§ 1. Определение и основные свойства производной

Определение
производной
⇓

Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — функция на промежутке и $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Если существует конечный предел

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

то его называют *производной* $f(x)$ *в точке* x_0 и обозначают через $f'(x_0)$ или $\frac{df}{dx}(x_0)$.

Если $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в каждой точке $x \in \langle a, b\rangle$, то возникает функция

$$x \to f'(x),$$

которую также называют *производной* $f(x)$ (*на промежутке*).

Физическая интерпретация производной. Если x — время, а $f(x)$ — координата прямолинейно движущегося тела, то отношение $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ — это средняя скорость на промежутке $[x_0, x]$, а $f'(x_0)$ — мгновенная скорость в момент времени x_0.

Геометрическая интерпретация производной. Рассмотрим функцию $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ и зафиксируем точку $x_0 \in (a, b)$. Выберем произвольно еще одну точку $x_1 \in (a, b)$ и проведем прямую, проходящую через точки $(x_0, f(x_0))$ и $(x_1, f(x_1))$ графика $f(x)$. Эта прямая называется *секущей*. Ее уравнение имеет вид

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0).$$

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f'(x_0)$, то при $x_1 \to x_0$ угловой коэффициент секущей стремится как раз к производной $f'(x_0)$, а уравнение секущей переходит в уравнение

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = f'(x_0)x + (f(x_0) - f'(x_0)x_0),$$

которое задает некоторую прямую. Эта прямая называется *касательной к графику функции* $f(x)$ *в точке* x_0. Имея в виду эти построения, говорят, что касательная является предельным положением секущей, а производная — угловым коэффициентом касательной к графику функции.

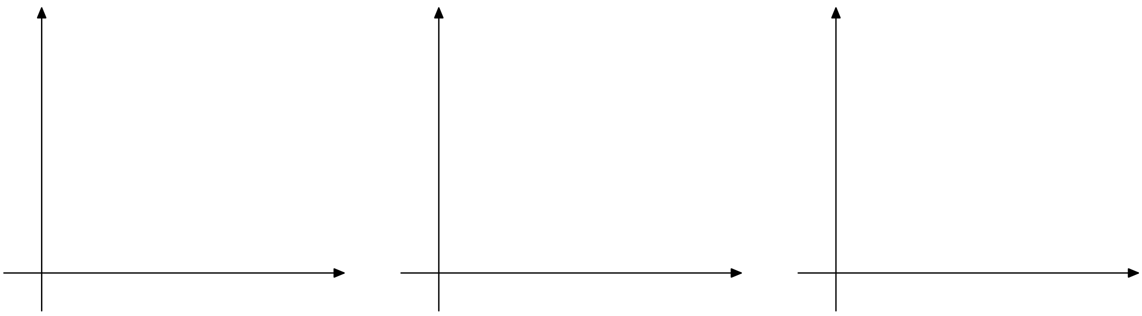
Наилучшее локальное линейное приближение функции. Рассмотрим опять функцию $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ и точку $x_0 \in (a, b)$. Изобразим график функции $f(x)$ и проведем через точку $(x_0, f(x_0))$ всевозможные прямые вида

$$y = k(x - x_0) + f(x_0).$$

Мы хотим найти среди них ту, которая наилучшим образом приближает $f(x)$ в окрестности x_0. Определим, в каком смысле понимать наилучшее приближение. Для этого расссмотрим разность

$$f(x) - \big(k(x - x_0) + f(x_0)\big)$$

Если $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то для любого k разность будет иметь нулевой предел при $x \to x_0$, т. е. будет $o(1)$. Кроме того из рисунка видно, что при некотором значении k разность наиболее плотно прижимается к оси Ox и, значит, функция $k(x - x_0) + f(x_0)$ дает наилучшее локальное приближение $f(x)$. Математически это означает, что разность становится $o(x - x_0)$, $x \to x_0$, т. е. бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с $o(1)$.



(a) (b) (c)

Заметим, что найти наилучшее локальное линейное приближение (в обозначенном смысле) удается не всегда. Например, функцию $f(x) = |x|$ в в окрестности $x_0 = 0$ нельзя приблизить линейной функцией $y = kx$ так, чтобы $f(x) - kx$ было $o(x)$ (докажите).

Итак, постановка задачи о наилучшем локальном линейном приближении приводит к следующему определению.

Определение
дифференциала
⇓

Пусть $f : \langle a, \rangle b \to \mathbb{R}$ — функция на промежутке и $x_0 \in \langle a, b \rangle$. Если существует такое линейное отображение $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + L(h) + o(h), \quad h \to 0,$$

то его называют *дифференциалом* $f(x)$ *в точке* x_0 и обозначают $df(x_0)(h)$.

Комментарии.

Теорема 1
о производной
и дифференциале
⇓

Пусть $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \langle a, b \rangle$. Тогда

$$f(x) \text{ имеет } f'(x_0) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \text{ имеет } df(x_0),$$

причем

$$df(x_0)(h) = f'(x_0)h, \quad h \in \mathbb{R}.$$

Доказательство

Необходимость. Предположим, что существует $f'(x_0)$. Тогда по определению

$$\alpha(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \to 0, \quad h \to 0,$$

что после преобразования дает

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \underbrace{h\alpha(h)}_{=o(h),h\to 0}.$$

Значит, по определению линейное отображение $h \mapsto f'(x_0)h$ — дифференциал $f(x)$ в точке x_0.

Достаточность. Предположим, что $f(x)$ имеет дифференциал $df(x_0)$, т. е. по определению

$$f(x_0+h) = f(x_0) + df(x_0)(h) + \underbrace{o(h)}_{=h\alpha(h)},$$

где $\alpha(h) \to 0$, $h \to 0$. Преобразуем, пользуясь линейностью $df(x_0)(h)$:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - df(x_0)(1) = \alpha(h) \to 0, \quad h \to 0.$$

Последнее означает, что $f(x)$ имеет производную в x_0, причем $f'(x_0) = df(x_0)(1)$. В силу линейности $f'(x_0)h = df(x_0)(h)$, $h \in \mathbb{R}$. **Теорема доказана.**

Замечание. Дифференциал дает решение задачи о наилучшем локальном линейном приближении. А касательная и есть та прямая, которая плотнее всего прилегает к графику.

Замечание. В случае одной переменной, дифференциал и производная эквивалентны. В случае многих переменных — нет.

Замечание. Имея два способа, мы выбираем наиболее простой — производную.

Что такое dx?. Рассмотрим тождественное отображение $y = x$ на некотором промежутке $\langle a, b\rangle$. Его производная в каждой точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$ равна 1, и по предыдущей теореме его дифференциал в каждой точке действует по формуле

$$dx(x_0)(h) = 1 \cdot h = h.$$

Поскольку действие не зависит от точки x_0, первый аргумент опускают: $dx(h) = h$. Таким образом, dx — это просто дифференциал тождественного отображения, который такое действует тождественно. Однако, между тождественным отображением и его дифференциалом есть существенная разница: первое определено на промежутке и действует на точки $x \in \langle a, b\rangle$, а дифференциал, будучи линейным отображением, определен на всем $\mathbb{R}$ и действует на приращения h. (Позже мы будем говорить, что дифференциал при фиксированном x_0 определен на касательном пространстве и действует на касательные векторы.)

Имея отображение dx, можно записать связь между производной и дифференциалом так

$$df(x_0)(h) = f'(x_0)h = f'(x_0)dx(h),$$

или, опуская последний аргумент h,

$$df(x_0) = f'(x_0)dx.$$

Эта формула означает, что дифференциал $df(x_0)$ получается из тождественного линейного отображения dx при помощи умножения на $f'(x_0)$ или то, что $f'(x_0)$ — коэффициент пропорциональности между $df(x_0)$ и dx. Это объясняет обозначение $\frac{df}{dx}(x_0)$ для производной $f'(x_0)$.

1.3. Общие правила дифференцирования.

Теорема 2
о производной и
алгебраических операциях
$\Downarrow$

Пусть $f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ имеют прозводные в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Тогда их сумма, произведение и частное тоже имеют производные, причем

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0),$$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0),$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

(последнее при условии, что $g(x) \neq 0$).

Доказательство Используя непрерывность f и g в точке x_0, пишем

$$\begin{aligned}
&\frac{(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0)}{h} \\
&\qquad = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \\
&\qquad \to f'(x_0) + g'(x_0), \quad h \to 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{(fg)(x_0+h) - (fg)(x_0)}{h} \\
&\qquad = \frac{(fg)(x_0+h) - f(x_0)g(x_0+h) + f(x_0)g(x_0+h) - (fg)(x_0)}{h} \\
&\qquad = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} g(x_0+h) + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} f(x_0) \\
&\qquad \to f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0), \quad h \to 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\frac{f}{g}(x_0+h) - \frac{f}{g}(x_0)}{h} \\
&\qquad = \frac{f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0+h)}{h\ g(x_0+h)g(x_0)} \\
&\qquad = \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} g(x_0) - f(x_0)\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}\right) \frac{1}{g(x_0+h)g(x_0)} \\
&\qquad \to \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}, \quad h \to 0.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 3
о производной композиции
⇓
Теорема 29

Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \langle c, d\rangle$ и $g : \langle c, d\rangle \to \mathbb{R}$. Если

(1) f имеет производную в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$,
(2) g имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$,

то $(g \circ f)(x)$ имеет производную в точке x_0 и

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0).$$

Доказательство По условию

$$g(y) = g(y_0) + g'(y_0)(y - y_0) + (y - y_0)\alpha(y),$$

где $\alpha(y)$ определена формулой

$$\alpha(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} - g'(y_0) & \text{при } y \neq y_0, \\ 0 & \text{при } y = y_0, \end{cases}$$

и $\alpha(y) \to 0$, $y \to y_0$. Заметим, что при таком определении функция $\alpha(y)$ непрерывна в точке y_0. Подставляя $y = f(x)$ и $y_0 = f(x_0)$ и пользуясь отмеченной непрерывностью $\alpha(y)$ и $f(x)$ в нужных точках, получаем

Теоремы 1.38 →

$$\frac{g(f(y)) - g(f(y_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0))\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)} + \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)}\underbrace{\alpha(f(x))}_{\to 0}$$

$$\to g'(f(x_0))f'(x_0), \quad x \to x_0.$$

Теорема доказана.

Теорема 4
о производной
обратной функции
⇓
Теорема 7

Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ обратима и $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Если

(1) $f(x)$ имеет ненулевую производную $f'(x_0) \neq 0$,
(2) $f^{-1}(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$,

то $f^{-1}(y)$ имеет производную в точке y_0, причем

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство По условию теоремы

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to f'(x_0), \quad x \to x_0.$$

Теорема 38 →

Поскольку $f(x)$ обратима, $f(x) - f(x_0) \neq 0$ при $x \neq x_0$. Значит, можно «перевернуть»

$$\frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \to \frac{1}{f'(x_0)}, \quad x \to x_0.$$

Теорема 38 → Воспользуемся теоремой о пределе композиции, подставляя $x_0 = f^{-1}(y_0)$ и $x = f^{-1}(y)$ при $y \to y_0$. Применяя теорему, отметим, что

- $f^{-1}(y) \neq x_0$ при $y \neq y_0$ в силу обратимости f;
- $f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_0) = x_0$, так как f^{-1} непрерывна в y_0 по условию.

В итоге
$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))} \to \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Теорема доказана.

О теореме 38 в терминах дифференциала..

$$df^{-1}(y_0) = (df(x_0))^{-1}.$$

1.3. Производные элементарных функций.

Теорема 5
о производных
элементарных функций
⇓

$$\begin{aligned}
&(a^x)' = a^x \ln a, \quad x \in \mathbb{R},\\
&(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad x > 0,\\
&(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}, \quad x > 0,\\
&(\sin x)' = \cos x, \quad x \in \mathbb{R},\\
&(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R},\\
&(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \in \mathbb{R},\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\\
&(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \in \mathbb{R},\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\\
&(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1,\\
&(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1,\\
&(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R},\\
&(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Доказательство

Шаг 1 (показательная функция). Если $a = 1$, то все тривиально. Далее считаем, что $a \neq 1$. Пользуясь теоремой 29 и замечательным пределом, вычисляем:

Теоремы 29, 1. →

$$\begin{aligned}
\frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} &= a^{x_0} \frac{a^{x - x_0} - 1}{x - x_0}\\
&= a^{x_0} \ln a \frac{\exp((x - x_0)\ln a) - 1}{(x - x_0)\ln a} \to a^{x_0} \ln a, \quad x \to x_0.
\end{aligned}$$

Теоремы 29, 1. → **Шаг 2 (логарифм).** Пользуясь теоремой 29 и замечательным пределом, вычисляем:

$$\frac{\log_a x - \log_a x_0}{x - x_0} = \frac{\log_a\left(\frac{x}{x_0}\right)}{\frac{x-x_0}{x_0}} \frac{1}{x_0} = \frac{\ln\left(\frac{x-x_0}{x_0}+1\right)}{\frac{x-x_0}{x_0}} \frac{1}{x_0 \ln a} \to \frac{1}{x_0 \ln a}, \quad x \to x_0.$$

Шаг 3 (степенная функция). Пользуясь теоремой 29 и замечательным

Теоремы 29, 1. → пределом, вычисляем:

$$\frac{x^\alpha - x_0^\alpha}{x - x_0} = x_0^\alpha \frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^\alpha - 1}{x - x_0} = x_0^{\alpha-1} \frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^\alpha - 1}{\frac{x}{x_0} - 1} \to x_0^{\alpha-1}, \quad x \to x_0.$$

Шаг 4 (тригонометрические функции). Выведм формулу для производной синуса, для косинуса – аналогично. Пользуясь теоремой 29 и замечатель-

Теоремы 29, 1. → ным пределом для синуса, получачем

$$\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \frac{2 \sin\frac{x-x_0}{2} \cos\frac{x+x_0}{2}}{x - x_0} = \underbrace{\frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}}_{\to 1} \cos\frac{x+x_0}{2} \to \cos x_0.$$

Производные тангенса и котангенса, вычисляются как производные отношения

Теорем 2 → по теореме 2.

Шаг 5 (обратные тригонометрические функции). Производные обратных тригонометрических функций находятся по теореме о производной обратной функции. Найдем производную арксинуса. Остальные производные находятся аналогично. Пусть

$$f(x) = \sin x, \quad f^{-1}(y) = \arcsin y, \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad y \in [-1, 1].$$

По предыдущему шагу $\sin x$ имеет <u>ненулевую</u> производную на $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, а обратная функция $\arcsin y$ непрерывна как монотонная функция, множество зна-

Теорема 1. → чений которой — промежуток. Это означает выполнение условий теоремы 4,

Теорема 4 → согласно которой

$$\left(\arcsin y_0\right)' = \left(f^{-1}(y_0)\right)' = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\cos x_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y_0^2}}.$$

Теорема доказана.

§ 2. Повторное дифференцирование

2.1. Высшие производные элементарных функций.

Определение производных высших порядков ⇓

Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Предположим, что f имеет производную $f' : U \to \mathbb{R}$ в некоторой окрестности U точки x_0. Если f' имеет производную $(f')'(x_0)$ в точке x_0, то говорят, что f имеет вторую производную в точке x_0, и обозначают ее через $f''(x_0)$.

Производные высших порядков определяют по индукции. Если f имеет $(n-1)$-ю производную $f^{(n-1)} : U \to \mathbb{R}$ в некоторой окрестности U точки x_0, которая имеет производную в точке x_0, то говорят, что f имеет n-ю производную $f^{(n)}(x_0)$ в точке x_0.

Саму функцию удобно считать нулевой производной $f^{(0)} \equiv f$.

Теорема 6
о высших производных элементарных функций
⇓

$$(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N},$$
$$(\log_a x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x\ln a)^n}, \quad x > 0, \quad n \in \mathbb{N},$$
$$(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdot(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}, \quad x > 0, \quad n \in \mathbb{N},$$
$$(\sin x)^{(n)} = \sin\Big(x + \frac{\pi n}{2}\Big), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N},$$
$$(\cos x)' = \cos\Big(x + \frac{\pi n}{2}\Big), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство Все равенства элементарно доказываются по индукции.

Шаг 1 (Показательная функция). База индукции

$$(a^x)^{(1)} = a^x \ln a.$$

Шаг индукции

$$(a^x)(n-1) = a^x(\ln a)^{n-1} \quad \to \quad (a^x)^{(n)} = \big((a^x)^{(n-1)}\big)' = \big(a^x(\ln a)^{n-1}\big)' = a^x(\ln a^n.$$

Шаг 2 (Логарифм). Будет позже.

Шаг 3 (Степенная функция). Будет позже.

Шаг 4 (Синус). Будет позже.

Шаг 5 (Косинус). Будет позже.
Теорема доказана.

2.2. Классы $C^n(I)$ и $D^n(I)$.

Определение
классов $C^n(\langle a,b\rangle)$, $D^n(\langle a,b\rangle)$
⇓

Класс $D^n(\langle a,b\rangle)$, $n \in \mathbb{N}$, состоит из всех функций $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, имеющих все производные до порядка n включительно во всех точках промежутка $\langle a,b\rangle$.

Класс $C^n(\langle a,b\rangle)$, $n \in \mathbb{N}$, состоит из всех функций $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, имеющих все производные до порядка n включительно во всех точках промежутка $\langle a,b\rangle$, причем все эти производные непрерывны.

При $n = 0$ класс $C^0(\langle a,b\rangle) = C(\langle a,b\rangle)$ состоит просто из всех непрерывных функций.

Класс $C^\infty(\langle a,b\rangle)$ бесконечно дифференцируемых функций состоит из функций, имеющих производные любого порядка во всех точках промежутка $\langle a,b\rangle$, т. е.

$$C^\infty(\langle a,b\rangle) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C^n(\langle a,b\rangle) \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D^n(\langle a,b\rangle).$$

Комментарии. 1. Очевидно, что (область определения $\langle a,b\rangle$ опущена для компактности записи)

$$C^\infty \subset \dots \subset C^n \subset C^2 \subset D^2 \subset C^1 \subset D^1 \subset C^0 = C.$$

2. В определении достаточно требовать существование (и непрерывность) только последней производной. Все производные меньших порядков существуют и непрерывны автоматически.

Теорема 7
о классах $C^n(\langle a,b\rangle)$
$\Downarrow$

Класс $C^n(\langle a,b\rangle)$ замкнут относительно алгебраических операций, взятия композиции и перехода к обратной функции в следующем смысле:

$$f,g \in C^n(\langle a,b\rangle), \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R} \quad \longrightarrow \quad \alpha f+\beta g \in C^n(\langle a,b\rangle),$$

$$f,g \in C^n(\langle a,b\rangle) \quad \longrightarrow \quad fg \in C^n(\langle a,b\rangle),$$

$$f,g \in C^n(\langle a,b\rangle) \quad \longrightarrow \quad \frac{f}{g} \in C^n(\langle a,b\rangle),$$

$$\begin{cases} f\in C^n(\langle a,b\rangle), \\ f(\langle a,b\rangle)\subset\langle c,d\rangle, \\ g\in C^n(\langle c,d\rangle) \end{cases} \quad \longrightarrow \quad g\circ f \in C^n(\langle a,b\rangle),$$

$$\begin{cases} f\in C^n(\langle a,b\rangle) \text{ обратима и} \\ \text{и } f^{-1}:\langle c,d\rangle\to\mathbb{R} \\ \text{имеет производную на } \langle c,d\rangle \end{cases} \quad \longrightarrow \quad f^{-1}\in C^n(\langle c,d\rangle).$$

Для классов $D^n(\langle a,b\rangle)$ имеет место аналогичное утверждение.

Доказательство

Шаг 1 (подготовительный). Для сокращения записи будем использовать обозначение $C^n = C^n(\langle a,b\rangle)$.

В доказательстве мы постоянно будем пользоваться следующим двумя простыми фактами:

$$f\in C^n \quad \Longleftrightarrow \quad f'\in C^{n-1}.$$

$$f\in C^n \quad \Longrightarrow \quad f\in C^{n-1}.$$

Все утверждения доказываются по индукции.

Шаг 2 (линейная комбинация). База индукции (при $n=0$) следует из теоремы 32. Шаг индукции (переход от $n-1$ к n) следует из следующей цепочки:

$$\begin{array}{ccccc} f,g\in C^n & & & & \alpha f+\beta g\in C^n \\ \downarrow \text{Шаг 1} & & & & \uparrow \text{Шаг 1} \\ f',g'\in C^{n-1} & \xrightarrow{\text{инд. пред.}} & \alpha f'+\beta g'\in C^{n-1} & \xrightarrow{\text{Теорема 2}} & (\alpha f+\beta g)'\in C^{n-1} \end{array}$$

Шаг 3 (произведение). База индукции (при $n = 0$) следует из теоремы 32. Шаг индукции следует из следующей цепочки

$$\begin{tikzcd}
f, g \in C^n \arrow[d, "\text{Шаг 1}"] & & fg \in C^n & (fg)' \in C^n \arrow[l, "\text{Шаг 1}"'] \\
\begin{cases} f', g' \in C^{n-1} \\ f, g \in C^{n-1} \end{cases} \arrow[r, "\text{инд. пред.}"] & f'g, fg' \in C^{n-1} \arrow[r, "\text{Шаг 2}"] & & f'g + fg' \in C^{n-1} \arrow[u, "\text{Теорема 2}"']
\end{tikzcd}$$

Шаг 4 (отношение). Аналогично предыдущему шагу.

Шаг 5 (композиция). База индукции (при $n = 0$) следует из теоремы 32. Шаг индукции следует из следующей цепочки:

$$\begin{tikzcd}
\begin{cases} f \in C^n \\ g \in C^n \end{cases} \arrow[d, "\text{Шаг 1}"] & & g \circ f \in C^n \\
\begin{cases} f' \in C^{n-1} \\ g' \in C^{n-1} \\ f \in C^{n-1} \end{cases} \arrow[r, "\text{инд. пред., шаг 3}"] & (g' \circ f)f' \in C^{n-1} \arrow[r, "\text{Теорема 3}"] & (g \circ f)' \in C^{n-1} \arrow[u, "\text{Теорема 2}"']
\end{tikzcd}$$

Шаг 6 (обратная функция). По условию f имеет дифференцируемую об-
Теорема 4 → ратную функцию $f^{-1} : \langle c, d\rangle \to \mathbb{R}$, причем по теореме 4

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}, \quad y = f(x), \quad x \in \langle a, b\rangle. \qquad (*)$$

В частности, $f'(y) \neq 0$, $y \in \langle c, d\rangle$.
База индукции (при $n = 1$) следует из следующей цепочки:

$$\begin{cases} f \in C^1 \\ f^{-1} \in C \end{cases} \xrightarrow{\text{Шаг 1}} \begin{cases} f' \in C \\ f^{-1} \in C \end{cases} \xrightarrow{(*),\ \text{шаги 3–5}} (f^{-1})' \in C \xrightarrow{\text{Шаг 1}} f^{-1} \in C^1.$$

Шаг индукции следует из следующей цепочки:

$$\begin{tikzcd}
\begin{cases} f \in C^n \\ g \in C^n \end{cases} \arrow[d, "\text{Шаг 1}"] & & g \circ f \in C^n \\
\begin{cases} f' \in C^{n-1} \\ g' \in C^{n-1} \\ f \in C^{n-1} \end{cases} \arrow[r, "(*),\ \text{шаг 3}"] & (g' \circ f)f' \in C^{n-1} \arrow[r, "\text{Теорема 3}"] & (g \circ f)' \in C^{n-1} \arrow[u, "\text{Теорема 2}"']
\end{tikzcd}$$

§ 3. ПРИРАЩЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

3.1. Производная в точке экстремума.

Определение
локального экстремума
⇓

Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — функция на промежутке. Точка $x_0 \in \langle a, b\rangle$ называется *точкой локального максимума* f, если

$$\exists \text{ окр. } U \text{ точки } x_0 \ \mid \ \forall x \in U \cap \langle a, b\rangle \quad f(x) \le f(x_0).$$

Точка $x_0 \in \langle a, b\rangle$ называется *точкой локального минимума* f, если

$$\exists \text{ окр. } U \text{ точки } x_0 \ \mid \ \forall x \in U \cap \langle a, b\rangle \quad f(x) \ge f(x_0).$$

Точки локального максимума и минимума называются *точками локального экстремума.*

Определение
внутренней точки
⇓

Внутренними точками промежутка $\langle a, b\rangle$ называют точки интервала (a, b).

Теорема 9
Ферма о необходимомом условии локального экстремума
⇓
Теорема 10

Если функция $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$

(1) имеет локальный экстремум во <u>внутренней</u> точке $x_0 \in (a, b)$,
(2) имеет производную $f'(x_0)$ в точке x_0,

то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство Не теряя общности, предположим, что x_0 — точка локального максимума. Поскольку x_0 одновременно точка локального максимума и внутренняя точка, существует окрестность $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ такая, что

$$\forall x \in U \quad f(x) \le f(x_0).$$

Для точек $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ имеем

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0,$$

Теореме 1.27 → откуда, переходя к пределу по теореме 1.27, получаем $f'(x_0) \ge 0$. Аналогично, для точек $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ имеем

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0,$$

откуда $f'(x_0) \le 0$. В итоге, $f'(x_0) = 0$. **Теорема доказана.**

Змечание. О необходимых условиях.

Змечание. О нахождении экстремумов.

3.2. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши.

Если точка, плавно двигаясь по прямой, возвращается в начальную точку, значит в какой-то момент она имеет нулевую скорость.

Теорема 10
Ролля
⇓
Теорема 11

Если функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

(1) непрерывна на $[a, b]$,
(2) имеет производную (по крайней мере) на (a, b), и
(3) $f(a) = f(b)$,

то

$$\exists c \in (a, b) \ \mid \ f'(c) = 0.$$

Теорема 1.35 →

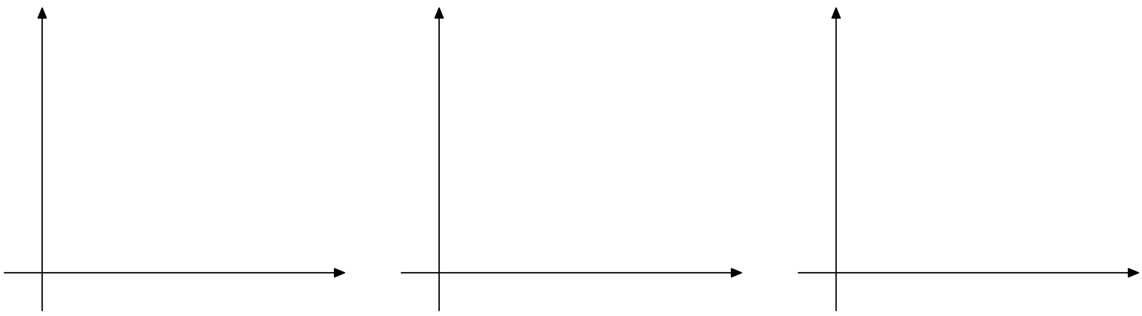
Доказательство По теореме Вейерштрасса функция f, будучи непрерывной функцией на отрезке, принимает на $[a, b]$ наибольшее и наименьшее значения, т. е.

$$\exists x_{\min}, x_{\max} \in [a, b] \ \mid \ \forall x \in [a, b] \quad f(x_{\min}) \le f(x) \le f(x_{\max}).$$

Если $f(x_{\min}) = f(x_{\max})$, то f постоянна и $f'(x) = 0$ во всех точках $x \in (a, b)$. Если же $f(x_{\min}) < f(x_{\max})$, то в силу условия (3) хотя бы одна из точек $x_{\min}$, $x_{\max}$ внутренняя, и по теореме Ферма в этой точке f имеет нулевую производную. **Теорема доказана.**

Теорема 9 →

Замечание. Все условия важны



(a) (b) (c)

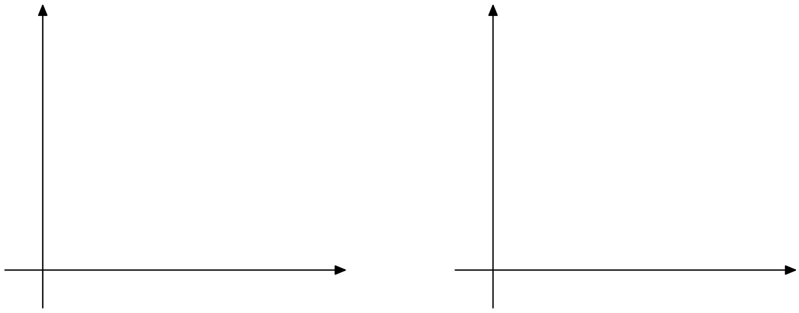
Теорема 11
Лагранжа
о конечном приращении
⇓
Теоремы 12, 13

Если функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

(1) непрерывна на $[a, b]$,
(2) имеет производную (по крайней мере) на (a, b),

то

$$\exists c \in (a, b) \ \mid \ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



(a) (b)

Доказательство Рассмотрим функцию

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

которая в добавок к первым двум условия теоремы удовлетворяет условию $F(a) = F(b)$. По теореме Ролля

Теорема 10 →

$$\exists c \in (a, b) \ \mid \ 0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Теорема доказана.

Оценка приращения и равномерная непрерывность.

О движении на плоскости.

Теорема 12
Коши о конечном приращении
⇓
Теоремы 14, 19

Если функции $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$

(1) непрерывны на $[a, b]$,
(2) имеют производные (по крайней мере) на (a, b),

то

$$\exists c \in (a, b) \ \mid \ \det \begin{pmatrix} f'(c) & f(b) - f(a) \\ g'(c) & g(b) - g(a) \end{pmatrix} = 0.$$

Доказательство Рассмотрим функцию

$$F(x) = (g(b) - g(a))f(x) - (f(b) - f(a))g(x) = \det \begin{pmatrix} f(x) & f(b) - f(a) \\ g(x) & g(b) - g(a) \end{pmatrix},$$

Теорема 10 →

которая, как легко проверить, удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, откуда мы заключаем, что

$$\exists c \in (a, b) \ \mid \ 0 = F'(c) = (g(b) - g(a))f'(c) - (f(b) - f(a))g'(c).$$

Теорема доказана.

Замечание. Если $g'(x) \neq 0$ на (a, b), то заключение теоремы Коши можно записать в следующем виде:

$$\exists c \in (a, b) \ \mid$$
$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \det \begin{pmatrix} f'(c) & f(b) - f(a) \\ g'(c) & g(b) - g(a) \end{pmatrix}.$$

§ 4. Формула Тейлора

4.1. Локальная формула Тейлора.

Теорема 13
локальная формула Тейлора
$\Downarrow$
Теоремы 17

Пусть $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ имеет n производных в точке $x_0\in(a,b)$. Тогда

$$f(x) = \underbrace{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{\substack{=p_n(x)\\ \text{полином Тейлора функции } f \text{ степени } n}} +$$

$$+ \underbrace{o((x-x_0)^n)}_{\substack{\text{остаточный член}\\ \text{в форме Пеано}}}, \quad x\to x_0.$$

Кроме того, если $q_n(x)$ — многочлен степени n такой, что

$$f(x) = q_n(x)+o((x-x_0)^n), \quad x\to x_0,$$

то $q_n(x)\equiv p_n(x)$.

Доказательство

Шаг 1 (производные остаточного члена). Рассмотрим остаточный член

$$r_n(x) = f(x) - \Big(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\Big).$$

Наличие n-ой производной в точке x_0 означает, что все производные меньших порядков определены в некоторой окрестности $U=(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset(a,b)$. В дальнейшем будем считать, что $x\in U$. Легко проверить, что

$$\frac{d^m}{dx^m}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \begin{cases} f^{(m)}(x_0), & m=k,\\ 0, & m\neq k,\end{cases}$$

откуда получается

$$r_n(x_0)=r_n'(x_0)=r_n''(x_0)=\dots=r_n^{(n)}(x_0)=0.$$

Шаг 2 ($r_n(x)=o((x-x_0)^n)$). По индукции докажем, что для произвольной функции $r(x)$ имеющей n производных в точке x_0 верно

$$r(x_0)=r'(x_0)=\dots=r^{(n)}(x_0)=0 \quad\Longrightarrow\quad r(x)=o((x-x_0)^n), \quad x\to x_0.$$

База индукции (при $n=1$) непосредственно вытекает из определения производной. Действительно, из $r(x_0)=r'(x_0)=0$ вытекает

$$r(x)=\underbrace{r(x_0)}_{=0}+\underbrace{r'(x_0)}_{=0}(x-x_0)+o(x-x_0)=o(x-x_0), \quad x\to x_0.$$

Шаг индукции. Предположим, что для некоторого $k<n$ уже доказано, что для произвольной функции $q(x)$, имеющей k производных в x_0, верно

$$q(x_0)=\dots=q^{(k)}(x_0)=0 \quad\Longrightarrow\quad q(x)=o((x-x_0)^k), \quad x\to x_0, \qquad (*)$$

и докажем, что

$$r(x_0) = \dots = r^{(k+1)}(x_0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{r(x)}{(x-x_0)^{k+1}} \to 0, \quad x \to x_0. \tag{†}$$

Полагая $q(x) = r'(x)$, из индукционного предположения $(*)$ получаем

$$q(x) = r'(x) = o((x-x_0)^k), \quad x \to x_0. \tag{‡}$$

Теорема 11 → По теореме Лагранжа

$$\begin{aligned} &\forall x \in U \quad \exists c(x) \text{ строго между } x \text{ и } x_0 \ \mid \\ &r(x) = r(x) - \underbrace{r(x_0)}_{=0} = r'\big(c(x)\big)(x-x_0). \end{aligned} \tag{§}$$

Заметим сразу, что $c(x) \to x_0$ при $x \to x_0$, так как $c(x)$ лежит строго между x и x_0 и значит $|c(x)-x_0| \le |x-x_0|$. С учетом (§) оценим:

Теорема 1.29
Теорема 1.?? →

$$0 \leftarrow \left|\frac{r(x)}{(x-x_0)^{k+1}}\right| = \left|\frac{r'(c(x))}{(x-x_0)^k}\right| \le \left|\frac{r'(c(x))}{(c(x)-x_0)^k}\right| \overset{(‡),\text{теорема } 1.29}{\longrightarrow} 0, \quad x \to x_0,$$

т. е.

$$r(x) = o((x-x_0)^{k+1}), \quad x \to x_0,$$

что доказывает шаг индукции и тем самым завершает шаг 2.

Шаг 3 (единственность). Предположим, что $q_n(x)$ — многочлен степени n такой, что

$$f(x) = q_n(x) + o((x-x_0)^n), \quad x \to x_0.$$

В силу уже доказанного

$$f(x) = p_n(x) + o((x-x_0)^n), \quad x \to x_0.$$

Значит,

$$q_n(x) - p_n(x) = o((x-x_0)^n), \quad x \to x_0.$$

Курс алгебры → В силу известных результатов алгебры о представлении полиномов и определения o-малого имеем

$$\begin{aligned} &q_n(x) - p_n(x) = \\ &\qquad = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n \\ &\qquad = o((x-x_0)^n), \quad x \to x_0. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Надо

$$a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0.$$

Устремляя $x \to x_0$ в $(*)$, получаем $a_0 = 0$. С учетом этого факта, делим $(*)$ на $x - x_0$ и снова устремляем $x \to x_0$, получая $a_1 = 0$, и т. д. **Теорема доказана.**

Теорема 1.39 →

4.2. Глобальная формула Тейлора.

О записи остаточного члена.. В общем виде формула Тейлора – это представление функции $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ в виде

$$f(x) = p_n(x) + r_n(x),$$

где $p_n(x)$ — полином Тейлора

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

а $r_n(x)$ — остаточный член. В теореме 13 мы доказали, что $r_n(x) = o((x-x_0)^k)$, $x \to x_0$. Это лишь одна из форм записи остаточного члена. Она отличается

- миниальными требованиями на производные — нужно только наличие n-й производной;
- локальным характером — она дает только поведение остаточного члена при стремлении x к x_0, но не говорит ничего о значениях $r_n(x)$ при $x \neq x_0$.

В следующей теореме, потребовав существования еще одной производной, мы получим другие формы записи остаточного члена, из которых можно получить информацию о $r_n(x)$ при $x \neq x_0$.

Теорема 14
Формула Тейлора
с остаточным членом
в форме Лагранжа и Коши
$\Downarrow$
Теорема 15

Пусть $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ имеет $n + 1$ производную на (a, b) и $x_0 \in (a, b)$. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},}_{\substack{\text{остаточный член}\\ \text{в форме Лагранжа}}} \quad x \in (a, b),$$

где ξ — некоторая точка, лежащая строго между x и x_0;

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n(x - x_0),}_{\substack{\text{остаточный член}\\ \text{в форме Коши}}} \quad x \in (a, b),$$

где ξ — некоторая точка, лежащая строго между x и x_0.

Доказательство.

Шаг 1 (общая формула). Оговоримся сразу, что x_0 и x — фиксированные точки. Не теряя общности, предположим, что $x_0 < x$.

Рассмотрим хитрую функцию

$$F(t) = f(x) - \left(f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x - t) + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n\right), \quad t \in [x_0, x],$$

представляющую собой остаточный член, в котором точка x, в которой берется значение $f(x)$ фиксирована, а точка t, около которой записывается полином Тейлора, меняется. Отметим свойства функции $F(t)$:

- $F(x_0) = r_n(x)$;
- $F(x) = 0$;
- $F(t)$ непрерывна на $[x_0, x]$;
- $F(t)$ имеет производную на (x_0, x) (и даже на $[x_0, x]$), причем

$$F'(t) = \underbrace{-f'(t) + \frac{f'(t)}{1!}}_{=0} - \underbrace{\frac{f''(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{1!}(x-t)}_{=0} - \cdots - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$
$$= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$, имеющую ненулевую производную $\varphi'(x) \neq 0$ на (a, b). Применим к паре функций $F(t)$, $\varphi(t)$ теорему Коши, по которой существует такое $\xi \in (x_0, x)$, что

Теорема 12 →

$$\frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \frac{F(x) - F(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)},$$

или, с учетом перечисленных свойств $F(t)$,

$$\frac{-\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}{n!}}{\varphi'(\xi)} = \frac{0 - r_n(x)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)},$$

или окончательно

$$r_n(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)} \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}{n!}. \qquad (*)$$

Шаг 2 (форма Лагранжа). Выбирая $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$, получаем

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)} = \frac{0 - (x-x_0)^{n+1}}{-(n+1)(x-\xi)^n} = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)(x-\xi)^n},$$

и $(*)$ принимает вид

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Шаг 3 (форма Коши). Выбирая $\varphi(t) = (x-t)$, получаем

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)} = \frac{0 - (x-x_0)}{-1} = (x-x_0),$$

и $(*)$ принимает вид

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0).$$

Теорема доказана.

Замечание. 1. Оценка точности приближения
2. Коши — для рядов.
3. Вычисление корня.

4.3. Ряд Тейлора.

Предположим, что $f(x) \in C^\infty((a,b))$, т. е. имеет все производные на (a,b). Зафиксируем $x_0 \in (a,b)$ и запишем формулу Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(x;x_0).$$

Пусть x тоже фиксирован, а $n \in \mathbb{N}$ меняется. Для того, чтобы строго разобраться в том, что происходит при $n \to \infty$, нам потребуется понятие ряда.

Определение
числового ряда
$\Downarrow$

Пусть x_n — числовая последовательсноть. Формальная запись

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

называется *числовым рядом с общим членом* x_n. Последовательность

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

называется *последовательностью частичных сумм.* Говорят, что *ряд сходится*, если последовательность S_n имеет <u>конечный</u> предел. Этот предел называют *суммой ряда* и тоже обозначают символом $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim S_n.$$

Подчеркнем, что в определении ряда важно не то, что такое «ряд», а что значит «ряд сходится».

Определение
ряда Тейлора
$\Downarrow$

Пусть $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ имеет все производные $f^{(n)}(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$, в точке $x_0 \in (a,b)$. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

называется *рядом Тейлора* функции f в точке x_0. (Точка x играет роль параметра: при каждом фиксированном x мы имеем дело с числовым рядом.)

Замечание.

Теорема 15
о рядах Тейлора
элементарных функций
⇓

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \quad -1 < x < 1,$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad -1 < x < 1.$$

Доказательство

Шаг 1 (подготовительный). Во всех дальнейших рассужениях точка x фиксирована. Доказать равенство $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ значит доказать, что

- ряд Тейлора сходится, т.е. последовательность частичных сумм $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ имеет конечный предел,
- этот предел равен $f(x)$.

В виду равенства

$$f(x) = p_n(x) + r_n(x)$$

оба факта будут следовать из того, что $r_n(x) \to 0$, $n \to \infty$. Это мы и будем доказывать для каждой конкретной функции.

Теорема 14 →

Шаг 2 ($\boldsymbol{f(x) = e^x}$). Запишем остаточный член $r_n(x)$ в форме Лагранжа

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^n = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^n,$$

где ξ — некоторая точка между 0 и x своя для каждого n. Далее все следует из элементарной оценки

$$|r_n(x)| = \frac{e^\xi}{n!} |x|^n \le e^{\max\{x,0\}} \frac{|x|^n}{n!} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Шаг 3 ($\boldsymbol{f(x) = \sin x}$ и $\boldsymbol{f(x) = \cos x}$). Аналогично и даже проще.

Теорема 14
Теорема 1. →

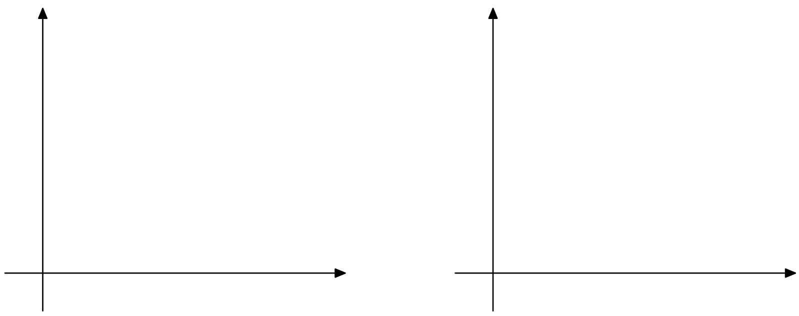
Шаг 4 ($\boldsymbol{f(x) = \ln(x+1)}$). Для оценки остаточного члена в формуле для логарифма запишем $r_n(x)$ в форме Коши (она более тонкая):

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-\xi)^n (x-0)^n = \frac{(-1)^n \cancel{n}!}{(1+\xi)^{n+1} \cancel{n}!} (x-\xi)^n x,$$

где ξ — некоторая точка между 0 и x своя для каждого n. Далее все следует из хитрой оценки

$$|r_n(x)| \leq \left|\frac{x}{1+\xi}\right| \underbrace{\left|\frac{x-\xi}{1+\xi}\right|^n}_{\leq |x|^n} \leq \frac{|x|^{n+1}}{|1+\xi|} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Неравенство $\left|\frac{x-\xi}{1+\xi}\right| \leq |x|$ доказывается отысканием максимума левой части по ξ между 0 и x при фиксированном x отдельно для случаев $x \geq 0$ и $x < 0$ (см. рисунок).



(a) (b)

Теорема 14
Теорема 1. →

Шаг 5 ($\boldsymbol{f(x) = (1+x)^\alpha}$). Опять запишем остаточный член в форме Коши:

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-0)^n \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\xi)^{\alpha-n-1}}{n!}(x-\xi)^n x \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\left(\frac{x-\xi}{1+\xi}\right)^n x(1+\xi)^{\alpha-1} \end{aligned}$$

где ξ — некоторая точка между 0 и x своя для каждого n. Далее остаточный член оценивается еще хитрее чем в случае логарифма:

$$\begin{aligned} |r_n(x)| &\leq \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\right| \underbrace{\left|\frac{x-\xi}{1+\xi}\right|^n}_{\leq |x|^n} |x| \underbrace{|(1+\xi)^{\alpha-1}|}_{\substack{\leq 1+|x|,\ \alpha-1\geq 0 \\ \leq \frac{1}{1-|x|},\ \alpha-1<0}} \\ &\leq \underbrace{\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\right|}_{=K_n \to 0} |x|^n |x| \operatorname{const} \to 0 \end{aligned}$$

Осталось только обосновать, что $K_n \to 0$. Докажем, что K_n убывает, начиная с некоторого номера. Для этого заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{K_{n+1}}{K_n} &= \left|\frac{\alpha(\alpha-1))\cdots(\alpha-(n+1))}{(n+1)!} : \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\right| |x| \\ &= \left|\frac{\alpha-(n+1)}{n+1}\right| |x| \to |x| < 1, \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Теорема 1.11 → По теореме 1.11, для произвольного q, $|x| < q < 1$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \;\mid\; \forall n \geq n_0 \quad \frac{K_{n+1}}{K_n} < q < 1,$$

а это означает, что K_n убывает начиная с номера n_0. Переходя к пределу в
Теорема 1.11 → неравенстве

$$0 \leq K_{n+1} \leq qK_n,$$

мы находим само значение предела: $\lim K_n = 0$. **Теорема доказана.**

§ 5. Исследование функции при помощи производной

5.1. Монотонность и точки экстремума.

Теорема 16
о монотонности
и производной
⇓

Если $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$

(1) непрерывна на $\langle a, b\rangle$,
(2) имеет производную на (a, b),

то

$$f(x) \text{ неубывающая} \quad \Longleftrightarrow \quad f'(x) \geq 0 \text{ на } (a,b),$$

$$f(x) \text{ возрастающая} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} f'(x) \geq 0 \text{ на } (a,b) \text{ и} \\ \text{не существует промежутка,} \\ \text{на котором } f'(x) = 0, \end{cases}$$

$$f(x) \text{ постоянна} \quad \Longleftrightarrow \quad f'(x) = 0 \text{ на } (a,b)$$

Доказательство

Шаг 1 (f неубывающая ⇒ $f'(x) \geq 0$). Поскольку $f(x)$ неубывающая, для любых $x, x_0 \in \langle a, b\rangle$, $x \neq x_0$,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Теорема 27 → Переходя к пределу в неравенстве по теореме 27, получаем

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Шаг 2 (f неубывающая ⇐ $f'(x) \geq 0$). Пусть $x_, x_2 \in \langle a, b\rangle$, $x_1 < x_2$. По
Теорема 11 → теореме Лагранжа найдется такая точка $\xi \in (x_1, x_2)$, что

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \geq 0.$$

Теорема 11 →

Шаг 3 (f возрастающая $\Rightarrow$ не существует промежутка ...). От противного. Предположим, что существует такой промежуток $[x_1, x_2]$, на котором $f'(x) = 0$. Тогда по теореме Лагранжа найдется такая точка $\xi \in (x_1, x_2)$, что

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{=0}(x_2 - x_1) = 0,$$

что ПРОТИВОРЕЧИТ строгой монотонности $f(x)$.

Шаг 4 (f возрастающая $\Leftarrow f'(x) \geq 0$ и не существует промежутка ...). Неубывание функции $f(x)$ следует из шага 2. Докажем, что $f(x)$ строго монотонна, методом от противного. ЕСЛИ БЫ существовали такие точки $x_1 < x_2$, что $f(x_1) = f(x_2)$, то $f(x)$ БЫЛА БЫ постоянна на всем промежутке $[x_1, x_2]$ и тем самым ИМЕЛА БЫ на нем нулевую производную.

Шаг 5 ($f = \text{const} \Leftrightarrow f'(x) = 0$). Необходимость тривиальна, а достаточность как и выше получается из теоремы Лагранжа. **Теорема доказана.**

Теорема 17
о локальном экстремуме
$\Downarrow$

> Пусть $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ имеет производные до порядка n в точке $x_0 \in (a, b)$, причем
>
> (1) $f^{(k)}(x_0) = 0$, $1 \leq k < n$;
> (2) $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.
>
> Тогда
>
> (1) при нечетном n $f(x)$ не имеет экстремума в x_0;
> (2) при четном n $f(x)$ имеет экстремум в x_0:
> максимум, если $f^{(n)}(x_0) < 0$, и минимум, если $f^{(n)}(x_0) > 0$.

Теорема 13 →

Доказательство Запишем разложение по формуле Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{=0}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \alpha(x)(x - x_0)^n,$$

или иначе

$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{\left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x)\right]}_{\to \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}(x - x_0)^n,$$

Теорема 1.27 →

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$. По теореме 1.27 в некоторой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 выражение в квадратных скобках имеет тот же знак, что и $f^{(n)}(x_0)$.

Если n нечетно, то $(x - x_0)^n$ меняет знак при переходе через x_0, и значит, экстремума нет. Если же n четно, то $(x - x_0)^n > 0$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, и для положительного $f^{(n)}(x_0)$ мы имеем локальный минимум, а для отрицательного — локальный максимум. **Теорема доказана.**

Как находить экстремумы функции на промежутке?.

Пример дифференцируемой функции, немонотонной слева и справа от экстремума..

5.2. Выпуклость функции и точки перегиба.

Определение
выпуклой функции
$\Downarrow$

Функция $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ на промежутке называется *выпуклой*, если

$$\forall x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \geq 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1,$$

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

Выпуклая функция $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ называется *строго выпуклой*, если для $x_1 \neq x_2$ и $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ предыдущее неравенство строгое.

Аналогично определяются вогнутая и строго вогнутая функции. Нужно только поменять знак неравенства на противоположный.

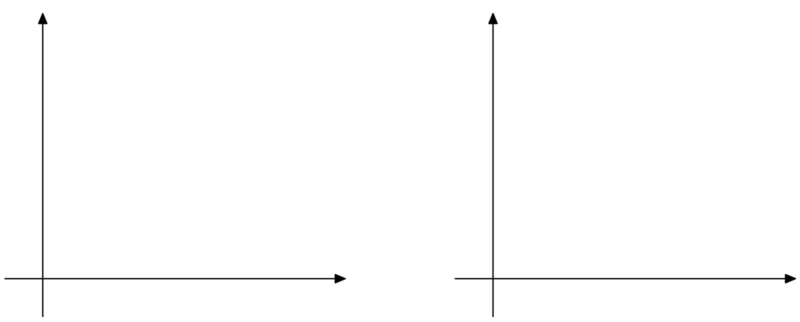
Определение
выпуклого множества
$\Downarrow$

Множество M в векторном пространстве называется *выпуклым*, если

$$\forall P_1, P_2 \in M \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \geq 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 \in M,$$

т. е. вместе с любыми двумя точками множество содержит весь отрезок соединяющий эти точки.

Геометрический смысл выпуклости. Функция выпукла $\iff$ ее надграфик — выпуклое множество. Очевидно.



(a) (b)

Теорема 18
критерий выпуклости функции
$\Downarrow$

(1) Если $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — функция на промежутке, то

$$f \text{ выпукла на } \langle a,b\rangle \quad \Longleftrightarrow$$
$$\forall x_1, x, x_2 \in \langle a,b\rangle,\ x_1 < x < x_2, \quad \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

(2) Если $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ непрерывна на $\langle a,b\rangle$ и имеет производную на (a,b), то

$$f \text{ выпукла на } \langle a,b\rangle \quad \Longleftrightarrow \quad f' \text{ неубывающая на } (a,b)$$

(3) Если $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ непрерывна на $\langle a,b\rangle$ и имеет вторую производную на (a,b), то

$$f \text{ выпукла на } \langle a,b\rangle \quad \Longleftrightarrow \quad f'' \ge 0 \text{ на } (a,b)$$

Доказательство

Шаг 1 (первое утверждение). Пусть $x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle$ — произвольные точки такие, что $x_1 < x_2$. Утверждение следует из следующей цепочки:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \le \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2), \quad \alpha_1,\alpha_2 \ge 0, \quad \alpha_1+\alpha_2 = 1,$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$f(x) \le \frac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2), \quad x \in [x_1,x_2],$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$f(x)\underbrace{\left(\frac{x_2-x}{x_2-x_1} + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)}_{=1} \le \frac{x_2-x}{x_2-x_1} f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2), \quad x \in [x_1,x_2],$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$(f(x)-f(x_1))\frac{x_2-x}{x_2-x_1} \le (f(x_2)-f(x))\frac{x-x_1}{x_2-x_1}, \quad x \in [x_1,x_2],$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}, \quad x \in [x_1,x_2].$$

Шаг 2 (второе утверждение; необходимость). По Шагу 1 для любых $x_1 < x < x_2$ из $\langle a,b\rangle$ имеем

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

теорема 1.27 → Переходя к пределу в неравенстве по теореме 1.27 последовательно при $x \to x_1$ и $x \to x_2$, получаем

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2),$$
$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

что влечет неубывание $f'(x)$.

Шаг 3 (второе утверждение; достаточность). Пусть $x_1 < x < x_2$ — произвольные точки из $\langle a, b\rangle$. По теореме Лагранжа существуют такие точки $\xi_1 \in (x_1, x)$ и $\xi_2 \in (x, x_2)$, что

Теорема 11 →

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}, \quad f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

В силу того, что $f'(x)$ неубывающая, $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$, и значит,

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

что равносильно выпуклости $f(x)$.

Шаг 4 (третье утверждение). По теореме 16 неубывание $f'(x)$ равносильно $f''(x) \geq 0$. **Теорема доказана.**

Теорема 16 →

Определение
точки перегиба
⇓

Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. Точка $x_0 \in (a, b)$ называется *точкой перегиба* функции f, если можно указать такую окрестность U точки x_0, что на одном из множеств $U \cap (a, x_0)$, $U \cap (x_0, b)$ функция f выпукла, а на другом — вогнута.

Замечание. Равенство нулю второй производной — необходимое условие точки перегиба.

5.3. Асимптоты. Правила Бернулли — Лопиталя.

Определение
асимптоты
⇓

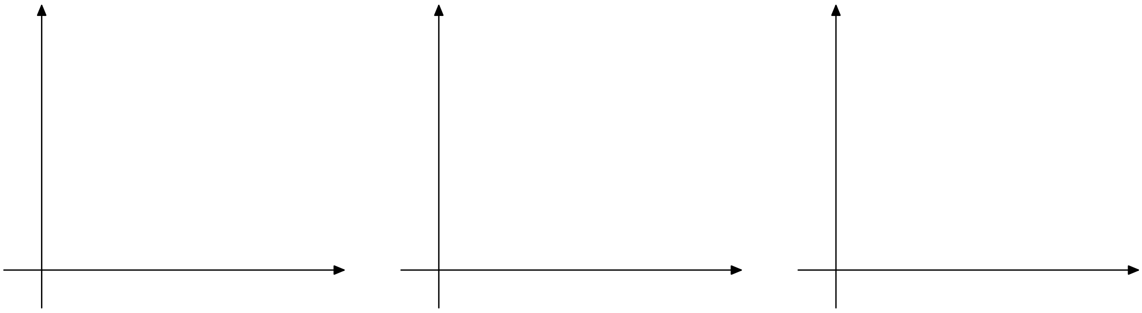
Пусть $c \in \mathbb{R}$ — предельная точка области определения $f(x)$. Говорят, что $f(x)$ имеет *вертикальную асимптоту $x = c$* в точке c, если

$$\lim_{x \to c-0} f(x) = \pm\infty \quad \text{или} \quad \lim_{x \to c+0} f(x) = \pm\infty.$$

Пусть $\pm\infty$ — предельная точка области определения $f(x)$. Говорят, что $f(x)$ имеет *наклонную асимптоту $y = ax + b$ при $x \to \pm\infty$*, если

$$\exists\, a, b \in \mathbb{R} \;\mid\; \lim_{x \to \pm\infty} \big(f(x) - (ax + b)\big) = 0.$$

Для определнности далее мы рассматриваем только случай $x \to +\infty$.



(a) (b) (c)

О нахождении асимптот. Легко понять, что функция $f(x)$ имеет наклонную асимптоту при $x \to +\infty$ тогда и только тогда, когда существуют конечные пределы

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - ax\big).$$

При этом, эти пределы и будут коэффициентами асмптоты $y = ax + b$.

Теорема 19
правила
Бернулли — Лопиталя
$\Downarrow$

Пусть x_0 — предельная точка промежутка $\langle a, b\rangle$.

Если

(1) функции f, g заданы и имеют производные f', g' на $\langle a, b\rangle$ (за исключением, возможно, точки x_0), при этом $g'(x) \neq 0$,

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ или $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ ($f(x)$ любая),

то

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(при условии, что последний предел существует, конечный или бесконечный).

Доказательство

Шаг 1 (сведение к случаю $x_0 = b$). Достаточно рассмотреть случай, когда x_0 — один из концов промежутка $\langle a, b\rangle$, например $x_0 = b$, и x стремиться к x_0 с одной стороны, т. е. мы имеем дело с односторонним пределом. Действительно, если x_0 — внутренняя точка $\langle a, b\rangle$, то докажем утверждение отдлеьно для каждого промежутка $\langle a, x_0\rangle$, $\langle x_0, b\rangle$ и вспомним, что существование и совпадение односторонних пределов при $x \to x_0 \pm 0$ означает существование предела при $x \to x_0$.

Теорема $\to$

Итак, далее считаем, что $x_0 = b$ и x стремится к b слева.

Шаг 2 ($g(x) \neq 0$ в некоторой окрестности b). Убедимся, что в некоторой окрестности U точки b $g(x) \neq 0$ и тем самым определено отношение $f(x)/g(x)$. Поскольку $g'(x) \neq 0$ на (a, b), функция $g(x)$ взаимно однозначна и может принимать значение 0 не более чем в одной точке. Если такой точки нет, то $U = (a, b)$. Если же $g(c) = 0$ в некоторой точке $c \in (a, b)$, то $U = (c, b)$.

Шаг 3 (подготовительный). Доказательство будет опираться непосредственно на определение предела. Пусть $l = \lim\limits_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Если $l \in \mathbb{R}$, то надо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c \in (a,b) \ \mid \ \forall x \in (c,b) \quad l - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < l + \varepsilon.$$

Если $l = +\infty$, то надо

$$\forall E > 0 \quad \exists c \in (a,b) \ \mid \ \forall x \in (c,b) \quad E < \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Если $l = -\infty$, то надо

$$\forall E > 0 \quad \exists c \in (a,b) \ \mid \ \forall x \in (c,b) \quad \frac{f(x)}{g(x)} < -E.$$

В любом случае достаточно будет доказать следующие два факта:

$$\forall \alpha < l \quad \exists c \in (a,b) \ \mid \ \forall x \in (c,b) \quad \alpha < \frac{f(x)}{g(x)}, \tag{$*$}$$

$$\forall \beta > l \quad \exists c \in (a,b) \ \mid \ \forall x \in (c,b) \quad \frac{f(x)}{g(x)} < \beta. \tag{$\dagger$}$$

Мы докажем $(*)$, второй факт доказывается аналогично.

Шаг 4 (импликация $(*)$ в случае $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$). Возьмем вспомогательное число γ, $\alpha < \gamma < l$. По определению предела

$$\exists c \in (a,b) \ \mid \ \gamma < \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \text{при } \xi \in (c,b).$$

Теорема 12 → По теореме Коши для любых $x, y \in (c,b)$, $x < y$, существует точка $\xi \in (x,y) \subset (c,b)$ такая, что

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)},$$

откуда

$$\gamma < \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)}.$$

(Заметим, что неравенство верно для любых x, y, несмотря на то, что точка
Теорема 1.?27 → ξ зависит от x, y.) Переходя к пределу в неравенстве при $y \to b$, получаем требуемое неравенство

$$\alpha < \gamma \le \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in (c,b).$$

Шаг 5 (импликация $(*)$ в случае $\lim g(x) = \pm\infty$). Возьмем вспомогательное число γ, $\alpha < \gamma < l$. По определению предела

$$\exists d \in (a,b) \ \mid \ \gamma < \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \text{при } \xi \in (d,b).$$

Теорема 12 → По теореме Коши для любых $x, y \in (d,b)$, $x < y$, существует точка $\xi \in (x,y) \subset (d,b)$ такая, что

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)},$$

откуда
$$\gamma < \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}, \quad x, y \in (d, b).$$
В отличие от предыдущего случая мы не можем просто перейти к пределу при $y \to b$, и переход от $\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}$ к $\frac{f(x)}{g(x)}$ происходит следующим образом:
$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x)-f(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} \\ &= \underbrace{\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}}_{>\gamma} \underbrace{\frac{g(x)-g(y)}{g(x)}}_{\to 1} + \underbrace{\frac{f(y)}{g(x)}}_{\to 0}. \end{aligned}$$

Зафиксируем произвольно $y \in (d, b)$ и будем выбирать окрестность (c, b), в которой может находиться x. Поскольку $\frac{g(x)-g(y)}{g(x)} \to 1$, $x \to b$,
$$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists c_1 \in (d, b) \ \mid \ \forall x \in (c_1, b) \quad 1 - \varepsilon_1 < \frac{g(x)-g(y)}{g(x)} < 1 + \varepsilon_1. \qquad (*)$$
Аналогично, поскольку $\frac{f(y)}{g(x)} \to 0$, $x \to b$,
$$\forall \varepsilon_2 > 0 \quad \exists c_2 \in (d, b) \ \mid \ \forall x \in (c_2, b) \quad -\varepsilon_2 < \frac{f(y)}{g(x)}.$$

Пусть $\gamma \geq 0$. Выбирая $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0, 1)$ так, чтобы
$$\alpha < \gamma(1 - \varepsilon_1) - \varepsilon_2$$
(что очевидно возможно поскольку $\alpha < \gamma$), мы получим c_1 и c_2, после чего положим $c = \max\{c_1, c_2\}$. При таком выборе c для $x \in (c, b)$ имеем
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} \frac{g(x)-g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} > \gamma(1-\varepsilon_1) - \varepsilon_2 > \alpha,$$
что доказывает $(*)$ в случае $\gamma \geq 0$.

Пусть теперь $\gamma < 0$. Выбирая $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0, 1)$ так, чтобы
$$\alpha < \gamma(1 + \varepsilon_1) - \varepsilon_2$$
(что очевидно возможно поскольку $\alpha < \gamma$), мы получим c_1 и c_2, после чего положим $c = \max\{c_1, c_2\}$. При таком выборе c для $x \in (c, b)$ имеем ($\gamma < 0$!)
$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} > \gamma \quad \to$$
$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} \frac{g(x)-g(y)}{g(x)} > \gamma \frac{g(x)-g(y)}{g(x)} \overset{\gamma<0,\ (*)}{>} \gamma(1+\varepsilon_1) \quad \to$$
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} \frac{g(x)-g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} > \gamma(1+\varepsilon_1) - \varepsilon_2 > \alpha,$$
что доказывает $(*)$ и в случае $\gamma < 0$. **Теорема доказана.**

5.4. Классические неравенства анализа.

Многие классические неравенства, широко используемые в анализе, являются следствием выпуклости тех или иных функций.

Теорема 20
неравенство Йенсена
$\Downarrow$

Для выпуклой функции $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ имеет место неравенство Йенсена

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \le \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n),$$

где

$$x_1, \dots, x_n \in \langle a, b\rangle \quad \text{и} \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \ge 0,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

Доказательство. Будем доказывать по индукции. База индукции (при $n = 2$) — это в точности определение выпуклой функции. Докажем шаг индукции. Дано

$$\begin{gathered}\forall y_1, \dots, y_{n-1} \in \langle a, b\rangle \quad \forall \beta_1, \dots, \beta_{n-1} \ge 0,\ \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i = 1,\\ \beta_1 y_1 + \dots + \beta_{n-1} y_{n-1} \in \langle a, b\rangle\\ f(\beta_1 y_1 + \dots + \beta_{n-1} y_{n-1}) \le \beta_1 f(y_1) + \dots + \beta_{n-1} f(y_{n-1}),\\ \text{(индукционное предположение)}\end{gathered} \tag{$*$}$$

$$\begin{gathered}\forall z_1, z_2 \in \langle a, b\rangle \quad \forall \gamma_1, \gamma_2 \ge 0,\ \gamma_1 + \gamma_2 = 1,\\ f(\gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2) \le \gamma_1 f(z_1) + \gamma_2 f(z_2),\\ \text{(определение выпуклости)}\end{gathered} \tag{$\dagger$}$$

Надо

$$\begin{gathered}\forall x_1, \dots, x_n \in \langle a, b\rangle \quad \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \ge 0,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,\\ f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \le \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n).\end{gathered} \tag{$\ddagger$}$$

Если среди α_i есть хотя бы один нулевой, то взяв остальные α_i в качестве β_i в $(*)$, мы немедленно получим требуемое. Иначе, поступим так:

$$\begin{gathered}\gamma_1 = \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}, \quad \gamma_2 = \alpha_n,\\ y_i = x_i, \quad \beta_i = \frac{\alpha_i}{\gamma_1}, \quad i = 1, \dots, n-1,\\ z_1 = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_{n-1} x_{n-1}, \quad z_2 = x_n.\end{gathered}$$

При таком выборе очевидно получается $\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i = 1$ и неравенства $(*)$ и $(\dagger)$ принимают вид (первое после умножения на γ_1)

$$\gamma_1 f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{\gamma_1} x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f(x_i)$$

и

$$f\left(\gamma_1\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\alpha_i}{\gamma_1}x_i+\alpha_n x_n\right)\le\gamma_1 f\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\alpha_i}{\gamma_1}x_i\right)+\alpha_n f(x_n).$$

Складывая полученные неравенства, мы получаем (‡). **Теорема доказана.**

Теорема 21
неравенство Коши
$\Downarrow$

Для любых

$$x_1,\dots,x_n>0 \quad \text{и} \quad \alpha_1,\dots,\alpha_n\ge 0,\quad \sum_{i=1}^n\alpha_i=1$$

имеет место неравенство Коши

$$x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}\le\alpha_1x_1+\cdots\alpha_nx_n.$$

Доказательство Рассмотрим функцию $f(x)=-\ln x$. Она, очевидно, выпукла, поскольку имеет положительную вторую производную $f''(x)=\frac{1}{x^2}$. Запишем для нее неравенство Йенсена:

$$-\ln(\alpha_1x_1+\cdots\alpha_nx_n)\le-\big(\alpha_1\ln x_1+\cdots+\alpha_nx_n\big)=-\ln\big(x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}\big),$$

откуда в силу убывания функции $f(x)=-\ln x$ получаем неравенство Коши. **Теорема доказана.**

В частности, при $\alpha_1=\cdots=\alpha_n=\frac{1}{n}$ получается известное неравенство, связывающее среднее геометрическое и среднее арифметическое:

$$\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}\le\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}.$$

Теорема 22
неравенство Юнга
$\Downarrow$

Для $a,b\ge 0$ и $p,q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, имеет место неравенство Юнга

$$a\,b\le\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

Доказательство Запишем неравенство Коши

$$x_1^{\alpha_1}\,x_2^{\alpha_2}\le\alpha_1x_1+\alpha_2x_2$$

и положим

$$\alpha_1=\frac{1}{p},\quad \alpha_2=\frac{1}{q},\quad x_1=a^p,\quad x_1=b^q.$$

Теорема доказана.

Теорема 23
неравенство Гёльдера
$\Downarrow$

Пусть $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Для произвольных

$$x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}, \quad y_1, \dots, y_n \in \mathbb{C}$$

имеет место Гёльдера

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Доказательство Обозначим

$$X = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad Y = \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Если хотя бы одна из этих величин равна нулю, то неравенство тривиально. Предположим, что $X, Y \neq 0$. Тогда, используя неравенство Юнга (n раз), запишем

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| = XY \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|}{X}\frac{|y_i|}{Y}$$

Теорема 22 $\rightarrow$ (неравенство Юнга для каждого слагаемого)

$$\le XY \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{p}\left(\frac{|x_i|}{X}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{|y_i|}{Y}\right)^q\right)$$

$$= XY\left(\frac{1}{p}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{|x_i|}{X}\right)^p}_{=1} + \frac{1}{q}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{|y_i|}{Y}\right)^q}_{=1}\right) = XY$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Теорема доказана.

Теорема 24
неравенство Минковского
$\Downarrow$

Пусть $p \ge 1$. Для произвольных

$$x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}, \quad y_1, \dots, y_n \in \mathbb{C}$$

имеет место Минковского

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Доказательство Если $\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p = 0$, то неравенство тривиально. Далее предполагаем, что указанная сумма отлична от нуля.

При $p = 1$ неравенство немедленно следует из неравенства треугольника. Если $p > 1$, то возьмем $q = \frac{p}{p-1}$ так чтобы было $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Имеем

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^{n} \Big(|x_i|\, |x_i + y_i|^{p-1} + |y_i|\, |x_i + y_i|^{p-1} \Big)$$

(неравенство Гёльдера)

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{1/q} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{1/q}$$

$$\leq \left[\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p \right)^{1/p} \right] \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

Остается поделить на $\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}$ и заметить, что $1 - (p-1)/p = 1/p$. **Теорема доказана.**

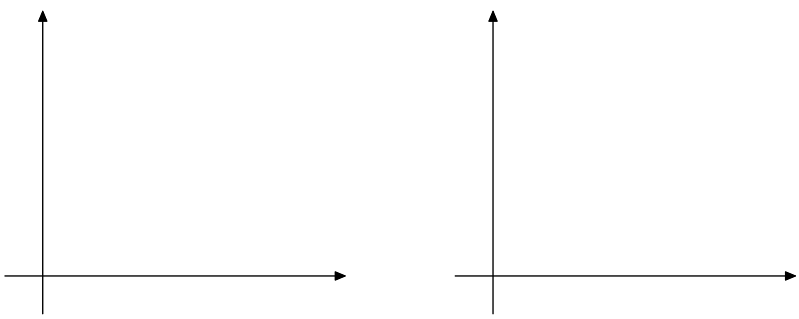
§ 6. Некоторые приложения дифференциального исчисления

6.1. Минимизация.

Многие задачи сводятся к отысканию таких величин параметров, при которых та или иная функция достигает своего минимума (или максимума). Минимизируемая функция назыается *целевой функцией.*

Закон преломления. Луч света, проходя через границу сред с разными скоростями, преломляется согласно закону (см. рисунок)

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2}.$$



(a) (b)

Траектория луча света определяется согласно принципу Ферма:

> Траектория реализует минимальное время прохождения по сравнению со всеми другими траекториями.

Рассмотрим луч света, проходящий из точки A в точку B и преломляющийся в точке C на границе двух сред. Для того, чтобы установить закон отражения, нужно найти координату x точки C, которую будем отсчитывать как показано на рисунке. Целевая функция, т. е. время, которое затратит рассматриваемый луч света, равна

$$T(x) = \frac{1}{v_1}\sqrt{h_1^2 + x^2} + \frac{1}{v_2}\sqrt{h_2^2 + (a-x)^2}.$$

Искомый x — точка минимума функции $T(x)$. Найдем ее. Для этого вычислим производную и приравняем ее к нулю:

$$T'(x) = \frac{1}{v_1}\underbrace{\frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}}}_{=\sin\alpha_1} + \frac{1}{v_2}\underbrace{\frac{-(a-x)}{\sqrt{h_2^2 + (a-x)^2}}}_{=\sin\alpha_2} = 0.$$

Для того чтобы убедиться в том, что x действительно минимум (и вообще экстремум) найдет вторую производную и увидим, что она положительна:

$$T''(x) = \frac{1}{v_1}\frac{h_1^2}{\left(\sqrt{h_1^2 + x^2}\right)^3} + \frac{1}{v_2}\frac{h_2^2}{\left(\sqrt{h_2^2 + (a-x)^2}\right)^3} > 0.$$

Теорема 17 гарантирует, что найденная точка x действительно минимум.

Форма банки. Будет позже.

6.4. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

Линия моста. Будет позже.

6.2. Метод Ньютона.

Пусть задана функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и мы хотим решить уравнение

$$f(x) = y,$$

где y — заданное число. Вычитая из $f(x)$ константу, можно свести задачу к случаю $y = 0$. Поэтому далее мы будем рассматривать уравнение $f(x) = 0$.

Прежде чем находить корень нужно убедиться в том, что искомый корень есть, а еще лучше быть уверенным, что он единственный на указанном промежутке. Теорема Больцано — Коши гарантирует, что, если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет разные знаки на концах a и b, то f обязательно имеет корень на $[a, b]$ (возможно не один). Кроме того, доказательство теоремы дает конструктивный способ нахождения хотя бы одного из этих корней. Единственность корня можно гарантировать, если функция монотонная на $[a, b]$.

В случае функций класса C^2 для нахождения корня можно использовать метод Ньютона, который обладает более высокой скоростью сходимости, т.е. требует меньшего числа итераций для нахождения корня с той же точностью.

Теорема 25
метод Ньютона
$\Downarrow$

Пусть

(1) $f \in C^2([a,b])$;
(2) $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки, т. е. $f(a)f(b) < 0$;
(3) f' и f'' имеют определенный знак на $[a,b]$, т. е. f имеет определенный характер монотонности и выпуклости.

Тогда

(1) единственный корень ξ функции $f(x)$ на $[a,b]$ находится как предел последовательности x_n определенной следующим образом:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 1, 2, \dots ,$$
$$x_1 = \begin{cases} b, & \text{если } f(b)f''(x) > 0, \\ a, & \text{если } f(a)f''(x) > 0. \end{cases}$$

(2) скорость сходимости характеризуется оценкой

$$|\xi - x_{n+1}| \le \frac{\sup_{[a,b]} |f''(x)|}{2 \inf_{[a,b]} |f'(x)|} |\xi - x_n|^2.$$

Доказательство Рассмотрим случай, когда $f'(x) > 0$ и $f''(x) > 0$ на $[a,b]$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Шаг 1 (геометрический смысл). В данном случае мы должны начинать с $x_1 = b$. Приблизим $f(x)$ ее полиномом Тейлора $p_1(x;x_1) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$ в точке x_1 (см. рисунок). Решим <u>линейное</u> уравнение

$$p_1(x;x_1) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) = 0.$$

Легко показать, что его корень (обозначим его x_2) находится по формуле

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Точка x_2 будет ближе к корню ξ чем x_1. Далее приблизим $f(x)$ полиномом Тейлора $p_1(x;x_2) = f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2)$. Следующее приближение x_3 определяется как решение линейного уравнения

$$p_1(x;x_2) = f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2) = 0$$

и находится по формуле

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}.$$

Таким образом последовательность x_n состоит из решений линейных уравнений, получающихся заменой функции $f(x)$ на соответствующий полином Тейлора степени 1.

Шаг 2 ($\boldsymbol{\xi < x_n}$). Докажем, что $\xi < x_n$ по индукции. База индукции следует из построения. Предположим, что $\xi < x_n$ уже доказано, и докажем $\xi < x_{n+1}$.

Теорема 14 →

Запишем формулу Тейлора для $f(x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа в окрестности точки x_n:

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(c_n)}{2}(x - x_n)^2,$$

где c_n — некоторая точка между x и x_n. В частности, при $x = \xi$ имеем

$$0 = f(\xi) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{f''(c_n)}{2}(\xi - x_n)^2. \tag{$*$}$$

С другой стороны, по построению для x_{n+1} верно тождество

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n),$$

вычитая которое из ($*$), получаем

$$0 = \underbrace{f'(x_n)}_{>0}(\xi - x_{n+1}) + \underbrace{\frac{f''(c_n)}{2}}_{>0}\underbrace{(\xi - x_n)^2}_{>0}, \tag{$\dagger$}$$

откуда $\xi - x_{n+1} < 0$, что доказывает шаг индукции и утверждение данного шага.

Шаг 3 ($\boldsymbol{x_n \to \xi}$). Покажем, что $x_{n+1} \le x_n$. Действительно,

$$x_{n+1} = x_n - \underbrace{\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{>0} \le x_n,$$

поскольку $f(x_n) > f(\xi) = 0$ в силу возрастания $f(x)$ и шага 2.

Значит, по теореме Вейерштрасса x_n, будучи убывающей и ограниченной снизу имеет предел. Найдем его, переходя к пределу в равенстве

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Теоремы →

В силу непрерывности f и f' получаем

$$\lim x_n = \lim x_n - \frac{f(\lim x_n)}{f'(\lim x_n)},$$

откуда $f(\lim x_n) = 0$, т. е. $\xi = \lim x_n$.

Шаг 4 (скорость сходимости). Перепишем тождество ($\dagger$), полученное выше в виде

$$\xi - x_{n+1} = -\frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)}(\xi - x_n)^2.$$

Из него непосредственно вытекает оценка

$$|\xi - x_{n+1}| \le \frac{\sup_{[a,b]}|f''(x)|}{2\inf_{[a,b]}|f'(x)|}|\xi - x_n|^2.$$

Теорема доказана.

О скорости сходимости. Поскольку $x_n \to \xi$, начиная с некоторого номера n_0

$$\frac{\sup_{[a,b]} |f''(x)|}{2\inf_{[a,b]} |f'(x)|}|\xi - x_n| < \frac{1}{2}$$

и тем самым

$$|\xi - x_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|\xi - x_n|.$$

Можно сказать, что, начиная с некоторого номера, каждое следующее приближение в два раза лучше чем предыдущее.

§ 7. Первообразная

Определение
первообразной
⇓

Функция $F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ называется *первообразной* или *неопределенным интегралом* функции $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, если

$$F'(x) = f(x) \quad \text{на } \langle a, b\rangle.$$

Функция $F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ называется *оббобщенной первообразной* функции $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, если

(1) F непрерывна на $\langle a, b\rangle$;
(2) $F'(x) = f(x)$ на $\langle a, b\rangle$ за исключение возможно конечного числа точек.

Для (обощенной) первообразной функции $f(x)$ используется обозначение

$$\int f(x)\, dx.$$

Теорема 26
о множестве первообразных
⇓

Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ — некоторая функция.

(1) Если $F(x)$ — (обобщенная) первообразная $f(x)$, то $F(x) + c$, где c — произвольная константа, тоже первообразная $f(x)$.
(2) Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две (обобщенных) первообразных $f(x)$, то

$$F_2(x) = F_1(x) + c$$

с некоторой константой $c \in \mathbb{R}$.

Доказательство Первое утверждение очевидно следует из линейности операции дифференцирования и того, что производная постоянной функции равна нулю.

Теоремы 2, 16 →

Пусть $x_1 < \cdots < x_n$ — все точки промежутка $\langle a, b\rangle$, в которых не выполняется условие $F_j'(x) = f(x)$ хотя бы для одной из обобщенных первообразных $F_1(x)$, Теорема 16 →

$F_2(x)$. Обозначим $x_0 = a$, $x_{n+1} = b$. На каждом из промежутков (x_k, x_{k+1}), $k = 0, \dots, n$, верно $F_2'(x) - F_1'(x) = 0$ и следовательно по теореме 16 $F_2 - F_1 = c_k$, где константы c_k свои для каждого промежутка. В силу непрерывности $F_1(x)$ и $F_2(x)$ все константы c_k равны между собой. **Теорема доказана.**

Почему первообразную рассматривают на промежутке?.

Об обобщенной первообразной..

Теорема 27
о линейности первообразной
⇓

Если $f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ имеют (обобщенные) первообразные, то любая их линейная комбинация $\alpha f(x) + \beta g(x)$ тоже имеет первообразную, причем

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx.$$

Теорема 2 →

Доказательство Очевидно следует из линейности дифференцирования.

Теорема 28
формула интегрирования по частям для первообразной
⇓

Если $f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируемы и fg' имеет первообразную, то $f'g$ тоже имеет первообразную и

$$\int f'(x)g(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\, dx.$$

Теорема 2 →

Доказательство По теореме 2

$$(fg)' = f'g + fg'$$

или

$$f'g = (fg)' - fg'.$$

Функция справа имеет имеет первообразную по условию. Значит,

$$\int f'g\, dx = \int \big((fg)' - fg'\big)\, dx = fg - \int fg'\, dx.$$

Теорема доказана.

Пример.

Теорема 29
о замене и подстановке для первообразной
⇓

Пусть $f : \langle c, d\rangle \to \mathbb{R}$, $\varphi : \langle a, b\rangle \to \langle c, d\rangle$, так что определена композиция $f(\varphi(x))$.

Если

(1) φ дифференцируема,
(2) f имеет первообразную F,

то $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ тоже имеет первообразную и

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)).$$

Если

(1) φ дифференцируема, строго монотонна, и имеет дифференцируемую обратную φ^{-1}.
(2) $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ имеет первообразную $G(x)$,

то $f(y)$ тоже имеет первообразную и

$$\int f(y)\,dy = G(\varphi^{-1}(y)).$$

Доказательство

Шаг 1 (замена). Проверим, что производная $F(\varphi(x))$ равна $f(\varphi(x))\varphi'(x)$:

Теорема 3 →
$$\frac{d}{dx}F(\varphi(x)) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Шаг 2 (подстановка). Проверим, что производная $G(\varphi^{-1}(y))$ равна $f(y)$:

Теорема 3 →
$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}G(\varphi^{-1}(y)) &= G'\big(\varphi^{-1}(y)\big)\big(\varphi^{-1}(y)\big)' \\ &= \underbrace{f(\varphi(\varphi^{-1}(y)))}_{=f(y)}\,\underbrace{\varphi'(\varphi^{-1}(y))\,(\varphi^{-1}(y))'}_{=(\varphi\circ\varphi^{-1})'=1} = f(y)\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Пример.

Теорема 30
о первообразной рациональной функции
⇓

Рациональная функция на любом промежутке своей области определения имеет первообразную, причем эта первообразная выражается через рациональные функции, а также функции $\ln x$ и $\operatorname{arctg} x$.

Доказательство

Шаг 1 (разложение на простейшие дроби). Пусть $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ — рациональная функция. Из курса алгебры известно, что $R(x)$ представляется в виде

$$R(x) = p(x) + \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{k_j} \frac{a_{jk}}{(x-x_j)^k} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_j} \frac{b_{jk}x + c_{jk}}{(x^2+p_jx+q_j)^k},$$

где многочлен $p(x)$ степени $\deg P - \deg Q$ — частное от деления $P(x)$ на $Q(x)$, числа x_j, p_j, q_j определяются разложением $Q(x)$ над полем $\mathbb{R}$:

$$Q(x) = a(x-x_1)^{k_1}\cdots(x-x_l)^{k_l}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\cdots(x^2+p_nx+q_n)^{m_n},$$

а числа a_{jk}, b_{jk}, c_{jk} определяются методом неопределенных коэффициентов.

В итоге достаточно показать как находить первообразную от каждого слагаемого.

Шаг 2 (первообразная дробей вида $\frac{a}{(x-x_1)^k}$). Первообразная находится явно:

$$\int (x-x_1)^{-k}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{-k+1}(x-x_1)^{-k+1}, & k \neq 1, \\ \ln|x-x_1|, & k = 1. \end{cases}$$

Шаг 3 (первообразная дробей вида $\frac{bx+c}{(x^2+px+q)^k}$). Выделим в знаменателе полный квадрат и введем новую переменную:

$$x^2+px+q = \Big(\underbrace{x+\frac{p}{2}}_{=u}\Big)^2 + \underbrace{q-\frac{p^2}{4}}_{=a^2}.$$

(Заметим, что $q - \frac{p^2}{4} > 0$ по условию в силу неприводимости x^2+px+q над $\mathbb{R}$.)

Теорема 29 → Используя подстановку $x = u - p/2$, получаем

$$\int \frac{bx+c}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \int \frac{b(u-p/2)+c}{(u^2+a^2)^k}\,du\Big|_{u=x+p/2}$$
$$= b\int \frac{u\,du}{(u^2+a^2)^k} + \Big(c - \frac{bp}{2}\Big)\int \frac{du}{(u^2+a^2)^k}\Big|_{u=x+p/2}.$$

Теорема 29 → Первый интеграл легко считается при помощи замены:

$$\int \frac{u\,du}{(u^2+a^2)^k} = \frac{1}{2}\int \frac{du^2}{(u^2+a^2)^k} = \frac{1}{2}\begin{cases} \frac{1}{-k+1}(u^2+a^2)^{-k+1}, & k \neq 1, \\ \ln|u^2+a^2|, & k = 1. \end{cases}$$

Второй интеграл считается по индукции. При $k = 1$ имеем

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a\,d\frac{u}{a}}{\left(\frac{u}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\Big(\frac{u}{a}\Big).$$

При $k > 1$ первообразная находится при помощи рекурентной формулы, кото-
Теорема 28 →
рая получается при помощи интегрирования по частям:

$$\begin{aligned}
I_k(u) &= \int \frac{du}{(u^2+a^2)^k} \\
&= \frac{u}{(u^2+a^2)^k} - \int u\, d\Big(\frac{1}{(u^2+a^2)^k}\Big) \\
&= \frac{u}{(u^2+a^2)^k} - \int u(-k)\frac{1}{(u^2+a^2)^{k+1}} 2u\, du \\
&= \frac{u}{(u^2+a^2)^k} + 2k \int \frac{u^2+a^2-a^2}{(u^2+a^2)^{k+1}}\, du \\
&= \frac{u}{(u^2+a^2)^k} + 2k \int \frac{du}{(u^2+a^2)^k} - 2ka^2 \int \frac{du}{(u^2+a^2)^{k+1}} \\
&= \frac{u}{(u^2+a^2)^k} + 2kI_k(u) - 2ka^2 I_{k+1}(u).
\end{aligned}$$

В итоге

$$I_{k+1}(u) = \frac{1}{2ka^2}\Big(\frac{u}{(u^2+a^2)^k} + (2k-1)I_k(u)\Big).$$

Теорема доказана.