

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Лектор — Михаил Вячеславович Коробков.

ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР

ФУНКЦИИ ОДНОЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Предварительные сведения. О терминологии и обозначениях. Высказывания, аксиомы, теоремы. Стандартные обозначения. Постоянные и переменные. Способы задания множеств. Принцип совпадения множеств.

Числовая прямая. Свойства системы вещественных чисел. Расширенная числовая прямая; отношение порядка; арифметические операции; модуль и знак числа. Промежутки. Ограниченные подмножества. Верхняя и нижняя грани числового множества. Аксиома граней. Принцип Архимеда. Полная упорядоченность натурального ряда. Принцип математической индукции; неравенство Бернулли; биномиальные коэффициенты. Теорема о пересекающихся отрезках; принцип вложенных отрезков. Диаметр числового множества. Окрестности точек расширенной числовой прямой. Свойства системы окрестностей. Теорема Бореля–Лебега о конечном покрытии. Классы действительных чисел (рациональные, иррациональные, алгебраические, трансцендентные), свойства плотности.

Отображения. Понятие отображения; бытующая терминология. Область задания отображения; пространство значений; образы и прообразы точек и множеств; график отображения. Сужение отображений. Постоянные, инъективные, сюръективные и биективные отображения. Композиция отображений. Обратимые отображения; критерий обратимости. Счетные множества. Несчетность континуума (теорема Кантора).

ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Предел последовательности. Топологическое определение предела последовательности. Единственность предела. Предел монотонной последовательности. Лемма о пределе промежуточной последовательности. Асимптотическая истинность высказываний. Теорема о неравенстве пределов. Арифметический критерий сходимости. Ограниченные и бесконечно малые последовательности. Теоремы о сумме пределов, о произведении пределов и об обратной величине предела. Теорема о пределе подпоследовательности. Теорема Вейерштрасса о частичных пределах; верхний и нижний пределы вещественной последовательности. Крите-

рий Коши существования конечного предела; последовательности Коши.
Приложение: вещественные числа по Вейерштрассу.

Суммирование бесконечных числовых рядов. Примеры появления сумм бесконечных числовых рядов. Основные вопросы. Популярные разложения в степенные ряды (формулировки). Об употреблении термина "ряд". Частичные суммы ряда. Сумма ряда. Суммируемые (сходящиеся) ряды; необходимое условие суммируемости. Сумма геометрической прогрессии. Условие суммируемости ряда $\frac{1}{n^s}$. Критерий Коши суммируемости ряда. Принцип сравнения. Абсолютно суммируемые ряды. Признаки Коши и Даламбера суммируемости ряда. Радиус сходимости степенного ряда. Телескопический признак, признаки Раабе, Гаусса, Бертрана. Теорема Мертенса о произведении рядов. **Приложения.** Область суммируемости экспоненциального ряда; экспонента; ее свойства. Иррациональность числа e . Трансцендентность числа Лиувилля. Сходимость последовательностей и суммирование рядов в поле комплексных чисел.

ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИЙ

Свойства операции $\lim$. Предельные точки и точки прикосновения подмножеств расширенной числовой прямой. Теорема о предельной точке $\sup A$. Асимптотическая истинность высказываний. Предел функции по подмножеству. Единственность предела. Пределы монотонных функций. Лемма о пределе промежуточной функции. Теорема о неравенстве пределов. Арифметический критерий сходимости. Теоремы о сумме пределов, о произведении пределов и об обратной величине предела. Теорема о пределе композиции. Критерий сходимости Гейне.

Асимптотические отношения сравнения. Свойства асимптотических сравнений; связь с операцией предела.

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

Непрерывность функции в точке. Топологический критерий непрерывности. Теорема о композиции непрерывных функций. Лемма о непрерывности промежуточной функции. Операции над непрерывными функциями. Лемма об устойчивости строгих неравенств. Локальный характер свойства непрерывности. Классификация точек разрыва. Точки разрыва монотонной функции.

Глобальная непрерывность. Теорема Вейерштрасса об экстремумах. Теорема Больцано–Коши о промежуточных значениях. Признак Больцано строгой монотонности. Теорема об обратной функции. Теорема