпадении μ^* и ν на $R(S)$).

На $R(S)$ μ^* и ν совпадают: $\forall A \in R(S)$ $\mu^*(A) = \nu(A)$.

Док-во. Пусть $A = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} B_j$ (по Теореме 3 о $R(S) = K(S)$)

Тогда $\nu(A) = \sum\limits_{j=1}^{m} m(B_j)$ $\qquad \mu^*(A) = \inf\limits_{\substack{A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \\ A_i \in S}} \sum\limits_{i=1}^{\infty} m(A_i)$

Очевидно, $\mu^*(A) \leq \nu(A)$, т.к. μ^* — $\inf$!

В обратную сторону. Пусть $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_i \in S$. Тогда по σ-аддитивности ν (см. конец Теоремы 5)

$$\nu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

Переходя к $\inf$, получаем $\nu(A) \leq \mu^*(A)$.

Теорема доказана.

Теорема 7 (о счетной субаддитивности μ^*).

Пусть $B, B_i \subset E$ произв. такие, что $B \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$. Тогда $\mu^*(B) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu^*(B_i)$

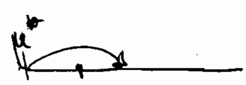
~~Док-во~~ Как следствие получаем, что $\forall A, B \subset E$

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A \Delta B).$$

6.11.2009
лекция

Док-во. Смысл в том, чтобы сделать из покрытий мн-в B_i покрытие для B, причем не очень большое. Имеем

$\mu^*(B_i) = \inf\limits_{\substack{B_i \subset \bigcup A_{ij} \\ A_{ij} \in S}} \sum\limits_{j=1}^{\infty} m(A_{ij})$. По определению $\inf$ $\forall \varepsilon > 0$



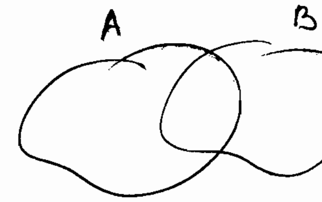
можно найти такой набор A_{ij} | $\sum\limits_{j=1}^{\infty} m(A_{ij}) < \mu^*(B_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$

Очевидно, что все A_{ij} вместе составляют покрытие для B:

$B \subset \bigcup A_{ij}$. Далее по определению $\mu^*(B) \leq \sum\limits_{i,j=1}^{\infty} m(A_{ij}) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu^*(B_i) + \varepsilon$

, $\forall$ $\bigcup\limits_{i}\bigcup\limits_{j}$ — порядок важен. Т.к. ε произвольно, все доказано.

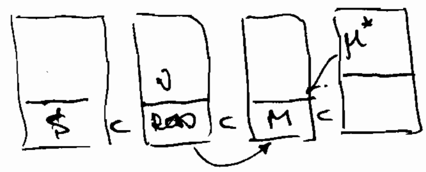
Оценка очевидна, т.к. $A \subset B \cup A \Delta B$ и
$B \subset A \cup A \Delta B$



Теорема доказана.

<u>Определение (измеримого мн-ва)</u> Мн-во $A \subset E$ называется <u>измеримым по Лебегу</u>, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists A_\varepsilon \in R(S) \mid$

$$\mu^*(A \Delta A_\varepsilon) < \varepsilon$$



Совокупность всех измеримых мн-в обозначается через M.

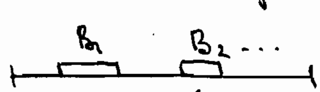
<u>Замечание (об измеримости по Жордану)</u>. Если в определении измеримого мн-ва заменить μ^* на μ_J^*, то получатся мн-ва измеримые по Жордану.

Т.к. $\mu^*(A) \le \mu_J^*(A)$ для любого $A \subset E$, все измеримые по Жордану измеримы по Лебегу. Обратное вообще говоря неверно. Покажем, что $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ измеримо по Лебегу но неизмеримо по Жордану.

Действительно, т.к. $\mu^*(A) = 0$ как показано выше для любого $\varepsilon > 0$ можно взять $A_\varepsilon = \varnothing \in R(S)$. Тогда $A \Delta A_\varepsilon = A$ и

$$\mu^*(A \Delta A_\varepsilon) = 0 < \varepsilon$$

Теперь неизмеримость по Жордану. Пусть $A_\varepsilon = \bigsqcup_{j=1}^{m} B_j \in R(S)$ — приближающее мн-во (по $\varepsilon > 0$).



$B_j \in S$ - промежутки на $E = [0,1]$

Тогда $A \Delta A_\varepsilon$ содержит все иррац. точки промежутков $B_1, \dots, B_m$ и все рациональные точки $E \setminus A_\varepsilon$. Теперь пусть $A_1, \dots, A_n$ — покрытие $A \Delta A_\varepsilon$ из определения μ_J^*, т.е. $A \Delta A_\varepsilon \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Тогда A_i либо перекрываются либо соприкасаются. а значит $\sum_{i=1}^{n} m(A_i) \ge 1$ и $\mu_J^*(A \Delta A_\varepsilon) \ge 1$ $(=1)$.

Вот так!

Остаток параграфа посвящен установлению свойств M и μ^* на M: M – σ-алгебра и σ-аддитивность $\mu^*|_M$.

Теорема 8 (M-алгебра) M- алгебра

Док-во. Единица в M есть по определению.
Нужно показать, что если $A, B \in M$, то $A \cap B, A \Delta B \in M$.
Возьмем $\varepsilon > 0$ и $A_\varepsilon, B_\varepsilon \in R(S)$ / $\mu^*(A \Delta A_\varepsilon), \mu^*(B \Delta B_\varepsilon) < \varepsilon/2$.
Имеем
$$(A \Delta B) \Delta (A_\varepsilon \Delta B_\varepsilon) \subset (A \Delta A_\varepsilon) \cup (B \Delta B_\varepsilon)$$
$$(A \cap B) \Delta (A_\varepsilon \cap B_\varepsilon) \subset (A \Delta A_\varepsilon) \cup (B \Delta B_\varepsilon)$$
(проверить!) Далее
$$\mu^*((A \Delta B) \Delta (A_\varepsilon \Delta B_\varepsilon)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$ Второе аналогично

Теорема доказана

Теорема 9 (μ^* на M - мера)

Док-во. Пусть $A, B, C \in M$ и $A = B \sqcup C$. Нужно доказать, что $\mu^*(A) = \mu^*(B) + \mu^*(C)$. В одну сторону уже есть: $\mu^*(A) \le \mu^*(B) + \mu^*(C)$.
Это есть вообще для любых мн-в! Идея док-ва обратного неравенства такая: приблизим B и C мн-вами $B_\varepsilon, C_\varepsilon \in R(S)$. А на $R(S)$ уже есть совпадение: $\mu^* \in \mathcal{D}$, и значит, на $R(S)$ μ^* уже аддитивна!

Пусть $B_\varepsilon, C_\varepsilon \in R(S)$ таковы, что $\mu^*(B \Delta B_\varepsilon), \mu^*(C \Delta C_\varepsilon) < \varepsilon$.
Тогда $\underset{\ne\sqcup}{B_\varepsilon \cup C_\varepsilon}$ приближает A: $\mu^*(A \Delta (B_\varepsilon \cup C_\varepsilon)) < 2\varepsilon$. Действительно

$$A \Delta (B_\varepsilon \cup C_\varepsilon) = (B \sqcup C) \Delta (B_\varepsilon \cup C_\varepsilon) \subset (B \Delta B_\varepsilon) \cup (C \Delta C_\varepsilon).$$ Далее очевидно.

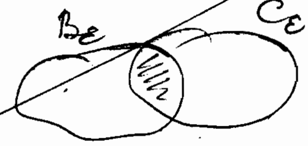
По теореме 7 внешние меры A и $B_\varepsilon \cup C_\varepsilon$ отличаются $< 2\varepsilon$ и в частности

$\mu^*(A) \geq \mu^*(B_\varepsilon \cup C_\varepsilon) - 2\varepsilon$

~~Далее по той же теореме $\mu^*(B)$ и $\mu^*(B_\varepsilon)$ отличаются~~

Т.к. $B_\varepsilon \cup C_\varepsilon \in R(S)$ $\mu^*(B_\varepsilon \cup C_\varepsilon) = \nu(B_\varepsilon \cup C_\varepsilon)$ и можно воспользоваться аддитивностью: ~~Нужно только сделать из $\cup$ дизъюнкт~~ $\sqcup$.

$B_\varepsilon \cup C_\varepsilon = B_\varepsilon \sqcup (C_\varepsilon \setminus (B_\varepsilon \cap C_\varepsilon))$



~~Теперь спрашивается: какая ошибка~~

$$\mu^*(A) \geq \nu(B_\varepsilon \cup C_\varepsilon) - 2\varepsilon = \nu(B_\varepsilon \sqcup C_\varepsilon \setminus (B_\varepsilon \cap C_\varepsilon)) - 2\varepsilon \overset{\text{по аддитивности}}{=} \nu(B_\varepsilon) + \nu(C_\varepsilon \setminus (B_\varepsilon \cap C_\varepsilon)) - 2\varepsilon$$

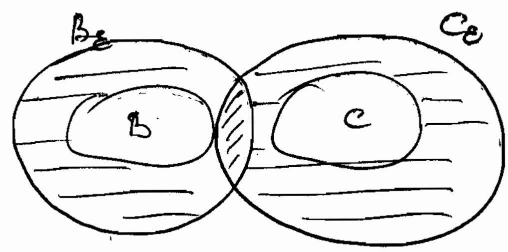
Теперь спрашивается, какая будет ошибка, если заменить $C_\varepsilon \setminus (B_\varepsilon \cap C_\varepsilon)$ на C_ε? Очевидно, не больше $\nu(B_\varepsilon \cap C_\varepsilon)$.

$$\mu^*(A) \geq \nu(B_\varepsilon) + \nu(C_\varepsilon) - \nu(B_\varepsilon \cap C_\varepsilon) - 2\varepsilon$$

$$\mu^*(A) \geq \nu(B_\varepsilon \cup C_\varepsilon) - 2\varepsilon = \nu(B_\varepsilon) + \nu(C_\varepsilon) - \nu(B_\varepsilon \cap C_\varepsilon) - 2\varepsilon.$$

Легко проверить, что т.к. $B \cap C = \varnothing$ $B_\varepsilon \cap C_\varepsilon \subset (B \triangle B_\varepsilon) \cup (C \triangle C_\varepsilon)$

и $\nu(B_\varepsilon \cap C_\varepsilon) = \mu^*(B_\varepsilon \cap C_\varepsilon) < 2\varepsilon$



Итак

$$\mu^*(A) \geq \overset{\mu^*}{\overset{\shortparallel}{\nu}}(B_\varepsilon) + \overset{\mu^*}{\overset{\shortparallel}{\nu}}(C_\varepsilon) - 2\varepsilon - 2\varepsilon \geq$$

$$\geq \mu^*(B) - \varepsilon + \mu^*(C) - \varepsilon - 4\varepsilon = \mu^*(B) + \mu^*(C) - 6\varepsilon.$$

В силу произвольности ε получаем нужное неравенство.

Теорема доказана.

Определение (меры Лебега) Сужение μ^* на M, которое в силу теоремы 9 является мерой, и называется **мерой Лебега**.

Осталось разобраться со счётностью.

Теорема 10 (M — σ-алгебра)

Док-во. Пусть $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, где $A_i \in M$. Докажем, что $A \in M$.

Сделаем объединение дизъюнктным: $B_1 = A_1$,

$B_2 = A_2 \setminus A_1$,

$B_3 = A_3 \setminus \bigcup_{i=1}^{2} A_i$ и т.д.

Так, что $A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i$, где по-прежнему $B_i \in M$. Заметим, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(B_i)$ сходится. Действительно, для любого конечного n

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \mu^*(B_i)}_{=\mu} \le \mu^*(A) < \infty$$

$$\le \mu^*\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} B_i\right) \le \quad \text{т.к. } \bigsqcup_{i=1}^{n} B_i \subset A.$$

То, что внешняя мера большего мн-ва больше, видно из определения μ^*.

Итак, числовой ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(B_i)$ сходится. Идея далее такова: приблизим A конечным объединением $\bigsqcup_{i=1}^{n} B_i$, а конечное объединение эл-ом $R(S)$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Найдём $n \in N$ / $\sum_{i=n+1}^{\infty} \mu^*(B_i) < \varepsilon$. ~~Тогда~~ Далее т.к. $\bigsqcup_{i=1}^{n} B_i \in M$ $\exists\, C \in R(S)$ / $\mu^*\left(C \triangle \bigsqcup_{i=1}^{n} B_i\right) < \varepsilon$.

Смотрим

$$(C \triangle A) \subset \left(C \triangle \bigsqcup_{i=1}^{n} B_i\right) \cup \bigsqcup_{i=n+1}^{\infty} B_i$$

$$\mu^*(C \triangle A) \le \underbrace{\mu^*\left(C \triangle \bigsqcup_{i=1}^{n} B_i\right)}_{<\varepsilon} + \underbrace{\mu^*\left(\bigsqcup_{i=n+1}^{\infty} B_i\right)}_{\le \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu^*(B_i) < \varepsilon} < 2\varepsilon$$

Теорема доказана.

Теорема 11 (μ σ-аддитивна)

Док-во: Неравенство $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \le \mu(A)$ есть для любой меры,

Пусть $A, A_i \in \mathfrak{M}$, $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, а μ — мера.

Обратное нер-во доказано в Теореме 7.

Теорема доказана.

Определение (стандартной меры Лебега на n-мерном промежутке)

Если ~~на~~ в качестве S взять промежутки $\{a, b\} \subset [A, B] \subset \mathbb{R}^n$, а в качестве m взять ст. меру на полукольце промежутков:

$$m(\{a, b\}) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i),$$

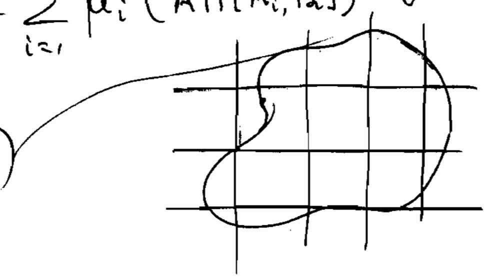
то после применения общей конструкции получим некоторую меру. Её ~~на~~ будем называть стандартной мерой Лебега на $[A, B]$.

§4. σ-конечные меры. Мера Лебега на $\mathbb{R}^n$.

Замечание (о мере Лебега на $\mathbb{R}^n$). Все предыдущие построения годятся только для мн-в, лежащих в некотором $[A,B]\subset\mathbb{R}^n$. Как быть с произвольными множествами? Представим $\mathbb{R}^n$ как

$\mathbb{R}^n=\bigsqcup_{i=1}^{\infty}[A_i,B_i]$, что, очевидно, возможно. На каждом $[A_i,B_i]$ можно продолжить σ-адд. меру m до меры Лебега μ_i. Теперь для произв-ого $A\subset\mathbb{R}^n$ определим его меру так: $\mu(A)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i(A\cap[A_i,B_i])$.

При этом может получиться, что $\mu(A)=\infty$ (при условии, что все $A\cap[A(i),B(i)]$ измеримы.)



Определение (σ-конечной меры). Пусть X — мн-во (читай $\mathbb{R}^n$), $\mathcal{S}$ — п.к. мн-в в X (возможно без единицы), а m — σ-аддитивная мера на $\mathcal{S}$. Предположим, что X представляется в виде $X=\bigsqcup_{i=1}^{\infty}B_i$, $B_i\in\mathcal{S}$. ~~Множество $A\in X$ называется измеримым~~ ~~если~~ Пересечение $\mathcal{S}\cap B_i=\{A\cap B_i \mid A\in\mathcal{S}\}$ — п.к. с единицей B_i, на которых задана σ-адд. мера m (точнее ее сужение). Используя предыдущую конструкцию, мы можем построить мн-ва измеримых мн-в M_i и продолжение меры μ_i.

Будем говорить, что $A\in X$ измеримо, если $\forall i\in N$ $A\cap B_i\in M_i$. Совокупность всех таких A обозначим M. Меру зададим след. образом

$$\mu(A)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i(A\cap B_i).$$

Построенная мера называется σ-конечной мерой Лебега.

Теорема 12 (о σ-конечной мере).

(1) M — σ-алгебра

(2) μ — σ-аддитивна на M.

(3) μ не зависит от способа представления $X = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$.

Док-во. (1). Единица в M — это X. Ясно, что $X \in M$.

Покажем, что для $A, C \in M$ верно $A \cap C, A \Delta C \in M$.

По предположению $A \cap B_i$ и $C \cap B_i$ измеримы в M_i. Далее

$(A \cap C) \cap B_i = (A \cap B_i) \cap (C \cap B_i)$, и значит, $\forall i$ $(A \cap C) \cap B_i \in M_i$

Аналогично, $(A \Delta C) \cap B_i = (A \cap B_i) \Delta (C \cap B_i) \in M_i$. С бесконечными объединениями аналогично.

(2). Пусть $A = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$, $A_j \in M$. Имеем

$$\mu(A) = \mu\Big(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i\Big(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j \cap B_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i\Big(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} (A_j \cap B_i)\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu_i(A_j \cap B_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(A_j \cap B_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

(3). Доказывать не будем. См. Дьяченко, Ульянов.

Теорема доказана.

Определение (ст. меры Лебега на $\mathbb{R}^n$). ~~Б~~ σ-конечная мера на $\mathbb{R}^n$, полученная применением предыдущей конструкции к ст-ной мере на промежутках $\mathbb{R}^n$, называется ст. мерой Лебега на $\mathbb{R}^n$.

§5. Непрерывность мер

Определение (непрерывной меры). Пусть μ — конечная мера на кольце R. Мера μ называется непрерывной, если для любых $A, A_i \in R \mid A_1 \supset A_2 \supset A_3 \dots$, $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ верно

$$\lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \mu(A)$$

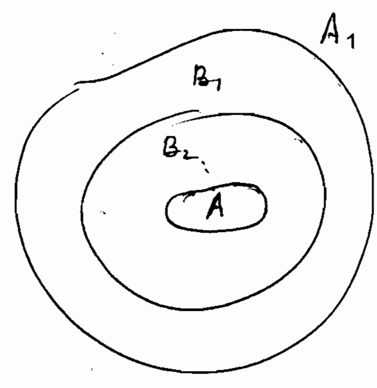
Это свойство меры потребуется для док-в некоторых свойств инт-ла.

Теорема 13 (о непрерывности меры).

(1) Мера (конечная) на кольце непрерывна $\Leftrightarrow$ она σ-аддитивна.

(2) Пусть μ — σ-конечная мера на σ-алгебре M. Если $A_i \in M \mid A_1 \supset A_2 \supset A_3 \dots$, $\mu(A_1) < \infty$ и $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, то

$$\mu(A) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$$



Док-во. Шаг 1 (достаточность)

Положим $B_i = A_i \setminus A_{i+1}$. Тогда $A_1 \setminus A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_i$

По σ-аддитивности μ

$$\mu(A_1) - \mu(A) = \mu(A_1 \setminus A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \sum \mu(A_i) - \mu(A_{i+1}) =$$
$$= \lim\left(\mu(A_1) - \cancel{\mu(A_2)} + \dots + \cancel{\mu(A_{i-1})} - \mu(A_i)\right) =$$
$$= \mu(A_1) - \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$$

и достаточность доказана.

Шаг 2 (необходимость) Пусть $B_n = \bigsqcup_{i=n}^{\infty} A_i \ (= A \setminus \bigsqcup_{i=1}^{n-1} A_i)$

Тогда $B_i \in R$, $B_1 \supset B_2 \supset \dots$ и $\bigcap B_i = \varnothing$. По непрерывности

$$0 = \mu(\varnothing) = \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_n\right) = \lim \mu(B_n) = \lim \mu\left(A \setminus \bigsqcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) = \lim\left(\mu(A) - \mu\left(\bigsqcup^{n-1} A_i\right)\right) =$$

$$= \mu(A) - \lim_n \sum_{i=1}^{n-1} \mu(A_i) = \mu(A) - \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_i) = 0.$$

Значит ряд $\sum_{i=1}^{n-1} \mu(A_i)$ сходится, причем к $\mu(A)$, а это и есть σ-аддитивность.

Шаг 3 (пункт (2)). Заметим, что $\bigcap A_i \in M$ т.к. M — σ-алгебра, а она δ-алгебра (см. замечание после опр σ-алгебры).

Рассмотрим $M_1 = \{A \in M \mid \mu(A) < \infty\}$ — кольцо всех измеримых мн-в с конечной мерой. Оно не будет σ-алгеброй или σ-кольцом, но это и не нужно! Тогда μ будет σ-аддитивной конечной мерой на M_1 и мы можем воспользоваться частью 1.

т.к. $A, A_1, A_2, \dots \in M_1$.

Теорема доказана

Замечание. (Без об условии $\mu(A_1) < \infty$). Без этого условия неверно. Рассмотреть $A_i = [i, +\infty)$ на $\mathbb{R}$. $\bigcap A_i = \varnothing$ но

$\lim \mu(A_i) = +\infty$.

Таким образом, мера Лебега непрерывна.

§6. Структура измеримых множеств. Борелевские множества.

Теорема этого параграфа понадобится в следующем семестре при док-ве теоремы Фубини и формулы замены переменной.

Теорема 14 (о структуре измеримых множеств). Пусть m — σ-~~аддитивная~~ ~~конечная~~ мера на п.к. S, а μ — σ-конечная мера на σ-алгебре M, полученная продолжением m. Любое $A \in M$ с $\mu(A) < \infty$ можно представить в виде

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij} \setminus A_0,$$

где (1) $A_{ij} \in R(S)$

(2) $A_{i1} \subset A_{i2} \subset \dots$

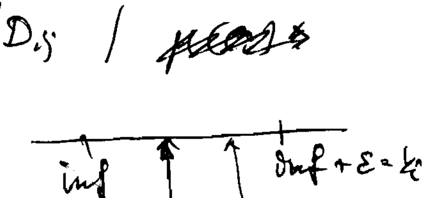
(3) $B_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij}$ убывают: $B_1 \supset B_2 \supset \dots$

(4) $\mu(A_0) = 0$.

Док-во (1) Вспомним, что для $A \in M$ его мера — это внешняя мера $\mu(A) = \mu^*(A) = \inf\limits_{\substack{A \subset \cup A_i \\ A_i \in S}} \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$. По определению inf для любого

$\varepsilon = \frac{1}{i}$ найдутся $D_{ij} \in S$ / $A \subset C_i := \bigcup_{j=1}^{\infty} D_{ij}$ / ~~...~~

$$\mu(A) < \mu(C_i) < \mu(A) + \frac{1}{i}$$



(2) Превратим C_i в убывающую цепочку:

$B_1 = C_1$, $B_2 = C_1 \cap C_2$, $B_n = \bigcap_{i=1}^{n} C_i$.

При этом сохранится $\mu(A) < \mu(B_i) < \mu(A) + \frac{1}{i}$

Итак B_i построены.

(3) Разберемся со внутр. структурой B_i:

$$B_i = \bigcap_{i=1}^{i} \bigcup_{j=1}^{\infty} D_{ij} = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{ij}$$, где E_{ij} – конечные пересечения D_{ij}

и значит $E_{ij} \in \mathcal{S}$ как и D_{ij}.

(4) Сделаем из E_{ij} возраст. цепочки по j при каждом i:

$$A_{ij} = \bigcup_{k=1}^{j} E_{ik}$$, при этом B_i не изменится.

Все A_{ij} построены.

(5) Определим $A_0 = A \setminus (\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i)$ и покажем, что $\mu(A_0) = 0$.

~~По непрерывности μ, которая~~ по теореме 13 п. 2.

$$\mu(A_0) = \mu(A \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i) = \mu(\cap B_i) - \mu(A) = \lim \mu(B_i) - \mu(A) = 0$$

Теорема доказана.

Далее мы будем работать со станд. мерой Лебега на $\mathbb{R}^n$.

В случае $\mathbb{R}^n$ кроме меры есть и другие структуры: векторная и топологическая. Естественно, что мера связана с ними. С первой все обстоит просто: μ инвариантна относительно сдвигов и поворотов (хотя последнее нужно доказывать!). Связь с открытыми и замкнут. множествами требует для выражения несколько больше слов.

Мы оговорим, что мн-во, на котором задается мера должно быть σ-алгеброй. Посмотрим как можно сделать σ-алгебру исходя просто из открытых мн-в (или даже откр. промежутков). Для начала потребуется теорема:

<u>Теорема 15 (о существовании мин. σ-кольца)</u>. Пусть $\mathfrak{A}$ – произв. система множеств. Тогда существует минимальное σ-кольцо, содерж. $\mathfrak{A}$.

Док-во. Абсолютно аналогично Теореме 2.

Определение (борелевской σ-алгебры). Минимальное σ-кольцо, содержащее все открытые мн-ва в $\mathbb{R}^n$ называется *борелевской σ-алгеброй*. (Очевидно, что $\mathbb{R}^n$ является единицей), и обозначается $\mathcal{B}$.

Как же расположено $\mathcal{B}$ относительно $\mathcal{M}$?

13.11.2009
лекция

Теорема 16 ($\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$)

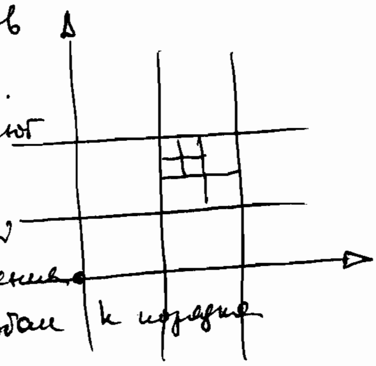
Док-во. Нужно доказать, что любое борелевское мн-во измеримо по Лебегу. Но непосредственно мы это делать не будем.

Сначала докажем, что любое открытое мн-во можно представить в виде счетного объединения ~~открытых или замкнутых~~ параллелепипедов.

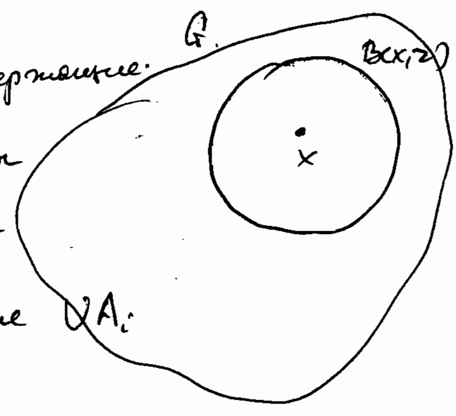
Введем понятие двоичного куба. Двоичный куб — это ~~в шар~~ любой куб вида $[i_1, i_1+1) \times \dots \times [i_n, i_n+1)$ или куб полученный из такого путем (многократного) деления на 2^n равных кубов.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — открытое мн-во, а A_i — все двоичные кубы, целиком лежащие в G. Тогда $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Действительно, включение $G \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ верно по определению.

Двоичных кубов счетное число, и они покрывают все $\mathbb{R}^n$. Куб полученный k-кратным делением будем звать кубом k порядка.



Теперь обратно. Пусть $x \in G$. Тогда по открытости $\exists$ шар $B(x,r)$ | $x \in B(x,r) \subset G$. Рассмотрим все дв кубы содержащие x. Размер такого куба (по диагонали) равен $2^{-k}\sqrt{n}$, и начиная с некоторого k они лежат в $B(x,r)$ и следовательно входят в объединение $\bigcup A_i$.



Так что, $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Представимость $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ означает, что $A \in M$ т.к. M - σ-алгебра.

Наконец, покажем, что $B \subset M$. Дело в том что M — σ-алгебра, содержащая все открытые мн-ва, а B — это наименьшая такая σ-алгебра. Вот и всё!

Теорема доказана

Вопрос: Замкнутые будут измеримы? А борелевскими?

Итак, $B \subset M$. Однако, оказывается, что любое измеримое можно ~~сколь угодно близко~~ представить борелевским.

Теорема 16 (о представлении измеримых через борелевские).

Пусть ~~вектор в~~ A - измеримое мн-во в $\mathbb{R}^n$ относительно ст. меры Лебега. Тогда

$$A = \bigcap G_i \setminus P_1 \quad \text{и} \quad A = \bigcup F_i \cup P_2,$$

где

$G_1 \supset G_2 \supset \dots$ открытые,

$F_1 \subset F_2 \subset \dots$ замкнутые,

P_1, P_2 имеют меру ноль.

Шаг 1 ($\mu < \infty$) ~~Замечание~~ Док-во. Нужно по существу повторить док-во Теоремы 14. с изменениями. Сначала рассмотрим случай $\mu(A) < \infty$

По определению $\mu(A) = \mu^*(A) = \inf\limits_{\substack{A \subset \bigcup A_i \\ A_i \in S}} \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$

$$\forall \varepsilon = \frac{1}{i} \quad \exists D_{ij} \in S \quad \Big| \quad \mu^*(A) \le \mu(C_i) < \mu^*(A) + \frac{1}{i}$$

$$C_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_{ij}$$

Однако, D_{ij} не обязательно открыты, а значит и C_i не открыты.

Увеличим каждого D_{ij} заменив его открытым: $\exists$ открытое $\mathring{D}_{ij}$ | $D_{ij} \subset \mathring{D}_{ij}$ | $\mu(D_{ij}) < \mu(\mathring{D}_{ij}) + \frac{1}{i}\frac{1}{2^j}$ (можно явно выписать). Тогда для теперь уже открытого $\mathring{C}_i = \cup \mathring{D}_{ij}$ имеем

$$\mu(C_i) \le \mu(\mathring{C}_i) \le \mu(C_i) + \frac{1}{i}.$$

Итак,

$$\mu(A) \le \mu(\mathring{C}_i) \le \frac{2}{i}$$

Теперь рассмотрим по убыванию: $G_i = \bigcap_{k=1}^{i} \mathring{C}_k$

При этом подавно

$$\mu(A) \le \mu(G_i) \le \frac{2}{i}$$

Так же как в теореме 14. $\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i \setminus A = P_1$ имеет $\mu(P_1) = 0$.

Шаг 2 ($\mu(A)$ любая). При построении σ-конечной меры мы предполагали $\mathbb{R}^n = \bigsqcup B_i$, где $B_i \in S$ — промежутки. Для каждого $A \cap B_i = A_i$ имеем $A_i = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_{ij} \setminus P_i$ где G_{ij} — открытые а $\mu(P_i) = 0$. Тогда

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} G_{ij} \setminus P_i\right) = \bigcap_{j=1}^{\infty}\Big(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} G_{ij}}_{\text{открытые}}\Big) \setminus \underbrace{\left(\bigcup P_i\right)}_{\mu = 0.}$$

открытые причем диаметров по убыванию

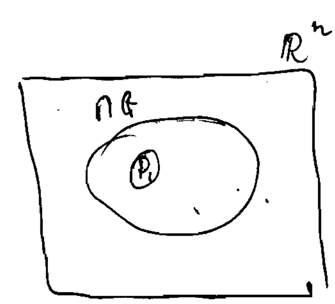
Шаг 3 (представление через замкнутые)

Перейдем к дополнению $\mathbb{R}^n \setminus A$. Его можно представить в виде

$$\mathbb{R}^n \setminus A = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i \setminus P_1 \to A = \mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcap G_i \setminus P_1\right) =$$

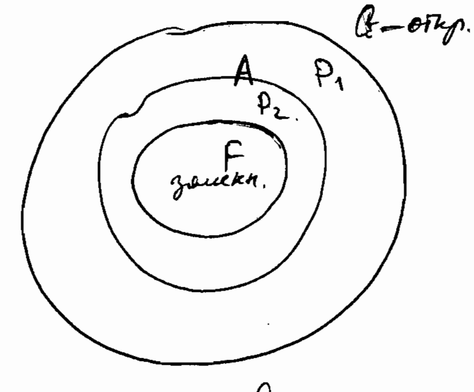
$$= \left(\mathbb{R}^n \setminus \bigcap G_i\right) \cup P_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{(\mathbb{R}^n \setminus G_i)}_{F_i =} \cup \underbrace{P_1}_{P_2 := P_1}.$$

они замкнуты



Теорема доказана

Замечание (о Теореме 16). Теорема 16 означает, что любое измеримое $A \in M$ в $\mathbb{R}^n$ можно приблизить снаружи ~~открытыми~~ и изнутри ~~замкнутыми~~ борелевскими мн-вами $\bigcap G_i$ и $\bigcup F_i$, причем оставшийся зазор P_1 и P_2 имеет меру ноль.



Но этот последний зазор борелевские преодолеть не могут. Это можно точно выразить при помощи следующего понятия:

Определение (полной меры). Мера μ называется полной, если $\forall A \mid \mu(A)=0$ любое подмн-во $B \subset A$ тоже измеримо по мере μ, при этом естественно $\mu(B)=0$.

Замечание (о полноте меры Лебега). Мера Лебега полна

Это непосредственно следует из определения. Мы уже заметили, что если $\mu^*(A)=0$, то A измеримо! А вот борелевская мера т.е $\mu|_B$ неполна. Это значит, что существуют $A \in B \mid \mu(A)=0$, у которых есть подмн-ва не принадлежат B. ($\notin \operatorname{dom} \mu|_B$).

Соотв. пример нетривиален и строится при помощи Канторовой лестницы.

Польза от борелевских мн-в будет понятна позже.

Замечание (о внешней мере и внутр. мере) для $A \subset [a,b]$

$\mu^*(A) = \inf\{\mu(B) \mid A \subset B,$ ~~…~~ открыто $B \subset [a,b]\}$

$\mu_*(A) = \sup\{\mu(B) \mid B \subset A,\ B$ замкнутое $\subset [a,b]\}$

Если $\mu^*(A) = \mu_*(A)$, то A измеримо по Лебегу и $\mu(A) = \mu^*(A)$.

§7. Измеримые функции

<u>Определение (измеримого простр-ва)</u>. Тройка (X, M, μ), где M – σ-алгебра с единицей X, а μ – σ-аддитивная или σ-конечная мера на M, называется <u>измеримым простр-вом</u>.

<u>Примеры</u> 1. $X = \mathbb{R}^n$, μ – ст. мера Лебега, M – измеримые по Лебегу

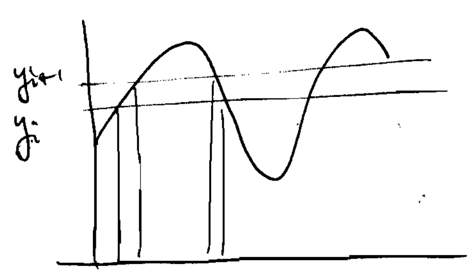
2. $X = \mathbb{R}^n$, $M = B$ – борелевская σ-алгебра, μ – ~~...~~ – мера Бореля т.е. сужение ст. меры Лебега на B.

<u>Определение (измеримой ф-ции)</u>. Пусть (X, M, μ) – измеримое пр. Ф-ция $f: A \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, где $A \in M$, <u>измерима</u>, если $\forall c \in \mathbb{R}$ мн-во $f^{-1}((c, +\infty]) = \{x \in A \mid c < f(x) \le +\infty\}$ измеримо.

<u>Замечание</u>. В дальнейшем всегда будем считать, что ф-ции заданы на X. Если это не так, можно либо продолжить f на все X например нулем, либо перейти к измеримому прост-ву $(X \cap \operatorname{dom} f, M \cap \operatorname{dom} \mu)$.

<u>Замечание (об интеграле Лебега)</u> Напомним, зачем нам измеримые функции при построении инт-ла Лебега

$$\sum y_i \, \mu(\{y_i \le f(x) < y_{i+1}\}) \to \int f \, d\mu$$



Замечание (об определении измеримых функций).

Можно подойти к определению измеримых ф-ии по аналогии с определением непр-ти (прообраз открытого открыт).

Пусть в обл. опр. есть измеримое пр-во и в области значений

Тогда функция будет измеримая, если прообраз любого измеримого измерим. Вопрос только какие измеримые брать в обл. опр и значений.

~~Если~~ Оказывается, что если и там и там взять лебеговские, то даже не все непрерывные ф-ии будут измеримы, а вот если в обоих взять борелевские то будет в самый раз.

Далее (X, M, μ) - измер. пр. постр в $\mathbb{R}^n$ по ст. мере

Теорема 18 (об измеримых функциях). ~~Пусть (X, M, μ) — изм. пр.~~

(1) Любая непрерывная ф-ция $f: A \to \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^n$ и измерима, измерима

(2) Если $f: A \to \bar{\mathbb{R}}$ измерима, то $f^{-1}(+\infty)$, $f^{-1}([c,+\infty])$, $f^{-1}((a,b))$ измеримы.

(3) Если $f: A \to \bar{\mathbb{R}}$ измерима, то для любого борелевского B $(\subset \mathbb{R})$ мн-во $f^{-1}(B)$ измеримо

16.11.2009

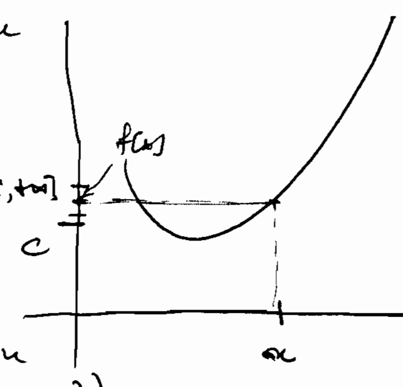
Док-во. Пусть $c \in R$ покажем, что $f^{-1}((c,+\infty])$ лежит измеримое

Достаточно показать, что $f^{-1}((c,+\infty]) = G \cap A$, где G открыто.

Действительно, $\forall x \in f^{-1}((c,+\infty])$ имеем $f(x) > c$ и по непр-ти f $\exists B(x,\delta)$ | (возьмём ε | $(f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon) \subset (c,+\infty]$)

$\forall y \in B(x,\delta) \cap A$ $f(y) \in (f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon) \subset (c,+\infty]$

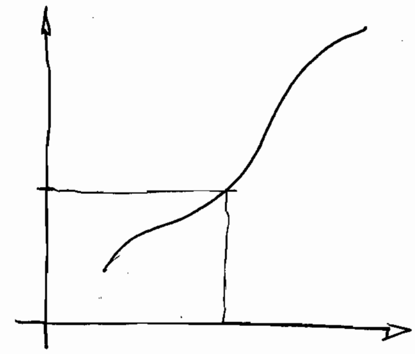
т.е. $B(x,\delta) \cap A \subset f^{-1}((c,+\infty])$



Положим $G = \bigcup_{x \in f^{-1}((c,+\infty])} B(x,\delta_x)$. Тогда G открыто и $G \cap A = f^{-1}((c,+\infty])$

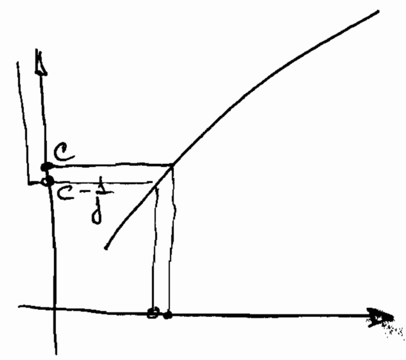
G измеримо как открытое, а A по условию. Итак $G \cap A$ измеримо

(2) Здесь все следует из очевидных теоретико-множественных равенств: $+\infty$



$$f^{-1}(+\infty) = \underbrace{\bigcap_{j=1}^{\infty} \underbrace{f^{-1}((j,+\infty])}_{\text{все измеримы}}}_{\text{измеримо т.к. } M - \sigma\text{-алгебра}}$$

$$f^{-1}(-\infty) = \underbrace{\bigcup_{j\in Z} \underbrace{f^{-1}((j,+\infty])}_{\text{измеримы по опр.}}}_{\text{измеримы т.к. } M - \sigma\text{-алгебра}}$$



$$f^{-1}([c,+\infty]) = \bigcap_{j=1}^{\infty} f^{-1}((c-\tfrac{1}{j},+\infty])$$

$$f^{-1}((a,b)) = f^{-1}((a,+\infty]) \setminus f^{-1}([b,+\infty])$$

(3) Найдем для каких мн-в $D \subset R$ $f^{-1}(D)$ измеримо.
Если $f^{-1}(A)$ и $f^{-1}(B)$ измеримы, то ~~в силу~~

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$
$$f^{-1}(A \Delta B) = f^{-1}(A) \Delta f^{-1}(B)$$

тоже измеримы. Аналогично, если $f^{-1}(A_i)$ измеримы, то

$$f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(A_i)$$ тоже измеримо, т.к. M – σ-алгебра

В общем совокупность мн-в D, для которых $f^{-1}(D)$ измеримо – σ-алгебра, причем содержащая открытые мн-ва.
Т.к. борелевская σ-алгебра минимальна, все D в ней изм.

Теорема доказана.

Теорема 18 (об измеримости композиции). Пусть

(1) f измерима, ~~на~~ конечна и все ее значения лежат в (открытом) $G \subset \mathbb{R}$

(2) g непрерывна на G.

Тогда $g(f(x))$ измерима

Док-во. Рассмотрим $(g\circ f)^{-1}((c,+\infty]) = \left|\begin{array}{l}\text{т.к. } g\circ f \text{ принимает} \\ \text{конечные значения}\end{array}\right|$

$$= (g\circ f)^{-1}((c,+\infty)) = f^{-1}\Big(\underbrace{g^{-1}\big(\underbrace{(c,+\infty)}_{\text{открыто}}\big)}_{\text{открыто} \to \text{борелевское}}\Big)$$

$\underbrace{\phantom{f^{-1}(g^{-1}((c,+\infty)))}}_{\text{измеримо}}$

Теорема доказана

Замечание (о композиции двух измеримых ф.)

В общем случае композиция двух измеримых ф-ций не измерима

$$(g\circ f)^{-1}((c,+\infty]) = f^{-1}\big(\underbrace{g^{-1}(\underbrace{(c,+\infty]}_{\text{бор}})}_{}\big)$$

измеримое по Лебегу

но может не быть борелевским!

(См. ниже)

Теорема 19 (об измеримости и алгебр. операциях). Пусть $f, g : X \to \mathbb{R}$ измеримы и конечны. Тогда $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ $(g \neq 0)$ тоже измеримы.

Док-во. Ясно, что функции $a \cdot f(x)$ и $a + f(x)$ измеримы.

Рассмотрим мн-во $\{x \mid f(x) > g(x)\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{\{x \mid f(x) > r_n\}}_{\text{изм.}} \cap \{x \mid g(x) < r_n\} \right)$, где r_n — все рациональные числа.

Сумма. Рассмотрим

$$(f+g)^{-1}((c,+\infty]) = \{x \in X \mid f(x)+g(x) > c\} = \{x \in X \mid f(x) > c - g(x)\}$$

оно измеримо по предыдущему.

Произведение. Если f измерима, то f^2 тоже измерима как композиция с непрерывной $x \mapsto x^2$. Далее $(f+g)^2 = f^2 + 2f \cdot g + g^2$, т.е.

$$f g = \frac{(f+g)^2 - f^2 - g^2}{2}$$ измерима по предыдущему.

Отношение. $\frac{1}{g}$ измерима как композиция с непрерывной $t \mapsto \frac{1}{t}$.

Теорема доказана.

Определение (почти всюду). Говорят, что некоторое условие или свойство выполняется почти всюду, если оно выполняется везде кроме некоторого мн-ва меры ноль.

Пример. $f = g$ на X п.в. если $\exists A \subset X \mid \mu(A) = 0$ и $f(x) = g(x)$ для всех $x \in X \setminus A$. Аналогично можно говорить, что f конечна п.в. или $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ п.в. и т.д.

Определение (действия с бесконечн. значениями функций).

Определим сумму и произведение для беск. значений так:

$+$	0	$a\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
~~0~~	~~0~~	~~a~~	~~$+\infty$~~	~~$-\infty$~~
$b\in\mathbb{R}$	b	$a+b$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\boxed{0}$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\boxed{0}$	$-\infty$

$\square$ – формально

$\cdot$	0	$a\in\mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
0	0	0	0	0
$b\in\mathbb{R}$	0	ab	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	0	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	0	$\pm\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$\pm$ – в зависимости от знака b и a.

Замечание (о теореме 19 для беск. функций). Если понимать действия с беск. значениями как в предыд. определении, то теорема 19 остается верной и для ~~беск.~~ функций $f,g: X \to \overline{\mathbb{R}}$. Действительно, посмотрим почему так на примере $f+g$. Пусть

$f = \pm\infty$ на $A_\pm$ и конечна на A_0, так что $X = A_+ \sqcup A_0 \sqcup A_-$ и аналогично с g: $X = B_+ \sqcup B_0 \sqcup B_-$. Все эти множества измеримы (по теореме 18). При этом на $A_0 \cap B_0$ обе функции конечны. Смотрим (для $c \geq 0$).

	A_+	A_0	A_-
B_+	$+\infty$	$+\infty$	0
B_0	$+\infty$	$<\infty$	$-\infty$
B_-	0	$-\infty$	$-\infty$

$$(f+g)^{-1}((c,+\infty]) = (f+g)^{-1}((c,+\infty)) \cup (f+g)^{-1}(+\infty) =$$

$$= \underbrace{(\underbrace{f|_{A_0\cap B_0} + g|_{B_0\cap A_0}}_{\text{можно заменить на сужение}})^{-1}((c,+\infty))}_{\text{здесь можно заменить } (c,+\infty) \text{ на } (c,+\infty] \text{ и применить теорему 18.}} \cup \underbrace{(A_+\cap B_+) \cup (A_+\cap B_0) \cup (A_0 \cap B_+)}_{\text{все измеримы.}}$$

Если же $c < 0$ нужно добавить еще пару множеств, где $f+g = 0$

Конец замечания

Теорема 20 (об измеримости предела). Пусть $f_n : X \to R$ послед. измеримых функций. Тогда

(1) $\varphi(x) = \sup\limits_n f_n(x)$ измерима

(2) $\psi(x) = \overline{\lim\limits_n} f_n(x)$ измерима

(3) $F(x) = \lim f_n(x)$, определенная на мн-ве, где $\lim$ существ (хотя бы бесконечный), измерима.

Док-во. (1) Для начала заметим, что для фиксированного $x \in X$

$$\sup_n f_n(x) > C \Longleftrightarrow \exists n \mid f_n(x) > C$$

$\leftarrow$ ясно, т.к. $\sup \geqslant f_n(x)$; $\sup$ – верхн. гр.-ца

$\rightarrow$ по свойству $\sup$: C – опущенная планка для $\sup$.; $\sup$ – точная в. гр.

Теперь $\varphi^{-1}((C, +\infty]) = \{x \mid \varphi(x) > C\} = \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \mid f_n(x) > C\}}_{\text{измеримо т.к. } M - \sigma\text{-алгебра}}$

(2) По предыдущему $\varphi_k(x) = \sup\limits_{n \geqslant k} f_n(x)$ все измеримы.

$$\overline{\lim} f_n(x) = \inf_{k \in N} \varphi_k(x) = \underline{\lim}\, \varphi_k(x).$$

Для любого фиксированного $x \in X$

$$\inf_k \varphi_k(x) \underline{>} C \longleftrightarrow \exists \delta > 0\ \forall k \quad \varphi_k(x) > C + \delta.$$

(Если без $\exists \delta > 0$, то будет $\inf\limits_k \varphi_k(x) \underline{\underline{\geqslant}} C \longleftrightarrow \forall k\ \varphi_k(x) > C$)

Значит

$$\{x \in X \mid \inf_k \varphi_k(x) > C\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in X \mid \varphi_k(x) > C + \tfrac{1}{i}\}$$

В правой части все мн-ва измеримы.

Аналогично, $\inf\limits_n f_n(x)$ и $\underline{\lim} f_n(x)$ измеримы.

(3). $f_n(x)$ имеет предел ($в\ \overline{\mathbb{R}}$) $\Longleftrightarrow$ $\overline{\lim} f_n(x) = \underline{\lim} f_n(x)$.

Пусть $E = \{x \mid \overline{\lim} f_n(x) = \underline{\lim} f_n(x)\}$. Мн-во E измеримо как мн-во Лебега разности двух измеримых функций.
$\leq$

А $\lim f_n$ на E – это любая из этих функций. Значит она тоже измерима как сужение измеримой ф-ии на измеримое мн-во.

Теорема доказана.

<u>Замечание (о сходимости п.в. и полной мере)</u>. ~~Пусть~~ Если мера полная (а мера Лебега полная), то можно утверждать следующее: если $\lim f_n(x) = f(x)$ для п.в. $x \in X$, то f измерима. Пусть $A \subset X \mid \mu(A) = 0$ и $f_n(x) \to f(x)$ на $X \setminus A$.

Тогда $\{x \mid f(x) > c\} = \underbrace{\{x \in X\setminus A \mid f_{X\setminus A} > c\}}_{\substack{\text{здесь } f|_{X\setminus A} = \lim f_n(x) \\ \text{и это мн-во измеримо} \\ \text{по теореме 20.}}} \cup \underbrace{\{x \in A \mid f|_A > c\}}_{\substack{\subset A \text{ и в силу} \\ \text{полноты измеримо} \\ \text{и имеет } \mu \text{ нуль.}}}$

Без полноты меры измеримость мн-ва $\{x \in A \mid f|_A > c\}$ ниоткуда не следует, хотя оно содержится в A, $\mu(A) = 0$.

<u>Теорема 21 (об измеримости производной)</u>. Пусть $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ непрерывна, и ~~на~~ $E \subset (a, b)$ – мн-во, на котором $f(x)$ дифф-ма.

Тогда $f'(x)$ на E измерима.

Док-во. Рассмотрим верхнюю производную

$$\overline{f}'(x) = \overline{\lim_{h\to 0}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Можно понять, что для фиксированного $x \in X$

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} > c \longleftrightarrow \exists \delta > 0 \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists h : |h| < \varepsilon \ \Big| \ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} > c+\delta.$$

или

$$\longleftrightarrow \exists i \in \mathbb{N} \ \forall j \in \mathbb{N} \ \exists h \in \mathbb{R} \ \Big| \ |h| < \frac{1}{j} \ \Big| \ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} > c + \frac{1}{i}$$

Тогда

$$\left\{x \in X \ \Big| \ \overline{\lim_{h\to 0}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} > c\right\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{|h|<\frac{1}{j}} \left\{x \in X \ \Big| \ (x+h) \in (a,b) \text{ и } \frac{f(x+h)-f(x)}{h} > c+\frac{1}{i}\right\}$$

В силу непрерывности $\{x \ldots\}$ открыто.

Далее $\bigcup_{|h|<1/j} \{\ \}$ тоже открыто, а значит измеримо.

Т.к. M – σ-алгебра, $\bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} \ldots$ измеримо.

Непрерывность нужна для открытости внутреннего мн-ва, поскольку внутри берётся несчётное объединение, а оно без открытости может оказаться неизмеримым. А вот для открытых любое объединение открыто.

Теорема доказана