Занятие 1

Глава 1. Предел и непрерывность фукнции одной переменной

1. Построение графиков

(1) Построить графики функций: (а) $f(x) = \frac{3x+2}{2x-3}$, (б) $f(x) = 6\cos 2x + 8\sin 2x$.

Занятие 2

2. Мат индукция. Биномиальные коэффициенты

(2) Методом математической индукции доказать равенство $\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}} = 2\cos(\pi/2^{n+1})$.

(3) Доказать неравенство Бернулли $(1+x)^n \geq 1+nx$, $x > -1$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Теория множеств

(4) Доказать соотношения $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$, $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

4. Высказывания, кванторы

(5) Найти все a, для которых существует такое b, что при всех c выражение $b^2 - 4ab + 2ac - c^2 - 2b$ отрицательно.

Занятие 3

5. Ограниченность. Монотонность. Точные границы. Предел последовательности

(6) Найти точные границы последовательности $x_n = (-1)^{n-1}(2+3/n)$.

(7) Доказать, что для любых непустых числовых множеств $A, B \subset \mathbb{R}$ справедливо равенство $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$.

Занятие 4

(8) Исследовать на ограниченность и монотонность последовательности (а) $x_n = \sqrt{n^2+1} - n$; (б) $x_n = \sqrt[n]{n}$. Найти их предел.

(9) Доказать, что последовательность $x_n = (1+1/n)^{n+1}$ сходится.

Занятие 5

(10) Доказать, что (a) $\lim \frac{\ln n}{n} = 0$; (b) $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$, $a > 1$.

(11) Доказать, что последовательность $x_n = \sin n$ расходится.

Занятие 6

6. Предел функции. Асимптотические сравнения

(12) Найти пределы

$$\text{(а)} \quad \lim_{x \to 0} \frac{(1+\alpha x)^\beta - (1+\beta x)^\alpha}{x^2},$$

$$\text{(б)} \quad \lim_{x \to \pi/2} \frac{1 - \sin^{\alpha+\beta} x}{\sqrt{(1-\sin^\alpha x)(1-\sin^\beta x)}}.$$

Занятие 7

(13) Найти такие числа a, b, что

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1 + ax^2}{1 + bx^2} + O(x^5) \quad \text{при } x \to 0.$$

Занятие 8

(14) Найти все асимптоты функций (а) $y = x + \sqrt{4x^2 + x + 1}$; (б) $y = x \operatorname{arctg} x$.

Занятие 9

(15) Подобрать функции вида $C(x - a)^\lambda$, которые лучше всего аппроксимируют функции (а) $\operatorname{tg} x$ при $x \to \pi/2$; (б) $\ln \cos x$ при $x \to 0$.

Занятие 10

Глава 2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

1. Таблица производных. Дифференциал. Уравнение касательной.

(161.) Под каким углом пересекаются графики функций $\sin x$ и $\cos x$?

(17) Найти производную функции

$$y = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{x^2 - 1}.$$

Занятие 11

2. Производная обратной, параметрически заданной и неявной функции.

(18) Доказать, что существует единственная функция $y = y(x)$, определенная для всех значений переменной x и удовлетворяющая уравнению $y - \varepsilon \sin y = x$, $0 \le \varepsilon < 1$. Доказать, что эта функция бесконечно дифференцируема. Найти ее значение и все производные до третьего порядка включительно при $x = 0$.

Занятие 12

3. Экстремумы, монотонность, выпуклость, неравенство Йенсена.

(19) Доказать неравенство

$$\frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}.$$

(20) Определить число действительных корней уравнения $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20 = 0$ и локализовать их.

Занятие 13

4. Теорема Лагранжа. Правило Лопиталя

(216.1.) Найти предел

$$\lim_{x\to+\infty} x \left(\pi - 2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right).$$

Занятие 14

5. Старшие производные. Формула Тейлора

(22) Найти разложение функции $y = \ln(1 + \arcsin x)$ по формуле Тейлора в окрестности нуля до x^3.

Занятие 15

6. Графики

(23) Построить график функции

$$y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}.$$

7. Первообразная

(24) Найти неопределенные интегралы

$$\text{(а)} \quad \int \frac{x}{(x^2+1)(x+1)^2}\,dx,$$

$$\text{(б)} \quad \int \frac{dx}{3\sin x + \cos x},$$

$$\text{(в)} \quad \int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}.$$

Занятие 18

Глава 3. Интеграл Римана

1. Определенный интеграл

(25) Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^{x^2}}\int_0^x e^{y^2}\,dy.$$

(26) Найти интеграл

$$\int_0^\pi \operatorname{arctg}(\cos x)\,dx.$$

Занятие 19

2. Несобственный интеграл

(27) При каких значениях параметров p и q ($q>0$) сходится несобственный интеграл

$$\int_0^\infty \frac{x^p\sin x}{1+x^q}\,dx.$$

Занятие 20

3. Эйлеровы интегралы

(28) Определить область существования интеграла и выразить его через интеграл Эйлера:

$$\int_0^{\pi/2}\operatorname{tg}^\gamma x\,dx.$$

Занятие 21

4. Приложения

(29) Циклоида — это кривая, заданная уравнениями $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$. Найти (а) длину одной арки циклоиды; (б) площадь под аркой; (в) объем тела, полученого вращением арки вокруг оси Ox; (г) площадь поверхности указанного тела.

Занятие 22

Глава 4. Ряды

1. Абсолютная сходимость

(30) Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)}.$$

Занятие 23

2. Условная сходимость

(31) Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}.$$

Занятие 24

Глава 5. Дифференцирование многих переменных

1. Градиент, производная по направлению, касательная плоскость

(32) Доказать, что поверхности $x^2 + y^2 = z^2$ и $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ортогональны в каждой общей точке.

Занятие 25

2. Дифференцирование сложной функции

(33) Оператора Лапласа Δ переводит каждую дважды гладкую функцию $u(x, y, z)$ в новую функцию

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Выяснить, как действует оператор Лапласа на сферически симметричные функции, т. е. функции вида $u = f(r)$, где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Найти все сферически симметричные функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа $\Delta u = 0$.

Занятие 26

1. Дифференцирование сложной функции

(34) Проверить, что функция $u(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x\psi\left(\frac{y}{x}\right)$, где φ и ψ — достаточно гладкие функции, удовлетворяет уравнению

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Занятие 27

1. Формула Тейлора. Второй дифференциал

(35) Разложить по формуле Тейлора до второго порядка функцию

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{1 + x}{1 + y}.$$

Занятие 28

1. Локальный экстремум

(36) Найти точки локального экстремума функции

$$f = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}.$$

Занятие 1

Глава 5. Дифференцирование многих переменных (продолжение)

1. Обратные и неявные функции.

(11) Непрерывная функция $z = z(x, y)$ удовлетворяет условию

$$x^2 - y^2 + 2z^2 + xy - zy = 0$$

и условию $z(0,1) = 1$. Доказать, что в некоторой окрестности точки $(0,1)$ она бесконечно дифференцируема, а в самой точке найти dz и d^2z.

Занятие 2

2. Замена переменных без участия функции

(22) Преобразовать к полярным координатам r и φ дифференциальное выражение

$$y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Занятие 3

3. Замена переменных с участием функции

(33) В уравнении $yy' + xy^2 + x^3 = 0$ перейти к новым переменным u и t, которые связаны с прежними x и y двумя соотношениями:

$$u^2 - y^2 - x^2 = 0, \quad x^2 - t^2 + u^2 = 0.$$

Занятие 4

4. Условный экстремум

(44) Найти и исследовать точки условного экстремума функции $x + 4y - 2z$, если ее переменные связаны соотношениями:

$$x^3 + 64y^3 + 8z^3 + 12x + 48y + 2z = 26, \quad x + 4y = 2.$$

Занятие 5

5. Наибольшее и наименьшее значения

(55) Доказать, что функция $x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x - 2y$ достигает наибольшего и наименьшего значения на множестве точек плоскости, удовлетворяющих условию $2x^2 + 5y^2 \le 2xy + 25$, и найти эти значения.

Занятие 6

Глава 6. Многомерный интеграл

1. Двойной интеграл

(6) Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\, dy.$$

Занятие 7

2. Замена переменных в двойном интеграле

(7) Указать область, в которую переходит треугольник $0 < x < 1$, $0 < y < 1 - x$, при замене переменных $x + y = u$, $y = uv$. С помощью координатных линий описать, как действует это преобразование. Выразить двойной интеграл по треугольнику от произвольной функции (на выбор преподавателя) в координатах u и v.

Занятие 8

3. Тройной интеграл

(8) Изменить порядок интегрирования в тройном интеграле (всего 6 способов)

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} dz \int_0^{1-x} f(x,y,z)\, dy.$$

Занятие 9

4. Замена переменных в тройном интеграле

(9) Найти объем тела, ограниченного поверхностью

$$|x|^{1/2} + |y|^{1/2} + |z|^{1/2} = 1.$$

Занятие 10

5. Приложения двойных и тройных интегралов

(10) По шару радиуса R распределена масса M с плотностью $\rho(x,y,z)$. Найти момент инерции шара относительно диаметра, если плотность в точке (а) пропорциональна, (б) обратно пропорциональна расстоянию от этой точки до центра шара.

Занятие 11

6. сходимость несобственных интегралов

(11) Исследовать сходимость несобственного двойного интеграла

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx\, dy}{|x-y|^p}.$$

7. Интегралы, зависящие от параметра

(12) Ньютоновым потенциалом тела в точке (x, y, z) называется интеграл

$$u(x,y,z) = \iiint_V \frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}},$$

где ρ — плотность тела, а V — занимаемая им область пространства. Доказать, что вне этой области u бесконечно дифференцируема; ее первые производные с точностью до постоянной равны компонентам силы, с которой тело притягивает материальную точку единичной массы с координатами x, y, z; а сумма вторых производных равна нулю, т. е. u — гармоническая функция.

Занятие 13

VII. Анализ на многообразиях

1. Криволинейные интегралы первого рода

(13) Найти центр масс дуги циклоиды

$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Занятие 14

2. Поверхностные интегралы первого рода

(14) Найти массу части конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, вырезанной цилиндром $x^2+y^2 = 2x$, если ее поверхностная плотность равна $\rho(x, y, z) = xy + yz + zx$.

Занятие 15

3. Работа поля. Криволинейный интеграл второго рода

(15) Посчитать интеграл второго рода

$$\int_{C_\pm} (y - z)\,dx + (z - x)\,dy + (x - y)\,dz,$$

где $C_\pm$ — окружности, по которым единичная сфера с центром у нуле пересекается вертикальными плоскостями $y = \pm x$ и которые пробегаются против часовой стрелки, если наблюдать за этим со стороны положительной полуоси абсцисс.

Занятие 16

4. Поток векторного поля через поверхность

(16) Найти поток поля $F = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ через внешнюю сторону сферы радиуса R с центром (a, b, c).

Занятие 17

5. Операции векторного анализа

(17) Доказать тождества

(а) $\operatorname{grad}(uv) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u$,

(б) $\operatorname{div}(uA) = u \operatorname{div} A + A \cdot \operatorname{grad} u$,

(в) $\operatorname{rot}(uA) = u \operatorname{rot} A - A \times \operatorname{grad} u$,

(г) $\operatorname{div}(A \times B) = B \cdot \operatorname{rot} A - A \cdot \operatorname{rot} B$,

где u и v — скалярные поля, а A и B — векторные.

6. Потенциальные и соленоидальные векторные поля

(18) Выяснить, какие из перечисленных ниже векторных полей потенциальны, а какие соленоидальны:

(а) $(2xy + z)\mathbf{i} + (x^2 - 2y)\mathbf{j} + x\mathbf{k}$,

(б) $3y^2 - 3x^2\mathbf{j} - (y^2 + 2x)\mathbf{k}$,

(в) $z\mathbf{e}_\varphi - \cos\varphi\mathbf{e}_z/\rho$,

(г) $e^\rho \sin\varphi\mathbf{e}_\rho + e^\rho \cos\varphi\mathbf{e}_\varphi/\rho + 2z\mathbf{e}_z$,

(д) $2r\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\theta/r + \mathbf{e}_\varphi/r\sin\theta$,

(е) $-\varphi\operatorname{ctg}\theta\mathbf{e}_r/r + \varphi\mathbf{e}_\theta/r + 2\cos\theta\mathbf{e}_\varphi/r$.

7. Формула Стокса

(19) С помощью формулы Стокса вычислить циркуляцию поля

$$(y - z)\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$$

по эллипсу $x^2 + y^2 = 1$, $x + 2z = 1$, который обходится против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительной полуоси аппликат.

8. Формула Гаусса — Остроградского

(20) С помощью формулы Гаусса — Остроградского найти поток поля

$$x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$$

через внешнюю сторону симплекса, построенного по трем базисным векторам, которые приложены к началу координат. (возможны варианты [Кудр. 11.52])

8. Формула Грина

(21) Посчитать циркуляцию вдоль границы плоской области: постоянного поля, радиус-вектора $\mathbf{r}$ и поля $\mathbf{r}/r^2$. Для тех же векторных полей найдите их потоки через границу области. Для последнего из указанных полей разберите случаи, когда начало координат лежит вне области, внутри нее и на границе.

9. Поток и работа в криволинейных координатах

(22) Найти прямым вычислением в предложенных координатах: (а) циркуляцию векторного поля $z\cos\varphi\mathbf{e}_\rho + \rho\mathbf{e}_\varphi + \varphi^2\mathbf{e}_z$ вдоль петли $\rho = \sin\varphi$, $z = 1$, ориентированной параметром φ; (б) поток поля $r\mathbf{e}_r + r\sin\theta\mathbf{e}_\theta - 3r\varphi\sin\theta\mathbf{e}_\varphi$ через замкнутую поверхность, ограниченную верхней полусферой радиуса R и плоскостью $\theta = \pi/2$. Посчитать те же величины, применяя формально формулы Стокса и Гаусса — Остроградского. Сравнить результаты. Объяснить.

10. Свободная тема
    (23)

11. Интегрировании дифференциальных форм
    (24) Найти интеграл от дифференциальной формы

$$\int_S zx\,dy \wedge dz + xy\,dz \wedge dx + yz\,dx \wedge dy,$$

где S — внешняя сторона части цилиндра $x^2 + y^2 = r^2$, $x \leq 0$, $y \geq 0$, $0 \leq z \leq H$.

Занятие 25

VIII. Равномерная сходимость последовательностей и рядов

1. Равномерная сходимость последовательностей

(25) Исследовать поточечную и равномерную сходимость на отрезке $[0,1]$ последовательностей

$$\text{(а) } f_n(x) = x^n - x^{n+1}, \quad \text{(б) } g_n(x) = x^n - x^{2n}.$$

Занятие 26

2. Равномерная сходимость рядов

(26) Пользуясь признаком Вейерштрасса, исследовать равномерную сходимость функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^4} \operatorname{arctg} \frac{x}{n}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Занятие 27

3. Сходимость степенных рядов

(27) Описать область сходимости комплексных степенных рядов

$$\text{(а) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n z^n}{(n+1)(n+2)},$$

$$\text{(б) } \sum_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^{n^2} z^n.$$

Занятие 28

4. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов

(28) Применяя интегрирование или дифференцирование, найти суммы рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 z^n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}.$$

Занятие 29

5. Разложение в ряд Тейлора

(29) Разложить в ряд Маклорена функции

$$\text{(а) } \arcsin \frac{2x}{1+x^2},$$

$$\text{(б) } x \ln(x + \sqrt{x^2+1}),$$

$$\text{(в) } \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$