Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Новосибирский национальный исследовательский
государственный университет»

На правах рукописи

УДК 517.518+517.54

Евсеев Никита Александрович

Операторы композиции в пространствах Соболева на группе Карно

Специальность 01.01.01 —
«Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор
Водопьянов Сергей Константинович

Новосибирск — 2015

Оглавление

Введение 4

1 Предварительные сведения 16

1.1 Группа Карно 16

1.1.1 Метрика Карно – Каратеодори 17

1.1.2 Мера семейства кривых 18

1.2 Пространства Соболева 18

1.2.1 Весовые пространства Соболева 21

1.3 Дальнейшие свойства метрики Карно – Каратеодори 21

1.4 Аппроксимация гладкими функциями 23

1.5 Неравенства Пуанкаре и области Джона 26

1.6 Разложение области на компакты 31

1.7 Функция множеств 32

1.8 Емкость 34

1.8.1 Емкость в пространстве $L^1_{\nu,F}(D)$ и ее свойства 34

1.8.2 Емкость в пространстве потенциалов 38

1.8.3 Обобщенная емкость Тейхмюллера 43

2 Операторы композиции в весовых пространствах Соболева 45

2.1 Свойства отображения φ 46

2.1.1 Объемная производная 46

2.1.2 Аппроксимативная дифференцируемость φ 49

2.1.3 Кусочная абсолютная непрерывность на линиях 56

2.2 Необходимые и достаточные условия ограниченности оператора композиции . 59

3 Изоморфизмы пространств Соболева на группах Карно и метрические свойства отображений 65

3.1 Оператор композиции и класс IL^1_p 65

3.2 Квазиизометрические отображения и оператор композиции . . . 73

3.2.1 Случай $p > \nu$ . . . 75

3.2.2 Случай $p < \nu$ . . . 81

3.2.3 Доказательство теоремы 3.1 . . . 90

3.3 Квазиконформные отображения и оператор композиции . . . 93

3.3.1 Пространство $L^1_{\nu,F}$ . . . 93

3.3.2 Свойства отображения φ . . . 94

3.3.3 Доказательство теоремы 3.3 . . . 117

3.3.4 Устранимые множества для квазиконформных отображений . . . 118

Заключение . . . 120

Список литературы . . . 121

Публикации автора по теме диссертации . . . 126

Введение

Настоящая работа посвящена изучению операторов композиции в пространствах Соболева на группах Карно. Напомним, что оператор композиции определяется отображением $\varphi : D \to D'$ следующим образом: $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ для любой функции $f : D' \to \mathbb{R}$. Для пространств Соболева мы изучаем оператор композиции следующего вида

$$\varphi^* : L^1_p(D') \cap C^\infty(D') \to L^1_q(D), \quad \varphi^*(f) = f \circ \varphi, \quad f \in L^1_p(D') \cap C^\infty(D').$$

Распространение на все пространство $L^1_p(D')$ исследуется отдельно.

Решаются следующие две задачи. 1) Описание операторов композиции весовых пространств Соболева. Установлены необходимые и достаточные условия, при которых измеримое отображение индуцирует ограниченный оператор в весовых пространствах Соболева. В отличие от предыдущих работ по данной теме, мы отказываемся от каких-либо априорных предположений о регулярности отображения.

2) Описание изоморфизмов пространств Соболева, порожденных измеримыми отображениями. Доказано, что такое отображение можно переопределить на множестве меры нуль так, что оно будет либо квазиконформным, когда показатель суммируемости совпадает с хаусдорфовой размерностью группы, либо квазиизометрическим в противном случае.

Обзор темы диссертационного исследования

Изучение операторов композиции в пространствах Соболева восходит к работе С. Л. Соболева 1941 г. [1], где решается задача об описании группы преобразований, сохраняющих некоторый класс функций. Теорему из [1] для классов Соболева с первыми обобщенными производными можно сформулировать следующим образом (см. [2]). *Пространство Соболева L^1_p сохраняется при преобразованиях группы $\mathfrak{G}$, состоящей из таких диффеоморфизмов*

$\varphi \in C^1$, для которых выполняются условия

$$|D\varphi|(x) \le L \quad \text{и} \quad 0 < \alpha \le |J(x,\varphi)| \tag{1}$$

для всех x. Заметим, что условия (1) эквивалентны определению квазиизометрического отображения. В конце [1] С. Л. Соболев высказывает предположение «Весьма вероятно, что группа $\mathfrak{G}$ есть группа всех преобразований, сохраняющих L_p^1». В 1961 г. В. Г. Мазья [3] доказывает частичную справедливость высказанного С. Л. Соболевым предположения: *В категории C^1-диффеоморфизмов только квазиизометрии (квазиконформные отображения) сохраняют пространство Соболева L_p^1 при p отличным от (равным) размерности пространства.* Из работы Ф. Геринга 1971 г. [4] можно вывести, что сформулированный результат распространяется и на категорию гомеоморфизмов: *Гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, индуцирует изоморфизм $\varphi^* : L_p^1(D') \to L_p^1(D)$ пространств Соболева, тогда и только тогда, когда он квазиизометричен при $p \ne n$ (квазиконформен при $p = n$).*

В 1968 году на Первом донецком коллоквиуме по теории квазиконформных отображений Ю. Г. Решетняком был поставлен вопрос: *охарактеризовать все изоморфизмы φ^* пространств L_n^1, порожденные квазиконформными гомеоморфизмами φ,* (см. также [5]). В 1975 г. С. К. Водопьянов и В. М. Гольдштейн [6] установили следующее утверждение.

Теорема ([6])**.** *Пусть $G, G' \subset \mathbb{R}^n$ и G' — ограниченная область. Для всякого структурного изоморфизма $\varphi^* : L_n^1(G') \to L_n^1(G)$ существует единственный квазиконформный гомеоморфизм $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий условиям:*

1) *область $\varphi(G)$ $(1,n)$-эквивалентна G';*

2) *для всякой функции $f \in L_n^1(G')$ $(\varphi^* f)(x) = f(\varphi(x))$ почти всюду.*

Далее, в 1976 г. был исследован случай $p > \nu$.

Теорема ([7])**.** *Пусть $\varphi^* : L_p^1(G') \to L_p^1(G)$, $p > \nu$, — структурный изоморфизм, переводящий единицу в единицу. Тогда существует единственное квазиизометрическое отображение $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ такое, что $\varphi^*(f)(x) = f(\varphi(x))$ для п. в. $x \in G$ для всех $f \in L_p^1(G')$ и области G' и $\varphi(G)$ $(1,p)$-эквивалентны.*

Обратно, любое квазиизометрическое отображение $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$, для которого области G' и $\varphi(G)$ $(1,p)$-эквивалентны, порождает структурный изоморфизм $\varphi^* : L_p^1(G') \to L_p^1(G)$ по правилу $\varphi^*(f)(x) = f(\varphi(x))$ для п. в. $x \in G$ и для всех функций $f \in L_p^1(G')$.

В 1984 г. В. М. Гольдштейн и А. С. Романов [8] изучили случай, когда показатель суммируемости $n-1<p<n$. В работе [9] 2003 года С. К. Водопьянов новым методом установил аналогичный результат при $1\leq p<\infty$, $p\neq n$:

Теорема ([9])**.** *Отображение $\varphi: D\to D'$ индуцирует изоморфизм $\varphi^*: W_n^1(G')\to W_n^1(G)$, $1\leq p<\infty$, $p\neq n$ тогда и только тогда, когда φ совпадает п. в. с некоторой квазиизометрией $\Phi: G\to\mathbb{R}^n$, для которой области $\Phi(G)$ и G' (1,p)-эквивалентны.*

В [2] приведена подробная история и библиография по этому вопросу.

Здесь стоит отметить, что в работах [6,7] a priori не предполагается существование какого-либо отображения φ, индуцирующего оператор φ^*. Это обстоятельство свидетельствует о том, что изначальная формулировка задач в работах [6,7] была мотивированна теоремой Банаха – Стоуна и её последующими модификациями: *Пусть $H: C(S)\to C(T)$ — изоморфизм, тогда существует гомеоморфизм $h: T\to S$ такой, что*

$$(Hf)(t)=f(h(t)),\quad t\in T,\quad f\in C(S).$$

Изоморфность оператора $H: C(S)\to C(T)$ означает, что на $C(S)$ и $C(T)$ задана некоторая структура, которую и сохраняет оператор H. Оригинальная теорема для компактных метрических пространств была получена С. Банахом в 1932 году. Затем, в 1937 г. М. Стоун распространил эту теорему на компактные хаусдорфовы пространства. Близкие результаты имеются у С. Эйленберга (1942 г.), Р. Аренса и Д. Келли (1947 г.) и Э. Хьюита (1950 г.). И. М. Гельфанд и А. Н. Колмогоров (1939 г.) доказали, что кольцо $C(S)$ определяет S. Также М. Стоун (1937 г.) показал, что $C(S)$ как структурно упорядоченная группа определяет S. Более полное изложение данного вопроса можно найти в [10, 11].

Затем, в 1960 г. и 1971 г. М. Накаи [12] и Л. Льюис [13] установили, что изоморфность алгебр Ройдена равносильна квазиконформной эквивалентности областей определения. Напомним, что алгеброй Ройдена называется алгебра ограниченных непрерывных функций, имеющих обобщенные производные суммируемые в степени n. Для восстановления гомеоморфизма используется тот же метод, что и для непрерывных функций. Основную сложность представляет доказательство квазиконформности полученного гомеоморфизма.

Несмотря на схожую форму с теоремами типа Банаха – Стоуна, доказательства в [6, 7] базировались на принципиально других рассуждениях (в частности, в силу того, что функции из $L_p^1(G)$ не обязаны быть непрерывными, восстановление гомеоморфизма становится значительно более трудной задачей).

В рамках найденного в [6] подхода возникла следующая задача: какие метрические и аналитические свойства имеет измеримое отображение φ, индуцирующее изоморфизм φ^* по правилу $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$, $f \in L^1_n$. Варьируя функциональное пространство, мы каждый раз приходим к новой задаче: пространства Соболева W^1_p, $p > n$, рассмотрены в работе [7], однородные пространства Бесова $b^l_p(\mathbb{R}^n)$, $n > 1$, $lp = n$, — в [14] при $p = n + 1$ и в [15] при $p > n + 1$, пространства Соболева W^1_p, $n - 1 < p < n$, — в [8], пространства риссовых и бесселевых потенциалов — в [16], трехиндексные шкалы пространств Никольского — Бесова и Лизоркина — Трибеля (и их анизотропные аналоги) — в [17], пространства Соболева W^1_p на областях многомерных евклидовых областей, $1 \leq p < \infty$, $p \neq n$, — в [9] (новое сравнительно с работами [7, 16] доказательство). В [18] к задаче замены переменной в пространствах Соболева применена теория мультипликаторов.

Вывод работ [6–9, 14–18] состоит в том, что изоморфность оператора φ^* влечет в зависимости от соотношения между показателями гладкости, суммируемости и размерностью пространства свойство отображения быть квазиконформным или квазиизометрическим в метрике области определения, адекватной геометрии функционального пространства.

Аналитические и метрические свойства гомеоморфизмов, индуцирующих ограниченные операторы пространств Соболева L^1_p, изучались в [3, 4, 19–23]. В [19, 20] получено аналитическое описание таких гомеоморфизмов без каких-либо априорных предположений: *гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ между областями $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ индуцирует ограниченный оператор $\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_p(D)$, $1 \leq p < \infty$, по правилу $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ тогда и только тогда, когда отображение φ принадлежит классу $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D)$ и $|D\varphi|^p(x) \leq K|J(x,\varphi)|$ почти всюду в D.* При $p = n$ этот класс отображений совпадает с классом квазиконформных отображений. При $p = 1$ такие отображения названы В. Г. Мазьей субареальными и применены к разрешимости задачи Неймана (см. [21]). Квазиконформное отображение может быть определено через метрические термины как гомеоморфизм, обладающий ограниченным искажением ([24–26]). Аналог метрического определения для гомеоморфизмов, индуцирующих ограниченный оператор $\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_p(D)$ при $n-1 < p < \infty$ и $p \neq n$, получен в [27]. В работах [2, 28, 29] изучался класс гомеоморфизмов, индуцирующих ограниченный оператор $\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_q(D)$ при $1 \leq q < p < \infty$. Основы теории (p, q)-квазиконформных гомеоморфизмов на группах Карно, являющихся естественным обобщением квазиконформных отображений, заложены в [29].

Работа [30] посвящена изучению измеримых отображений областей евклидова пространства, индуцирующих ограниченный оператор $\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_q(D)$ при $1 \leq q < p < \infty$. В [31] решается аналогичная задача на группе Карно (в предположении, что отображение φ

принадлежит классу ACL). В работах [28–31] естественно возникает квазиаддитивная функция множеств, ассоциированная с оператором композиции (в [31] выводятся необходимые свойства квазиаддитивной функции множеств).

В [32] понятие оператора композиции обобщается на пространство дифференциальных L_p-форм на римановых многообразиях. Исследуется ограниченный оператор переноса $f^* : L_p(\mathbb{M}', \Lambda^k) \to L_p(\mathbb{M}, \Lambda^k)$, порожденный аппроксимативно дифференцируемым отображением $f\colon \mathbb{M} \to \mathbb{M}'$. В качестве следствия, в частности, получено, что гомеоморфизм класса $ACL(\mathbb{M})$, для которого оператор переноса дифференциальных форм с нормой в $\mathcal{L}_p$ является изоморфизмом, неизбежно будет либо квазиконформным, либо квазиизометричным.

Отображения, порождающие ограниченный оператор композиции в весовых пространствах Соболева, полностью описаны в [33] для случая евклидова пространства. Таковыми являются отображения, имеющее конечное искажение и суммируемую в некоторой степени весовую функцию искажения. На группе Карно аналогичное описание получено в [34] при условии, что отображение φ — гомеоморфизм.

Свойства ограниченного оператора композиции на пространствах Бесова кроме работы [15] изучались также в [35] и [36]. Квазиконформная эквивалентность классов Лизоркина — Трибеля исследована в [37, 38]. В [39] исследуются гомеоморфизмы, порождающие оператор композиции пространств Соболева — Лоренца. В [40] изучаются свойства q-квазиконформных отображений, порождающих операторы композиции в пространствах Соболева — Орлича. В работе [41] близкой по содержанию к [28] рассматриваются гомеоморфизмы с конечным искажением, индуцирующие оператор композиции пространств Соболева $W^1_{p,\,\mathrm{loc}}$ (см. также [42]).

Структура диссертации и обзор результатов

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Список литературы содержит 70 наименований и приведен в порядке цитирования. Общий объем диссертации: 128 страниц.

В **главе 1** диссертации вводятся основные понятия и доказываются вспомогательные утверждения. В **параграфе 1.1** приведены определение группы Карно $\mathbb{G}$ и используемые в работе обозначения. Определения различных классов Соболева на группе Карно $L^1_p(D)$, $W^1_p(D)$, $L^1_p(D,u)$, $W^1_{p,\,\mathrm{loc}}(D;\mathbb{G})$ вводятся в **параграфе 1.2**. В **параграфе 1.3** доказываем справедливость уравнения эйконала на группах Карно: $|\nabla_{\mathcal{L}} d(x_0,x)| = 1$ почти всюду. В **параграфе 1.4** мы приводим вспомогательные результаты об аппроксимации функций класса

Соболева на группе Карно. В **параграфе 1.5** приведены определение и некоторые свойства областей Джона, неравенства Пуанкаре, которые потребуются в этой работе. Здесь же, в случае $p > \nu$ мы доказываем неравенство $\frac{1}{d(x_0,x_1)^{1-\nu/p}} \leq K\|f \mid L^1_p(D)\|$ для функций $f \in C(D) \cap L^1_p(D)$ таких, что $f(x_0) = 0$ и $f(x_1) = 1$. В **параграфе 1.6** с помощью теоремы Лузина представляем область определения с точностью до множества нулевой меры в виде возрастающей последовательности компактных множеств $T_k \subset D$, на каждом из которых отображение непрерывно: $|D \setminus \bigcup\limits_k T_k| = 0$. Поэтому областью определения отображения φ можно считать множество $\operatorname{Dom}_1 \varphi = \bigcup\limits_k T_k$. В **параграфе 1.7** проверяются свойства функции множеств, которые будут использованы далее. Различные понятия емкости вводятся в **параграфе 1.8**, где доказываются также некоторые дополнительные свойства.

В **главе 2** исследуется задача 1, то есть изучаются свойства измеримых отображений $\varphi : D \to D'$, индуцирующих по правилу замены переменных ограниченный оператор весовых пространств Соболева на группе Карно:

$$\varphi^* : L^1_p(D',v) \cap C^\infty_0(D') \to L^1_q(D,u), \quad \varphi^*(f) = f \circ \varphi, \quad f \in L^1_p(D',v) \cap C^\infty_0(D').$$

Получены необходимые и достаточные условия ограниченности оператора композиции. В **параграфе 2.1** мы выводим некоторые свойства непрерывности, дифференцируемости и искажения меры отображений, порождающих ограниченный оператор композиции. Приводится понятие кусочной абсолютной непрерывности на почти всех линиях, которое обусловленно спецификой задачи. Это понятие предложено Водопьяновым С. К., и является некоторым ослаблением известного в литературе ACL-свойства.

Определение (2.1). *Отображение $\varphi : D \to D'$ кусочно абсолютно непрерывно на почти всех линиях ($\varphi \in ACL_{\text{part}}(D)$), если на почти каждой интегральной линии γ горизонтального поля X_j $(j = 1,\ldots,n)$ существует открытое множество $\omega_\gamma \subset \gamma$ полной меры на γ такое, что для любого отрезка $[\alpha,\beta] \subset \omega_\gamma$ отображение φ абсолютно непрерывно на $[\alpha,\beta]$ и*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in \omega_\gamma}} \operatorname{dist}(\varphi(x), \partial D') = 0 \qquad \text{или} \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ x \in \omega_\gamma}} \rho(\varphi(x)) = \infty,$$

для всех $a \in \gamma \setminus \omega_\gamma$.

Впоследствии это свойство обеспечит принадлежность классу $ACL(D)$ композиции $f \circ \varphi$.

Основные результаты главы сформулированы в **параграфе 2.2**. Нам потребуются следующие определения:

Определение (2.2)**.** *Отображение* $\varphi : D \to D'$ *класса* $\mathrm{ACL}_{\mathrm{part}}(D)$ *имеет конечное* (u,v)*-весовое искажение, если* $D_h\varphi(x)u(x) = 0$ *почти всюду на множестве*

$$Z_v = \{x \in D \mid J(x,\varphi)v(\varphi(x)) = 0\}.$$

Определение (2.3)**.** *Весовая функция искажения для* φ *определяется как*

$$D' \ni y \mapsto H_q^{u,v}(y) = \begin{cases} v^{-\frac{1}{p}}(y) \left(\sum\limits_{x \in \varphi^{-1}(y) \setminus (\Sigma_\varphi \cup Z_v)} \frac{|D\varphi|^q(x)u(x)}{|J(x,\varphi)|} \right)^{\frac{1}{q}}, \\ 0, \quad \text{если } \varphi^{-1}(y) \setminus (\Sigma_\varphi \cup Z_v) = \emptyset. \end{cases}$$

Определение. *Индикатриса Банаха* $N(y,\varphi) = \#\{x \in D \mid \varphi(x) = y\}$ *— это число прообразов* y*. Если число прообразов бесконечно, то* $N(y,\varphi) = \infty$*.*

В зависимости от соотношения между показателями суммируемости q, p удается получить полное или частичное решение задачи 1. Для случая $q = p$ найдены необходимые условия, при которых отображение индуцирует ограниченный оператор композиции.

Теорема (2.2)**.** *Пусть функция* $N(y,\varphi)v(y) \in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$*, а вес* $u^{\frac{1}{1-p}}(x) \in L_{1,\mathrm{loc}}(D)$*,* $1 \leq p < \infty$*. Пусть измеримое отображение* $\varphi : D \to D'$ *индуцирует ограниченный оператор композиции* $\varphi^* : L_p^1(D', v) \cap C_0^\infty(D') \to L_p^1(D, u)$ *весовых пространств Соболева. Тогда отображение* φ *обладает следующими свойствами:*

1) φ *принадлежит классу* $ACL_{\mathrm{part}}(D)$*,*

2) φ *имеет конечное* (u,v)*-весовое искажение,*

3) *функция искажения* $H_p^{u,v}(\cdot) \in L_\infty(D')$*.*

При этом $\|H_p^{u,v}(\cdot) \mid L_\infty(D')\| \leq C\|\varphi^*\|$*.*

Достаточные условия ограниченности оператора композиции сформулированы в следующей теореме для общей ситуации $1 \leq q \leq p < \infty$.

Теорема (2.3)**.** *Пусть* $1 \leq q \leq p < \infty$*. Если отображение* $\varphi : D \to D'$ *обладает следующими свойствами:*

1) φ *принадлежит классу* $ACL_{\mathrm{part}}(D)$*,*

2) φ *имеет конечное* (u,v)*-весовое искажение,*

3) *функция искажения* $H_p^{u,v}(\cdot) \in L_\varkappa(D')$*, где* $\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$*,*

тогда отображение φ *индуцирует ограниченный оператор композиции* $\varphi^* : L_p^1(D', v) \cap C_0^\infty(D') \to L_q^1(D, u)$ *весовых пространств Соболева.*

При этом $\|\varphi^*\| \leq \|H_p^{u,v}(\cdot) \mid L_\varkappa(D')\|$*.*

При совпадении показателей суммируемости и хаусдорфовой размерности ($q = p = \nu$), задача решается в полной мере:

Теорема (2.4). *Пусть $v \in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$, $u^{\frac{1}{1-\nu}} \in L_{1,\mathrm{loc}}(D)$ и $v \circ \varphi \leq u$ п. в. на D. Измеримое отображение $\varphi : D \to D'$ индуцирует ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_\nu(D', v) \cap C_0^\infty(D') \to L^1_\nu(D, u)$ весовых пространств Соболева тогда и только тогда, когда*

1) *φ принадлежит классу $ACL_{\mathrm{part}}(D)$,*

2) *φ имеет конечное (u,v)-весовое искажение,*

3) *функция искажения $H^{u,v}_p(\cdot) \in L_\infty(D')$.*

При этом

$$C\|H^{u,v}_p(\cdot) \mid L_\infty(D')\| \leq \|\varphi^*\| \leq \|H^{u,v}_p(\cdot) \mid L_\infty(D')\|.$$

Глава 3 посвящена решению задачи 2: исследованию метрических и аналитических свойств измеримых отображений φ, индуцирующих изоморфизм пространств Соболева φ^* по правилу $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$, $f \in L^1_p$. В **параграфе 3.1** вводится основной объект исследования — класс IL^1_p:

Определение. *Пусть D, D' — области на группе Карно $\mathbb{G}$. Измеримое отображение $\varphi : D \to D'$ принадлежит классу IL^1_p, если φ индуцирует оператор композиции пространств Соболева*

$$\varphi^* : L^1_p(D') \cap C^\infty(D') \to L^1_p(D), \quad \varphi^*(f) = f \circ \varphi, \quad f \in L^1_p(D') \cap C^\infty(D'), \tag{2}$$

такой, что

1) *для любой функции $f \in L^1_p(D') \cap C^\infty(D')$ справедливы неравенства*

$$K^{-1}\big\|f \mid L^1_p(D')\big\| \leq \big\|\varphi^*(f) \mid L^1_p(D)\big\| \leq K\big\|f \mid L^1_p(D')\big\|,$$

где постоянная K не зависит от выбора от выбора функции f,

2) *образ $\varphi^*\left(L^1_p(D') \cap C^\infty(D')\right)$ всюду плотен в $L^1_p(D)$.*

Далее, мы показываем, что оператор (2) можно продолжить по непрерывности на $L^1_p(D')$.

Лемма (3.6). *Пусть $\varphi \in IL^1_p$. Тогда оператор $\varphi* : L^1_p(D') \cap C^\infty(D') \to L^1_p(D)$ продолжается по непрерывности до оператора $\widetilde{\varphi*} : L^1_p(D') \to L^1_p(D)$ и обладает следующими свойствами:*

1) *значение оператора* $\widetilde{\varphi*} : L^1_p(D') \to L^1_p(D)$ *на классах* $[f] \in L^1_p(D')$ *можно найти по формуле:*

$$\widetilde{\varphi^*}([f]) = \begin{cases} f \circ \varphi & \textit{при } p \le \nu, \quad \textit{где } f \textit{ — произвольный представитель класса } [f], \\ \widetilde{f} \circ \varphi & \textit{при } p > \nu, \quad \textit{где } \widetilde{f} \textit{ — непрерывный представитель класса } [f]; \end{cases}$$

2) $K^{-1}\big\|f \mid L^1_p(D')\big\| \le \big\|\widetilde{\varphi^*}(f) \mid L^1_p(D)\big\| \le K\big\|f \mid L^1_p(D')\big\|$;

3) $\widetilde{\varphi^*} : L^1_p(D') \to L^1_p(D)$ *— изоморфизм.*

В **параграфе 3.2** изучаются свойства отображений на группе Карно, индуцирующих по правилу замены переменной изоморфизмы пространств Соболева, показатель суммируемости которых отличен от хаусдорфовой размерности группы ($p \ne \nu$). Доказывается, что такое отображение совпадает почти всюду с некоторой квазиизометрией.

Определение (3.1)**.** *Гомеоморфизм* $\Phi : D \to D'$ *двух открытых множеств называется квазиизометрией, если выполнены условия*

$$\varlimsup_{\substack{y\to x\\ y\in D}} \frac{d(\Phi(y),\Phi(x))}{d(y,x)} \le M \quad \textit{и} \quad \varlimsup_{\substack{y\to z\\ y\in D'}} \frac{d(\Phi^{-1}(y),\Phi^{-1}(z))}{d(y,z)} \le M \tag{3}$$

для всех $x \in D$ *и* $z \in D'$, M *— некоторая константа, не зависящая от выбора точек* $x \in D$ *и* $z \in D'$, d *— метрика Карно – Каратеодори на группе* $\mathbb{G}$.

Основной результат главы в случае $p \ne \nu$ составляет следующая теорема.

Теорема (3.1)**.** *Пусть* $p \ge 1$, $p \ne \nu$, *и* D, D' *— области на группе Карно* $\mathbb{G}$ *(здесь* ν *— хаусдорфова размерность* $\mathbb{G}$*). Измеримое отображение* $\varphi\colon D \to D'$ *принадлежит классу* IL^1_p *тогда и только тогда, когда* φ *совпадает п.в. с некоторой квазиизометрией* $\Phi\colon D \to \Phi(D)$, *для которой области* $\Phi(D)$ *и* D' $(1,p)$*-эквивалентны.*

Доказательство приведенной теоремы разбивается на два основных случая. Первый — $p > \nu$ — более простой. По существу, он сводится к ситуации, когда измеримое отображение φ биективно, и базируется на том, что емкость двух точек x и y в пространстве $L^1_p(\mathbb{G})$ сравнима с величиной $d(x,y)^{\nu-p}$. Тогда изоморфность оператора φ^* равносильна соотношениям $M^{-1}d(x,y) \le d(\varphi(x),\varphi(y)) \le Md(x,y)$ для достаточно близких точек $x,y \in D$, выбранных из специального всюду плотного подмножества в D. Из последнего выводим свойство квазиизометричности отображения.

Второй случай — $1 \le p < \nu$ — значительно более деликатный:

Лемма (3.16)**.** *Пусть $p < \nu$, а отображение $\varphi : D \to D'$ принадлежит классу IL^1_p. Тогда отображение φ совпадает с квазиизометрическим гомеоморфизмом почти всюду.*

Этой лемме предшествуют многошаговые рассуждения, целью которых является удаление на каждом шаге некоторого множества нулевой меры, чтобы получить в конце концов суженную область определения $\operatorname{Dom}_6 \varphi \subset D$ измеримого отображения φ, $|D \setminus \operatorname{Dom}_6 \varphi| = 0$, на которой φ обладает рядом замечательных свойств таких, как биективность, $\mathcal{N}$-свойство Лузина и $\mathcal{N}^{-1}$-свойство Лузина. Эти свойства дают возможность доказать аппроксимативную дифференцируемость отображения φ вдоль горизонтальных векторных полей. Последнее — это основа для применения аналитических методов исследования отображения φ. Оказывается, что прямое отображение φ аппроксимативно дифференцируемо, и его аппроксимативный дифференциал $D\varphi(x)$ и якобиан $J(x,\varphi) = \det D\varphi(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$|D\varphi|(x) \le L < \infty, \quad |J(x,\varphi)| \ge \alpha_1 > 0 \text{ п. в. в } D.$$

Здесь же мы доказываем аналогичные соотношения для аппроксимативного дифференциала $D\psi(y)$ обратного отображения $\psi = \varphi^{-1}$:

$$|D\psi|(y) \le L' < \infty, \quad |J(y,\psi)| \ge \alpha > 0 \text{ п. в. в } D'.$$

С помощью этих соотношений и условий на оператор φ^* мы сводим исследование метрических свойств отображения φ к первому случаю. Эта редукция и позволяет доказать, что φ совпадает п. в. на D с некоторой квазиизометрией $\Phi : D \to D'$.

В **параграфе 3.3** мы изучаем случай $p = \nu$. Устанавливается, что отображение класса IL^1_ν совпадает почти всюду с некоторым квазиконформным отображением.

Определение (3.6)**.** *Гомеоморфизм $\Phi : D \to D'$ класса $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}$ называется квазиконформным, если существует постоянная K такая, что*

$$|D\Phi(x)|^\nu \le K|J(x,\Phi)| \qquad \textit{п. в. в } D,$$

где $D\Phi(x)$ — аппроксимативный дифференциал отображения Φ, а $J(x,\Phi) = \det D\Phi(x)$.

Основной результат при $p = \nu$ составляет

Теорема (3.3)**.** *Пусть D, D' — области на группе Карно $\mathbb{G}$, где ν — хаусдорфова размерность группы $\mathbb{G}$. Измеримое отображение $\varphi\colon D \to D'$ принадлежит классу IL^1_ν тогда и* *только тогда, когда* φ *совпадает почти всюду с некоторым квазиконформным отображением* $\Phi\colon D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{G}$*, для которого области* $\Phi(D \setminus \{x_0\})$ *и* D' $(1,\nu)$*-эквивалентны, где* $x_0 \in \overline{\mathbb{G}}$ *— некоторая точка (здесь* $\overline{\mathbb{G}}$ *— одноточечная компактификация* $\mathbb{G}$*).*

Достаточность доказывается аналогично соответствующей части теоремы для случая $p \neq \nu$. Доказательство необходимости разбивается на серию утверждений, целью которых является улучшение свойств регулярности отображения. Сначала мы показываем (лемма 3.23), что отображение φ совпадает почти всюду с некоторым квазинепрерывным отображение φ_0, для которого выполнена оценка следующего вида $\overline{\mathrm{Cap}}(\varphi_0(B)) \leq K\overline{\mathrm{Cap}}(B)$, где B — произвольный шар. Затем для отображения φ_0 устанавливаем тот факт, что для почти всех $x \in D$ образы шаров с уменьшающимися радиусами $\varphi_0(B(x,r))$ стягиваются к единственной точке $z \in D'$ (следствие 3.6). Последнее позволяет продолжить отображение φ_0 до непрерывного (предложение 3.9) и затем доказать его гомеоморфность (предложение 3.11). Окончательно, в предложении 3.16 доказываем квазиконформность отображения φ_0.

Полученные результаты опубликованы в 10 печатных изданиях [A1–A10], 4 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [A1–A4], 6 — в тезисах докладов и материалах конференций [A5–A10]. Все сформулированные результаты являются новыми и получены при личном участии автора. Результаты главы 2 получены автором самостоятельно. Результаты глав 1 и 3 были получены совместно с научным руководителем С. К. Водопьяновым, которому принадлежат формулировки задач и общее руководство работой. В остальном вклад авторов в совместные работы равноправен и неделим.

Апробация работы

Основные положения и результаты работы прошли апробацию на следующих научных конференциях и семинарах:

• XLVIII международная научная студенческая конференция «Студент и научно-технический прогресс». Новосибирск, 2010.

• Школа-конференция по геометрическому анализу. Горно-Алтайск, 2012.

• Конференция «Дни геометрии в Новосибирске, 2012», посвященная 100-летию со дня рождения академика Александра Даниловича Александрова. Новосибирск, 2012.

• Международная конференция «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений», посвященная 105-летию со дня рождения С. Л. Соболева. Новосибирск, 2013.

• Всероссийская молодежная школа-семинар «Анализ, геометрия и топология». Барнаул, 2013.

• Международная молодежная конференция «Геометрия и управление». Москва, 2014.

• Школа-конференция молодых ученых по геометрическому анализу. Горно-Алтайск, 2014.

• Международная конференция «Геометрическая теория управления и анализ на метрических структурах». Турбаза «Кумуткан», озеро Байкал, 2014.

• Конференция «Дни геометрии в Новосибирске, 2014», посвященная 85-летию академика Юрия Григорьевича Решетняка. Новосибирск, 2014.

• Конференция «Дни геометрии в Новосибирске, 2015», Новосибирск, 2015.

• Семинар по геометрическому анализу, институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск. Руководитель: д. ф.-м. н., профессор С. К. Водопьянов.

• Семинар лаборатории геометрической теории управления, институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск. Руководитель: д. ф.-м. н., профессор А. А. Аграчев.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю С. К. Водопьянову за постановку и обсуждение задач, и за неоценимую поддержку на всем протяжении подготовки диссертации.

Глава 1

Предварительные сведения

1.1 Группа Карно

Определение 1.1. Группой Карно $\mathbb{G}$ называется связная односвязная нильпотентная группа Ли, алгебра Ли $\mathcal{G}$ которой градуирована, т. е. $\mathcal{G} = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$, где $\dim V_1 = n_1 \geq 2$, $[V_1,V_k] = V_{k+1}$ для $1 \leq k \leq m-1$, $[V_1,V_m] = 0$, и $N = \sum\limits_{i=1}^{m} \dim V_i$.

Отождествим элементы $g \in \mathbb{G}$ с элементами $x \in \mathbb{R}^N$ посредством экспоненциального отображения $\exp\bigl(\sum x_{ij}X_{ij}\bigr)$, числа x_{ij} называются *координатами первого рода* точки $g \in \mathbb{G}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n_i = \dim V_i$. Для краткости координаты, соответствующие горизонтальному подпространству будем обозначать без двойной индексации: $x_j = x_{1j}$, $1 \leq j \leq n_1$. Таким образом, на $\mathbb{G}$ существует глобальная система координат, посредством которой точки на группе $\mathbb{G}$ отождествляются с точками в $\mathbb{R}^N$. Будем обозначать символом g_h элементы группы, у которых все координаты кроме $x_1, \ldots, x_{n_1}$, равны нулю.

В координатах первого рода отображение $\delta_t : (\bar{x}_1,\bar{x}_2, \ldots ,\bar{x}_m) \mapsto (t\bar{x}_1,t^2\bar{x}_2, \ldots ,t^m\bar{x}_m)$, $t > 0$, задает однопараметрическое семейство растяжений. Здесь $\bar{x}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$.

Левоинвариантные векторные поля $X_i = X_{i,1}$, $i = 1, \ldots , n_1$, составляющие стандартный базис подрасслоения V_1, называются *горизонтальными*.

Зафиксируем следующую однородную норму на группе $\mathbb{G}$ (см. например [43])

$$\rho(x) = \left(\sum_{i=1}^{m} |\bar{x}_i|^{2m!/i}\right)^{1/2m!},$$

где $|\bar{x}_i|$ — евклидова норма в V_i. Как и для всякой однородной нормы [44] выполняются следующие свойства:

1) $\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

2) $\rho(x^{-1}) = \rho(x)$,

3) $\rho(\delta_\lambda(x)) = \lambda\rho(x)$,

4) $\rho(xy) \le c(\rho(x) + \rho(y))$,

где c — некоторая постоянная, не зависящая от $x, y \in \mathbb{G}$. Однородная норма задает однородную квазиметрику: $\rho(x,y) = \rho(x^{-1}y)$ для точек $x,y \in \mathbb{G}$.

1.1.1 Метрика Карно – Каратеодори

Абсолютно непрерывная кусочно гладкая кривая $\gamma : [a,b] \to \mathbb{G}$, касательный вектор которой принадлежит V_1, называется *горизонтальной кривой.*

Определение 1.2. *Метрика Карно – Каратеодори* $d(x, y)$ на группе $\mathbb{G}$ это точная нижняя грань длин всех горизонтальных кривых, соединяющих точки x и y.

Обозначим расстояние до нуля символом $d(x) = d(0,x)$.

Можно показать, что величины $d(x, y)$ и $\rho(x, y)$ эквивалентны (см. рассуждения из леммы 1.4 и предложения 1.5 в [44]), т. е. соотношения

$$c\rho(x, y) \le d(x, y) \le C\rho(x, y).$$

выполнены для всех точек $x, y \in \mathbb{G}$ с некоторыми постоянными $0 < c \le C < \infty$.

Пусть $g \in \mathbb{G}$. Несложно показать, что для элементов g_h верно

$$d(g_h) = \rho(g_h) = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n_1}^2} \tag{1.1}$$

и

$$d(g_h) \le d(g). \tag{1.2}$$

Действительно, пусть $g_h = (x_1, \ldots, x_{n_1}, 0, \ldots, 0)$. Кривая $\gamma(t) = (tx_1, \ldots, tx_{n_1}, 0, \ldots, 0)$, $t \in [0,1]$, горизонтальна и $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = g_h$. Так как $\gamma(t)$ — прямолинейный отрезок, соединяющий 0 и g_h, а метрика в горизонтальной плоскости совпадает с евклидовой, то $\gamma(t)$ имеет минимальную длину. Таким образом, $d(g_h)$ совпадает с длиной данного отрезка $\left(d(g_h) = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n_1}^2}\right)$. Для любой горизонтальной кривой $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_2(t), \gamma_{21}(t), \ldots, \gamma_{mn_m}(t))$, соединяющей 0 и g, имеем

1) $\mathrm{Pr}_h\,\gamma(0) = 0$ и $\mathrm{Pr}_h\,\gamma(1) = g_h$,

2) длина кривой $\mathrm{Pr}_h\,\gamma$ равна длине кривой γ,

где $\mathrm{Pr}_h\,\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_2(t), 0, \ldots, 0)$ — проекция кривой на горизонтальное подпространство; с другой стороны, $d(g_h)$ — длина отрезка, соединяющего 0 и g_h, и, следовательно, не превосходит длины любой кривой, соединяющей эти точки, т. е. $d(g_h) \leq d(g)$.

Размерность Хаусдорфа группы $\mathbb{G}$ равна $\nu = n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \cdots + mn_m$, где $n_i = \dim V_i$.

1.1.2 Мера семейства кривых

Рассмотрим семейство Γ_j интегральных кривых базисного горизонтального векторного поля X_j, образующих гладкое слоение открытого множества $A \subset \mathbb{G}$. Если соответствующий этому полю поток обозначить символом g_s, то слой имеет вид $\gamma(s) = g_s(p)$, где p принадлежит поверхности S_j, трансверсальной к векторному полю X_j, а параметр s из интервала $I \subset \mathbb{R}$. Для слоения, определяемого векторным полем X_j, мера $d\gamma$ может быть получена как внутреннее умножение $i(X_j)$ векторного поля X_j с биинвариантной формой объема dx. Если $\mathbb{J}_{g_s}$ — якобиан потока g_s, то

$$g_s^* i(X_j) dx = \mathbb{J}_{g_s} i(X_j)\, dx \quad \text{или} \quad g_s^*(\mathbb{J}_{g_{-s}} i(X_j) dx) = i(X_j)\, dx.$$

Поскольку поток g_s переводит касательный вектор к однопараметрическому семейству кривых γ_t в касательный вектор к тому же семейству, то форма $\mathbb{J}_{g_{-s}} i(V)\, dx$ определяет меру $d\gamma$ на слоении Γ_j. Так как X_j — левоинвариантное горизонтальное векторное поле, поток g_s есть правый сдвиг на $\exp sX_j$: $\mathbb{G} \ni p \mapsto p \exp sX_j$. Так как dx — биинвариантная форма, то $\mathbb{J}_{g_s} = 1$. Используя левоинвариантность и однородность относительно растяжений, находим

$$\int\limits_{\gamma \cap B(x,r) \neq \emptyset} d\gamma = c|B(x,r)|^{\frac{\nu-1}{\nu}}.$$

Отсюда можно вывести теорему Фубини, применяемую ниже. Более подробно см. [43].

1.2 Пространства Соболева

Пусть $\mathbb{G}$ — группа Карно с однопараметрической группой растяжений δ и D — открытое множество в $\mathbb{G}$. Определим пространство функций $L_p(D)$, суммируемых в степени $p \in [1,\infty)$, как совокупность измеримых по Лебегу функций, имеющих конечную норму

$$\|f \mid L_p(D)\| = \left(\int\limits_D |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} < \infty.$$

Здесь dx — мера Лебега в $\mathbb{R}^N$, нормированная таким образом, что мера шара единичного радиуса (относительно квазиметрики ρ) равна 1. Локально суммируемая функция $v_i : D \mapsto \mathbb{R}$ называется *обобщенной производной функции* f *вдоль векторного поля* X_i, $i = 1, \ldots, n_1$, если

$$\int\limits_D v_i \psi \, dx = -\int\limits_D f X_i \psi \, dx$$

для произвольной финитной функции $\psi \in C_0^\infty(D)$.

Однородное пространство Соболева $L_p^1(D)$ состоит из локально суммируемых функций с конечной полунормой

$$\big\| f \mid L_p^1(D) \big\| = \| \nabla_{\mathcal{L}} f \mid L_p(D) \|,$$

где $\nabla_{\mathcal{L}} f(x) = (X_1 f(x), \ldots, X_{n_1} f(x))$ — обобщенный субградиент f в точке $x \in D$ (здесь производные только по горизонтальным полям).

Пространство Соболева $W_p^1(D)$ состоит из локально суммируемых функций, имеющих конечную норму

$$\big\| f \mid W_p^1(D) \big\| = \| f \mid L_p(D) \| + \| \nabla_{\mathcal{L}} f \mid L_p(D) \|.$$

Будем говорить, что f *принадлежит классу* $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$, если $f \in W_p^1(V)$ для любой ограниченной подобласти $V \subset D$ такой, что $\overline{V} \subset D$.

Напомним определение сходимости в полунормированном пространстве $L_p^1(D)$.

Определение 1.3. Будем говорить, что последовательность функций $\{f_n\} \in L_p^1(D)$ сходится к функции $f \in L_p^1(D)$ ($f_n \to f$) в пространстве $L_p^1(D)$, если

$$\| f_n - f \mid L_p^1(D) \| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Заметим, что если $f_n \to f$ в пространстве $L_p^1(D)$, то также $f_n \to f + C$, где $C \in \mathbb{R}$ — произвольная константа.

В [45] Ю. Г. Решетняк предложил подход к определению соболевских классов функций со значениями в метрических пространствах. Пусть $(\mathbb{X}, r)$ — полное метрическое пространство, r — метрика на $\mathbb{X}$, а D — открытое множество на группе Карно $\mathbb{G}$. Будем говорить, что отображение $\varphi : D \to \mathbb{X}$ *принадлежит классу* $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D; \mathbb{X})$, если выполнены следующие условия.

(A) Для всякого $z \in \mathbb{X}$ функция $[\varphi]_z : x \in D \mapsto r(\varphi(x), z)$ принадлежит классу $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$.

(B) Семейство субградиентов $(\nabla_{\mathcal{L}}[\varphi]_z)_{z\in\mathbb{X}}$ имеет мажоранту, принадлежащую $L_{p,\,\mathrm{loc}}(D)$, т. е. существует функция $g \in L_{p,\,\mathrm{loc}}(D)$, не зависящая от z, такая, что $|\nabla_{\mathcal{L}}[\varphi]_z(x)| \leq g(x)$ для почти всех $x \in D$.

В работе [43] отражена специфика этого определения применительно к отображениям классов Соболева на группе Карно. В частности, приводится *эквивалентное* описание отображений классов Соболева: отображение $\varphi : D \to \mathbb{G}$ принадлежит $W^1_{p,\,\mathrm{loc}}(D)$ тогда и только тогда, когда его можно изменить на множестве нулевой меры так, чтобы

1) для всякого $z \in \mathbb{G}$ функция $[\varphi]_z : D \ni x \mapsto d(\varphi(x),z)$ принадлежит классу $L_{p,\,\mathrm{loc}}(D)$.

2) отображение $\varphi : D \to \mathbb{G}$ *абсолютно непрерывно* на почти всех интегральных линиях горизонтальных векторных полей X_j, $j = 1,\ldots,n$, $(\varphi \in ACL(D))$,

3) производная $X_j\varphi(x) = \lim\limits_{t\to 0}\delta_{t^{-1}}(\varphi(x)^{-1}\varphi(\exp tX_j))$ существует п. в. в открытом множестве D, принадлежит $V_1(\varphi(x))$ и, кроме того, $|X_j\varphi| \in L_{p,\,\mathrm{loc}}(D)$ для всех j.

Напомним, что отображение $\varphi : D \to \mathbb{G}$ называется *абсолютно непрерывным* на почти всех интегральных линиях базисных горизонтальных векторных полей X_j, $j = 1,\ldots,n$, если для любой области $U \Subset D$ и слоения Γ_j, определяемого векторным полем X_j $(j = 1,\ldots,n)$, отображение φ абсолютно непрерывно на пересечении $\gamma \cap U$ относительно одномерной меры Хаусдорфа для $d\gamma$-почти всех кривых $\gamma \in \Gamma_j$. Для такого отображения почти всюду в D существуют производные $X_j\varphi$ $(j = 1,\ldots,n)$ (см. различные доказательства этого факта в [46–48]).

Обозначим символом $D\varphi$ аппроксимативный дифференциал отображения φ [43], а символом $D_h\varphi$ — горизонтальную часть дифференциала. Якобиан $\det D\varphi$ отображения φ обозначим символом $J(x,\varphi)$.

Имеет место следующая формула замены переменных.

Предложение 1.1 ([43, Corollary 5.1], [49])**.** *Пусть отображение* $\varphi : A \to \mathbb{G}$, *где* $A \subset \mathbb{G}$ *— измеримое множество, имеет аппроксимативные частные производные п. в. на* A. *Тогда существует множество* $\Sigma_\varphi \subset A$ *меры* 0 *такое, что формула замены переменных в интеграле Лебега для любой неотрицательной измеримой функции* $f : A \to \mathbb{R}$ *имеет вид*

$$\int\limits_A f(x)|J(x,\varphi)|\,dx = \int\limits_{\mathbb{G}}\Bigg(\sum_{x\in\varphi^{-1}(y)\cap(A\setminus\Sigma_\varphi)} f(x)\Bigg)\,dy. \tag{1.3}$$

1.2.1 Весовые пространства Соболева

Весом будем называть измеримую функцию $w : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$, принимающую почти всюду положительные значения. Для любого измеримого множества A определим весовую меру

$$w(A) = \int\limits_A w(x)\,dx.$$

Весовое пространство $L_p(D,w)$ состоит из локально суммируемых функций, имеющих конечную весовую норму:

$$\|f \mid L_p(D,w)\| = \biggl(\int\limits_D |f(x)|^p w(x)\,dx\biggr)^{1/p} < \infty.$$

Весовое пространство Соболева $L^1_p(D,w)$ состоит из локально суммируемых функций с конечной полунормой

$$\bigl\|f \mid L^1_p(D,w)\bigr\| = \|\nabla_{\mathcal{L}} f \mid L_p(D,w)\|,$$

где $\nabla_{\mathcal{L}} f(x) = (X_1 f(x), \ldots, X_{n_1} f(x))$ — обобщенный субградиент f в точке $x \in D$.

Определение 1.4. *Весовая функция w принадлежит классу Макенхаупта A_p, $p \in (1,\infty)$, если*

$$\sup_{B\subset\mathbb{G}}\biggl(\frac{1}{|B|}\int\limits_B w\,dx\biggr)\biggl(\frac{1}{|B|}\int\limits_B w^{\frac{1}{1-p}}\,dx\biggr)^{p-1} = c_{w,p} < \infty,$$

где супремум берется по всем шарам B из $\mathbb{G}$.

Более подробно о весовых пространствах Соболева см. например [50–52].

1.3 Дальнейшие свойства метрики Карно – Каратеодори

Напомним определение локально липшицевых и билипшицевых отображений.

Определение 1.5. Отображение $\varphi : U \to \mathbb{G}$ называется *локально липшицевым* (*билипшицевым*), если для каждой точки $x \in U$ найдутся окрестность $V \subset U$ и постоянная L_V, для которых выполняются соотношения

$$d(\varphi(y),\varphi(z)) \le L_V d(y,z) \quad (L_V^{-1} d(y,z) \le d(\varphi(y),\varphi(z)) \le L_V d(y,z)) \tag{1.4}$$

для всех $y, z \in V$. Если в качестве V можно взять U, то отображение $\varphi : U \to \mathbb{G}$ будем называть *липшицевым* (*билипшицевым*) на U.

Символом $\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(D)$ будем обозначать пространство локально липшицевых функций $f : D \to \mathbb{R}$. Заметим, что пространство локально липшицевых функций $\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(D)$ совпадает с пересечением $C(D) \cap W^1_{\infty,\mathrm{loc}}(D)$, см. например [53].

Лемма 1.1. *Пусть $g(x) = d(x_0,x)$, где $x_0 \in \mathbb{G}$ — фиксированная точка. Тогда*

$$|\nabla_{\mathcal{L}} g(x)| = 1 \quad \text{п. в. в } \mathbb{G}.$$

Доказательство. ШАГ 1. Имеем $|g(x) - g(y)| = |d(x_0,x) - d(x_0,y)| \le d(x,y)$. Таким образом, g — липшицева функция. Отсюда выводим неравенство

$$\frac{|g(x) - g(y)|}{d(x,y)} \le 1 \quad \text{для всех } x \ne y. \tag{1.5}$$

ШАГ 2. Для произвольной точки $x \in \mathbb{G}$ найдется кратчайшая γ, соединяющая x и x_0. Пусть y — точка на кривой γ. Тогда $|g(x) - g(y)| = d(x,y)$ и, следовательно,

$$\frac{|g(x) - g(y)|}{d(x,y)} = 1 \quad \text{для } y \in \gamma. \tag{1.6}$$

Из неравенств (1.5) и (1.6) выводим

$$\varlimsup_{y \to x \in \mathbb{G}} \frac{|g(y) - g(x)|}{d(x,y)} = 1. \tag{1.7}$$

ШАГ 3. Так как g — липшицева функция, она $\mathcal{P}$-дифференцируема п. в. в смысле Пансю [46] (см. другое доказательство в [43]). Следовательно, в точке x $\mathcal{P}$-дифференцируемости функции g имеем

$$\lim_{d(x,y) \to 0} \frac{g(y) - g(x) - \nabla_{\mathcal{L}} g(x) \cdot (x^{-1}y)_h}{d(x,y)} = 0, \tag{1.8}$$

где $\nabla_{\mathcal{L}} g(x) \cdot (x^{-1}y)_h = \sum\limits_{i=1}^{n_1} X_i g(x)(x^{-1}y)_{1i}$.

Обозначим $z = x^{-1}y$. Из (1.7) и (1.8) можно вывести, что

$$\varlimsup_{d(z) \to 0} \frac{|\nabla_{\mathcal{L}} g(x) \cdot z_h|}{d(z)} = 1. \tag{1.9}$$

Тогда

$$1 = \varlimsup_{d(z) \to 0} \frac{|\nabla_{\mathcal{L}} g(x) \cdot z_h|}{d(z)} \ge \varlimsup_{z = z_h, d(z) \to 0} \frac{|\nabla_{\mathcal{L}} g(x) \cdot z_h|}{d(z)} = \varlimsup_{d(z_h) \to 0} \frac{|\nabla_{\mathcal{L}} g(x) \cdot z_h|}{d(z_h)}. \tag{1.10}$$

С другой стороны, из неравенства (1.2) выводим

$$\overline{\lim_{d(z_h)\to 0}}\frac{|\nabla_{\mathcal{L}}g(x)\cdot z_h|}{d(z_h)}=\overline{\lim_{d(z)\to 0}}\frac{|\nabla_{\mathcal{L}}g(x)\cdot z_h|}{d(z_h)}\geq\overline{\lim_{d(z)\to 0}}\frac{|\nabla_{\mathcal{L}}g(x)\cdot z_h|}{d(z)}=1. \tag{1.11}$$

Поэтому

$$\overline{\lim_{d(z)\to 0}}\frac{|\nabla_{\mathcal{L}}g(x)\cdot z_h|}{d(z)}=\overline{\lim_{d(z_h)\to 0}}\frac{|\nabla_{\mathcal{L}}f(x)\cdot z_h|}{d(z_h)}=1. \tag{1.12}$$

Учитывая равенство $d(z_h)=\rho(z_h)$ (см. (1.1)), получаем

$$1=\overline{\lim_{\rho(z_h)\to 0}}\left|\nabla_{\mathcal{L}}g(x)\cdot\frac{z_h}{\rho(z_h)}\right|=\sup_{y_h\in\mathbb{R}^{n_1},\,\rho(y_h)=1}|\nabla_{\mathcal{L}}g(x)\cdot y_h|,$$

где $y_h=\frac{z_h}{\rho(z_h)}$. Отсюда приходим к равенству $|\nabla_{\mathcal{L}}g(x)|=1$.

$\square$

Замечание 1.1. Утверждение леммы 1.1 справедливо также и для функции

$$g(x)=d(x,F)=\inf_{y\in F}d(x,y)$$

в следующей форме: $|\nabla_{\mathcal{L}}g(x)|=1$ п. в. в $\mathbb{G}\setminus F$. Здесь функция g — это расстояние от точки x до фиксированного множества F.

1.4 Аппроксимация гладкими функциями

Рассуждения в этом подпункте во многом основаны на работах [44,50]. Пусть $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{G})$, $\operatorname{supp}\varphi\subset B(0,1)$, и

$$\int\limits_{\mathbb{G}}\varphi(x)\,dx=a. \tag{1.13}$$

Пусть $u\in L_p^1(D)$ и $u(x)=0$ для всех $x\in\mathbb{G}\setminus D$. Рассмотрим семейство усреднений:

$$u_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon^\nu}\int\limits_{\mathbb{G}}\varphi(\delta_{\varepsilon^{-1}}xy^{-1})u(y)\,dy. \tag{1.14}$$

Функция φ называется *усредняющим ядром*, а число ε – *радиусом усреднения.*

Предложение 1.2 ([44, Proposition 1.20])**.** *Если $u\in L_p(D)$, $p\in[1,\infty)$, то имеют место следующие свойства*

1) $u_\varepsilon\in C^\infty(\mathbb{G})$;

2) $u_\varepsilon\to au$ *в* $L_p(D)$.

Доказательство. 1. Функции $\varphi(x)$ и $\tau_y(x) = xy^{-1}$ принадлежат $C^\infty(\mathbb{G})$, поэтому в силу теоремы о дифференцировании под знаком интеграла $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{G})$.

2. Непрерывные финитные функции плотны в $L_p(\mathbb{G})$, стало быть, для любой $v \in L_p(\mathbb{G})$ имеем

$$\int\limits_{\mathbb{G}} |v(xz^{-1}) - v(x))|^p\,dx \to 0 \text{ при } z \to e, \tag{1.15}$$

где e – единица группы $\mathbb{G}$ (т. е. $d(z) \to 0$).

Положим $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^\nu}\varphi(\delta_{\varepsilon^{-1}}x)$. Далее выводим

$$\begin{aligned}
|u_\varepsilon(x) - au(x)| &= \Bigg|\int\limits_{\mathbb{G}} \varphi_\varepsilon(xy^{-1})u(y)dy - u(x)\int\limits_{\mathbb{G}} \varphi_\varepsilon(xy^{-1})dy\Bigg| \\
&\le \int\limits_{\mathbb{G}} |\varphi_\varepsilon(xy^{-1})|\cdot|u(y) - u(x)|dy \le \Bigg(\int\limits_{\mathbb{G}} |\varphi_\varepsilon(xy^{-1})|dy\Bigg)^{\frac{1}{p'}}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{G}} |\varphi_\varepsilon(xy^{-1})|\cdot|u(y) - u(x)|^p dy\Bigg)^{\frac{1}{p}} \\
&= K\Bigg(\int\limits_{\mathbb{G}} |\varphi_\varepsilon(z)|\cdot|u(xz^{-1}) - u(x)|^p dz\Bigg)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

где K — положительная константа. Далее имеем

$$\begin{aligned}
||u_\varepsilon - au \mid L_p(\mathbb{G})||^p &= \int\limits_{\mathbb{G}} |u_\varepsilon(x) - au(x)|^p\,dx \\
&\le K\int\limits_{\mathbb{G}}\int\limits_{\mathbb{G}} |\varphi_\varepsilon(z)|\cdot|u(xz^{-1}) - u(x)|^p\,dz\,dx \\
&= K\int\limits_{\mathbb{G}} |\varphi_\varepsilon(z)|\int\limits_{\mathbb{G}} |u(xz^{-1}) - u(x)|^p\,dx\,dz \\
&= K\int\limits_{\mathbb{G}} |\varphi(h)|\int\limits_{\mathbb{G}} |u(x(\delta_\varepsilon h)^{-1}) - u(x)|^p\,dx\,dh \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0.
\end{aligned}$$

В предпоследнем интеграле сделали замену переменных $h = \delta_{\varepsilon^{-1}}z$. Таким образом, $u_\varepsilon \to au$ при $\varepsilon \to 0$ в $L_p(\mathbb{G})$. □

Замечание 1.2. В частности, если $a = 1$, то $u_\varepsilon \to u$ при $\varepsilon \to 0$ в $L_p(\mathbb{G})$.

Предложение 1.3. *Пусть $u \in L^1_p(D)$, $a = 1$ (т. е. $\int\limits_{\mathbb{G}} \varphi(x)\,dx = 1$) и $V \Subset D$ — компактно вложенная область*[1]*. Тогда*

$$X_i u_\varepsilon \to X_i u \quad \text{\textit{в} } L_p(V). \tag{1.16}$$

[1] Другими словами, V – ограниченная область такая, что $\overline{V} \subset D$.

Доказательство. Заметим, что на группе Карно свертка не коммутативна, поэтому аргументы, применяемые в $\mathbb{R}^n$, на группах Карно не работают. Доказательство этого утверждения на группах Карно основано на более рафинированных методах. В [54, лемма 2.1] и [55] доказано существование функций $\chi_{ij} \in C_0^\infty(B(0,1))$ таких, что $\int\limits_G \chi_{ij}(x)dx = \delta_{ij}$, и для всех $x \in V$ и $\varepsilon < \operatorname{dist}(V,\partial D)$ выполнено следующее равенство:

$$X_i u_\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^{N} (X_j u) * \chi_{ij,\varepsilon}(x),$$

где $\chi_{ij,\varepsilon}(x) = \frac{1}{\varepsilon^\nu}\chi_{ij}(\delta_{\varepsilon^{-1}}x)$. По предложению 1.2 имеем $(X_j u) * \chi_{ij,\varepsilon} \to \delta_{ij} X_j u$ при $\varepsilon \to 0$ в $L_p(V)$. В итоге

$$\begin{aligned} \|X_i u_\varepsilon - X_i u \mid L_p(V)\| &= \left\| \sum_{j=1}^{N} (X_j u) * \chi_{ij,\varepsilon} - \sum_{j=1}^{N} \delta_{ij} X_j u \mid L_p(V) \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{N} \|(X_j u) * \chi_{ij,\varepsilon} - \delta_{ij} X_j u \mid L_p(V)\| \to 0 \end{aligned}$$

при $\varepsilon \to 0$. □

Предложение 1.3 позволяет доказать плотность гладких функций в $L_p^1(D)$.

Лемма 1.2. *Пространство $L_p^1(D) \cap C^\infty(D)$ плотно в $L_p^1(D)$. Если $f \in L_p^1(D)$ — локально липшицева функция, то существует последовательность функций $f_l \in L_p^1(D) \cap C^\infty(D)$, $l \in \mathbb{N}$, сходящаяся к f локально равномерно и в $L_p^1(D)$.*

Доказательство. Приводимое ниже доказательство основано на рассуждениях из [50, теорема 1].

Пусть $u \in L_p^1(D)$. Рассмотрим локально конечное покрытие[2] $\{B_k\}_{k\geq 1}$ области D шарами $B_k \subset D$ и разбиение единицы $\{\psi_k\}_{k\geq 1}$, подчиненное этому покрытию. Пусть $\{\rho_k\}$ – убывающая к нулю последовательность положительных чисел такая, что последовательность шаров $\{(1+\rho_k)B_k\}$ также образует локально конечное покрытие области D. Обозначим символом w_k усреднение функции $u_k = \psi_k u$ с радиусом усреднения $\rho_k r_k$, где r_k — радиус шара B_k. Легко видеть, что $w = \sum\limits_k w_k$ принадлежит $C^\infty(D)$, так как сумма локально конечна (каждая точка имеет окрестность, в которой только конечное число функций w_k не равны нулю).

[2] Т. е. для каждой точки $x \in D$ найдется окрестность $U \subset D$, которая пересекается только с конечным числом шаров из покрытия $\{B_k\}$.

Возьмем произвольное $\varepsilon \in (0,\frac{1}{2})$. В силу предложений 1.2 и 1.3 можно выбрать ρ_k так, что

$$\left\| u_k - w_k \mid L^1_p(D) \right\| \leq \varepsilon^k. \tag{1.17}$$

На любой ограниченной области V такой, что $\overline{V} \subset D$, выполнено равенство $u = \sum\limits_k u_k$. Следовательно,

$$\left\| u - w \mid L^1_p(V) \right\| \leq \sum_k \left\| u_k - w_k \mid L^1_p(V) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}. \tag{1.18}$$

Таким образом, для любой функции $u \in L^1_p(D)$ и для произвольного $\varepsilon \in (0,\frac{1}{2})$ найдется функция $w \in L^1_p(D) \cap C^\infty(D)$ такая, что $\left\| u - w \mid L^1_p(D) \right\| \leq \varepsilon$. □

Отметим следующие свойства, очевидным образом вытекающие из леммы 1.2.

Замечание 1.3. Если $f \in L^1_p(D)$, то найдется последовательность гладких функций $f_n \in L^1_p(D) \cap C^\infty(D)$, сходящаяся к f п. в. в D. А если $p > \nu$, то можно подобрать последовательность, которая будет сходится локально равномерно в D.

Доказательство. В качестве данной последовательности можно взять функций $\{w_k\}$, построенные в лемме 1.2. □

Из леммы 1.2 выводим следующее

Следствие 1.1. *Пространство* $L^1_p(D) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(D)$ *плотно в* $L^1_p(D)$*, где* $D \subset \mathbb{G}$ *— область.*

1.5 Неравенства Пуанкаре и области Джона

Напомним, что кривая $\gamma : [a,b] \to \mathbb{G}$ *спрямляема*, если

$$\sup_P \sum_{i=1}^{k_P} d(\gamma(x_{i-1}),\gamma(x_i)) < \infty,$$

где супремум берется по всем разбиениям $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k_P} = b\}$. Для двух точек $x,y \in \mathbb{G}$ *кратчайшей* называется горизонтальная кривая, соединяющая эти точки и имеющая минимальную длину.

Определение 1.6. Область $\Omega \subset \mathbb{G}$ называется *областью Джона* $J(\alpha,\beta)$ (коротко $\Omega \in J(\alpha,\beta)$), $0 < \alpha \leq \beta$, если найдется точка $x_0 \in \Omega$ такая, что любую точку $x \in \Omega$ можно соединить с x_0 спрямляемой кривой γ, которая содержится в Ω и удовлетворяет следующим условиям: если $s \in [0,l]$ – натуральная параметризация кривой γ, то $l \leq \beta$,

$$\gamma(0) = x,\, \gamma(l) = x_0, \text{ и } \operatorname{dist}(\gamma(s),\partial\Omega) \geq \frac{\alpha s}{l} \text{ для всех } s \in [0,l]. \tag{1.19}$$

Замечание 1.4. Легко проверить, что шар $B(x,r)$ в метрике Карно – Каратеодори является областью Джона $J(\alpha = r,\beta = r)$, где центр шара (точка x) является выделенной точкой.

Лемма 1.3. *Пусть D – произвольная область в $\mathbb{G}$, и шары B_0, B_1 содержатся в этой области. Тогда найдется область Джона $\Omega \in J(\alpha, \beta)$, $\Omega \subset D$, с некоторыми параметрами α, β, зависящими от области D и шаров B_0, B_1, которая будет содержать оба этих шара.*

Доказательство. Заметим, что если $D = \mathbb{G}$, то в качестве искомой области Джона Ω можно выбрать произвольный шар содержащий шары B_0, B_1. Поэтму далее считаем, что D — собственная подобласть в $\mathbb{G}$.

Пусть x_0, x_1 — центры данных шаров, а r_0, r_1 — их радиусы. Построим спрямляемую кривую, соединяющую точки x_0 и x_1.

Для этого рассмотрим сначала произвольную непрерывную кривую K, лежащую в D и соединяющую точки x_0 и x_1, т. е. непрерывное отображение $K : [0,1] \to D$ такое, что $K(0) = x_0$ и $K(1) = x_1$. Такая кривая существует, поскольку D — связное открытое множество. (Заметим, что кривая K не обязательно является спрямляемой.)

Совокупность шаров $\{B(K(t)),\frac{1}{2}\operatorname{dist}(K(t), \partial D)\}_{t\in[0,1]}$ образует покрытие компактного множества $K([0,1])$. Из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие $B(\xi_1,\rho_1), \ldots, B(\xi_m,\rho_m)$, где $\xi_j = K(\tau_j)$, $\tau_j \in [0,1]$ и $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_m$.

Пусть $B(\xi_l,\rho_l)$ — шар с наибольшим номером, содержащий точку x_0. Если $x_1 \in B(\xi_l,\rho_l)$, то кривая γ, составленная из кратчайших, соединяющих точку ξ_l с точками x_0 и x_1, спрямляема и ее длина $|\gamma|$ не больше $2\rho_l$.

В противном случае существует максимальное значение t_1 параметра $t \in (0,1)$ такое, что $v_1 = K(t_1) \in \partial B(\xi_l, \rho_l)$, а $K(t) \notin \overline{B(\xi_l, \rho_l)}$ для всех $t \in (t_1,1]$. Тогда найдется кривая $\gamma_1 \subset \overline{B(\xi_l,\rho_l)} \subset D$, составленная из кратчайших, соединяющих точку ξ_l с точками x_0 и v_1. Длина кривой γ_1 не превосходит $2\rho_l$.

В свою очередь, точка v_1 принадлежит некоторому шару $B(\xi_k,\rho_k)$, где $l < k \leq m$ — максимальный номер шара, содержащий точку v_1. Если $x_1 \in B(\xi_k,\rho_k)$, то дополним кривую γ_1 кратчайшими, соединяющими точку ξ_k с точками v_1 и x_1. Получим кривую γ, длина которой не превосходит $2(\rho_l + \rho_k)$.

В противном случае существует максимальное значение t_2 параметра $t \in (t_1,1)$ такое, что $v_2 = K(t_2) \in \partial B(\xi_k, \rho_k)$, а $K(t) \notin \overline{B(\xi_k, \rho_k)}$ для всех $t \in (t_2,1]$. Тогда дополним кривую

γ_1 новой кривой $\gamma_2 \subset \overline{B(\xi_k,\rho_k)} \subset D$, составленной из кратчайших, соединяющих точку ξ_k с точками v_1, и v_2. Так как длина γ_2 не превосходит $2\rho_k$, то длина составленной кривой $\gamma_1 \cup \gamma_2$ не превосходит $2(\rho_l + \rho_k)$.

Продолжая этот процесс по индукции, через конечное число шагов (не более m) мы получим спрямляемую кривую $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cdots$ в D, длина которой не превосходит $2\sum\limits_{k=1}^{m} \rho_k$.

Таким образом, кривая Γ спрямляема, и соединяет центры шаров B_0 и B_1: $\Gamma(0) = x_0$, $\Gamma(L) = x_1$ (считаем, что Γ параметризована натуральным параметром, а L – длина Γ).

Обозначим символом $\delta = \operatorname{dist}(\Gamma,\partial D)$ расстояние между кривой Γ и границей области D. Рассмотрим область $\Omega = B_0 \cup B_1 \cup \bigcup\limits_{x\in\Gamma} B(x,\delta)$, состоящую из шаров B_0, B_1 и всех шаров радиуса δ с центрами на Γ. Положим $\alpha = \min\{\operatorname{dist}(\Gamma, \partial\Omega), r_0, r_1\}$ (или, что то же самое, $\alpha = \min\{\delta, r_0, r_1\}$), $\beta = L + r_0 + r_1 + \delta$.

Покажем, что Ω является областью Джона $J(\alpha, \beta)$ с выделенной точкой x_0. Пусть $x \in \Omega$. Если $x \in B_0$, то условия (1.19) выполняются автоматически: в качестве кривой γ выбираем кратчайшую, соединяющую x и x_0. Тогда $l = |\gamma| < r_0 < \beta$ и для всех $s \in [0,l]$ выполнены следующие неравенства:

$$\operatorname{dist}(\gamma(s),\partial\Omega) \geq \operatorname{dist}(\gamma(s),\partial B_0) \geq s = \frac{sl}{l} \geq \frac{sr_0}{l} \geq \frac{\alpha s}{l}. \tag{1.20}$$

Если $x \in B_1$, то положим $\gamma = \gamma_1 \cup \Gamma$, где γ_1 – это кратчайшая соединяющая x и x_1. Обозначим $l_1 = |\gamma_1| < r_1$, тогда $l = |\gamma| = l_1 + L < r_1 + L < \beta$, $\operatorname{dist}(\gamma(s),\partial\Omega) \geq \frac{\alpha s}{l_1} \geq \frac{\alpha s}{l}$ для $s \in [0,l_1]$ и $\operatorname{dist}(\gamma(s),\partial\Omega) \geq \alpha \geq \frac{\alpha s}{l}$ для $s \in [l_1,l_1 + L]$. Следовательно, $\operatorname{dist}(\gamma(s),\partial\Omega) \geq \frac{\alpha s}{l}$ для всех $s \in [0,l]$.

Пусть x не принадлежит ни B_0, ни B_1. Следовательно, $x \in B(\xi,r)$, где ξ – точка на кривой Γ и $r < \delta$. В качестве кривой γ возьмем кривую, состоящую из кратчайшей, соединяющей x и ξ, и сегмента кривой Γ от ξ до x_0. Тогда, как и в предыдущих двух случаях, имеем $l_1 = |\gamma_1| < \delta$, $l = |\gamma| < \delta + L < \beta$,

$$\operatorname{dist}(\gamma(s),\partial\Omega) \geq \frac{\alpha s}{l_1} \geq \frac{\alpha s}{l} \ \text{ для } \ s \in [0,l_1] \quad \text{и} \quad \operatorname{dist}(\gamma(s),\partial\Omega) \geq \alpha \geq \frac{\alpha s}{l} \ \text{ для } \ s \in [l_1,l].$$

Таким образом, $\operatorname{dist}(\gamma(s),\partial\Omega) \geq \frac{\alpha s}{l}$ для всех $s \in [0,l]$.

Поэтому $\Omega \subset D$ является областью Джона, содержащей данные шары B_0, B_1. □

Замечание 1.5. Из доказательства леммы 1.3 получаем следующее свойство: если $\operatorname{dist}(\partial D, B_0) > 0$ и $\operatorname{dist}(\partial D, B_1) > 0$, то для достаточно малого параметра $\lambda > 0$ можно построить дополнительную область Джона Ω_λ такую, что $\Omega \Subset \Omega_\lambda \Subset D$, т. е. области Ω и Ω_λ ограниченные и $\operatorname{dist}(\partial D, \Omega_\lambda) > 0$ и $\operatorname{dist}(\Omega, \partial\Omega_\lambda) > \lambda$. Действительно, область Джона Ω

строится как объединение шаров B_0, B_1 и совокупности шаров с центрами на кривой Γ с радиусами, не превышающими $\frac{1}{2}\operatorname{dist}(\Gamma, \partial D)$. Область Ω_λ можно построить как объединение шаров с теми же центрами увеличив при этом их радиусы. В качестве такого радиуса можно взять любое значение в интервале $(\frac{1}{2}\operatorname{dist}(\Gamma, \partial D), \frac{3}{4}\operatorname{dist}(\Gamma, \partial D))$ для шаров отличных от B_0, B_1. В свою очередь радиусы шаров B_0, B_1 нужно увеличить таким образом, чтобы они не оставались внутри D.

Приведем следующее неравенство Пуанкаре для областей Джона (см. [56]).

Предложение 1.4 ([56, Theorem 4]). *Пусть $p < \nu$, $p \le q \le \frac{\nu p}{\nu - p}$ и U – область Джона $J(\alpha, \beta)$. Тогда для любой функции $u \in W_p^1(U)$ имеем*

$$\|u - c_u \mid L_q(U)\| \le C \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu \operatorname{diam}(U)^{1-\frac{\nu}{p}+\frac{\nu}{q}} \|\nabla u \mid L_p(U)\|, \tag{1.21}$$

где c_u и C — постоянные, причем $C > 0$ и не зависит от u, U, α, β.

Далее нам потребуется вариант неравенства Пуанкаре в следующей форме (см. [57]).

Лемма 1.4. *Пусть U – область Джона $J(\alpha, \beta)$ и подмножество $F \subset U$ имеет положительную меру, $|F| > 0$. Тогда для всех $u(x) \in W_p^1(U)$, $p \le q \le \frac{\nu p}{\nu - p}$, $p < \nu$, таких, что $u|_F = 0$, выполнено неравенство*

$$\left(\int\limits_U |u(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \le C \frac{|U|^{\frac{1}{q}}}{|F|^{\frac{1}{q}}} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu \operatorname{diam}(U)^{1-\frac{\nu}{p}+\frac{\nu}{q}} \left(\int\limits_U |\nabla_{\mathcal{L}} u(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.22}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $u(x) \in W_p^1(U)$ такую, что $u|_F = 0$, где подмножество $F \subset U$ имеет положительную меру. Обозначим $M = ||u \mid L_q(U)|| > 0$. Тогда

$$|F| = \int\limits_U (\chi_F(x))^q\, dx \le \int\limits_U \left|1 - \frac{u(x)|U|^{\frac{1}{q}}}{M}\right|^q dx \le \frac{|U|}{M^q} \int\limits_U \left|\frac{M}{|U|^{\frac{1}{q}}} - u(x)\right|^q dx.$$

Следовательно,

$$M^q|F| \le |U| \|(M|U|^{-\frac{1}{q}} - u) \mid L_q(U)\|^q. \tag{1.23}$$

Для постоянной c_u из неравенства Пуанкаре (предложение 1.4) справедлива следующая оценка:

$$|M|U|^{-\frac{1}{q}} - c_u| = \left| |U|^{-\frac{1}{q}} ||u \mid L_q(U)|| - |U|^{-\frac{1}{q}} ||c_u \mid L_q(U)|| \right| \le |U|^{-\frac{1}{q}} \|u - c_u \mid L_q(U)\|.$$

Поэтому, используя неравенство Пуанкаре (1.21), имеем

$$\|(M|U|^{-\frac{1}{q}} - u) \mid L_q(U)|| \le \|(M|U|^{-\frac{1}{q}} - c_u) \mid L_q(U)\| + \|u - c_u \mid L_q(U)\|$$
$$\le 2\|u - c_u \mid L_q(U)\| \le 2C\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} \operatorname{diam}(U)^{1-\frac{\nu}{p}+\frac{\nu}{q}} \|\nabla_{\mathcal{L}} u \mid L_p(U)\|.$$

Применяя (1.23), получаем

$$||u \mid L_q(U)|| \le \frac{|U|^{\frac{1}{q}}}{|F|^{\frac{1}{q}}} 2C\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} \operatorname{diam}(U)^{1-\frac{\nu}{p}+\frac{\nu}{q}} \|\nabla_{\mathcal{L}} u \mid L_p(U)\|.$$

Таким образом, лемма доказана. □

Лемма 1.5. *Пусть $p > \nu$, а функция $f \in C(D) \cap L^1_p(D)$ такова, что $f(x_0) = 0$ и $f(x_1) = 1$ для некоторых точек $x_0, x_1 \in B \subset D$. Тогда выполнено неравенство*

$$\frac{1}{d(x_0,x_1)^{1-\nu/p}} \le K\|f \mid L^1_p(D)\|. \tag{1.24}$$

Доказательство. Нам потребуется следующее неравенство Пуанкаре из [56, Theorem 4]

$$\|u - c_u \mid L_\infty(B)\| \le C \operatorname{diam}(B)^{1-\frac{\nu}{p}} \|\nabla_{\mathcal{L}} u \mid L_p(B)\|. \tag{1.25}$$

Фиксируем шар B такой, что $x_0,x_1 \in B$. Имеем

$$|f(x_0) - f(x_1)| \le |f(x_0) - c_f| + |f(x_1) - c_f| \le 2\|f - c_f \mid L_\infty(B)\| \le$$
$$Kd(x_0,x_1)^{1-\nu/p}\|\nabla_{\mathcal{L}} f \mid L_p(B)\| \le Kd(x_0,x_1)^{1-\nu/p}\|\nabla_{\mathcal{L}} f \mid L_p(D)\|, \tag{1.26}$$

где K — некоторая постоянная. В нашем случае $|f(x_0) - f(x_1)| = 1$ и, следовательно,

$$\frac{1}{d(x_0,x_1)^{1-\nu/p}} \le K\|f \mid L^1_p(D)\|. \tag{1.27}$$

□

1.6 Разложение области на компакты

Лемма 1.6. *Пусть* $D, D' \subset \mathbb{G}$ – *открытые множества и* $|D| < \infty$, $\varphi : D \to D'$ – *измеримое отображение, определенное п. в. в* D. *Тогда найдется возрастающая последовательность компактов* $\{T_k\} \subset \operatorname{Dom}\varphi \subset D$ *такая, что* φ *непрерывно на каждом* T_k *и* $|D \setminus \bigcup\limits_k T_k| = 0$.

Доказательство. По теореме Лузина найдется компактное множество $P_1 \subset \operatorname{Dom}\varphi$ такое, что отображение φ будет непрерывным на P_1 и $|\operatorname{Dom}\varphi \setminus P_1| < 1$. Аналогично, найдется компактное множество $P_2 \subset \operatorname{Dom}\varphi \setminus P_1$ такое, что отображение φ непрерывно на P_2 и $|(\operatorname{Dom}\varphi \setminus P_1) \setminus P_2| < \frac{1}{2}$, и так далее. Таким образом, получаем последовательность множеств $\{P_i\}$. Обозначим $T_k = \bigcup\limits_1^k P_i$, тогда $T_k \subset T_{k+1} \subset \operatorname{Dom}\varphi$. Отображение φ непрерывно на каждом T_k, поскольку T_k представляет собой конечное объединение компактных попарно непересекающихся множеств $P_1, \ldots, P_k$, на каждом из которых отображение φ непрерывно. Кроме того, $|D \setminus T_k| = |\operatorname{Dom}\varphi \setminus T_k| < \frac{1}{k}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $|D \setminus \bigcup\limits_k T_k| = 0$. □

Таким образом, областью определения отображения φ можно считать множество

$$\operatorname{Dom}_1\varphi = \bigcup_k T_k.$$

Замечание 1.6. Можно выбрать множества $\widetilde{T}_k \subset T_k$ (где T_k — множества из леммы 1.6), состоящие только из точек ненулевой плотности. При этом φ непрерывно на каждом $\widetilde{T}_k$ и $|D \setminus \bigcup\limits_k \widetilde{T}_k| = 0$.

Доказательство. Действительно, пусть $\widetilde{T}_k$ – множество точек ненулевой плотности множества T_k. Тогда $|T_k \setminus \widetilde{T}_k| = 0$, $\widetilde{T}_{k+1} \supset \widetilde{T}_k$ и $|D \setminus \bigcup\limits_k \widetilde{T}_k| = 0$. □

Замечание 1.7. *Лемма* 1.6 *также верна и в том случае, когда мера области* D *не ограничена.*

Доказательство. Область D можно представить в виде счетного объединения непересекающихся множеств: $D = \bigcup\limits_i D_i$, где $D_1 = D \cap B(0,1)$, $D_2 = (D \cap B(0,2)) \setminus \overline{D}_1$ и т. д. По лемме 1.6 для каждого множества D_i мы имеем возрастающую (по индексу k) последовательность компактов $T_k^i \subset \operatorname{Dom}\varphi$ такую, что $|D^i \setminus \bigcup\limits_k T_k^i| = 0$. Полагая $T_1 = T_1^1$, $T_2 = T_2^1 \cup T_2^2$, $T_3 = T_3^1 \cup T_3^2 \cup T_3^3$ и т. д., мы получаем возрастающую последовательность компактов $T_k \subset \operatorname{Dom}\varphi$. В частности, $|D^i \setminus \bigcup\limits_k T_k| = 0$ (поскольку $\bigcup\limits_k T_k^i \subset \bigcup\limits_k T_k$). Тогда имеем, $D \setminus \bigcup\limits_k T_k = \bigcup\limits_i \big(D^i \setminus \bigcup\limits_k T_k\big)$. Следовательно, $|D \setminus \bigcup\limits_k T_k| = 0$, как счетное объединение множеств нулевой меры. □

1.7 Функция множеств

Определение 1.7. *Отображение Φ, определенное на открытых подмножествах открытого множества $D \subset \mathbb{G}$ и принимающее неотрицательные значения, называется конечно λ-квазиаддитивной функцией множеств $1 \leq \lambda < \infty$, если*

1) *для любого $x \in D$ существует δ, $0 < \delta < \operatorname{dist}(x,\partial D)$, такое, что $0 \leq \Phi(B(x,\delta)) < \infty$;*

2) *неравенство $\sum\limits_{i=1}^{k} \Phi(U_i) \leq \lambda \Phi(U)$ выполнено для любого набора попарно непересекающихся открытых множеств $U_1, \dots, U_k \subset U \subset D$, $i = 1, \dots, k$.*

При $\lambda = 1$ будем употреблять термин *квазиаддитивная функция*.

Если вместо второго условия в определении функции множеств потребовать

$$\sum_{i=1}^{k} \Phi(U_i) = \Phi\left(\bigcup_{i=1}^{k} U_i\right)$$

для любого конечного набора попарно непересекающихся открытых множеств $U_i \subset D$, то такая функция называется *конечно-аддитивной*. Если это равенство распространить на счетный набор, то функция называется *счетно-аддитивной*.

Квазиаддитивная функция Φ называется *монотонной*, если $\Phi(U_1) \leq \Phi(U_2)$ для любых открытых множеств $U_1 \subset U_2 \subset D$.

Верхняя и нижняя производные квазиаддитивной функции, заданной на некоторой совокупности открытых подмножеств, определяются как

$$\overline{\Phi}'(x) = \lim_{h\to 0} \sup_{\delta \leq h} \frac{\Phi(B_\delta)}{|B_\delta|} \quad \text{и} \quad \underline{\Phi}'(x) = \lim_{h\to 0} \inf_{\delta \leq h} \frac{\Phi(B_\delta)}{|B_\delta|}. \tag{1.28}$$

Здесь супремум и инфинум берутся по всем открытым шарам B_δ с радиусом $\delta \leq h$, содержащих точку x . Если в некоторой точке x верхняя и нижняя производные совпадают: $\overline{\Phi}'(x) = \underline{\Phi}'(x)$, то их общее значение называется *производной* $\Phi'(x)$ *функции множеств* Φ.

Для квазиаддитивной функции множества справедливо

Предложение 1.5 ([31])**.** *Пусть Φ — конечная λ-квазиаддитивная функция множеств определена на открытых подмножествах области $D \subset \mathbb{G}$. Тогда*

a) для любого открытого множества $U \subset D$

$$\int\limits_U \overline{\Phi}'(x)\, dx \leq \lambda \Phi(U);$$

b) почти в каждой точке $x \in D$ существует конечная верхняя производная и

$$\overline{\Phi}'(x) \leq \lambda \underline{\Phi}'(x);$$

если $\lambda = 1$, то почти в каждой точке $x \in D$ существует конечная производная

$$\Phi'(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\Phi(B_\delta)}{|B_\delta|}.$$

Использование функций множеств позволяет доказать следующую теорему Лебега.

Теорема 1.1 ([31]). *Пусть $\mathbb{G}$ — группа Карно, D — область в $\mathbb{G}$. Предположим, что функция f принадлежит $L_{1,\mathrm{loc}}(D)$. Тогда для почти всех $x \in D$ имеем*

$$\lim_{\delta \to 0,\, x \in B_\delta} \frac{1}{|B_\delta|} \int\limits_{B_\delta} |f(y) - f(x)|\, dy = 0.$$

Приведем еще две леммы о покрытиях, которыми мы будем пользоваться при доказательстве основных результатов.

Лемма 1.7 ([31]). *Для любого открытого множества $U \subset \mathbb{R}^N, U \neq \mathbb{R}^N$, существует счетное семейство евклидовых шаров $\mathcal{B} = \{B_j\}$ таких, что*

1) $\bigcup\limits_j B_j = U$;

2) *если* $B_j = B(x_j,r_j) \in \mathcal{B}$, *то* $\operatorname{dist}(x_j,\partial D) = 12r_j$;

3) *семейства* $\mathcal{B} = \{B_j\}$ *и* $2\mathcal{B} = \{2B_j\}$ *образуют конечнократное покрытие* U;

4) *если* $B_i(x_i,r_i) \cap B_j(x_j,r_j) = \emptyset$, *то* $\frac{5}{7}r_i \leq r_j \leq \frac{7}{5}r_i$;

5) *семейство* $\{2B_j\}$ *может быть разделено на конечные семейства, зависящие только от размерности N так, что в каждом семействе шары не пересекаются.*

Лемма 1.8 ([31]). *Пусть монотонная счетно-аддитивная функция Φ определена на открытых подмножествах открытого множества $D \subset \mathbb{G}$. Тогда для всякого открытого множества $U \subset D, U \neq \mathbb{G}$, существует последовательность евклидовых шаров $\{B_j\}$ такая, что*

1) *семейства* $\{B_j\}$ *и* $\{2B_j\}$ *образуют конечнократное покрытие* U;

2) $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \Phi(2B_j) \leq \zeta_N \Phi(U)$, *где* ζ_N — *постоянная, зависящая только от размерности* N.

1.8 Емкость

В этой части мы приведем основные свойства емкости в пространствах Соболева, которые помогут в изучении дальнейших свойств отображения φ, индуцирующего изоморфизм пространств Соболева в случае $p = \nu$.

Пространство $L^1_{\nu,F}(D)$

Фиксируем замкнутое множество положительной меры $F \subset D$ без изолированных точек. Можно считать, что $F \subset B_F$, где $B_F \subset D$ — некоторый шар. Рассмотрим совокупность функций

$$L^1_{\nu,F}(D) = \big\{u \in L^1_\nu(D) : u(x) = 0 \text{ для почти всех } x \in F\big\}.$$

Заметим, что $L^1_{\nu,F}(D)$ является замкнутым подпространством в $L^1_\nu(D)$ и нормированным пространством с нормой $\big\|u \mid L^1_{\nu,F}(D)\big\| = \big\|u \mid L^1_\nu(D)\big\|$. Последнее легко показать с помощью леммы 1.4. Следовательно, $L^1_{\nu,F}(D)$ — банахово пространство.

1.8.1 Емкость в пространстве $L^1_{\nu,F}(D)$ и ее свойства

Приведем понятие емкости в пространстве $L^1_{\nu,F}(D)$ и свойства, которые потребуются в дальнейшем. Близкое изложение применительно к другим пространствам функций см. в [17, § 6], [58, § 6] и [16]. В скобках мы приводим ссылки на работы, содержащие утверждения, близкие по содержанию к формулируемым в настоящей работе.

Емкость $\operatorname{Cap}(K; L^1_{\nu,F}(D))$ компакта $K \subset D_F$ в пространстве $L^1_{\nu,F}(D)$ — это величина

$$\operatorname{Cap}\big(K; L^1_{\nu,F}(D)\big) = \inf\big\|g \mid L^1_{\nu,F}(D)\big\|^\nu, \tag{1.29}$$

где инфимум берется по всем непрерывным функциям $g \in L^1_{\nu,F}(D)$ таким, что $g \geq 1$ на K.

Замечание 1.8. Точная нижняя грань в (1.29) не изменится, если рассматривать *неотрицательные* непрерывные функции из $L^1_{\nu,F}(D)$ такие, что $g > 1$ на K.

Для произвольного множества $E \subset D_F$ его *внутренняя емкость* равна

$$\underline{\operatorname{Cap}}(E; L^1_{\nu,F}(D)) = \sup\big\{\operatorname{Cap}\big(K; L^1_{\nu,F}(D)\big) : K \subset E,\, K \text{ — компактно}\big\},$$

а его *внешняя емкость* — величине

$$\overline{\operatorname{Cap}}(E; L^1_{\nu,F}(D)) = \inf\big\{\underline{\operatorname{Cap}}\big(U; L^1_{\nu,F}(D)\big) : E \subset U,\, U \subset D_F \text{ — открыто}\big\}.$$

В следующей лемме сформулированы основные свойства емкости.

Лемма 1.9 ([58, Теорема 6.1], [17, Лемма 6.1])**.** *Емкость в пространстве $L^1_{\nu,F}(D)$ обладает следующими свойствами.*

1) *Если множество $K \subset D_F$ компактно, то для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $U_\varepsilon \subset D_F$ такое, что $K \subset U_\varepsilon$ и для всякого компакта $K' \subset U_\varepsilon$*

$$\operatorname{Cap}\bigl(K'; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) \le \operatorname{Cap}\bigl(K; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) + \varepsilon.$$

2) *Если $E \subset E'$, то*

$$\underline{\operatorname{Cap}}\bigl(E; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) \le \underline{\operatorname{Cap}}\bigl(E'; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) \quad \text{и} \quad \overline{\operatorname{Cap}}\bigl(E; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) \le \overline{\operatorname{Cap}}\bigl(E'; L^1_{\nu,F}(D)\bigr).$$

3) *Пусть $K_1, K_2 \subset D_F$ — компактные множества, тогда*

$$\operatorname{Cap}\bigl(K_1 \cup K_2; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) + \operatorname{Cap}\bigl(K_1 \cap K_2; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) \le \operatorname{Cap}\bigl(K_1; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) + \operatorname{Cap}\bigl(K_2; L^1_{\nu,F}(D)\bigr).$$

4) *Пусть $E_1, \dots E_k \subset D_F$, $F_i \subset E_i$, $\overline{\operatorname{Cap}}\Bigl(\bigcup\limits_{i=1}^{k} F_i; L^1_{\nu,F}(D)\Bigr) < \infty$. Тогда*

$$\overline{\operatorname{Cap}}\Bigl(\bigcup_{i=1}^{k} E_i; L^1_{\nu,F}(D)\Bigr) - \overline{\operatorname{Cap}}\Bigl(\bigcup_{i=1}^{k} F_i; L^1_{\nu,F}(D)\Bigr) \le \sum_{i=1}^{k} \left(\overline{\operatorname{Cap}}\bigl(E_i; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) - \overline{\operatorname{Cap}}\bigl(F_i; L^1_{\nu,F}(D)\bigr)\right).$$

5) *Для всякой возрастающей последовательности множеств $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_k \subset \ldots \subset D_F$ справедливо*

$$\overline{\operatorname{Cap}}\Bigl(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k; L^1_{\nu,F}(D)\Bigr) = \lim_{k\to\infty} \overline{\operatorname{Cap}}\bigl(E_k; L^1_{\nu,F}(D)\bigr).$$

6) *Пусть $\{E_k\} \subset D_F$, $k \in \mathbb{N}$, — последовательность множеств, $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$. Тогда*

$$\overline{\operatorname{Cap}}\bigl(E; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) \le \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\operatorname{Cap}}\bigl(E_k; L^1_{\nu,F}(D)\bigr).$$

Множество E называется *измеримым* относительно емкости, если $\underline{\operatorname{Cap}}\bigl(E; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) = \overline{\operatorname{Cap}}\bigl(E; L^1_{\nu,F}(D)\bigr)$.

В силу леммы 1.9 емкость в пространстве $L^1_{\nu,F}(D)$ является емкостью в смысле Шоке [59]. Отсюда вытекает [59], что все аналитические, в частности, борелевские множества измеримы.

Некоторое свойство выполняется *квазивсюду*, если оно выполняется всюду, за исключением множества, имеющего нулевую емкость.

Определение 1.8. Функция $f \in L^1_{\nu,F}(D)$ называется *уточненной*, если существует последовательность $\{f_s\}$, $s \in \mathbb{N}$, функций из $L^1_{\nu,F}(D) \cap C(D)$ такая, что

1) $\|f - f_s \mid L^1_{\nu,F}(D)\| \to 0 \quad$ при $s \to \infty$;

2) для любого положительного $\varepsilon > 0$ найдется открытое множество $U_\varepsilon \subset D_F$ такое, что $\operatorname{Cap}(U_\varepsilon) < \varepsilon$ и последовательность f_s сходится к функции f равномерно на $D_F \setminus U_\varepsilon$.

Замечание 1.9. 1) Всякий элемент пространства $L^1_{\nu,F}(D)$ содержит уточненную функцию (см. [17, Следствие 6.4]).

2) Всякая последовательность уточненных функций, сходящаяся в $L^1_{\nu,F}(D)$ к уточненной функции f, содержит подпоследовательность, сходящуюся к f квазивсюду (см. [17, Следствие 6.7]).

Лемма 1.10 ([58, Лемма 6.4], [17, Лемма 6.5])**.** *Пусть $E \subset D_F$ — произвольное множество и $f \in L^1_{\nu,F}(D)$ — уточненная функция такая, что $|f(x)| \geq \alpha > 0$ квазивсюду на E. Тогда*

$$\overline{\operatorname{Cap}}\big(E; L^1_{\nu,F}(D)\big) \leq \frac{\|f \mid L^1_{\nu,F}(D)\|^\nu}{\alpha^\nu}.$$

Следствие 1.2 ([17, Следствие 6.6], [58, Следствие 6.2])**.** *Две уточненные функции, принадлежащие одному элементу пространства $L^1_{\nu,F}(D)$, совпадают квазивсюду на D_F.*

Определение 1.9. Для произвольного множества $E \subset D_F$ положим $A(E) = \big\{f \in L^1_{\nu,F}(D) :$ уточненный представитель $\tilde{f}(x)$ не меньше 1 квазивсюду на $E\big\}$. Функция $f \in A(E)$ называется *допустимой* для множества E.

Лемма 1.11 ([58, Лемма 6.5])**.** *Пусть $E \subset D_F$ — произвольное множество. Множество $A(E)$ допустимых функций слабо замкнуто и выпукло в $L^1_{\nu,F}(D)$.*

Из леммы 1.11 получаем следующие следствия.

Следствие 1.3 ([58, Следствие 6.4])**.** *Если $E \in D_F$ и $A(E) \neq \emptyset$, то существует единственный элемент $f_E \in A(E)$ такой, что*

$$\|f_E \mid L^1_{\nu,F}(D)\| = \inf\big\{\|f \mid L^1_{\nu,F}(D)\| : f \in A(E)\big\}.$$

Следствие 1.4 ([58, Следствие 6.5]). *Пусть* $\{E_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *— возрастающая последовательность множеств,* $E = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m$, $A(E_m) \neq \emptyset$ *для всех* m. *Тогда*

$$A(E) = \bigcap_{m=1}^{\infty} A(E_m) \quad \text{и} \quad \lim_{m\to\infty} \bigl\| f_{E_m} \mid L^1_{\nu,F}(D) \bigr\| = \inf\bigl\{ \bigl\| f \mid L^1_{\nu,F}(D) \bigr\| : f \in A(E) \bigr\}.$$

Теорема 1.2 ([58, Теорема 6.4], [17, Теорема 6.11]). *Для произвольного множества* $E \subset D_F$ *имеем* $\overline{\mathrm{Cap}}\bigl(E; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) = \inf\bigl\{ \| f \mid L^1_{\nu,F}(D) \|^{\nu} : f \in A(E) \bigr\}$.

Если $A(E) \neq \emptyset$, *то найдется функция* f_E *такая, что*

$$\overline{\mathrm{Cap}}\bigl(E; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) = \bigl\| f_E \mid L^1_{\nu,F}(D) \bigr\|^{\nu}.$$

Функция f_E из теоремы 1.2 называется *емкостной функцией* для множества E.

Лемма 1.12. *Если* $f \in L^1_{\nu,F}(D)$ *— уточненная функция, то равенство*

$$f(x) = \lim_{r\to 0} r^{-\nu} \int\limits_{B(x,r)} f(z)\, dz \tag{1.30}$$

выполняется для квазивсех $x \in D_F$.

Доказательство. Действительно, так как результат локальный можно предполагать (умножая на срезку), что $f \in S^1_{\nu}(\mathbb{G})$ (определение пространства $S^1_{\nu}(\mathbb{G})$ см. в следующем пункте). Для функций из пространства потенциалов, утверждение леммы доказано в [17, Предложение 6.14]. □

Определение 1.10. Функцию f, определенную квазивсюду на D_F, будем называть *квазинепрерывной*, если для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти открытое множество $U_\varepsilon \subset D_F$ такое, что $\overline{\mathrm{Cap}}\bigl(U_\varepsilon; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) < \varepsilon$ и сужение f на дополнение $D_F \setminus U_\varepsilon$ непрерывно.

Замечание 1.10. Ниже в предложении 1.6 будет доказано, что функция класса $L^1_{\nu,F}(D)$ квазинепрерывная тогда и только тогда, когда она — уточненная функция.

Определение 1.11. Пусть $E \subset D_F$ — произвольное измеримое множество. Точку $x \in D_F$ будем называть *точкой ненулевой плотности* для множества E, если

$$\varlimsup_{r\to 0} \frac{|B(x,r) \cap E|}{|B(x,r)|} > 0.$$

Совокупность всех точек $x \in D_F$, которые являются точками ненулевой плотности для множества E, будем обозначать символом $\widetilde{E}$.

Лемма 1.13 ([58, Теорема 6.5], [17, Предложение 6.16]). *Пусть $E \subset D_F$ — множество положительной меры. Если функция $f \in L^1_{\nu,F}(D)$ квазинепрерывна и для почти всех точек $x \in E$ выполняется неравенство $f(x) \geq g(x)$, где $g : E \cup \widetilde{E} \to \mathbb{R}$ — полунепрерывная снизу функция, то $f(x) \geq g(x)$ для квазивсех $x \in \tilde{E}$.*

Следствие 1.5 ([58, Следствие 6.7], [17, Следствие 6.17]). *Пусть измеримое множество $E \subset D_F$ имеет положительную меру. Если две квазинепрерывные функции $f_1, f_2 \in L^1_{\nu,F}(D)$ совпадают почти всюду на E, то f_1 и f_2 совпадают квазивсюду на $\widetilde{E}$.*

Следствие 1.6 ([17, Следствие 6.19]). *Для любого множества $E \subset D_F$ справедливо $\overline{\mathrm{Cap}}\big(E \cup \widetilde{E}; L^1_{\nu,F}(D)\big) = \overline{\mathrm{Cap}}\big(E; L^1_{\nu,F}(D)\big)$.*

Следствие 1.7 ([17, Следствие 6.20]). *Пусть выполнены условия леммы 1.13. Если $f(x) = g(x)$ почти всюду на множестве $E \subset D_F$, где f — квазинепрерывная на D_F функция, а g — непрерывная на $E \cup \widetilde{E}$ функция, то $f(x) = g(x)$ для квазивсех точек $x \in \widetilde{E}$.*

Предложение 1.6. *Определения 1.8 и 1.10 эквивалентны: каждая уточненная функция квазинепрерывна и наоборот, любая квазинепрерывная функция класса $L^1_{\nu,F}(D)$ является уточненной.*

Доказательство. Действительно, если f — уточненная функция, то в силу условия 2 определения 1.8 для любого $\varepsilon > 0$ найдется некоторое открытое множество U_ε емкости, меньшей $\varepsilon > 0$, такое, что на дополнении $D_F \setminus U_\varepsilon$ последовательность непрерывных функций $f_n \in L^1_{\nu,F}(D)$ сходится равномерно. Следовательно, f непрерывна на $D_F \setminus U_\varepsilon$.

Пусть, теперь функция $f \in L^1_{\nu,F}(D)$ квазинепрерывна. Тогда по замечанию 1.9 существует уточненная функция $\tilde{f}$, совпадающая с f п. в. в D_F. По доказанному выше функция $\tilde{f}$ квазинепрерывна, а по следствию 1.5 функции f и $\tilde{f}$ совпадают квазивсюду. Остается заметить, что функция, совпадающая квазивсюду с уточненной, сама является уточненной. □

1.8.2 Емкость в пространстве потенциалов

Пусть Ω — открытое связное множество на группе Карно $\mathbb{G}$. *Емкостью* $\mathrm{cap}\big(K; W^1_\nu(\Omega)\big)$ компакта $K \subset \Omega$ в пространстве $W^1_\nu(\Omega)$ называется величина

$$\mathrm{cap}\big(K; W^1_\nu(\Omega)\big) = \inf \big\| g \mid W^1_\nu(\Omega) \big\|^\nu,$$

где точная нижняя грань берется по всем непрерывным функциям $g \in W^1_\nu(\Omega)$ таким, что $g \geq 1$ на K. Для произвольного множества $E \subset \Omega$ его *внутренняя емкость* равна

$$\underline{\mathrm{cap}}\big(E; L^1_\nu(\Omega)\big) = \sup\big\{\mathrm{cap}\big(K; W^1_\nu(\Omega)\big) : K \subset E,\ K \text{ компактно}\big\},$$

а его *внешняя емкость* — величине

$$\overline{\mathrm{cap}}\big(E; W^1_\nu(\Omega)\big) = \inf\big\{\underline{\mathrm{cap}}\big(U; W^1_\nu(\Omega)\big) : E \subset U,\ U \text{ открыто}\big\}.$$

Свойства емкости в пространстве $W^1_\nu(\Omega)$ (см. например [17]) аналогичны свойствам емкости в пространстве $L^1_{\nu,F}(D)$, установленным выше.

Пространство бесселевых потенциалов на группе Карно — это пространство $S^\alpha_p(\mathbb{G})$ функций вида

$$g(x) = f * J_\alpha(x) = \int\limits_{\mathbb{G}} J_\alpha(y^{-1}x) f(y)\, dy,$$

где $f \in L_p(\mathbb{G})$, $p \in (1,\infty)$, J_α — бесселево ядро [53] на группе $\mathbb{G}$, $\alpha \in (0,\infty)$. Определим норму в пространстве потенциалов: $\big\|g \mid S^\alpha_p(\mathbb{G})\big\| = \|f \mid L_p(\mathbb{G})\|$. Если $\alpha = k$ — натуральное число, то пространство $S^k_p(\mathbb{G})$ совпадает с пространством Соболева $W^k_p(\mathbb{G})$ [53]. Далее нас интересует случай $\alpha = 1$, так как $S^1_p(\mathbb{G})$ совпадает с пространством Соболева $W^1_p(\mathbb{G})$.

Бесселева емкость произвольного множества $E \in \mathbb{G}$ определяется следующим образом (см. подробней в [60])

$$\mathrm{cap}\big(E; S^1_p(\mathbb{G})\big) = \inf\Big\{\int\limits_{\mathbb{G}} f(y)^p\, dy : f * J_1(x) \geq 1 \text{ в точках } x \in E\Big\}. \tag{1.31}$$

В работе [60] показано, что емкость в пространстве $S^1_p(\mathbb{G})$ является внешней емкостью.

Предложение 1.7 ([60, Следствие 2])**.** *Пусть $x \in \mathbb{G}$, $r < 1$. Для бесселевой емкости шара справедлива эквивалентность:* $\mathrm{cap}\big(B(x,r); S^1_\nu(\mathbb{G})\big) \sim \big(\ln \frac{2}{r}\big)^{1-\nu}$.

Замечание 1.11. В силу эквивалентности норм в $S^1_\nu(\mathbb{G})$ и $W^1_\nu(\mathbb{G})$ [53] емкости $\mathrm{cap}\big(E; S^1_\nu(\mathbb{G})\big)$ и $\overline{\mathrm{cap}}\big(E; W^1_\nu(\mathbb{G})\big)$ также сравнимы, т. е. существуют постоянные m и M такие, что

$$m\,\overline{\mathrm{cap}}\big(E; W^1_\nu(\mathbb{G})\big) \leq \mathrm{cap}\big(E; S^1_\nu(\mathbb{G})\big) \leq M\,\overline{\mathrm{cap}}\big(E; W^1_\nu(\mathbb{G})\big). \tag{1.32}$$

Лемма 1.14. *Пусть $\Sigma \subset D_F$. Следующие три свойства равносильны:*

$$\overline{\mathrm{Cap}}\big(\Sigma; L^1_{\nu,F}(D)\big) = 0, \quad \overline{\mathrm{cap}}\big(\Sigma; W^1_\nu(\mathbb{G})\big) = 0, \quad \mathrm{cap}\big(\Sigma; S^1_\nu(\mathbb{G})\big) = 0.$$

Доказательство. Равносильность последних двух равенств следует из замечания 1.11.

Пусть $\overline{\mathrm{Cap}}\big(\Sigma; L^1_{\nu,F}(D)\big) = 0$. В силу счетной полуаддитивности емкости можно считать, что множество Σ содержится в шаре $B_\Sigma \subset D$, а множество F — в шаре $B_F \subset D$, и при этом $\operatorname{dist}(B_F, B_\Sigma) > 0$, $\operatorname{dist}(\partial D, B_F) > 0$ и $\operatorname{dist}(\partial D, B_\Sigma) > 0$.

Поскольку $\overline{\mathrm{Cap}}(\Sigma; L^1_{\nu,F}(D)) = 0$, то найдется последовательность открытых множеств $\{U_k\}$, упорядоченных по включению, такая, что

$$B_S \supset U_1 \supset U_2 \dots \supset \Sigma \quad \text{и} \quad \overline{\mathrm{Cap}}\big(U_k; L^1_{\nu,F}(D)\big) \le \frac{1}{2^k}.$$

В силу теоремы 1.2 найдется последовательность функций $h_k \in L^1_{\nu,F}(D)$ такая, что $h_k \ge 1$ квазивсюду на U_k и $\big\|h_k \mid L^1_{\nu,F}(D)\big\| \le 1/2^k$. Переходя к срезке $\min(1,h_k)$ можно считать, что $h_k = 1$ всюду на U_k.

Пусть $\Omega \subset D$ — область Джона, содержащая шары B_Σ, B_F, и $\operatorname{dist}(\partial\Omega, \partial D) > 0$ (лемма 1.3). Для достаточно малого $\delta > 0$ выберем (см. замечание 1.5) дополнительную область Джона $\Omega_\delta \supset \Omega$ так, чтобы $\operatorname{dist}(\partial\Omega, \partial\Omega_\delta) \ge \delta$ и $\operatorname{dist}(\partial D, \partial\Omega_\delta) \ge \delta$. По неравенству Пуанкаре (лемма 1.4) имеем $\|h_k \mid L_\nu(\Omega_\delta)\| \le C\big\|h_k \mid L^1_\nu(\Omega_\delta)\big\|$. Поэтому, переходя к подпоследовательностям, можно считать, что $h_k \to 0$ п. в. на Ω_δ и $\nabla h_k \to 0$ п. в. на Ω_δ. Определим срезку $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{G})$ такую, что $\eta = 1$ на Ω и $\eta = 0$ на $\mathbb{G} \setminus \Omega_\delta$. Тогда произведения $\eta h_k \in W^1_\nu(\mathbb{G})$ будут такими, что

$$\eta h_k(x) = \begin{cases} h_k(x) & \text{при } x \in \Omega, \\ 0 & \text{при } x \in \mathbb{G} \setminus \Omega_\delta. \end{cases}$$

Далее имеем $|\nabla(\eta h_k)| \le |(\nabla\eta)h_k| + |\eta\nabla h_k|$, и $\big\|\eta h_k \mid W^1_\nu(\mathbb{G})\big\| \to 0$ при $k \to \infty$. Следовательно, $\mathrm{cap}\big(U_k; W^1_\nu(\mathbb{G})\big) \to 0$ при $k \to \infty$, откуда

$$\overline{\mathrm{cap}}\big(\Sigma; W^1_\nu(\mathbb{G})\big) = 0 \quad \text{и} \quad \mathrm{cap}\big(\Sigma; S^1_\nu(\mathbb{G})\big) = 0. \tag{1.33}$$

Пусть теперь верно (1.33). Тогда найдется убывающая по включению последовательность открытых множеств $\{W_k\} \subset B_\Sigma$, содержащих Σ, такая, что $\mathrm{cap}\big(\Sigma; W^1_\nu(\mathbb{G})\big) \le 1/2^{k+1}$ и последовательность функций $u_k \in W^1_\nu(\mathbb{G})$ таких, что $u_k = 1$ квазивсюду на W_k и $\|u_k \mid W^1_\nu(\mathbb{G})\|^\nu \le 1/2^k$.

Определим срезку $\eta' \in C_0^\infty(\mathbb{G})$ такую, что $\eta = 1$ на B_Σ и $\eta' = 0$ на $\mathbb{G} \setminus \lambda B_\Sigma$, где $\lambda > 1$, при котором $D \supset \lambda B_\Sigma \supset B_\Sigma$ и $\lambda B_\Sigma \cap B_F = \emptyset$. Тогда для функций $\eta' \cdot u_k = f_k \in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D)$ верно: $f_k = 1$ на W_k и $\big\|f_k \mid L^1_{\nu,\varphi(F)}(D)\big\|^\nu \le c/2^k$, где c — постоянная, не зависящая от k. Отсюда получаем $\mathrm{Cap}\big(\Sigma; L^1_{\nu,F}(D)\big) = 0$. □

Замечание 1.12. Метод доказательства леммы 1.14 применим для доказательства более общего утверждения: пусть $\{U_k\}_1^\infty \subset D_F$ — последовательность открытых множеств, содержащихся в некотором шаре $B(0,R)$, такая, что $\operatorname{dist}(U_k,\partial D_F) \geq \eta > 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда следующие три равенства эквивалентны

$$\lim_{k\to\infty} \overline{\mathrm{Cap}}\big(U_k; L^1_{\nu,F}(D)\big) = 0, \quad \lim_{k\to\infty} \overline{\mathrm{cap}}\big(U_k; W^1_\nu(\mathbb{G})\big) = 0, \quad \lim_{k\to\infty} \mathrm{cap}\big(U_k; S^1_\nu(\mathbb{G})\big) = 0.$$

В частности, из предложения 1.7 получаем оценку емкости шара $B(x,r) \Subset D_F$:

$$\overline{\mathrm{Cap}}\big(B(x,r); L^1_{\nu,F}(D)\big) = O\Big(\Big(\ln\frac{2}{r}\Big)^{1-\nu}\Big) = o(1) \quad \text{при } r \to 0.$$

В следующей лемме описано характеристическое свойство множеств нулевой емкости.

Лемма 1.15. *Множество $\Sigma \subset D_F$ имеет нулевую внешнюю емкость тогда и только тогда, когда найдется полунепрерывная снизу функция $u \in L^1_{\nu,F}(D)$ такая, что $u = \infty$ на Σ. Норма функции u может быть выбрана сколь угодно малой.*

Доказательство. Необходимость. шаг 1. Рассмотрим в начале специальное расположение множества Σ: $\Sigma \subset B_\Sigma \Subset D_F$, где B_Σ — некоторый шар. Из леммы 1.14 имеем

$$\mathrm{cap}\big(\Sigma; S^1_\nu(\mathbb{G})\big) = 0.$$

Тогда найдется последовательность неотрицательных функций $f_k \in L_\nu(\mathbb{G})$ таких, что $\|f_k \mid L_\nu(\mathbb{G})\| \leq 2^{-k}$ и

$$f_k * J_1(x) \geq 1 \quad \text{во всех точках } x \in \Sigma.$$

Функция

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \tag{1.34}$$

неотрицательна, принадлежит $L_\nu(\mathbb{G})$, и $f * J_1(x) = \infty$ во всех точках $x \in \Sigma$. Так как ядро $J_1(z)$ неотрицательно на Σ и непрерывно всюду кроме одной точки: $z = 0$, то свертка $f * J_1(x)$ полунепрерывна снизу (по лемме Фату).

Рассмотрим липшицеву функцию $\eta : D \to [0,1]$ такую, что

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in F, \\ 1, & \text{если } x \in B_\Sigma. \end{cases}$$

Так как $W^1_\nu(\mathbb{G}) = S^1_\nu(\mathbb{G})$, то ограничение произведения $\eta(x) \cdot f * J_1(x)$ на D: $u(x) = \eta(x) \cdot f * J_1(x)|_D$, очевидно принадлежит $L^1_{\nu,F}(D)$ и удовлетворяет всем утверждениям леммы.

Заметим еще, что норма функции $u(x)$ может быть сделана сколь угодно малой, так как свойства функции $f * J_1(x)$ не зависят от числа слагаемых в сумме (1.34). Поэтому, удаляя в случае необходимости конечное число слагаемых в ряде (1.34) и используя его абсолютную сходимость, можно сделать норму $\|f * J_1 \mid W^1_\nu(D)\| = \|f * J_1 \mid L_\nu(D)\| + \|f * J_1 \mid L^1_\nu(D)\| \leq \|f * J_1 \mid W^1_\nu(\mathbb{G})\|$ сколь угодно малой. Поскольку

$$|\nabla(\eta \cdot f * J_1)(x)| \leq |\nabla \eta(x)| \cdot |f * J_1(x)| + |\eta(x)| \cdot |\nabla(f * J_1)(x)|,$$

то сколь угодно малой можно сделать также и норму $\|u_B \mid L^1_{\nu,F}(D)\|$.

ШАГ 2. Пусть теперь множество $\Sigma \subset D_F$ нулевой внешней емкости имеет произвольное расположение. Фиксируем произвольный конечнократный набор шаров $\{B_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, такой, что $D_F = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$ и $B_k \Subset D_F$ для любого k (существование такого набора доказано, см. например, в [44]). Тогда пересечение $\Sigma \cap B_k$ имеет нулевую внешнюю емкость и удовлетворяет условиям первого шага доказательства. Следовательно, существует неотрицательная полунепрерывная снизу функция $u_k \in L^1_{\nu,F}(D)$ такая, что $u_k = \infty$ на $\Sigma \cap B_k$, а ее норма $\|u_k \mid L^1_{\nu,F}(D)\| \leq \frac{\varepsilon}{M2^k}$, где ε — произвольное наперед заданное число, а M — кратность покрытия $\{B_k\}$.

Функция $u(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ — полунепрерывная снизу, принадлежит классу $L^1_{\nu,F}(D)$, $u = \infty$ на Σ, а ее норма $\|u \mid L^1_{\nu,F}(D)\| \leq \varepsilon$.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть теперь существует полунепрерывная снизу функция $u \in L^1_{\nu,F}(D)$ такая, что $u = \infty$ на некотором множестве $\Sigma \subset D_F$. Возьмем произвольное $\lambda > 0$. Тогда множество $U_\lambda = \{x \in D_F : u(x) > \lambda\}$ открыто и содержит Σ, а уточненная функция $\frac{u(x)}{\lambda}$ входит в класс $A(U_\lambda)$ допустимых функций для оценки емкости

$$\overline{\operatorname{Cap}}\big(\Sigma; L^1_{\nu,F}(D)\big) \leq \overline{\operatorname{Cap}}\big(U_\lambda; L^1_{\nu,F}(D)\big) \leq \frac{\|u \mid L^1_{\nu,F}(D)\|^\nu}{\lambda^\nu}$$

(здесь в последнем переходе мы воспользовались леммой 1.10). Так как λ — произвольное число, $\overline{\operatorname{Cap}}\big(\Sigma; L^1_{\nu,F}(D)\big)=0$. $\square$

Теорема 1.3 ([60, Теорема 9]). *Пусть $K \subset \mathbb{G}$ — компактное множество, $h(\rho)$ — неубывающая непрерывная функция, для которой $h(0) = 0$. Предположим, что*

$$\int_0^1 h(\rho)^{\frac{1}{\nu-1}} \frac{d\rho}{\rho} < \infty. \tag{1.35}$$

Тогда существует постоянная A такая, что $H_h^\infty(K) \leq A \operatorname{cap}\bigl(K; S_\nu^1(\mathbb{G})\bigr)$. Таким образом, $H_h^\infty(K) = 0$, если $\operatorname{cap}\bigl(K; S_\nu^1(\mathbb{G})\bigr) = 0$. (Здесь $H_h^\infty(K)$ — вместимость по Хаусдорфу.)

Следующие утверждение является аналогом леммы 7.19 из [17].

Лемма 1.16. *Пусть $\{\gamma_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ — последовательность континуумов содержащихся в некотором замкнутом шаре $\overline{B}_\gamma \subset D_F$. Предел $\lim\limits_{m\to\infty} \overline{\operatorname{Cap}}\bigl(\gamma_m; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) = 0$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{m\to\infty} \operatorname{diam} \gamma_m = 0$.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{m\to\infty} \overline{\operatorname{Cap}}\bigl(\gamma_m; L^1_{\nu,F}(D)\bigr) = 0$. Можно считать, что $\operatorname{dist}(B_F,B_\gamma) > 0$. Найдется последовательность непрерывных функций $f_m \in L^1_{\nu,F}(D)$ таких, что $f_m = 1$ на γ_m и $\lim\limits_{m\to\infty}\bigl\|f_m \mid L^1_{\nu,F}(D)\bigr\| = 0$.

Выберем число $\lambda > 1$ такое, что $\operatorname{dist}(B_F,\lambda B_\gamma) > 0$ и $\lambda B_\gamma \subset D_F$.

Определим срезку $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{G})$ такую, что $\eta = 1$ на B_γ и $\eta = 0$ на $\mathbb{G} \setminus \lambda B_\gamma$. Тогда функции $\eta{\cdot} f_m = u_m \in W_\nu^1(\mathbb{G})$, и в силу неравенства Пуанкаре (лемма 1.4) имеем $\lim\limits_{m\to\infty}\bigl\|f_m \mid W_\nu^1(\mathbb{G})\bigr\| = 0$. Отсюда получаем

$$\lim_{m\to\infty} \operatorname{cap}\bigl(\gamma_m; W_\nu^1(\mathbb{G})\bigr) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{m\to\infty} \operatorname{cap}\bigl(\gamma_m; S_\nu^1(\mathbb{G})\bigr) = 0.$$

Полагая в теореме 1.3 $h(\rho) = \rho$, выводим $\lim\limits_{m\to\infty} H_1^\infty(\gamma_m) = 0$. Остается заметить, что $H_1^\infty(E) = \operatorname{diam}(E)$.

Доказательство обратного утверждения очевидно. □

1.8.3 Обобщенная емкость Тейхмюллера

Определение 1.12. *Обобщенной емкостью Тейхмюллера* кольца $D_{r,R} = \{x \in \mathbb{G} : r < d(0,x) < R\}$ назовем величину

$$GT(r,R) = \inf_u \int\limits_{D_{r,R}} |\nabla u|^\nu \, dx,$$

где нижняя грань берется по всем квазинепрерывным функциям $u \in W_\nu^1(D_{r,R})$, удовлетворяющим условиям $\min u|_{S(0,t)} \leq 0$ и $\max u|_{S(0,t)} \geq 1$ для почти всех $t \in (r,R)$.

Квазинепрерывная функция непрерывна на почти всех сферах (см. ниже предложение 3.7), максимум и минимум в определении 1.12 относится именно к таким сферам.

Предложение 1.8 ([60, Предложение 7]). *Обобщенная емкость Тейхмюллера $GT(r,R)$ строго положительна для любых $0 < r < R < \infty$.*

Следствие 1.8 ([60, Следствие 4]). *Для обобщенной емкости Тейхмюллера справедлива оценка снизу*

$$GT(r,R) \geq \gamma_1 \ln \frac{R}{r}. \tag{1.36}$$

Предложение 1.9. *Пусть U — область в $\mathbb{G}$ и $\gamma_0, \gamma_1 \subset U$ — два связных множества, диаметр каждого из которых положительный. Если γ_0 и γ_1 имеют в U общую предельную точку, то не существует квазинепрерывной функции $v \in L^1_\nu(U)$, что $v|_{\gamma_0} = 0$ и $v|_{\gamma_1} = 1$.*

Доказательство. Допустим, напротив, такая функция существует. Рассмотрим кольцо $D_{r,R} \subset U$ с центром в общей предельной точке $x \in U$ такое, чтобы число R не превосходило максимального из диаметров γ_0 и γ_1. Тогда из определения обобщенной емкости Тейхмюллера (см. определение 1.12) и следствия 1.8 получаем следующие неравенства

$$\int\limits_U |\nabla v|^\nu \, dx \geq \int\limits_{D_{r,R}} |\nabla v|^\nu \, dx \geq GT(r,R) \geq \gamma_1 \ln \frac{R}{r}. \tag{1.37}$$

Из (1.37) при $r \to 0$ получаем, что $\left\| v \mid L^1_\nu(U) \right\|^\nu = \infty$, а это противоречит принадлежности функции v пространству $L^1_\nu(U)$. $\square$

Глава 2

Операторы композиции в весовых пространствах Соболева

Пусть D, D' — области на группе Карно $\mathbb{G}$, u, v — произвольные весовые функции на D, D' соответственно и $1 \leq q < p \leq \infty$. Мы говорим, что измеримое отображение $\varphi : D \to D'$ *индуцирует ограниченный оператор в весовых пространствах Соболева* $\varphi^* : L^1_p(D'{,}v) \cap C^\infty_0(D') \to L^1_q(D{,}u)$ *по правилу композиции* $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$, если $f \circ \varphi \in L^1_q(D{,}u)$ и справедлива оценка

$$\big\|\varphi^*(f) \mid L^1_q(D{,}u)\big\| \leq K\big\|f \mid L^1_p(D'{,}v)\big\| \tag{2.1}$$

для любой функции $f \in L^1_p(D'{,}v) \cap C^\infty_0(D')$, где постоянная K не зависит от выбора f.

Теорема 2.1 ([48, Theorem 1.2])**.** *Предположим, что отображение $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор*

$$\varphi^* : L^1_p(D', v) \cap C^\infty(D') \to L^1_q(D, u), \quad 1 \leq q < p \leq \infty, \quad \varphi^* f = f \circ \varphi.$$

Тогда

$$\Phi(A') = \sup_{f \in L^1_p(D'{,}v) \cap C^\infty_0(D')} \left(\frac{\|\varphi^* f \mid L^1_q(D{,}u)\|}{\|f \mid \ L^1_p(D'{,}v)\|} \right)^{\varkappa}, \quad \varkappa = \begin{cases} \frac{pq}{p-q} & \text{при } p \leq \infty, \\ q & \text{при } p = \infty, \end{cases}$$

— ограниченная монотонная счетно-аддитивная функция, определенная на открытых ограниченных подмножествах $A' \subset D'$.

В работе [48] теорема 3.1 доказана для отображений областей из $\mathbb{R}^n$, доказательство для группы Карно является почти дословным повторением рассуждений для случая евклидова пространства.

2.1 Свойства отображения φ

Опишем некоторые свойства непрерывности и дифференцируемости отображений, порождающих ограниченный оператор композиции.

2.1.1 Объемная производная

Рассмотрим измеримое отображение $\varphi : D \to D'$. *Индикатриса Банаха* $N(y,\varphi, A) = \#\{x \in A \mid \varphi(x) = y\}$ — это число прообразов y, принадлежащих A. Если число прообразов бесконечно, то $N(y,\varphi,A) = \infty$. В случае $A = D$, пишем $N(y,\varphi)$ всесто $N(y,\varphi, D)$.

Заметим, что функция $N(y,\varphi)$ измерима (см. например [61–63]). Поэтому область D' можно представить в виде дизъюнктивного объединения измеримых множеств:

$$D' = \bigcup_{i=0}^{\infty} N^{-1}(i,\varphi).$$

Обозначим $A_i = \varphi^{-1}(N^{-1}(i,\varphi))$. Тогда

$$D = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i.$$

Пусть $Q \subset D'$ — ограниченное множество. Определим следующее семейство функций множеств

$$U \mapsto \Psi_i(U; Q) = |\varphi(U) \cap N^{-1}(i,\varphi) \cap Q|,$$

где $i \in \mathbb{N}$, а $U \subset D$ — открытое множество. Очевидно, каждая функция Ψ_i является монотонной конечно i-квазиаддитивной функцией множеств. Следовательно, верхняя и нижняя производные являются измеримыми функциями и $\overline{\Psi}_i{}'(x) < \infty$ почти всюду в D. Выполнено неравенство

$$\overline{\Psi}_i{}'(x; Q) \leq i\underline{\Psi}_i{}'(x; Q) \tag{2.2}$$

для п. в. $x \in D$ (см. предложение 1.5).

Обозначим символом $\Sigma_{i,Q}$ множество меры нуль, на котором производная $\overline{\Psi}_i{}'(\cdot; Q)$ либо не определена, либо равна ∞.

Лемма 2.1. *Пусть $E \subset D \setminus \Sigma_{i,Q}$ — множество нулевой меры. Тогда $|\varphi(E) \cap N^{-1}(i,\varphi) \cap Q| = 0$.*

Доказательство. Пусть $M_k = \{x \in D \setminus \Sigma_{i,Q} : \overline{\Psi}_i{}'(x; Q) < k\}$. Тогда $D \setminus \Sigma_{i,Q} = \bigcup\limits_k M_k$. Пусть множество нулевой меры $E_k \subset M_k$. Можно считать, что E_k ограничено. Для любого

$\varepsilon > 0$ существует открытое множество $U_\varepsilon \supset E_k$ такое, что $|U_\varepsilon| < \varepsilon$. С учетом определения множества M_k и (1.28) имеем: для каждого $x \in E_k$ найдется число $r_x > 0$ такое, что $B(x,r) \subset U_\varepsilon$ и $|\varphi(B(x,r)) \cap N^{-1}(i,\varphi) \cap Q| < k|B(x,r)|$ для любого числа $0 < r < r_x$. По лемме Витали из семейства шаров $\mathcal{B} = \{B(x,r) : x \in E_k, B(x,r) \subset U_\varepsilon, 0 < r < r_x\}$ можно выделить счетное дизъюнкное семейство шаров $\{B_j\}$ такое, что $E_k \subset \bigcup\limits_j cB_j$, где c – постоянная, зависит только от ν. Кроме того, $cB(x,r) \subset U_\varepsilon$ и $|\varphi(cB(x,r)) \cap N^{-1}(i,\varphi) \cap Q| < k|cB(x,r)|$. Тогда

$$|\varphi(E_k) \cap N^{-1}(i,\varphi) \cap Q| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(cB_j) \cap N^{-1}(i,\varphi) \cap Q| \leq k \sum_{j=1}^{\infty} |cB_j| \leq c^\nu k |U_\varepsilon| < c^\nu k \varepsilon, \qquad (2.3)$$

откуда $|\varphi(E_k) \cap N^{-1}(i,\varphi) \cap Q| = 0$, так как $\varepsilon > 0$ произвольно.

Для любого множества меры нуль $E \subset D \setminus \Sigma_i$ имеем также $|\varphi(E) \cap N^{-1}(i,\varphi) \cap Q| = 0$, поскольку $E = \bigcup\limits_k E \cap M_k$. □

Утверждение доказанной леммы можно сформулировать немного иначе

Следствие 2.1. *Пусть* $E \subset D \setminus \Sigma_{i,Q}$ *— множество нулевой меры. Тогда* $\inf\{\Psi_i(U;Q) :$ *U— открыто и* $E \subset U\} = 0$.

Замечание 2.1. *В силу произвольности* Q *выводим* $|\varphi(E)| = 0$ *для множества нулевой меры* $E \subset D \setminus \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \Sigma_{i,Q_k}$, *где* Q_k *— возрастающая последовательность и* $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} Q_k \supset D'$.

Покажем, что для Ψ_i имеет место свойство абсолютной непрерывности.

Предложение 2.1. *Для любого открытого множества* $U \subset D \setminus \Sigma_i$ *выполнено неравенство*

$$\int\limits_U \overline{\Psi}_i{}'(x;Q)\,dx \geq \Psi_i(U;Q). \qquad (2.4)$$

Доказательство. Для всех $x \in D \setminus \Sigma_i$ имеем следующее: для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta_0(x)$ такое, что для всех $\delta < \delta_0(x)$ выполнены неравенства

$$\frac{\Psi_i(B(x,\delta);Q)}{|B(x,\delta)|} \leq \overline{\Psi}_i{}'(x;Q) + \varepsilon \qquad (2.5)$$

и

$$\overline{\Psi}_i{}'(x;Q) - \varepsilon \leq \frac{1}{|B(x,\delta)|} \int\limits_{B(x,\delta)} \overline{\Psi}_i{}'(z;Q)\,dz \leq \overline{\Psi}_i{}'(x;Q) + \varepsilon. \qquad (2.6)$$

Неравенство (3.44) следует из определения производной функции множеств, а неравенство (3.45) мы получаем из теоремы Лебега [31, Corollary 3].

Далее, для всех $x \in D \setminus \Sigma_i$ и для всех $\delta < \delta_0(x)$ имеем

$$\Psi_i(B(x,\rho); Q) \leq |B(x,\delta)|\overline{\Psi}_i{}'(x; Q) + \varepsilon|B(x,\delta)| \leq \int\limits_{B(x,\delta)} \overline{\Psi}_i{}'(z; Q)\, dz + 2\varepsilon|B(x,\delta)|. \tag{2.7}$$

Пусть $U \subset D \setminus \Sigma_i$ — открытое множество конечной меры. Выберем покрытие Витали множества U семейством шаров $\{B(x,\delta) \mid x \in U \setminus \Sigma_i, 0 < \delta < \delta_0(x)\}$. Из этого семейства можно выделить последовательность попарно непересекающихся шаров $\{B_j\}$ так, что

$$|U \setminus \bigcup_j B_j| = 0 \quad \text{и} \quad |U| = |\bigcup_j B_j| = \sum_j |B_j|.$$

В силу леммы 3.10

$$\Psi_i(U; Q) \leq \Psi_i(\bigcup_j B_j; Q) \leq \sum_j \Psi_i(B_j; Q). \tag{2.8}$$

Для каждого шара из $\{B_j\}$ выполнено неравенство (3.46). Суммируя неравенство (3.46) по шарам из $\{B_j\}$ и учитывая (2.8), получаем

$$\Psi_i(U; Q) \leq \sum_j \Psi_i(B_j; Q) \leq \int\limits_{\bigcup_j B_j} \overline{\Psi}_i{}'(z; Q)\, dz + 2\varepsilon \sum_j |B_j| = \int\limits_U \overline{\Psi}_i{}'(z; Q)\, dz + 2\varepsilon|U|.$$

В силу произвольности ε

$$\Psi_i(U; Q) \leq \int\limits_U \overline{\Psi}_i{}'(z; Q)\, dz. \tag{2.9}$$

$\square$

Из предложения 2.1 выводим следующее

Следствие 2.2. *Для любой неотрицательной измеримой функции $u : A_i \to \mathbb{R}$ имеет место неравенство*

$$\int\limits_{A_i} u(x)\overline{\Psi}_i{}'(x; Q)\, dx \geq \frac{1}{i} \int\limits_{N^{-1}(i,\varphi)\cap Q} \left(\sum_{x_j \in \varphi^{-1}(y)\setminus\Sigma_i} u(x) \right) dy. \tag{2.10}$$

Доказательство. Пусть $u(x) = \chi_V(x)$ — индикатор некоторого борелевского множества $V \subset A_i$. Тогда

$$\frac{1}{i} \int\limits_{N^{-1}(i,\varphi)\cap Q} \left(\sum_{x_j \in \varphi^{-1}(y)\setminus\Sigma_i} u(x) \right) dy = \frac{1}{i} \int\limits_{N^{-1}(i,\varphi)\cap Q} \left(\sum_{x_j \in V\cap\varphi^{-1}(y)\setminus\Sigma_i} 1 \right) dy$$

$$= |N^{-1}(i,\varphi) \cap \varphi(V \setminus \Sigma_i) \cap Q| \le \Psi_i(V;Q) \le \int\limits_{A_i} \overline{\Psi}_i{}'(x;Q)\, dx.$$

Аналогично проверяем данное неравенство для ступенчатых функций, далее стандартной процедурой распространяем его на измеримые функции. □

Обозначим $Z_{i,Q} = \{x \in A_i \cap \varphi^{-1}(Q) : \overline{\Psi}_i{}'(x;Q) = 0\}$. Тогда можно показать, что $|\varphi(Z_{i,Q})| = 0$, при $i < \infty$. Действительно,

$$|\varphi(Z_{i,Q})| = \int\limits_{\varphi(Z_{i,Q})} dy \le \int\limits_{N^{-1}(i,\varphi)\cap Q} \left(\sum_{x_j \in \varphi^{-1}(y)\setminus\Sigma_i} \chi_{Z_{i,Q}}(x) \right) dy \le i \int\limits_{Z_{i,Q}} \overline{\Psi}_i{}'(x;Q)\, dx = 0.$$

Нам потребуется еще одно свойство. Из пункта a) предложения 1.5 выводим

Предложение 2.2. *Для любой неотрицательной измеримой функции $g : D' \to \mathbb{R}$ имеет место неравенство*

$$\int\limits_{A_i} g(\varphi(x))\overline{\Psi}_i{}'(x;Q)\, dx \le i \int\limits_{N^{-1}(i,\varphi)\cap Q} g(y)\, dy. \tag{2.11}$$

2.1.2 Аппроксимативная дифференцируемость φ

Лемма 2.2 ([A1, Лемма 3])**.** *Пусть отображение индуцирует ограниченный оператор композиции в пространствах Соболева $\varphi^* : L^1_p(D', v) \cap C^\infty_0(D') \to L^1_q(D, u)$. Тогда на почти всех интегральных кривых горизонтальных векторных полей отображение $\varphi : \bigcup\limits_i \widetilde{T}_i \to D'$ непрерывно вне некоторого множества нулевой 1-меры Хаусдорфа.*

Здесь $\{\widetilde{T}_i\}$ — возрастающая последовательность множеств, состоящих из точек положительной плотности, $|D \setminus \bigcup\limits_i \widetilde{T}_i| = 0$ и на каждом $\widetilde{T}_i$ отображение φ непрерывно.

Доказательство. Фиксируем горизонтальное поле X_j. Предположим противное: найдется семейство интегральных кривых Γ поля X_j положительной меры такое, что на каждой кривой $\gamma \in \Gamma$ существует множество $s_\gamma \subset \gamma$ положительной 1-меры, на котором отображение $\varphi : \bigcup\limits_i \widetilde{T}_i \to D'$ не является непрерывным.

Пусть $S = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} s_\gamma$. Покажем, что S — измеримо. Действительно, $S = D\setminus A$, где множество

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{m\in\mathbb{N}}\Big\{x \in \bigcup_i \widetilde{T}_i \mid d(\varphi(x\exp tX_j),\varphi(x)) < \frac{1}{n} \text{ при } |t| < \frac{1}{m},\quad x\exp tX_j \in \bigcup_i \widetilde{T}_i\Big\},$$

измеримо, поскольку любое множество в фигурных скобках измеримо. По теореме Фубини $|S| > 0$. Аналогично проверяется, что $S = \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} S_m$, где $S_m = \{x \in s_\gamma \mid \operatorname{osc}_l \varphi(x) > \frac{1}{m}\}$ — измеримое множество. Здесь $\operatorname{osc}_l\varphi(x)$ — колебание отображения $\varphi : \gamma\cap\bigcup\limits_i \widetilde{T}_i \to D'$ в точке x. Следовательно, можно выбрать номер m такой, что $|S_m| > 0$. Также найдется номер j такой, что $|S_m\cap\widetilde{T}_j| > 0$. Пусть $x_0 \in S_m\cap\widetilde{T}_j$ — точка плотности 1. Тогда любой шар $B(x_0,r)$ будет содержать подмножество положительной меры из $S_m\cap\widetilde{T}_j$. Обозначим это множество символом P_r. В силу непрерывности отображения φ на $\widetilde{T}_j$ можно подобрать шар $B(x_0,r_m)$ таким образом, чтобы $\varphi(B(x_0,r_m)\cap S_m\cap\widetilde{T}_j) \subset B(\varphi(x_0),\frac{1}{4m})$.

Фиксируем функцию $\eta \in C_0^\infty(D')$ такую, что $\eta(y) = 1$ при $y \in B(\varphi(x_0),\frac{1}{4m})$ и $\eta(y) = 0$ при $y \notin B(\varphi(x_0),\frac{1}{2m})$. Композиция $\eta\circ\varphi$ принадлежит $L^1_q(D,u)$. Следовательно, функцию $\eta\circ\varphi$ можно изменить на множестве нулевой меры, так чтобы она была абсолютно непрерывной на почти всех линиях (т. е. чтобы она принадлежала классу ACL). Заметим, что при такой модификации отображение $\varphi : \bigcup\limits_i \widetilde{T}_i \to D'$ не изменяется, поэтому всегда $\varphi^*\eta(x) = \eta\circ\varphi(x)$ для всех $x \in \widetilde{T}_j$.

На основании вышесказанного на каждой горизонтальной кривой, пересекающей P_{r_m} по множеству положительной 1-меры, имеем $\operatorname{osc}_l \eta\circ\varphi(x) = 1$, где $x \in P_{r_m}$. По построению множества P_{r_m} совокупность таких кривых имеет положительную меру. Таким образом, мы пришли к противоречию с абсолютной непрерывностью функции $\eta\circ\varphi$ на почти всех линиях.

Следовательно, на почти всех горизонтальных кривых отображение $\varphi : \bigcup\limits_i \widetilde{T}_i \to D'$ непрерывно вне некоторого множества нулевой 1-меры. $\square$

В следующей лемме мы показываем, что при приближении к точкам разрыва соответствующие образы стремятся к границе области значений или к бесконечно удаленной точке.

Лемма 2.3. *Для почти всех интегральных кривых γ горизонтальных векторных полей множество точек разрыва замкнуто $\sigma_\gamma \subset \gamma$, имеет меру ноль, и отображение φ обладает свойством: для всех $a \in \sigma_\gamma$*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in\gamma\setminus\sigma_\gamma}} \operatorname{dist}(\varphi(x),\partial D') = 0 \qquad \textit{или} \qquad \lim_{\substack{x\to a\\ x\in\gamma\setminus\sigma_\gamma}} \rho(\varphi(x)) = \infty. \tag{2.12}$$

Доказательство. ШАГ 1. Пусть γ интегральная линия горизонтального поля, $\sigma_\gamma \subset \gamma$ — множество нулевой 1-меры, на котором нет непрерывности φ и $x_0 \in \sigma_\gamma$. Докажем, если для некоторой последовательности $\{x_n\} \subset \gamma \setminus \sigma_\gamma$ существует предел

$$\lim_{x_n \to x_0} \varphi(x_n) = z \in D',$$

то для любой последовательности $\{x'_n\} \subset \gamma \setminus \sigma_\gamma$

$$\lim_{x'_n \to x_0} \varphi(x'_n) = z.$$

Пусть $\{z_j\}$ — счетное всюду плотное множество точек в D'. Определим счетное семейство функций $\eta^r_{z_j} : D' \to \mathbb{R}^+$ класса $C_0^\infty(D')$:

$$\eta^r_{z_j}(y) = \begin{cases} 1, & y \in B(z_j, r), \\ 0, & y \notin B(z_j, 2r), \end{cases}$$

где $r \in \mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$.

Для почти всех интегральных кривых $\gamma \subset D$ горизонтальных векторных полей отображение φ непрерывно на γ вне множества нулевой 1-меры σ_γ, а функции $\eta^r_{z_j} \circ \varphi$ абсолютно непрерывны на γ для всех $j \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Q}^+$. Выберем кривую γ с указанными свойствами.

Пусть $x_0 \in \sigma_\gamma$ и $\lim\limits_{x_n \to x_0} \varphi(x_n) = z \in D'$ для некоторой последовательности $\{x_n\} \subset \gamma \setminus \sigma_\gamma$. Если такой последовательности нет, то (2.12) выполнено.

Допустим нашлась другая последовательность $\{x'_n\} \subset \gamma \setminus \sigma_\gamma$, что $\lim\limits_{x'_n \to x_0} \varphi(x'_n) = z' \neq z$. Подберем точку $z_l \in \{z_j\}$ и радиус $r_l \in \mathbb{Q}^+$ так, что $d(z, z_l) < r_l$, а $d(z', z_l) > 2r_l$. Тогда

$$\lim_{x_n \to x_0} \eta^{r_l}_{z_l} \circ \varphi(x_n) = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{x'_n \to x_0} \eta^{r_l}_{z_l} \circ \varphi(x'_n) = 0,$$

что противоречит непрерывности $\eta^{r_l}_{z_l} \circ \varphi$ на γ.

Отображение φ продолжается по непрерывности: $\varphi(x_0) = z$. Таким образом можно считать, что $x_0 \notin \sigma_\gamma$, а все элементы σ_γ удовлетворяют (2.12).

ШАГ 2. Докажем замкнутость σ_γ. Пусть $\{x_n\} \subset \sigma_\gamma$ — сходящаяся последовательность, покажем, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n \in \sigma_\gamma$. Для каждого x_n найдется последовательность $\{x_n^k\} \subset \gamma \setminus \sigma_\gamma$ такая, что $\lim\limits_{k \to \infty} x_n^k = x_n$. По доказанному выше свойству

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname{dist}(\varphi(x_n^k), \partial D') = 0 \qquad \text{или} \qquad \lim_{k \to \infty} \rho(\varphi(x_n^k)) = \infty.$$

Составим последовательность $\{x_n^{k_l}\} \subset \gamma \setminus \sigma_\gamma$ такую, что

$$\operatorname{dist}(\varphi(x_n^{k_l}), \partial D') < \frac{1}{l} \qquad \text{или} \qquad \rho(\varphi(x_n^{k_l})) > l.$$

При этом $\lim\limits_{l\to\infty} x_n^{k_l} = x_0$. Таким образом $x_0 \in \sigma_\gamma$ и замкнутость σ_γ доказана. $\square$

Лемма 2.4. *Пусть $v(y) \in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$, $u^{\frac{1}{1-p}}(x) \in L_{1,\mathrm{loc}}(D)$. Если $f \in \mathrm{Lip}_l(D') \cap L^1_p(D', v)$ и $\|f \mid L^1_p(D', v)\| \leq 1$, то найдется функция $g_i \in L_{q,\mathrm{loc}}(D)$ такая, что п. в. на $A_i \cap \varphi^{-1}(Q)$*

$$|\nabla_{\mathcal{L}}(f\circ\varphi)|(x) \leq g_i(x). \tag{2.13}$$

Доказательство. ШАГ 1. Фиксируем точку $y_0 \in D' \cap \varphi(A_i)$ и шар $B(y_0,r)$. Рассмотрим функцию $\eta(y) = \xi(\delta_r(y_0^{-1}y))$, где $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{G})$ — такая функция, что $\xi|_{B(0,1)} = 1$ и $\xi|_{\mathbb{G}\setminus B(0,2)} = 0$. Используя теорему 2.1, выводим

$$\Bigg(\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))} |\nabla_{\mathcal{L}}(f\circ\varphi)|^q(x)u(x)\,dx\Bigg)^{\frac{1}{q}} \leq \Phi(B(y_0,2r))^{\frac{1}{\varkappa}}\Bigg(\int\limits_{B(y_0,2r)} |\nabla_{\mathcal{L}}((f-f(y_0))\eta)|^p v(y)\,dy\Bigg)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \Phi(B(y_0,2r))^{\frac{1}{\varkappa}}\Bigg(\int\limits_{B(y_0,2r)} |\nabla_{\mathcal{L}} f|^p\eta^p(y)v(y)\,dy\Bigg)^{\frac{1}{p}} + \Phi(B(y_0,2r))^{\frac{1}{\varkappa}}\Bigg(\int\limits_{B(y_0,2r)} |\nabla_{\mathcal{L}}\eta|^p|f-f(y_0)|^p v(y)\,dy\Bigg)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \Phi(B(y_0,2r))^{\frac{1}{\varkappa}}(v(B(y_0,2r))^{\frac{1}{p}} + (c_1r^{-1}c_2rv(B(y_0,2r))^{\frac{1}{p}})) = C\Phi(B(y_0,2r))^{\frac{1}{\varkappa}}\cdot v(B(y_0,2r))^{\frac{1}{p}}$$

При этом, если $p = q$, то $\Phi(B(y_0,2r))^{\frac{1}{\varkappa}} = \|\varphi^*\|$.

Окончательно, приходим к оценке

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))} |\nabla_{\mathcal{L}}(f\circ\varphi)|^q(x)u(x)\,dx \leq C_1\Phi(B(y_0,2r))^{\frac{q}{\varkappa}}\cdot v(B(y_0,2r))^{\frac{q}{p}}. \tag{2.14}$$

ШАГ 2. Оценка (2.14) влечет равенство $|\nabla_{\mathcal{L}}(f\circ\varphi)|(x) = 0$ для п. в. $x \in Z_{i,Q}$. Действительно, поскольку $|\varphi(Z_i)| = 0$, то для произвольного $\varepsilon > 0$ можно подобрать покрытие, состоящие из счетного набора шаров $\{B_l = B(y_l, r_l)\}$ такое, что шары с удвоенными радиусами образуют конечнократное покрытие $\varphi(Z_i)$ и $\sum\limits_{l=1}^{\infty}|B(y_l, 2r_l)| < \varepsilon$.

Из неравенства (2.14) при $q<p$ имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_{Z_i}|\nabla_{\mathcal{L}}(f\circ\varphi)|^q(x)u(x)\,dx &\leq \sum_{l=1}^{\infty}\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_l,r_l))}|\nabla_{\mathcal{L}}(f\circ\varphi)|^q(x)u(x)\,dx\\ &\leq C_1\sum_{l=1}^{\infty}\Phi(B(y_l,2r_l))^{\frac{q}{\varkappa}}\cdot v(B(y_l,2r_l))^{\frac{q}{p}}\\ &\leq C_1\left(\sum_{l=1}^{\infty}\Phi(B(y_l,2r_l))\right)^{\frac{q}{\varkappa}}\cdot\left(\sum_{l=1}^{\infty}|B(y_l,2r_l)|\right)^{\frac{q}{p}}\leq C_2\Phi(D')^{\frac{q}{\varkappa}}\cdot\varepsilon^{\frac{q}{p}}.\end{aligned}$$

Если $q=p$, то

$$\int\limits_{Z_i}|\nabla_{\mathcal{L}}(f\circ\varphi)|^q(x)u(x)\,dx\leq C_3\|\varphi^*\|^q\cdot\varepsilon.$$

шаг 3. Используя соотношения (2.10), (2.14), получаем

$$\begin{aligned}C_1\Phi(B(y_0,2r))^{\frac{q}{\varkappa}}\cdot V(B(y_0,2r))^{\frac{q}{p}} &\geq \int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))\cap A_i\cap\varphi^{-1}(Q)}|\nabla_{\mathcal{L}}(f\circ\varphi)|^q(x)u(x)\,dx\\ &= \int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))\cap A_i\cap\varphi^{-1}(Q)\setminus Z_{i,Q}}\frac{|\nabla_{\mathcal{L}}(f\circ\varphi)|^q(x)\overline{\Psi}_i{}'(x;Q)u(x)}{\overline{\Psi}_i{}'(x;Q)}\,dx\\ &\geq \frac{1}{i}\int\limits_{B(y_0,r)\cap\varphi(A_i\setminus Z_{i,Q})\cap Q}\;\sum_{x_j\in\varphi^{-1}(y)\setminus\Sigma_{i,Q}}\left(\frac{|\nabla_{\mathcal{L}}(f\circ\varphi)|^q(x)u(x)}{\overline{\Psi}_i{}'(x)}\right)dy,\end{aligned}$$

то есть

$$\int\limits_{B(y_0,r)\cap\varphi(A_i\setminus Z_{i,Q})\cap Q}\;\sum_{x_j\in\varphi^{-1}(y)\setminus\Sigma_i}\left(\frac{|\nabla_{\mathcal{L}}(f\circ\varphi)|^q(x)u(x)}{\overline{\Psi}_i{}'(x;Q)}\right)dy\leq iC_1\Phi(B(y_0,2r))^{\frac{q}{\varkappa}}\cdot v(B(y_0,2r))^{\frac{q}{p}}. \tag{2.15}$$

Разделим обе части неравенства (2.15) на $|B(y_0,2r)|$

$$\frac{1}{|B(y_0,2r)|}\int\sum_{x_j\in\varphi^{-1}(y)\setminus\Sigma_i}\left(\frac{|\nabla_{\mathcal{L}}(f\circ\varphi)|^q(x)u(x)}{\overline{\Psi}_i{}'(x;Q)}\right)dy\leq iC_1\left(\frac{\Phi(B(y_0,2r))}{|B(y_0,2r)|}\right)^{\frac{q}{\varkappa}}\left(\frac{v(B(y_0,2r))}{|B(y_0,2r)|}\right)^{\frac{q}{p}}.$$

Дифференцируя по теореме Лебега, выводим

$$\sum_{x_j\in\varphi^{-1}(y)\setminus\Sigma_i}\left(\frac{|\nabla_{\mathcal{L}}(f\circ\varphi)|^q(x)u(x)}{\overline{\Psi}_i{}'(x;Q)}\right)\leq iK\Phi'(y)^{\frac{q}{\varkappa}}\cdot v^{\frac{q}{p}}(y)$$

для почти всех $y \in \varphi(A_i \setminus Z_{i,Q})$. Отсюда имеем

$$|\nabla_{\mathcal{L}}(f \circ \varphi)|(x) \leq g_{i,Q}(x) \quad \text{для почти всех } x \in A_i, \tag{2.16}$$

где функция

$$g_{i,Q}(x) = \begin{cases} K_1 \sqrt[q]{i} \Phi'(\varphi(x))^{\frac{1}{\varkappa}} (\overline{\Psi}_i{}'(x;Q))^{\frac{1}{q}} u^{-\frac{1}{q}}(x) v^{\frac{1}{p}}(\varphi(x)) & \text{при } p > q, \\ K_2 \sqrt[q]{i} C (\overline{\Psi}_i{}'(x;Q))^{\frac{1}{q}} u^{-\frac{1}{q}}(x) v^{\frac{1}{p}}(\varphi(x)) & \text{при } p = q. \end{cases}$$

ШАГ 4. Докажем локальную интегрируемость функции $g_{i,Q}(x)$. Пусть $p > q$ и $B \subset D$ — произвольный шар. Применяя два раза неравенство Гёльдера и предложение 2.2, получаем

$$\int\limits_B g_{i,Q}(x)\,dx = K_1 i^{\frac{1}{q}} \int\limits_B \Phi'(\varphi(x))^{\frac{1}{\varkappa}} (\overline{\Psi}_i{}'(x;Q))^{\frac{1}{q}} u^{-\frac{1}{q}}(x) v^{\frac{1}{p}}(\varphi(x))\,dx$$
$$\leq K_1 i^{\frac{1}{q}+\frac{1}{\varkappa}+\frac{\varkappa'}{p}} \Bigg(\int\limits_Q \Phi'(y)\,dy\Bigg)^{\frac{1}{\varkappa}} \Bigg(\int\limits_Q v(y)\,dy\Bigg)^{\frac{1}{p}} \Bigg(\int\limits_B u(x)^{\frac{1}{1-q}}\,dx\Bigg)^{\frac{1}{\varkappa'}-\frac{1}{p}},$$

где $\frac{1}{\varkappa'} = 1 - \frac{1}{\varkappa}$. В случае $q = p$ выводим аналогичное неравенство. Все величины в правой части неравенства конечны, поэтому $g_{i,Q} \in L_{1,\mathrm{loc}}(D)$. $\square$

Напомним, *аппроксимативная производная* вдоль вектора X в точке x (см. [43]) — это величина $\operatorname{ap} X\varphi(x) = \operatorname{ap}\lim\limits_{t\to 0} \delta_t^{-1}((\varphi(x))^{-1}\varphi(x\delta_t \exp X))$.

Лемма 2.5. *Если отображение индуцирует ограниченный оператор композиции в пространствах Соболева $\varphi^* : L^1_p(D', v) \cap C_0^\infty(D') \to L^1_q(D, u)$, то φ имеет аппроксимативные частные производные п. в. на D.*

Доказательство. Так как результат носит локальный характер, можно считать, что D имеет конечную меру. Фиксируем $k \in \mathbb{N}$ и ограниченное множество множество $Q \subset \mathbb{G}$.

Пусть $\{z_j\}$ — счетное всюду плотное множество точек в D'. Зададим счетное семейство функций $d^r_{z_j} : D' \to \mathbb{R}^+$, $d^r_{z_j}(y) = (r - d_{z_j}(y))^+$, где $r \in \mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$ и $d_{z_j}(y) = d(z_j,y)$. Для каждой такой функции выполняется поточечное равенство $\varphi^* d^r_{z_j}(x) = d^r_{z_j} \circ \varphi(x)$, $r \in \mathbb{Q}^+$, $j \in \mathbb{N}$ для всех точек $x \in \widetilde{T}_k$. Кроме того, каждая такая функция удовлетворяет условиям леммы 2.4. Поэтому $|\nabla_{\mathcal{L}}(d^r_{z_j} \circ \varphi)|(x) \leq C g_{i,Q}(x)$ для почти всех $x \in A_i$.

Рассмотрим слоение Γ_s области D, порожденное горизонтальным векторным полем X_s, и линию γ из этого слоения. Для почти всех кривых γ из слоения Γ_s выполнены следующие условия:

1) φ непрерывно на γ вне некоторого множества σ_γ нулевой 1-меры (лемма 2.2);

2) выполняется поточечное неравенство для измеримых функций: $|\nabla_{\mathcal{L}}\big(\varphi^* d^r_{z_j}\big)|(t) \leq K g_{i,Q}(t)$, $r \in \mathbb{Q}^+$, $j \in \mathbb{N}$, п. в. на $\gamma \cap \varphi^{-1}(Q)$, и функция $g_{i,Q}$ интегрируема на произвольной компактной части γ;

3) для почти всех $x_0 \in \gamma$ существует конечный предел отношения $\frac{1}{d(x_0,x)} \int\limits_{[x_0,x]} g_{i,Q}(t)\, d\sigma$ при $x \to x_0$ по кривой γ, равный $g_{i,Q}(x_0)$ (здесь $[x_0,x] \subset \gamma$ — отрезок интегральной линии);

4) $A_i \cap \widetilde{T}_k \cap \gamma$ является множеством полной (1-мерной) меры на $\gamma \cap D$;

5) функции $\varphi^* d^r_{z_j}$ абсолютно непрерывны на γ для всех $j \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Q}^+$.

Фиксируем кривую $\gamma \in \Gamma_s$, на которой выполняются все пять условий.

Пусть $x_0 \in A_i \cap \varphi^{-1}(Q) \cap \widetilde{T}_k \cap \gamma$ — точка положительной плотности на кривой γ, точка непрерывности ограничения $\varphi|_\gamma$ и точка, в которой выполняется условие 3. Положим $z = \varphi(x_0)$. Фиксируем подпоследовательность $\{z_{j_l}\}$ точек из $\{z_j\}$, сходящуюся к $z = \varphi(x_0)$ (далее будем обозначать элементы этой подпоследовательности как z_l). Так как отображение φ непрерывно на γ в точке x_0, можно подобрать числа δ, r и L такие, что $d^r_{z_l} \circ \varphi(x) \neq 0$ для всех $l \geq L$, и всех точек $x \in A_i \cap \varphi^{-1}(Q) \cap B(x_0,\delta) \cap \gamma \setminus \sigma_\gamma$.

Интегрируя функцию $C g_{i,Q}(x)$ (где C не зависит от r,z) по части кривой γ от x_0 до x, где $x \in A_i \cap \widetilde{T}_k \cap B(x_0,\delta) \cap \gamma \setminus \sigma_\gamma$, выводим

$$\begin{aligned} C \int\limits_{[x_0,x]\cap A_i} g_{i,Q}(t)\, dt &\geq \int\limits_{[x_0,x]\cap A_i} |\nabla_{\mathcal{L}}\big(\varphi^* d^r_{z_l}\big)|(t)\, dt \geq \Bigg| \int\limits_{[x_0,x]\cap A_i} \nabla_{\mathcal{L}}\big(\varphi^* d^r_{z_l}\big)(t)\, dt \Bigg| \\ &\geq |d^r_{z_l} \circ \varphi(x_0) - d^r_{z_l} \circ \varphi(x)| = |r - d_{z_l}(\varphi(x_0)) - r + d_{z_l}(\varphi(x))| \\ &= |-d_{z_l}(\varphi(x_0)) + d_{z_l}(\varphi(x))| \to d_z(\varphi(x)) = d(\varphi(x_0),\varphi(x)) \quad \text{при } l \to \infty. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Таким образом, получаем

$$d(\varphi(x_0),\varphi(x)) \leq C \int\limits_{[x_0,x]\cap A_i} g_{i,Q}(t)\, d\sigma \tag{2.18}$$

или

$$\frac{d(\varphi(x_0),\varphi(x))}{d(x_0,x)} \leq \frac{C}{d(x_0,x)} \int\limits_{[x_0,x]\cap A_i} g_{i,Q}(t)\, d\sigma \tag{2.19}$$

для всех $x \in A_i \cap \varphi^{-1}(Q) \cap \widetilde{T}_k \cap B(x_0,\delta) \cap \gamma \setminus \sigma_\gamma$. Переходя к аппроксимативному пределу в неравенстве (2.19), имеем

$$\operatorname{ap} \varlimsup_{x \to x_0, x \in \gamma} \frac{d(\varphi(x_0),\varphi(x))}{d(x_0,x)} \leq C g_{i,Q}(x_0) < \infty, \tag{2.20}$$

что означает аппроксимативную дифференцируемость отображения φ в точке x_0 вдоль векторного поля X_s.

В силу произвольности выбора индексов k и i, горизонтального поля X_s, интегральной кривой $\gamma \in \Gamma_s$, множества Q и точки $z_0 \in \gamma$ отображение φ аппроксимативно дифференцируемо п. в. вдоль горизонтальных кривых. $\square$

Замечание 2.2. Из аппроксимативной дифференцируемости отображения φ п. в. вдоль интегральных линий горизонтальных векторных полей вытекает полная аппроксимативная дифференцируемость [43, Theorem 3.3].

Обозначим символом $D\varphi$ аппроксимативный дифференциал отображения φ, а символом $D_h\varphi$ — горизонтальную часть этого дифференциала. Якобиан $J(x,\varphi) = \det D\varphi(x)$.

2.1.3 Кусочная абсолютная непрерывность на линиях

Напомним, что отображение $\varphi : D \to D'$ называется *абсолютно непрерывным на кривой* $\gamma(t) : [0,1] \to D$, если кривая $\varphi(\gamma(t)) : [0,1] \to D'$ абсолютно непрерывна. Отображение φ *абсолютно непрерывно на линиях* ($\varphi \in ACL(D)$), если для любой области $U \Subset D$ и любого семейства Γ_j интегральных кривых базисного горизонтального векторного поля X_j, $j = 1,\dots,n_1$, образующих гладкое слоение U, отображение φ абсолютно непрерывно на $\gamma \cap U$ для почти всех кривых $\gamma \in \Gamma_j$.

Определение 2.1. *Отображение $\varphi : D \to D'$ кусочно абсолютно непрерывно на почти всех линиях ($\varphi \in ACL_{\mathrm{part}}(D)$), если на почти каждой интегральной линии γ горизонтального поля X_j ($j = 1,\dots,n$) существует открытое множество $\omega_\gamma \subset \gamma$ полной меры на γ такое, что для любого отрезка $[\alpha,\beta] \subset \omega_\gamma$ отображение φ абсолютно непрерывно на $[\alpha,\beta]$ и*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in\omega_\gamma}} \operatorname{dist}(\varphi(x), \partial D') = 0 \qquad \text{или} \qquad \lim_{\substack{x\to a\\ x\in\omega_\gamma}} \rho(\varphi(x)) = \infty,$$

для всех $a \in \gamma \setminus \omega_\gamma$.

Наличие аппроксимативных частных производных отображения φ позволит нам использовать следующую формулу замены переменных.

Предложение 2.3 ([43, Corollary 5.1]). *Пусть отображение $\varphi : A \to \mathbb{G}$, где $A \subset \mathbb{G}$ — измеримое множество, имеет аппроксимативные частные производные на A почти всюду. Тогда существует множество $\Sigma_\varphi \subset A$ меры ноль такое, что формула замены переменных* *в интеграле Лебега для любой неотрицательной измеримой функции $f : A \to \mathbb{R}$ имеет вид*

$$\int\limits_A f(x)|J(x,\varphi)|\,dx = \int\limits_{\mathbb{G}} \left(\sum_{x \in \varphi^{-1}(y) \cap (A \setminus \Sigma_\varphi)} f(x) \right) dy. \tag{2.21}$$

В частности, получаем

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(F)} |J(x,\varphi)|\,dx = \int\limits_F N(y,\varphi)\,dy \tag{2.22}$$

для любого измеримого множества $F \subset D'$. Отсюда из интегрируемости $N(y,\varphi)$ на F вытекает интегрируемость $|J(x,\varphi)|$ на $\varphi^{-1}(F)$.

Рассуждая так же, как и в лемме 2.4, но используя (2.21) вместо (2.10), выводим оценку.

Лемма 2.6. *Пусть $f \in \operatorname{Lip}_l(D') \cap L^1_p(D',v)$ и $||f \mid L^1_p(D',v)|| \leq 1$. Тогда*

$$|\nabla_{\mathcal{L}}(f \circ \varphi)|(x) \leq g(x) \quad \text{п. в. на } D, \tag{2.23}$$

где функция

$$g(x) = \begin{cases} K_1 \Phi'(\varphi(x))^{\frac{1}{\varkappa}} |J(x,\varphi)|^{\frac{1}{q}} u^{-\frac{1}{q}}(x) v^{\frac{1}{p}}(\varphi(x)) & \text{при } p > q, \\ K_2 |J(x,\varphi)|^{\frac{1}{p}} u^{-\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{p}}(\varphi(x)) & \text{при } p = q. \end{cases}$$

Заметим, что в лемме 2.6 ничего не утверждается об интегрируемости функции $g(x)$. На деле нам потребуется локальная интегрируемость на прообразе $\varphi^{-1}(B)$ произвольного шара $B \subset D'$. Удается доказать локальную интегрируемость функции g на $\varphi^{-1}(B)$ при следующих предположениях:

1) $u(x)^{\frac{1}{1-q}} \in L_{1,\mathrm{loc}}(D)$, $v(y)N(y,\varphi) \in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$, если $q = p$;

2) $u(x)^{\frac{1}{1-q}} \in L_{1,\mathrm{loc}}(D)$, $v(y)N(y,\varphi) \in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$, $\Phi'(y)N(y,\varphi) \in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$, если $q < p$.

В случае $q = p$ доказываем следующее утверждение.

Лемма 2.7. *Пусть отображение индуцирует ограниченный оператор композиции весовых пространств Соболева $\varphi^* : L^1_p(D',v) \cap C_0^\infty(D') \to L^1_p(D,u)$, функция $N(y,\varphi)v(y)$ локально интегрируема, а вес $u(x)^{\frac{1}{1-p}} \in L_{1,\mathrm{loc}}(D)$. Тогда $\varphi \in ACL_{\mathrm{part}}(D)$.*

Доказательство. Как и в лемме 2.5 зададим счетное семейство функций $d^r_{z_j} : D' \to \mathbb{R}^+$, $d^r_{z_j}(y) = (r - d_{z_j}(y))^+$, где $\{z_j\}$ — счетное всюду плотное множество точек в D', $r \in \mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$. Для каждой такой функции выполняется поточечное равенство $\varphi^* d^r_{z_j}(x) = d^r_{z_j} \circ \varphi(x)$, $r \in \mathbb{Q}^+$, $j \in \mathbb{N}$, для всех точек $x \in \widetilde{T}_k$ (для любого k) и неравенство (2.23) п. в. в D.

Фиксируем шар $B \subset D'$. В силу предложения 2.3 и локальной интегрируемости $N(y,\varphi)v(y)$ функция $|J(x,\varphi)|v(\varphi(x))$ интегрируема на $\varphi^{-1}(B)$. Пусть $K \subset \varphi^{-1}(B)$ — произвольный компакт. Из неравенства Гёльдера получаем

$$\int\limits_K |J(x,\varphi)|^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{p}}(\varphi(x)) u^{-\frac{1}{p}}(x)\,dx \le \Bigl(\int\limits_K |J(x,\varphi)| v(\varphi(x))\,dx\Bigr)^{\frac{1}{p}} \Bigl(\int\limits_K (u(x))^{\frac{1}{1-p}}\,dx\Bigr)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Правая часть неравенства ограничена, поскольку u принадлежит классу A_p. Следовательно, $|J(x,\varphi)|^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{p}}(\varphi(x)) u^{-\frac{1}{p}}(x)$ — локально интегрируемая в $\varphi^{-1}(B)$ функция. Обозначим $g(x) = |J(x,\varphi)|^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{p}}(\varphi(x)) u^{-\frac{1}{p}}(x)$.

Рассмотрим слоение Γ_s области D, порожденное горизонтальным векторным полем X_s. Для почти всех кривых γ из слоения Γ_s, имеющих пересечение $\gamma \cap \varphi^{-1}(B)$ положительной меры, выполнены следующие условия:

1) φ непрерывно на γ вне некоторого множества σ_γ нулевой 1-меры (лемма 2.2);

2) функция $g(x)$ интегрируема на произвольной компактной части γ;

3) выполняется поточечное неравенство для измеримых функций: $|\nabla_{\mathcal{L}}(\varphi^* d^r_{z_j})|(t) \le K g(x)$, $r \in \mathbb{Q}^+$, $j \in \mathbb{N}$, п. в. на γ;

4) $\widetilde{T}_k \cap \gamma$ является множеством полной (1-мерной) меры на $\gamma \cap \varphi^{-1}(B)$;

5) функции $\varphi^* d^r_{z_j}$ абсолютно непрерывны на γ для всех $j \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Q}^+$.

Фиксируем кривую $\gamma \in \Gamma_s$, на которой выполняются все пять условий. Множество $\gamma \cap \varphi^{-1}(B)$ открыто на γ, и поэтому является объединением отрезков. Выберем произвольный отрезок $[\alpha,\beta] \subset \gamma \cap \varphi^{-1}(B)$.

Пусть $x_0 \in \widetilde{T}_k \cap [\alpha,\beta]$ — точка положительной плотности на кривой γ и точка непрерывности ограничения $\varphi|_\gamma$. Положим $z = \varphi(x_0)$. Фиксируем подпоследовательность $\{z_{j_l}\}$ точек из $\{z_j\}$, сходящуюся к $z = \varphi(x_0)$ (далее будем обозначать элементы этой подпоследовательности как z_l). Так как отображение φ непрерывно на γ в точке x_0, можно подобрать числа δ, r и L такие, что $d^r_{z_l} \circ \varphi(x) \ne 0$ для всех $l \ge L$ и всех точек $x \in B(x_0,\delta) \cap [\alpha,\beta]$.

Интегрируя $Kg(x)$ по части кривой γ от x_0 до x, где $x \in \widetilde{T}_k \cap B(x_0,\delta) \cap [\alpha,\beta]$, выводим

$$\begin{aligned} K \int\limits_{[x_0,x]} g(x)\,dt &\ge \int\limits_{[x_0,x]} |\nabla_{\mathcal{L}}(\varphi^* d^r_{z_l})|(t)\,dt \ge \Bigl|\int\limits_{[x_0,x]} \nabla_{\mathcal{L}}(\varphi^* d^r_{z_l})(t)\,dt\Bigr| \\ &\ge |d^r_{z_l} \circ \varphi(x_0) - d^r_{z_l} \circ \varphi(x)| = |r - d_{z_l}(\varphi(x_0)) - r + d_{z_l}(\varphi(x))| \\ &= |-d_{z_l}(\varphi(x_0)) + d_{z_l}(\varphi(x))| \to d_z(\varphi(x)) = d(\varphi(x_0),\varphi(x)) \quad \text{при } l \to \infty. \end{aligned}$$

Последнее позволяет получить оценку

$$d(\varphi(x_0),\varphi(x)) \le K \int\limits_{[x_0,x]} g(x)\,dt \tag{2.24}$$

для $x \in \widetilde{T}_k \cap B(x_0,\delta) \cap [\alpha,\beta]$. Из оценки (2.24) и абсолютной непрерывности интеграла выводим, что отображение φ абсолютно непрерывно на $[\alpha,\beta]$.

В силу произвольности выбора кривой γ, отрезка $[\alpha,\beta]$, поля X_s и шара B свойство кусочной абсолютной непрерывности ($\varphi \in ACL_{\mathrm{part}}(D)$) доказано. $\square$

При $q < p$ аналогичное утверждение составляет

Лемма 2.8. *Пусть отображение индуцирует ограниченный оператор композиции весовых пространств Соболева $\varphi^* : L^1_p(D', v) \cap C_0^\infty(D') \to L^1_q(D, u)$, функции $N(y,\varphi)v(y)$, $\Phi'(y)N(y,\varphi)$ локально интегрируемы, а вес $u(x)^{\frac{1}{1-q}} \in L_{1,\mathrm{loc}}(D)$. Тогда $\varphi \in ACL_{\mathrm{part}}(D)$.*

Функция Φ — из теоремы 2.1.

2.2 Необходимые и достаточные условия ограниченности оператора композиции

Введем ключевые определения и докажем основные утверждения настоящей главы.

Определение 2.2. *Отображение $\varphi : D \to D'$ класса $\mathrm{ACL}_{\mathrm{part}}(D)$ имеет конечное (u,v)-весовое искажение, если $D_h\varphi(x)u(x) = 0$ почти всюду на множестве*

$$Z_v = \{x \in D \mid J(x,\varphi)v(\varphi(x)) = 0\}.$$

Замечание 2.3. Очевидно имеем $Z \subset Z_v$, где $Z = \{x \in D \mid J(x,\varphi) = 0\}$. В случае, когда $v > 0$ почти всюду, в частности, если v удовлетворяет A_p-условию Макенхаупта, $|Z_v \setminus Z| = 0$. Таким образом, в определении 2.2 вместо множества Z_v можно взять множество Z. Действительно, пусть $v(\varphi(x)) = 0$, т. е. $x \in \varphi^{-1}(S)$, где $S = \{y \mid v(y) = 0\}$. Мера множества S равна нулю, поскольку $v(x) > 0$ почти всюду. Из формулы замены переменных для характеристической функции множества S имеем

$$\int\limits_D \chi_S(\varphi(x))|J(x,\varphi)|\,dx = \int\limits_{\mathbb{G}} \chi_S(y)N(y,\varphi,D)\,dy.$$

Интеграл в правой части равенства равен нулю, поскольку интегрирование ведется по множеству нулевой меры. Поэтому $\int\limits_{\varphi^{-1}(S)} |J(x,\varphi)|\,dx = 0$. Последнее влечет равенство нулю почти всюду на множестве Z произведения $J(x,\varphi)v(\varphi(x))$. В итоге, $|Z_v \setminus Z| = 0$.

Определение 2.3. *Весовая функция искажения для φ определяется как*

$$D' \ni y \mapsto H_q^{u,v}(y) = \begin{cases} v^{-\frac{1}{p}}(y) \left(\sum\limits_{x \in \varphi^{-1}(y) \setminus (\Sigma_\varphi \cup Z_v)} \frac{|D\varphi|^q(x) u(x)}{|J(x,\varphi)|} \right)^{\frac{1}{q}}, \\ 0, \quad \text{если } \varphi^{-1}(y) \setminus (\Sigma_\varphi \cup Z_v) = \emptyset. \end{cases} \tag{2.25}$$

Функция искажения такого типа впервые была введена в [64].

Теорема 2.2. *Пусть функция $N(y,\varphi)v(y) \in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$, а вес $u^{\frac{1}{1-p}}(x) \in L_{1,\mathrm{loc}}(D)$, $1 \le p < \infty$. Если измеримое отображение $\varphi : D \to D'$ индуцирует ограниченный оператор композиции в весовых пространствах Соболева $\varphi^* : L^1_p(D', v) \cap C_0^\infty(D') \to L^1_p(D, u)$. Тогда отображение φ обладает следующими свойствами:*

1) *принадлежит классу $ACL_{\mathrm{part}}(D)$,*

2) *имеет конечное (u,v)-весовое искажение,*

3) *функция искажения $H_p^{u,v}(\cdot) \in L_\infty(D')$.*

При этом $\|H_p^{u,v}(\cdot) \mid L_\infty(D')\| \le C\|\varphi^*\|$.

Доказательство. 1) Принадлежность классу $ACL_{\mathrm{part}}(D)$ доказана в лемме 2.7.

2) Докажем, что φ имеет конечное (u,v)-весовое искажение, то есть $D_h\varphi = 0$ почти всюду на Z_v. Для любой функции $f \in L^1_p(D', v) \cap C_0^\infty(D')$ выполнено неравенство

$$\|\varphi^* f \mid L^1_q(D,u)\| \le \|\varphi^*\| \cdot \|f \mid L^1_p(D', v)\|. \tag{2.26}$$

Выбираем срезку $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, равную единице на евклидовом шаре $B^E(0,1)$ и нулю вне шара $B^E(0,2)$. Подставляя функции $h_j(z) = (z - y)_j \eta(\frac{z-y}{r})$, где $B^E(y,2r) \subset D'$, в (2.26), получаем неравенство

$$\left(\int\limits_{\varphi^{-1}(B^E(y,r))} |D_h\varphi|^p u(x)\,dx \right)^{\frac{1}{p}} \le \|\varphi^*\| \left(\int\limits_{B^E(y,2r)} v(y')\,dy' \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.27}$$

Покажем, что $\int\limits_{Z_v} |D_h\varphi|^q\,dx = 0$. По формуле замены переменных (предложение 2.3) имеем

$$v(\varphi(Z_v \setminus \Sigma_\varphi)) = \int\limits_{\varphi(Z_v\setminus\Sigma_\varphi)} v(y)\,dy \le \int\limits_G \Bigg(\sum_{x\in\varphi^{-1}(y)\cap(Z_v\setminus\Sigma_\varphi)} v(\varphi(x))\Bigg)\,dy$$
$$= \int\limits_{Z_v} v(\varphi(x))|J(x,\varphi)|\,dx = 0.$$

Следовательно, $v(\varphi(Z_v \setminus \Sigma_\varphi)) = 0$ и $|\varphi(Z_v \setminus \Sigma_\varphi)| = 0$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и открытое множество $U \subset D'$ такое, что $U \supset \varphi(Z_v \setminus \Sigma_\varphi)$ и $v(U) < \varepsilon$ и $|U| < \varepsilon$. По лемме 1.7 выбираем конечно-кратное покрытие $\{B^E(y_j,r_j)\}$ открытого множества U кратности M; M не зависит от U и $\sum\limits_j |B^E(y_j,r_j)| \le M\varepsilon$. Используя неравенство 2.27 и лемму 1.8, получаем:

$$\int\limits_{Z_v} |D\varphi|^p(x)u(x)\,dx = \int\limits_{Z_v\setminus\Sigma_\varphi} |D\varphi|^p(x)u(x)\,dx \le \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{\varphi^{-1}(B^E(y_j,r_j))} |D\varphi|^p(x)u(x)\,dx$$
$$\le C^p\|\varphi^*\| \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{B^E(y_j,2r_j)} v(x)\,dx \leqslant C_2^p\|\varphi^*\|v(U) < C_2^p\|\varphi^*\|\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ — произвольное число, а весовая функция $u(x)$ почти всюду положительна, то $|D\varphi| = 0$ почти всюду на Z_v. Следовательно, φ имеет конечное (u,v)-весовое искажение.

3) Применяя формулу замены переменных (предложение 2.3) и неравенство (2.27), имеем

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))} |D_h\varphi|^p u(x)\,dx = \int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))\setminus Z_v} |D_h\varphi|^p u(x)\,dx$$
$$= \int\limits_{B(y_0,r)} \Bigg(\sum_{x\in\varphi^{-1}(y')\setminus(Z_v\cup\Sigma_\varphi)} \frac{|D_h\varphi|^p(x)u(x)}{|J(x,\varphi)|}\Bigg)\,dy' \le C^p\|\varphi^*\|v(B(y_0,r)). \tag{2.28}$$

Из (2.28) и теоремы 1.1 выводим неравенство

$$\Bigg(\sum_{x\in\varphi^{-1}(y)\setminus(Z_v\cup\Sigma_\varphi)} \frac{|D_h\varphi|^p(x)u(x)}{|J(x,\varphi)|}\Bigg)^{\frac{1}{p}} \le Cv^{\frac{1}{p}}(y)\|\varphi^*\|,$$

которое позволяет получить искомую оценку $\|H_p^{u,v}(\cdot) \mid L_\varkappa(D')\| \le C\|\varphi^*\|$. $\square$

Теорема 2.3. *Пусть $1 \leq q \leq p < \infty$. Если отображение $\varphi : D \to D'$ обладает следующими свойствами:*

1) *принадлежит классу $ACL_{\text{part}}(D)$,*

2) *имеет конечное (u,v)-весовое искажение,*

3) *функция искажения $H_p^{u,v}(\cdot) \in L_\varkappa(D')$, где $\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$,*

тогда отображение φ индуцирует ограниченный оператор композиции в весовых пространствах Соболева $\varphi^* : L_p^1(D', v) \cap C_0^\infty(D') \to L_q^1(D, u)$.

При этом $\|\varphi^*\| \leq \|H_p^{u,v}(\cdot) \mid L_\varkappa(D')\|$.

Доказательство. Отметим, что $f \circ \varphi \in ACL(D)$ для всех $f \in L_p^1(D', v) \cap C_0^\infty(D')$. Действительно, в силу леммы 2.3 для любого отрезка интегральной кривой горизонтального векторного поля (α,β), на котором отображение φ абсолютно непрерывно, выполнено следующее свойство: образы концов $\varphi(\alpha)$, $\varphi(\beta)$ покидают носитель $\operatorname{supp} f$. Поэтому $f \circ \varphi$ абсолютно непрерывна на отрезках абсолютной непрерывности φ и обращается в ноль там, где отображение φ не абсолютно непрерывно.

Покажем, что для любой функции $f \in L_p^1(D',v) \cap C^1(D')$ выполняется неравенство $\|\varphi^* f \mid L_q^1(D,u)\| \leq H_{p,q}^{u,v}(D') \|f \mid L_p^1(D',v)\|$.

$$\|\varphi^* f \mid L_q^1(D,u)\| \leq \Big(\int\limits_{D \setminus Z_v} \Big(|\nabla_{\mathcal{L}} f|(\varphi(x)) |D_h \varphi|(x) \Big)^q u(x)\, dx \Big)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq \Big(\int\limits_{D'} |\nabla_{\mathcal{L}} f|^q(y) \Big(\sum_{x \in \varphi^{-1} \setminus (\Sigma_\varphi \cup Z_v)} \frac{|D_h \varphi|^q(x) u(x)}{|J(x,\varphi)|} \Big)\, dy \Big)^{\frac{1}{q}}$$
$$= \Big(\int\limits_{D'} |\nabla_{\mathcal{L}} f|^q(y) v^{\frac{q}{p}}(y) \Big(v^{-\frac{q}{p}}(y) \sum_{x \in \varphi^{-1} \setminus (\Sigma_\varphi \cup Z_v)} \frac{|D_h \varphi|^q(x) u(x)}{|J(x,\varphi)|} \Big)\, dy \Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Используя неравенство Гёльдера при $q < p$, имеем

$$\|\varphi^* f \mid L_q^1(D,u)\|$$
$$\leq \Bigg(\int\limits_{D'} |\nabla_{\mathcal{L}} f|^p(y) v(y)\, dy \Bigg)^{\frac{1}{p}} \Bigg(\int\limits_{D'} \Big(v^{-\frac{1}{p}}(y) \Big(\sum_{x \in \varphi^{-1} \setminus (\Sigma_\varphi \cup Z_v)} \frac{|D_h \varphi|^q(x) u(x)}{|J(x,\varphi)|} \Big)^{\frac{1}{q}} \Big)^{\varkappa} dy \Bigg)^{\frac{1}{\varkappa}}$$
$$= \|H_q^{u,v}(\cdot) \mid L_\varkappa(D')\| \cdot \|f \mid L_p^1(D',v)\|. \quad (2.29)$$

В итоге, $\|\varphi^*\| \leq H_{p,q}^{u,v}(D')$. $\square$

В случае $q = p = \nu$ и $v \circ \varphi \leq u$ необходимые условия являются и достаточными:

Теорема 2.4. *Пусть* $v(y) \in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$, $u^{\frac{1}{1-\nu}}(x) \in L_{1,\mathrm{loc}}(D)$ *и* $v \circ \varphi \leq u$ *п. в. на* D. *Измеримое отображение* $\varphi : D \to D'$ *индуцирует ограниченный оператор композиции в весовых пространствах Соболева* $\varphi^* : L^1_\nu(D', v) \cap C_0^\infty(D') \to L^1_\nu(D, u)$ *тогда и только тогда, когда*

1) φ *принадлежит классу* $ACL_{\mathrm{part}}(D)$,

2) φ *имеет конечное* $(u{,}v)$*-весовое искажение,*

3) *функция искажения* $H_p^{u,v}(\cdot) \in L_\infty(D')$.

При этом $C\|H_p^{u,v}(\cdot) \mid L_\infty(D')\| \leq \|\varphi^*\| \leq \|H_p^{u,v}(\cdot) \mid L_\infty(D')\|$.

Доказательство. Необходимость. Неравенства $|J(x{,}\varphi)| \leq |D\varphi|^\nu(x)$, $v \circ \varphi \leq u$ и (2.27) обеспечивают интегрируемость $|J(x{,}\varphi)|v(\varphi(x))$ на $\varphi^{-1}(B(y_0{,}r))$, где $B(y_0{,}r) \subset D'$ — произвольный шар. Действительно,

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))} |J(x{,}\varphi)|v(\varphi(x))\,dx \leq C \int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))} |D_h\varphi|^\nu u(x)\,dx \leq C_1 v(B(y_0{,}r)).$$

Далее применима теорема 2.2.

Достаточность следует из теоремы 2.3. $\square$

Если индикатриса Банаха $N(y{,}\varphi)$ ограничена, то необходимые условия совпадают с достаточными при $1 \leq q \leq p < \infty$:

Следствие 2.3. *Пусть* $v(y) \in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$, $u^{\frac{1}{1-q}}(x) \in L_{1,\mathrm{loc}}(D)$ *и* $N(y{,}\varphi) \leq b < \infty$ *п. в. на* D'. *Измеримое отображение* $\varphi : D \to D'$ *индуцирует ограниченный оператор композиции в весовых пространствах Соболева* $\varphi^* : L^1_p(D', v) \cap C_0^\infty(D') \to L^1_q(D, u)$ *тогда и только тогда, когда*

1) φ *принадлежит классу* $ACL_{\mathrm{part}}(D)$,

2) φ *имеет конечное* $(u{,}v)$*-весовое искажение,*

3) *функция искажения* $H_p^{u,v}(\cdot) \in L_\kappa(D')$, *где* $\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$.

При этом $c\|H_p^{u,v}(\cdot) \mid L_\kappa(D')\| \leq \|\varphi^*\| \leq \|H_p^{u,v}(\cdot) \mid L_\kappa(D')\|$.

Заметим, если отображение φ является гомеоморфизмом, то в качестве следствия получаем утверждение, близкое по содержанию к [65, Theorem A].

Следствие 2.4. *Пусть* $v(y) \in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$ *и* $u^{\frac{1}{1-q}}(x) \in L_{1,\mathrm{loc}}(D)$. *Гомеоморфизм* $\varphi : D \to D'$ *индуцирует ограниченный оператор композиции весовых пространств Соболева* $\varphi^* : L^1_p(D', v) \cap C_0^\infty(D') \to L^1_q(D, u)$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi \in ACL(D)$ *и весовая функция искажения* $K_p^{u,v}(x) = \inf\{K(x) : |D_h\varphi|(x)u^{\frac{1}{q}}(x) \leq K(x)|J(x{,}\varphi)|^{\frac{1}{p}}v^{\frac{1}{p}}(\varphi(x))\}$ *принадлежит* $L_\varkappa(D)$. *Норма оператора* $\|\varphi^*\|$ *эквивалентна величине* $\|K_p^{u,v}(x) \mid L_\varkappa(D)\|$.

Сформулируем еще одно утверждение в котором ограниченные операторы композиции в пространствах Соболева ассоциируются с квазиконформными отображениями:

Следствие 2.5. *Пусть весовые функции* u, v *принадлежат классу Макенхаупта* A_ν, *отображение* $\varphi : D \to D'$ *— гомеоморфизм, и неравенство* $v \circ \varphi(x) \leq u(x)$ *выполнено для почти всех* $x \in D$. *Отображение* φ *квазиконформно тогда и только тогда, когда оператор композиции* $\varphi^* : L^1_\nu(D', v) \cap C_0^\infty(D') \to L^1_\nu(D, u)$ *ограничен.*

Глава 3

Изоморфизмы пространств Соболева на группах Карно и метрические свойства отображений

3.1 Оператор композиции и класс IL^1_p

Пусть D, D' — области на группе Карно $\mathbb{G}$. Измеримое отображение $\varphi : D \to D'$ принадлежит классу IL^1_p, если φ индуцирует оператор композиции пространств Соболева

$$\varphi^* : L^1_p(D') \cap C^\infty(D') \to L^1_p(D), \quad \varphi^*(f) = f \circ \varphi, \quad f \in L^1_p(D') \cap C^\infty(D'), \tag{3.1}$$

такой, что

1) для любой функции $f \in L^1_p(D') \cap C^\infty(D')$ справедливы неравенства

$$K^{-1}\big\|f \mid L^1_p(D')\big\| \leq \big\|\varphi^*(f) \mid L^1_p(D)\big\| \leq K\big\|f \mid L^1_p(D')\big\|, \tag{3.2}$$

где постоянная K не зависит от выбора от выбора функции f,

2) образ $\varphi^*\left(L^1_p(D') \cap C^\infty(D')\right)$ всюду плотен в $L^1_p(D)$.

Отметим, что условие 2 не зависит от условия 1. Действительно, рассмотрим отображение $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, действующее по правилу $\varphi(x_1,x_2) = (|x_1|,x_2)$. Очевидно, что условие 1 выполнено. С другой стороны, образ $\varphi^*(L^1_p(\mathbb{R}^2) \cap C^\infty(\mathbb{R}^2))$ будет состоять из функций четных относительно $x_2 = 0$, и, следовательно не будет плотным в $L^1_p(\mathbb{R}^2)$.

Всюду далее отображение $\varphi : D \to D'$ принадлежит IL^1_p.

Лемма 3.1. *Пусть $f \in L^1_p(D')$, $f_n \in L^1_p(D')$, $f_n \to f$ в пространстве $L^1_p(D')$ при $n \to \infty$ и выполнены следующие условия:*

1) *функция $f \circ \varphi$ определена п. в. на D и п. в. принимает конечные значения,*
2) *для всех $n \in \mathbb{N}$ $f_n \circ \varphi \in L^1_p(D)$ и $|f_n \circ \varphi| < C$, где C — некоторая постоянная,*
3) *$f_n \circ \varphi(x) \to f \circ \varphi(x)$ при $n \to \infty$ для почти всех $x \in D$,*
4) $K^{-1}\|f_n \mid L^1_p(D')\| \leq \|f_n \circ \varphi \mid L^1_p(D)\| \leq K\|f_n \mid L^1_p(D')\|$.

Тогда

1) $f \circ \varphi \in L^1_p(D)$,
2) $K^{-1}\|f \mid L^1_p(D')\| \leq \|f \circ \varphi \mid L^1_p(D)\| \leq K\|f \mid L^1_p(D')\|$.

Доказательство. Обозначим $g_n(x) = f_n \circ \varphi(x)$. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости последовательность $\{g_n\}$ сходится к функции $f \circ \varphi$ в $L_1(B)$ на всяком шаре $B \subset D$. Кроме того, последовательность градиентов $\{\nabla_{\mathcal{L}} g_n\}$ фундаментальна в $L_p(D)$ и поэтому имеет предел в $L_p(D)$. Перечисленные свойства обеспечивают существование обобщенных производных у локально-суммируемой функции $f \circ \varphi$, и эти производные принадлежат $L_p(D)$. Следовательно, $f \circ \varphi \in L^1_p(D)$. $\square$

Лемма 3.2. *Пусть $f \in L^1_p(D')$, $f_n \in L^1_p(D') \cap C^\infty(D')$, $f_n \to f$ в пространстве $L^1_p(D')$ при $n \to \infty$ и выполнены следующие условия:*

1) *функция $f \circ \varphi$ определена п. в. на D и п. в. принимает конечные значения,*
2) *$f_n \circ \varphi(x) \to f \circ \varphi(x)$ при $n \to \infty$ для почти всех $x \in D$.*

Тогда

1) $f \circ \varphi \in L^1_p(D)$,
2) $K^{-1}\|f \mid L^1_p(D')\| \leq \|f \circ \varphi \mid L^1_p(D)\| \leq K\|f \mid L^1_p(D')\|$.

Доказательство. Шаг 1. Пусть, сначала, f непрерывная и ограниченая функция ($|f| < C$). Можно считать, что $|f_n| < 2C$ для всех $n \in N$. Тогда по лемме 3.1 $f \circ \varphi \in L^1_p(D)$.

Шаг 2. Рассмотрим случай, когда $|f| < C$. Применяя срезки , можно считать, что $|f_n| < 2C$ для всех $n \in N$. Из шага $f_n \circ \varphi \in L^1_p(D)$. По лемме 3.1 $f \circ \varphi \in L^1_p(D)$.

Шаг 3. Пусть теперь f — произвольная функция в $L^1_p(D')$, которую можно считать положительной, так как $f = f^+ - f^-$, а f^+,$f^- \in L^1_p(D')$.

Фиксируем шар $B_0 \subset D$. Можно считать, что $f \circ \varphi = 0$ на некотором множестве $F \subset B_0$ положительной меры. Действительно, множество $\{x \in B_0 : f(\varphi(x)) - k_0 \leq 0\}$ будет иметь положительную меру при некотором $k_0 \in \mathbb{N}$. Тогда вместо f можно рассматривать функцию

$\max\{f(y)-k_0,0\}$, а вместо последовательности $\{f_n\}$ — функции $\max\{f_n(y)-k_0,0\}$. При этом

$$f_n \circ \varphi \to 0 \quad \text{п. в. на } F \text{ при } n \to \infty. \tag{3.3}$$

Далее рассматриваем неотрицательную функцию $f \in L^1_p(D')$ такую, что множество $F = \{x \in B_0 : f \circ \varphi(x) = 0\}$ имеет положительную меру.

Определим монотонную последовательность функций $u_m = g_m \circ \varphi$, где $g_m = \min\{f, m\}$. Поскольку g_m является ограниченной функцией, $u_m \in L^1_p(D)$ в силу шага 1. Также $u_m \to f \circ \varphi$ п. в. при $m \to \infty$. Действительно, для п. в. точек $x \in D$ найдется номер m такой, что $f(\varphi(x)) < m$. Тогда $u_k(x) = f(\varphi(x))$ для всех $k > m$.

Для произвольного шара $B \subset D$ выберем область Джона $U \supset B \cup B_0$ и применим к функциям u_m неравенство Пуанкаре (1.22). При $q = p$ выводим

$$\begin{aligned}\int\limits_U |u_m(x)|^p\,dx &\leq \frac{\operatorname{diam} U}{|F|} C r^p \int\limits_U |\nabla_{\mathcal{L}} u_m(x)|^p\,dx = \frac{\operatorname{diam} U}{|F|} C r^p \int\limits_U |\nabla_{\mathcal{L}} (g_m \circ \varphi(x))|^p\,dx \\ &= \frac{\operatorname{diam} U}{|F|} C r^p \|\varphi^* g_m \mid L^1_p(D)\|^p \leq K \frac{\operatorname{diam} U}{|F|} C r^p \|g_m \mid L^1_p(D')\|^p \leq C_2 \|f \mid L^1_p(D')\|^p. \end{aligned} \tag{3.4}$$

В третьем неравенстве мы воспользовались результатом шага 1. Таким образом, $u_m \in L_p(B)$. Так как функции $u_m = g_m \circ \varphi$ монотонно возрастая сходятся на B к функции $f \circ \varphi$, то по теореме Беппо Леви $f \circ \varphi \in L_p(B)$. Поскольку шар $B \subset D$ произвольный, то композиция $f \circ \varphi$ локально суммируема на D. Заметим еще, что последовательность градиентов $\nabla_{\mathcal{L}} u_m$ является фундаментальной в $L_p(D)$, поскольку таковой является последовательность градиентов $\nabla_{\mathcal{L}} g_m$. Действительно, имеем

$$\|\nabla_{\mathcal{L}} g_l - \nabla_{\mathcal{L}} g_m \mid L_p(D')\| \leq \int\limits_{\{x \in D' : f(x) \geq m\}} |\nabla_{\mathcal{L}} f|^p\,dx \quad \text{при } l > m.$$

Следовательно, $f \circ \varphi \in L^1_p(D)$. Таким образом, лемма доказана и в случае, когда f не является ограниченной. $\square$

Лемма 3.3. *Пусть $p > \nu$. Тогда для любой функции $f \in L^1_p(D')$*

1) $\tilde{f} \circ \varphi \in L^1_p(D)$,

2) $K^{-1} \big\| f \mid L^1_p(D') \big\| \leq \big\| \tilde{f} \circ \varphi \mid L^1_p(D) \big\| \leq K \big\| f \mid L^1_p(D') \big\|$,

где $\tilde{f}$ – непрерывный представитель f.

Доказательство. Пусть $f \in L^1_p(D')$ и $\tilde{f}$ — непрерывный представитель f. Тогда найдется последовательность $f_n \in C^\infty(D') \cap L^1_p(D')$, $n \in \mathbb{N}$, такая, что $f_n \to \tilde{f}$ в $L^1_p(D')$ и $f_n(x) \to \tilde{f}(x)$

для всех $x \in D'$ (см. замечание 1.3). Заметим, что композиция непрерывной функции $\tilde{f}$ с отображением φ определена почти всюду на D. Тогда имеем

$$f_n \circ \varphi(x) \to \tilde{f} \circ \varphi(x) \text{ при } n \to \infty \text{ для почти всех } x \in D. \tag{3.5}$$

Таким образом, для функции $\tilde{f}$ выполнены условия леммы 3.2. $\square$

Нам понадобится следующее

Предложение 3.1 ([30, Лемма 1]). *Предположим, что отображение $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор*

$$\varphi^* : L^1_p(D') \cap C^\infty(D') \to L^1_q(D), \quad 1 \leq q < p \leq \infty, \quad \varphi^* f = f \circ \varphi.$$

Тогда

$$\Phi(A') = \sup_{f \in \overset{o}{L}{}^1_p(A') \cap C^\infty(A')} \left(\frac{\|\varphi^* f \mid L^1_q(D)\|}{\|f \mid \overset{o}{L}{}^1_p(A')\|} \right)^\varkappa, \quad \text{где} \quad \varkappa = \begin{cases} \frac{pq}{p-q} & \text{при } p \leq \infty, \\ q & \text{при } p = \infty; \end{cases}$$

— ограниченная счетно-аддитивная функция, определенная на открытых ограниченных подмножествах $A' \subset D'$.

Из леммы 1.8 можно получить следующее

Следствие 3.1 ([30, Следствие 1]). *Аддитивная функция множеств из предложения 3.1 абсолютно непрерывна.*

Замечание 3.1. В [30] утверждения следствия 3.1 и предложения 3.1 доказаны в $\mathbb{R}^n$. Подобно тому, как это было сделано в [47], доказательства с очевидными изменениями переносятся и на группу Карно.

Лемма 3.4 ([30, Теорема 4]). *Если отображение $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный мономорфизм*

$$\varphi^* : L^1_p(D') \cap C_0^\infty(D') \to L^1_p(D), \quad 1 \leq p \leq \nu,$$

то отображение φ обладает $\mathcal{N}^{-1}$-свойством Лузина.

Доказательство. Сначала покажем, что прообраз всякого открытого множества имеет положительную меру. Пусть $U \subset D'$ – открытое множество. Покажем, что $|\varphi^{-1}(U)| > 0$. Предположим, что это не так, т. е. $|\varphi^{-1}(U)| = 0$. Поскольку U является открытым множеством, можно выбрать шар $B = B(y_0,r)$ так, что $2B = B(y_0,2r) \subset U$. Возьмем функцию класса $f \in C_0^\infty(D')$ такую, что $f = 1$ на B и $f = 0$ вне $2B$. Таким образом, $f \not\equiv 0$. С другой стороны, $\varphi^* f = 0$ почти всюду на D. Следовательно, $\varphi^* f = 0$, чего быть не может, поскольку φ^* является мономорфизмом. Таким образом, прообраз любого открытого множества не может иметь нулевую меру.

Фиксируем срезку $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{G})$, равную единице на $B(0,1)$ и равную нулю вне шара $B(0,2)$. Рассмотрим шар $B = B(y_0,r) \subset D'$ такой, что $B = B(y_0,2r) \subset D'$, и функцию $f(y) = \eta(\delta_{r^{-1}}(y_0^{-1}y)) \in L_p^1(D')$. Для полунормы этой функции выполнена следующая оценка

$$\|f \mid L_p^1(D')\| \le C r^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\nu}}. \tag{3.6}$$

Случай $p < \nu$. Поскольку оператор φ^* ограничен ($\|\varphi^* f \mid L_p^1(D)\| \le \|\varphi^*\| \cdot \|f \mid L_p^1(D')\|$) и из оценки (3.6) , имеем

$$\|\varphi^* f \mid L_p^1(D)\| \le \|\varphi^*\| \cdot \|f \mid L_p^1(D')\| \le C_1 \|\varphi^*\| \cdot |B|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\nu}}. \tag{3.7}$$

Фиксируем открытое множество $U \subset D'$. Выберем покрытие области D счетным числом шаров $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$ так, чтобы $Q_l \subset D$ и $\bigcup\limits_l Q_l = D$. Пусть множество нулевой меры $E \subset D'$ находится на положительном расстоянии от открытого множества U. По теореме Лузина найдется компактное множество $T \subset \varphi^{-1}(U)$ положительной меры такое, что отображение φ непрерывно на T и, следовательно, $\varphi(T)$ – тоже компактное множество. Кроме того, можно считать, что $T \subset Q_0$. Рассмотрим открытое множество конечной меры $V \subset D'$ (сколь угодно малой меры, скажем, $|V| = \varepsilon$) такое, что $V \supset E$ и $V \cap \varphi(T) = \emptyset$. Пусть наборы $\{B(y_i,r_i)\} \subset V$ и $\{B(y_i,2r_i)\} \subset V$ образуют конечнократные покрытия множества V. Для функции $f_i(y) = \eta(\delta_{r_i^{-1}}(y_i^{-1}y))$ имеем $\varphi^* f_i = 1$ на $\varphi^{-1}(B(y_i,r_i))$ и $\varphi^* f_i = 0$ вне $\varphi^{-1}(B(y_i,2r_i))$, в частности, $\varphi^* f_i = 0$ на множестве T. В этом случае оценка (3.7) имеет вид

$$\|\varphi^* f_i \mid L_p^1(D)\| \le C_1 \|\varphi^*\| \cdot |B(y_i,r_i)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\nu}}. \tag{3.8}$$

Кроме того, справедлива также оценка меры прообраза $\varphi^{-1}(B(y_i,r_i))$:

$$|\varphi^{-1}(B(y_i,r_i))| \le \int\limits_D |\varphi^* f_i|^q \, dx, \tag{3.9}$$

где $1 \le q$. Для произвольного шара Q_j из покрытия $\{Q_l\}$ найдется область Джона $\Omega \subset D$ ($\Omega \in J(\alpha,\beta)$) такая, что $Q_j \subset \Omega$ и $Q_0 \subset \Omega$ (лемма 1.3). Далее мы воспользуемся неравенством

Пуанкаре (1.22)

$$\Bigl(\int\limits_{\Omega} |g|^{p^*}\,dx\Bigr)^{\frac{1}{p^*}} \leq C_2(\mathrm{diam}(\Omega))^{\frac{\nu}{p^*}}\Bigl(\int\limits_{\Omega} |\nabla_{\mathcal{L}} g|^p\,dx\Bigr)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.10}$$

где $q = p^* = \frac{p\nu}{\nu-p}$ и $g \in L^1_p(D)$ – произвольная функция, равная нулю на множестве $T \subset Q_0 \subset \Omega$ положительной меры, а постоянная C_2 имеет следующий вид

$$C_2 = \frac{C}{|T|^{\frac{1}{p^*}}}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}.$$

Подставим в неравенство (3.10) функцию $g = \varphi^* f_i$ и применим оценки (3.8) и (3.9). Приходим к цепочке неравенств

$$|\varphi^{-1}(B(y_i,r_i)) \cap Q_j|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\nu}} \leq \Bigl(\int\limits_{\Omega} |\varphi^* f_i|^{p^*}\,dx\Bigr)^{\frac{1}{p^*}} \leq C_2(\mathrm{diam}(\Omega))^{\frac{\nu}{p^*}}\Bigl(\int\limits_{\Omega} |\nabla_{\mathcal{L}}\varphi^* f_i|^p\,dx\Bigr)^{\frac{1}{p}} \leq$$
$$C_2(\mathrm{diam}(\Omega))^{\frac{\nu}{p^*}} C_1 \|\varphi^*\| \cdot |B(y_i,r_i)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\nu}},$$

откуда

$$|\varphi^{-1}(B(y_i,r_i)) \cap Q_j| \leq C_4 |B(y_i,r_i)|. \tag{3.11}$$

Поскольку $\{B(y_i,r_i)\}$ образуют конечнократное покрытие V, можно заключить, что

$$\sum_i |\varphi^{-1}(B(y_i,r_i)) \cap Q_j| \leq C_4 \sum_i |B(y_i,r_i)| \leq C_4 \zeta_\nu |V|, \tag{3.12}$$

где постоянная ζ_ν – кратность покрытия. Так как множества $\varphi^{-1}(B(y_i,r_i)) \cap Q_j$ покрывают $\varphi^{-1}(E) \cap Q_j$, а множество V имеет сколь угодно малую меру, получаем $|\varphi^{-1}(E) \cap Q_j| = 0$ для произвольного шара Q_j из счетного набора $\{Q_l\}$. Следовательно, $|\varphi^{-1}(E)| = 0$.

Если множество $E \subset D' \setminus U$ нулевой меры такое, что $\mathrm{dist}(E,U) = 0$, то его можно представить в виде $E = \bigcup E_k$, где $E_k = \{y \in E : \mathrm{dist}(y,U) \geq \frac{1}{k}\}$. Тогда $\varphi^{-1}(E) \subset \bigcup \varphi^{-1}(E_k)$. Так как $|\varphi^{-1}(E_k)| = 0$, то и $|\varphi^{-1}(E)| = 0$.

Таким образом, для всех множеств $E \subset D' \setminus U$ нулевой меры прообраз $\varphi^{-1}(E)$ имеет нулевую меру. Другими словами, если $|E| = 0$, то $|\varphi^{-1}(E \setminus \overline{U})| = 0$.

Пусть теперь U_1 — другое открытое множество, находящееся на положительном расстоянии от U. Любое множество $E \subset D'$ может быть представлено в виде $E = (E \setminus U) \cup (E \setminus U_1)$. Если множество E имеет нулевую меру, то $|\varphi^{-1}(E \setminus U)| = 0$ и $|\varphi^{-1}(E \setminus U_1)| = 0$, следовательно, $|\varphi^{-1}(E)| \leq |\varphi^{-1}(E \setminus U)| + |\varphi^{-1}(E \setminus U_1)| = 0$.

Случай $p = \nu$. Фиксируем произвольный шар $B_1 \subset D$, тогда если $g \in L^1_\nu(B_1)$, то $g \in L^1_q(B_1)$, где $q < \nu$. Рассмотрим ограниченный оператор

$$\varphi^*_B : L^1_\nu(D') \to L^1_q(B_1),$$

определенный по следующему правилу $\varphi^*_B f = \varphi^* f|_{B_1}$. В этом случае неравенство (3.7) принимает вид

$$\|\varphi^*_B f \mid L^1_p(B_1)\| \leq C_1 \Phi(2B)^{\frac{1}{\varkappa}}, \tag{3.13}$$

где функция Φ из предложения 3.1.

Пусть E — множество нулевой меры и $V \supset E$ — открытое множество меры $\varepsilon > 0$. Выберем совокупность шаров $\{B_i\}$ такую, что $2B \subset V$ и оба набора $\{B_i\}$, $\{2B_i\}$ образуют конечнократные покрытия множества V. По аналогии с рассуждениями для случая $p < \nu$ и используя лемму 1.8, получаем

$$|\varphi^{-1}(E) \cap B_1| \leq \sum_i |\varphi^{-1}(B_i)| \leq C \sum_i \Phi(2B_i) \leq C\zeta_N \Phi(V).$$

Используя абсолютную непрерывность функции Φ (следствие 3.1), вводим, что $|B_1 \cap \varphi^{-1}(E)| = 0$ для любого множества нулевой меры $E \in D'$. В силу произвольности шара B_1 получаем требуемое.

В итоге прообраз любого множества нулевой меры также является множеством меры нуль, т. е. отображение $\varphi : D \to D'$ обладает $\mathcal{N}^{-1}$-свойством Лузина. $\square$

Лемма 3.5. *Пусть $p \leq \nu$, тогда для любой функции $f \in L^1_p(D')$*

(1) *$f \circ \varphi \in L^1_p(D)$,*

(2) *$K^{-1}\big\|f \mid L^1_p(D')\big\| \leq \big\|f \circ \varphi \mid L^1_p(D)\big\| \leq K\big\|f \mid L^1_p(D')\big\|$.*

Доказательство. Пусть $f \in L^1_p(D')$, и $\{f_n\}$ — последовательность функций из $C^\infty(D') \cap L^1_p(D')$ такая, что $\|f - f_n \mid L^1_p(D')\| \to 0$ и $f_n \to f$ почти всюду на D' (см. замечание 1.3). Поскольку оператор (3.1) является мономорфизмом (см. замечание 3.2), то отображение φ обладает $\mathcal{N}^{-1}$-свойством Лузина (лемма 3.4). Следовательно, функция $f \circ \varphi$ определена п. в. на D и

$$f_n \circ \varphi \to f \circ \varphi \text{ п. в. на } D.$$

Далее, из леммы 3.2 получаем требуемые утверждения (1) и (2). $\square$

Лемма 3.6. *Пусть $\varphi \in IL^1_p$. Тогда оператор $\varphi* : L^1_p(D') \cap C^\infty(D') \to L^1_p(D)$ продолжается по непрерывности до оператора $\widetilde{\varphi*} : L^1_p(D') \to L^1_p(D)$ и обладает следующими свойствами:*

(1) *значение оператора* $\widetilde{\varphi*} : L^1_p(D') \to L^1_p(D)$ *на классах* $[f] \in L^1_p(D')$ *можно найти по формуле:*

$$\widetilde{\varphi^*}([f]) = \begin{cases} f \circ \varphi & \text{при } p \le \nu, \quad \text{где } f \text{ — произвольный представитель класса } [f], \\ \widetilde{f} \circ \varphi & \text{при } p > \nu, \quad \text{где } \widetilde{f} \text{ — непрерывный представитель класса } [f]; \end{cases}$$

(2) $K^{-1}\big\|f \mid L^1_p(D')\big\| \le \big\|\widetilde{\varphi^*}(f) \mid L^1_p(D)\big\| \le K\big\|f \mid L^1_p(D')\big\|$;

(3) $\widetilde{\varphi^*} : L^1_p(D') \to L^1_p(D)$ — *изоморфизм.*

Доказательство. Поскольку $L^1_p(D') \cap C^\infty(D')$ плотно в $L^1_p(D')$, оператор $\varphi* : L^1_p(D') \cap C^\infty(D') \to L^1_p(D)$ можно продолжить по непрерывности на $L^1_p(D')$: пусть $f \in L^1_p(D')$, выбираем последовательность $f_n \in L^1_p(D') \cap C^\infty(D')$ такую, что $f_n \to f$ в $L^1_p(D')$. Тогда последовательность $\varphi^* f_n$ будет сходится в пространстве $L^1_p(D)$. С другой стороны, можно считать, что эта же последовательность сходится поточечно. На основании леммы 3.2 естественно положить $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi^* f_n = f \circ \varphi$, поскольку композиция $f \circ \varphi$ определена п. в. при $p \le \nu$ (при $p > \nu$ следует рассматривать непрерывный представитель $\widetilde{f} \in L^1_p(D')$).

Из лемм 3.3 и 3.5 для любой функции $f \in L^1_p(D)$ имеем $f \circ \varphi \in L^1_p(D)$, при $p \le \nu$ и $\widetilde{f} \circ \varphi \in L^1_p(D)$, при $p > \nu$, откуда получаем утверждения (1), (2). Свойство (2) влечет изоморфность оператора $\widetilde{\varphi^*}$. □

Далее предполагаем, что оператор φ^* определен на $L^1_p(D')$.

3.2 Квазиизометрические отображения и оператор композиции

Определение 3.1. Гомеоморфизм $\Phi : D \to D'$ двух открытых множеств называется квазиизометрией, если выполнены условия

$$\varlimsup_{\substack{y\to x\\ y\in D}} \frac{d(\Phi(y),\Phi(x))}{d(y,x)} \leq M \quad \text{и} \quad \varlimsup_{\substack{y\to z\\ y\in D'}} \frac{d(\Phi^{-1}(y),\Phi^{-1}(z))}{d(y,z)} \leq M \tag{3.14}$$

для всех $x \in D$ и $z \in D'$, M — некоторая константа, не зависящая от выбора точек $x \in D$ и $z \in D'$, d — метрика Карно –Каратеодори на группе $\mathbb{G}$.

Приводимое ниже определение квазиизометрического гомеоморфизма эквивалентно определению 3.1.

Определение 3.2. Гомеоморфизм $\Phi : D \to D'$, где $D,D' \subset \mathbb{G}$, из неголономного класса Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D,\mathbb{G})$ называется *квазиизометрией*, если

$$|D\Phi(x)| \leq M \quad \text{и} \quad 0 < \alpha \leq |\det D\Phi(x)| \tag{3.15}$$

для п. в. $x \in D$, где постоянные M и α не зависят от x.

Используя неравенство Адамара ($|\det D\Phi(x)| \leq |D\Phi(x)|^\nu$), из условия (3.15) следует

$$L^{-1} \leq |D\Phi(x)| \leq L, \tag{3.16}$$

где постоянная L такая, что $L^{-1} \leq \alpha^{\frac{1}{\nu}}$ и $L \geq M$.

Определение 3.2 эквивалентно определению, сформулированному в работе [66]:

Определение 3.3. Пусть U — открытое множество на группе Карно $\mathbb{G}$, и пусть $\Phi : U \to \mathbb{G}$ — гомеоморфизм класса Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}(U,\mathbb{G})$. Отображение Φ является квазиизометрией, если якобиан $J(x,\Phi)$ сохраняет знак на U и $L^{-1}|\xi| \leq |D\Phi(x)\xi| \leq L|\xi|$ для всех $\xi \in V_1$ и для почти всех $x \in U$, где постоянная $L \geq 1$.

Следующая лемма устанавливает связь между квазиизометриями и локально билипшицевыми отображениями (см. определение 1.5).

Лемма 3.7 ([66, Lemma 1])**.** *Гомеоморфизм $\Phi : D \to D'$ является квазиизометрией тогда и только тогда, когда отображение Φ локально-билипшицево с одной и той же постоянной билипшицевости.*

Основной результат этой главы для случая $p \neq \nu$ сформулирован в следующей теореме.

Теорема 3.1. *Пусть $p \geq 1$, $p \neq \nu$, и D, D' — области на группе Карно $\mathbb{G}$ (здесь ν — хаусдорфова размерность $\mathbb{G}$). Измеримое отображение $\varphi : D \to D'$ принадлежит классу IL_p^1 тогда и только тогда, когда φ совпадает п. в. с некоторой квазиизометрией $\Phi : D \to \Phi(D)$, для которой области $\Phi(D)$ и D' $(1,p)$-эквивалентны.*

Замечание 3.2. (1) В силу двухсторонней оценки (3.2) оператор (3.1) является мономорфизмом.
(2) В лемме 3.6 показано, что оператор (3.1) продолжается по непрерывности до изоморфизма пространств Соболева L_p^1, и продолженный оператор будет также оператором композиции в определенном смысле.

Определение 3.4. Два открытых множества D_1 и D_2 называются $(1,p)$-*эквивалентными*, если операторы ограничения

$$r_i : L_p^1(D_1 \cup D_2) \to L_p^1(D_i), \quad r_i(f) = f|_{D_i}, \quad \text{где } f \in L_p^1(D_1 \cup D_2),$$

являются изоморфизмами.

Это определение эквивалентно определению из [67], а также определению из [A1]:

Определение 3.5 ([A1, Определение 2])**.** Два открытых множества D_1 и D_2 называются $(1,p)$-эквивалентными, если операторы ограничения

$$r_i : L_p^1(D_i) \to L_p^1(D_1 \cap D_2), \quad r_i(f) = f|_{D_1 \cap D_2}, \quad \text{где } f \in L_p^1(D_i),$$

таковы, что $r_2^{-1} \circ r_1$, $r_1^{-1} \circ r_2$ являются изоморфизмами

Далее нам понадобятся следующие очевидные свойства непрерывных функций.

Предложение 3.2. 1) *Пусть f, g — непрерывные функции на множество T, состоящем из точек положительной плотности. Если $f = g$ п. в. на T, то $f = g$ всюду на T.*

2) *Непрерывная функция $f : D \to \mathbb{R}$ определяется однозначно своими значениями на плотном в D множестве T.*

3.2.1 Случай $p > \nu$

Лемма 3.8. *Пусть $p > \nu$ и $\varphi : D \to D'$ — измеримое отображение (где D, D' — области в $\mathbb{G}$). Предположим, что выполнены следующие условия:*

(1) отображение φ непрерывно на некотором множестве $T \subset D$, все точки множества T являются точками положительной плотности в $\mathbb{G}$;

(2) для любой локально липшицевой функции f с компактным носителем в D' верно $f \circ \varphi \in L^1_p(D)$ и

$$||f \circ \varphi \mid L^1_p(D)|| \leq C||f \mid L^1_p(D')||. \tag{3.17}$$

Тогда для любых двух точек $x_0, x_1 \in T$, $x_0 \neq x_1$, таких, что $B(x_1, d(x_0, x_1)) \subset D$, справедливо неравенство

$$d(\varphi(x_0), \varphi(x_1)) \leq cd(x_0,x_1). \tag{3.18}$$

Если вместо условия 2) выполнено условие

(2′) для любой локально липшицевой функции g с компактным носителем в D существует функция $f \in L^1_p(D')$ такая, что $g = f \circ \varphi$ и

$$||f \mid L^1_p(D')|| \leq C'||f \circ \varphi \mid L^1_p(D)||, \tag{3.19}$$

то для любых двух точек $x_0, x_1 \in T$ таких, что $B(\varphi(x_1), d(\varphi(x_0), \varphi(x_1))) \subset D'$ и $\varphi(x_0) \neq \varphi(x_1)$, выполняется неравенство

$$d(x_0,x_1) \leq c' d(\varphi(x_0), \varphi(x_1)). \tag{3.20}$$

Здесь постоянные c и c' зависят только от ν, p, C и C'.

Доказательство. Если $\varphi(x_0) = \varphi(x_1)$, то неравенство (3.18) очевидно.

Пусть $\varphi(x_0) \neq \varphi(x_1)$ и выполнены условия 1) и 2). Рассмотрим функцию

$$f(y) = \left(1 - \frac{d(y,\varphi(x_1))}{d(\varphi(x_0),\varphi(x_1))}\right)^+, \tag{3.21}$$

где $(\cdot)^+$ — положительная часть числа. Заметим, что $f(\varphi(x_0)) = 0$, $f(\varphi(x_1)) = 1$. В силу леммы 1.1 справедливы оценки

$$\|f \mid L^1_p(D')\| \leq \|f \mid L^1_p(\mathbb{G})\| \leq \frac{\varkappa}{d(\varphi(x_0), \varphi(x_1))^{1-\nu/p}}, \tag{3.22}$$

где постоянная $\varkappa$ зависит от меры единичного шара.

Носитель функции f содержится в шаре $B(\varphi(x_1), d(\varphi(x_1), \varphi(x_0)))$. Пусть g – непрерывный представитель $f\circ\varphi$. По лемме 3.6 непрерывная функция g совпадает с $f\circ\varphi$ п. в. на D. Однако на множестве T, состоящем из точек положительной плотности, отображение φ непрерывно. Поэтому $g|_T(x) = f \circ \varphi|_T(x)$ для всех $x \in T$. Следовательно, имеем $g(x_0) = 0$ и $g(x_1) = 1$. По лемме 1.5 для любой непрерывной функции $g \in L^1_p(D)$ такой, что $g(x_0) = 0$ и $g(x_1) = 1$, справедлива оценка

$$\frac{1}{d(x_0, x_1)^{1-\nu/p}} \le K\|g \mid L^1_p(D)\|. \tag{3.23}$$

Возвращаясь к тому, что $g = f\circ\varphi$, где f определена в (3.21), с учетом соотношений (3.23), (3.22) и $\|g \mid L^1_p(D)\| \le C\|f \mid L^1_p(D')\|$ имеем

$$\frac{1}{d(x_0,x_1)^{1-\nu/p}} \le K\|g \mid L^1_p(D)\| \le KC \cdot \|f \mid L^1_p(D')\| = \frac{KCe}{d(\varphi(x_0), \varphi(x_1))^{1-\nu/p}}.$$

Отсюда

$$d(\varphi(x_0), \varphi(x_1)) \le cd(x_0, x_1), \tag{3.24}$$

где постоянная c зависит только от ν, p, и C.

Пусть выполнены условия 1) и 2$'$). Рассмотрим функцию

$$g(x) = \left(1 - \frac{d(x, x_1)}{d(x_0, x_1)}\right)^+. \tag{3.25}$$

Снова отметим, что $g(x_0) = 0$, $g(x_1) = 1$, и справедлива оценка (лемма 1.1)

$$\|g \mid L^1_p(D')\| \le \frac{e}{d(x_0, x_1)^{1-\nu/p}}. \tag{3.26}$$

Пусть функция $f \in L^1_p(D')$ такова, что $g = f \circ \varphi$ (можно считать, что f непрерывна). Поскольку отображение φ непрерывно на T, имеем $f \circ \varphi|_T(x) = g|_T(x)$ для всех $x \in T$ (предложение 3.2). Тогда $f(\varphi(x_0)) = 0$, $f(\varphi(x_1)) = 1$ и в силу леммы 1.5 получаем

$$\frac{1}{p(\varphi(x_0), \varphi(x_1))^{1-\nu/p}} \le K'\|f \mid L^1_p(D')\|. \tag{3.27}$$

Используя соотношения $\|f \mid L^1_p(D')\| \le C' \cdot \|g \mid L^1_p(D)\|$, (3.26) и (3.27), выводим:

$$\frac{1}{d(\varphi(x_0), \varphi(x_1))^{1-\nu/p}} \le K'\|f \mid L^1_p(D')\| \le K'C' \cdot \|g \mid L^1_p(D)\| \le \frac{K'C'e}{d(x_0, x_1)^{1-\nu/p}}. \tag{3.28}$$

Отсюда

$$d(x_0,x_1)\le c'd(\varphi(x_0),\varphi(x_1)), \tag{3.29}$$

где постоянная c' зависит только от ν, p, и C'. $\square$

Теорема 3.2. *Пусть $p>\nu$, а $D,D'\subset\mathbb{G}$ — две области. Если измеримое отображение $\varphi: D\to D'$ таково, что для любой ограниченной функции $f\in L^1_p(D')$ выполнены условия*

(1) $\tilde f\circ\varphi\in L^1_p(D)$,

(2) $K^{-1}\big\|f\mid L^1_p(D')\big\|\le\big\|\tilde f\circ\varphi\mid L^1_p(D)\big\|\le K\big\|f\mid L^1_p(D')\big\|$,

где $\tilde f$ – непрерывный представитель f и K — положительная константа. Тогда отображение φ совпадает п. в. с некоторой квазиизометрией.

Доказательство. По лемме 1.6 с учетом замечаний 1.6 и 1.7 найдется возрастающая последовательность множеств $\{\widetilde{T}_k\}\subset D$ такая, что отображение φ непрерывно на каждом $\widetilde{T}_k$ и $|D\setminus\bigcup\limits_k\widetilde{T}_k|=0$, где $\widetilde{T}_k$ состоят только из точек ненулевой плотности. Тогда областью определения отображения φ можно считать множество

$$\operatorname{Dom}_2\varphi=\bigcup_k\widetilde{T}_k. \tag{3.30}$$

Пусть $x_0,x_1\in\operatorname{Dom}_2\varphi$ – две различные точки. Тогда найдется номер k такой, что $x_0,x_1\in T_k$. Сначала покажем, что для двух таких точек имеем $\varphi(x_0)\ne\varphi(x_1)$. Пусть, напротив, $\varphi(x_0)=\varphi(x_1)$. Рассмотрим непрерывную функцию $f\in L^1_p(D)$ такую, что $f(x_0)\ne f(x_1)$ (очевидно, что такая функция найдется, так как точки x_0 и x_1 находятся на положительном расстоянии). По лемме 3.6 найдется функция $g\in L^1_p(D')$ такая, что $f=\varphi^*g$. В силу леммы 3.3 имеем $f=\varphi^*g=\tilde g\circ\varphi$ п. в. на $\widetilde{T}_k$, где $\tilde g$ — непрерывный представитель g. Отображение φ непрерывно на $\widetilde{T}_k$, поэтому $\tilde g\circ\varphi$ тоже непрерывно на $\widetilde{T}_k$ и, следовательно, $f|_{\widetilde{T}_k}(x)=g\circ\varphi|_{\widetilde{T}_k}(x)$ для всех $x\in\widetilde{T}_k$, так как точки множества $\widetilde{T}_k$ имеют положительную плотность (предложение 3.2). Но тогда $f(x_0)=\tilde g(\varphi(x_0))=\tilde g(\varphi(x_1))=f(x_1)$, т. е. $f(x_0)=f(x_1)$, что противоречит выбору функции f. Итак, $\varphi(x_0)\ne\varphi(x_1)$ при $x_0\ne x_1$.

Кроме того, выполнено условие (1) леммы 3.8, если в качестве множества T взять $\widetilde{T}_k$.

Поскольку $\varphi^*: L^1_p(D')\to L^1_p(D)$ является ограниченным оператором, то для любой липшицевой функции f с компактным носителем верно $f\circ\varphi\in L^1_p(D)$ и

$$||f\circ\varphi\mid L^1_p(D)||\le C||f\mid L^1_p(D')||.$$

Таким образом, выполнено условие (2) леммы 3.8. Следовательно,

$$d(\varphi(x_0), \varphi(x_1)) \leq cd(x_0, x_1).$$

Получим неравенство, обратное к (3.24). Поскольку оператор $\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_p(D)$ изоморфен, то для любой липшицевой функции g с компактным носителем в D существует функция $f \in L^1_p(D')$ такая, что $g = f \circ \varphi$ и

$$||f \mid L^1_p(D')|| \leq C'||f \circ \varphi \mid L^1_p(D)||.$$

Другими словами, выполнено условие (2′) леммы 3.8. Значит,

$$d(x_0, x_1) \leq c' d(\varphi(x_0), \varphi(x_1)) \tag{3.31}$$

при условии, что $B(\varphi(x_0), d(\varphi(x_0), \varphi(x_1))) \subset D'$. Из неравенств (3.24) и (3.31) получаем, что для для достаточно близких точек $x_0, x_1 \in \operatorname{Dom}_2 \varphi$ выполнены неравенства

$$\frac{1}{c'} d(x_0, x_1) \leq d(\varphi(x_0), \varphi(x_1)) \leq cd(x_0, x_1). \tag{3.32}$$

Действительно, левая часть этих соотношений справедлива при условии $d(x_0, x_1) < c^{-1} d(\varphi(x_0), \partial D')$, так как в этом случае $d(\varphi(x_0), \varphi(x_1)) \leq cd(x_0, x_1) < d(\varphi(x_0), \partial D')$ и, следовательно,

$$B(\varphi(x_0), d(\varphi(x_0), \varphi(x_1))) \subset D'.$$

Заметим, что неравенства (3.32) выполняются при выполнении следующего условия:

$$d(x_0, x_1) < r_{x_0} = \min(d(x_0, \partial D), c^{-1} d(\varphi(x_0), \partial D')).$$

Рассмотрим произвольное положительное число $\rho_{x_0} < r_{x_0}$. Подберем его так, чтобы для любых точек $x, y \in B(x_0, \rho_{x_0})$ одновременно выполнялись два условия:

$$d(x, y) < d(x, \partial D) \quad \text{и} \quad d(x, y) < c^{-1} d(\varphi(x), \partial D').$$

Для выполнения первого неравенства достаточно выбрать ρ_{x_0} так, чтобы $0 < \rho_{x_0} < r_{x_0}/3$. Действительно, в этом случае выводим

$$d(x,y) \leq d(x,x_0) + d(x_0,y) \leq 2\rho_{x_0} < r_{x_0} - \rho_{x_0} < d(x,\partial D).$$

Для обеспечения второго неравенства фиксируем произвольное $0 < \rho_{x_0} < r_{x_0}/3$ так, чтобы

$$\operatorname{diam}\varphi(B(x_0,\rho_{x_0})) < c^{-1}c' \operatorname{dist}(\varphi(B(x_0,\rho_{x_0})),\partial D').$$

Это можно сделать, так как $\operatorname{diam}\varphi(B(x_0,\rho))$ убывает при уменьшении ρ, а $\operatorname{dist}(\varphi(B(x_0,\rho)),\partial D')$ возрастает при уменьшении ρ. При таком выборе ρ_{x_0} получаем

$$d(\varphi(x),\varphi(y)) \leq cd(x,y) \leq cc'^{-1} \operatorname{diam}\varphi(B(x_0,\rho_0)) < \operatorname{dist}(\varphi(B(x_0,\rho_{x_0})),\partial D') \leq d(\varphi(x),\partial D').$$

Таким образом, для любых точек $x,y \in B(x_0,\rho_{x_0}) \subset D$ выполняются включение

$$B(\varphi(x), d(\varphi(x),\varphi(y))) \subset D',$$

а значит, неравенства

$$\frac{1}{c'}d(x,y) \leq d(\varphi(x),\varphi(y)) \leq cd(x,y).$$

Обозначим $D_1 = \bigcup\limits_{x_0 \in \operatorname{Dom}_2(\varphi)} B(x_0,\rho_{x_0})$. Имеем $D_1 \subset D$ и $|D \setminus D_1| = 0$. Кроме того, $\varphi : \operatorname{Dom}_2(\varphi) \to D'$ продолжается по непрерывности до локально-билипшицего отображения $\Phi : D_1 \to D' \subset \mathbb{G}$. Заметим, что $\Phi : D_1 \to D' \subset \mathbb{G}$ — инъективное отображение. Пусть напротив $\Phi(x) = \Phi(y)$ для некоторых различных точек $x,y \in D_1$. Тогда найдутся шары $B(x,r)$ и $B(y,r)$, замыкания которых дизъюнктны, а пересечение $\Phi(B(x,r)) \cap \Phi(B(y,r))$ — открытое множество. Очевидно, что любая функция $f \in L^1_p(D)$, равная нулю на $B(x,r)$ и единице на $B(y,r)$, не может быть получена как образ $\varphi^*(g)$ некоторой непрерывной функции $g \in L^1_p(D')$, поскольку мера образа $\Phi(D_1 \setminus \operatorname{Dom}_2\varphi)$ равна нулю. Следовательно, $\Phi : D_1 \to D' \subset \mathbb{G}$ — гомеоморфизм.

Рассмотрим набор шаров $Q_L = B(e,L)$, $L \in \mathbb{N}$, и гладкие финитные функции

$$\eta_L(y) = \begin{cases} 1, & y \in Q_L, \\ 0, & y \notin Q_{L+1}. \end{cases}$$

Пусть $x \in D \setminus D_1$. Предположим, что существует последовательность $\{x_n \in D_1\}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, а последовательность образов $\{\Phi(x_n)\}$ ограничена: найдется число L такое, что $\{\Phi(x_n)\} \subset Q_{L-1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда не может быть такого, чтобы для какой-нибудь последовательности $\{y_n \in D_1\}$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$, последовательность образов $\{\Phi(y_n)\}$ была бы неограниченной. Действительно, функция $\varphi^*(\eta_L)$ непрерывна и в точках множества $\operatorname{Dom}_2\varphi$ совпадает с композицией $\eta_L \circ \varphi$. Так как $\operatorname{Dom}_2\varphi$ плотно в D_1, то непрерывная функция $\varphi^*(\eta_L)$ равна композиции $\eta_L \circ \Phi$ во всех точках множества D_1. Отсюда имеем $\varphi^*(\eta_L)(x_n) = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi^*(\eta_L)(y_n) = 0$, что противоречит непрерывности функции $\varphi^*(\eta_L)$.

Рассмотрим непрерывные функции $y_i \cdot \eta_L \in L^1_p(\mathbb{G})$. Тогда $\varphi^*(y_i \cdot \eta_L)(x) \in L^1_p(D)$ будет непрерывной функцией, совпадающей поточечно с функцией $\Phi_i(x) \cdot \eta_L(\Phi(x))$ на D_1. Из условия $\Phi_i(x_n) = \Phi_i(x_n) \cdot \eta_L(\Phi(x_n))$ для $\Phi(x_n) \in Q_L$ вытекает, что последовательность $\Phi(x_n)$ имеет предел. По критерию Гейне отображение $\Phi : D_1 \to \mathbb{G}$ имеет предел при $y \to x$ по множеству D_1. Полагая значение $\Phi(x)$ равным этому пределу, получаем непрерывное продолжение отображения Φ в точку x.

Остается рассмотреть множество точек

$$F = \{x \in D \setminus D_1 : d(\varphi(x_n)) \to \infty \text{ для любой последовательности } x_n \to x,\ x_n \in D_1\}.$$

Заметим, что множество F замкнуто. Предположим $F \neq \emptyset$. Выберем точку $x \in D_1$ и шар $B(x,\rho) \subset D_1$ так, чтобы $\overline{B(x,\rho)} \cap F \neq \emptyset$. Пусть $y \in \overline{B(x,\rho)} \cap F$. Найдется кривая конечной длины $\gamma \subset B(x,d(x,y))$ соединяющая точки x и y. Образ этой кривой $\Phi(\gamma)$ также имеет конечную длину (см. доказательство леммы 1 из [66]). Следовательно, существует последовательность точек $x_n \in D_1$ такая, что последовательность $\Phi(x_n)$ ограничена. Последнее противоречит определению множества F. Следовательно, $F = \emptyset$.

Таким образом, мы построили отображение $\Phi : D \to \mathbb{G}$, которое очевидно непрерывно.

Докажем его открытость. Фиксируем точку $x \in D \setminus D_1$ и полагаем $z = \Phi(x)$. Из условий теоремы вытекает (см. детали ниже в доказательстве леммы 3.16), что отображение $\Phi : D \to \mathbb{G}$ принадлежит классу Соболева $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(D)$ и индуцирует ограниченный оператор композиции $\Phi^* : L^1_\nu(\mathbb{G}) \to L^1_\nu(D)$. Отсюда выводим, что прообраз $\Phi^{-1}(z)$ имеет $(1,\nu)$-емкость ноль и, следовательно, ν-меру Хаусдорфа ноль. Отсюда стандартным образом выводим, что для некоторого шара $B(x,r) \subset D$ имеем $\Phi(x) \notin \Phi(S(x,r))$.

Пусть $\Phi(x)$ принадлежит ограниченной компоненте дополнения $\mathbb{G} \setminus \Phi(S(x,r))$. Тогда найдутся точки $y \in B(x,r) \cap D_1$, для которых образ $\Phi(y)$ принадлежит той же компоненте связности, и $\Phi(y)$ $\mathcal{P}$-дифференцируемо в точках y, причем $\mathcal{P}$-дифференциал не вырожден. Тогда степень отображения Φ в точке $\Phi(y)$ не равна нулю. Отсюда получаем, что образ $\Phi(B(x,r))$ — окрестность точки $\Phi(x)$. Таким образом, в этом случае Φ — открытое отображение.

Остается исключить возможность, когда $\Phi(x)$ принадлежит неограниченной компоненте дополнения $\mathbb{G} \setminus \Phi(S(x,r))$. Если такое случилось, то аналогично найдутся точки $y \in B(x,r) \cap D_1$, для которых образ $\Phi(y)$ принадлежит неограниченной компоненте связности, и $\Phi(y)$ $\mathcal{P}$-дифференцируемо в точках y, причем $\mathcal{P}$-дифференциал не вырожден. Тогда степень отображения Φ в точке $\Phi(y)$ не равна нулю, чего очевидно быть не может.

Из открытости отображения $\Phi : D \to \mathbb{G}$ аналогично тому, как выше была получена инъективность отображения $\Phi : D_1 \to \mathbb{G}$, выводим его инъективность. Следовательно, отображение $\Phi : D \to \mathbb{G}$ — квазиизометрический гомеоморфизм в соответствии с определением 3.2. Доказательсто теоремы 3.2 завершено. □

3.2.2 Случай $p < \nu$

Лемма 3.9. *Пусть $D,D' \subset \mathbb{G}$, $p \le \nu$ и отображение $\varphi : D \to D'$ принадлежит классу IL^1_p. Тогда из области определения отображения φ можно удалить множество нулевой меры так, что на новой области определения $\operatorname{Dom}_3 \varphi$ будет выполнено следующее свойство: для любых двух шаров $B_1,B_2 \subset D$ таких, что $\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 = \emptyset$, пересечение образов имеет нулевую меру, т. е.*

$$|\varphi(B_1 \cap \operatorname{Dom}_3 \varphi) \cap \varphi(B_2 \cap \operatorname{Dom}_3 \varphi)| = 0.$$

Доказательство. Разобьем доказательство леммы на несколько шагов.

шаг 1. Пусть $\{z_l\}$ — счетное всюду плотное множество в $\operatorname{Dom}_1 \varphi$, $l \in \mathbb{N}$, и $\{\overline{B}_{ml} = \overline{B}(z_l, \frac{1}{m})\} \subset D$ — набор замкнутых шаров (здесь $m \in \mathbb{N}$). Возьмем два произвольных непересекающихся шара $\overline{B}_{ml}$ и $\overline{B}_{ks}$ из этого набора, и локально липшицеву функцию $f \in L^1_p(D)$, удовлетворяющую условиям

$$f_{mlks}(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \in \overline{B}_{ml}, \\ 1, \text{ если } x \in \overline{B}_{ks}. \end{cases} \tag{3.33}$$

По лемме 3.6 найдется функция $g_{mlks} \in L^1_p(D')$ такая, что равенство $\varphi^* g_{mlks}(x) = f_{mlks}(x)$ справедливо всюду в D за исключением некоторого множества Σ_{mlks} нулевой меры. Объединение $\Sigma = \bigcup \Sigma_{mlks}$ по всем возможным индексам m, l, k и s имеет нулевую меру. Удалим Σ из области определения отображения φ. Суженную таким образом область определения обозначим символом $\mathrm{Dom}_0\,\varphi$. Заметим, что для всех точек $x \in \mathrm{Dom}_0\,\varphi$ справедливо равенство $\varphi^* g_{mlks}(x) = f_{mlks}(x)$, где m, l, k и s — все возможные индексы.

шаг 2. По лемме 1.6 из $\mathrm{Dom}_0\,\varphi$ — области определения отображения φ — можно удалить множество нулевой меры и получить суженную область $\mathrm{Dom}_1\,\varphi \subset \mathrm{Dom}_0\,\varphi \subset D$, обладающую следующими свойствами:

$$|D \setminus \mathrm{Dom}_1\,\varphi| = 0 \quad \text{и} \quad \mathrm{Dom}_1\,\varphi = \bigcup_k T_k, \tag{3.34}$$

где T_k — возрастающая последовательность компактов из замечания 1.7.

шаг 3. Обозначим $F_{ml} = \overline{B}_{ml} \cap \mathrm{Dom}_1\,\varphi$. Заметим, что F_{ml} являются борелевскими множествами положительной меры. Рассмотрим всевозможные пары множеств $F_{m_il_i}, F_{m_jl_j} \subset \mathrm{Dom}_1\,\varphi$ (для краткости будем обозначать их F_i и F_j) такие, что

(a) замкнутые шары $\overline{B}_{m_il_i}$ и $\overline{B}_{m_jl_j}$ не пересекаются,

(b) $|\varphi(F_i) \cap \varphi(F_j)| > 0$ (т. е. пересечение образов имеет положительную меру).

Заметим, что множества $\varphi(F_i)$ и $\varphi(F_j)$ борелевские, а потому измеримые.

Обозначим $E_{ij} = \varphi^{-1}(\varphi(F_i) \cap \varphi(F_j))$. Рассмотрим два основных случая:

(1) оба множества $E_{ij} \cap F_i$ и $E_{ij} \cap F_j$ имеют положительную меру;

(2) одно из множеств $E_{ij} \cap F_i$ или $E_{ij} \cap F_j$ имеет нулевую меру.

Покажем, что случай (1) противоречит свойствам, которыми обладает отображение φ. В силу включений $F_i \subset \overline{B}_{m_il_i}$ и $F_j \subset \overline{B}_{m_jl_j}$ имеем следующее (используемые ниже функции определены в (3.33)):

(c) с одной стороны, $g_{m_il_im_jl_j}(x) = 0$ во всех точках F_i, поскольку $g_{m_il_im_jl_j}(y) = f_{m_il_im_jl_j}(x)$ для всех $y = \varphi(x) \in F_i$, и $f_{m_il_im_jl_j}(x) = 0$ для всех $x \in F_i$;

(d) с другой стороны, $g_{m_il_im_jl_j}(x) = 1$ во всех точках F_j, поскольку $g_{m_il_im_jl_j}(y) = f_{m_il_im_jl_j}(x)$ для почти всех $y = \varphi(x) \in F_j$, и $f_{m_il_im_jl_j}(x) = 1$ для $x \in F_j$.

Таким образом, случай (1) невозможен, и поэтому для множеств $F_i, F_j \subset \mathrm{Dom}_1\,\varphi$ выполнено: или $|\varphi(F_i) \cap \varphi(F_j)| = 0$, что противоречит (b), или имеет место случай (2).

шаг 4. Перейдем к случаю (2). Обозначим $E_0 = \bigcup(E_{ij} \cap F_j)$, где объединение ведется по таким индексам i, j, для которых $|E_{ij} \cap F_j| = 0$. Имеем $|E_0| = 0$.

Если F_i и F_j принадлежат непересекающимся замкнутым шарам, то

$$|\varphi(F_i \setminus E_0) \cap \varphi(F_j \setminus E_0)| = 0.$$

Из области определения отображения φ удаляем множество E_0 нулевой меры и областью определения считаем далее множество

$$\operatorname{Dom}_3\varphi = \operatorname{Dom}_1\varphi \setminus E_0. \tag{3.35}$$

Пусть $B_1, B_2 \subset D$ такие шары, что $\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 = \emptyset$. Поскольку B_1 и B_2 находятся на положительно расстоянии, то можно выбрать наборы $\{F_i\}$ и $\{F_j\}$ такие, что $B_1 \cap \operatorname{Dom}_3\varphi = \bigcup\limits_i F_i \setminus E_0$ и $B_2 \cap \operatorname{Dom}_3\varphi = \bigcup\limits_i F_j \setminus E_0$. Ввиду

$$\varphi(B_1 \cap \operatorname{Dom}_3\varphi) = \bigcup_i \varphi(F_i \setminus E_0) \quad \text{и} \quad \varphi(B_2 \cap \operatorname{Dom}_3\varphi) = \bigcup_j \varphi(F_j \setminus E_0),$$

получаем

$$|\varphi(B_1 \cap \operatorname{Dom}_3\varphi) \cap \varphi(B_2 \cap \operatorname{Dom}_3\varphi)| = |\bigcup_i \varphi(F_i \setminus E_0) \cap \bigcup_j \varphi(F_j \setminus E_0)| \leq$$
$$\sum_{i,j} |\varphi(F_i \setminus E_0) \cap \varphi(F_j \setminus E_0)|.$$

Все слагаемые в последней сумме равны нулю, следовательно,

$$|\varphi(B_1 \cap \operatorname{Dom}_3\varphi) \cap \varphi(B_2 \cap \operatorname{Dom}_3\varphi)| = 0.$$

Таким образом, лемма 3.9 доказана. $\square$

Фиксируем шар $Q \subset \mathbb{G}$. Определим следующую функцию множеств:

$$\Psi_Q : B \mapsto |\varphi(B \cap \operatorname{Dom}_3\varphi) \cap Q|, \tag{3.36}$$

т. е. функция Ψ_Q каждому шару $B \subset D$ сопоставляет меру пересечения образа этого шара с шаром Q. В силу леммы 3.9 функция Ψ_Q обладает следующим свойством аддитивности: $\Psi_Q(B_1 \cup B_2) = \Psi_Q(B_1) + \Psi_Q(B_2)$ для любых шаров $B_1, B_2 \subset D$ таких, что $\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 = \emptyset$. Используя это свойство и проводя рассуждения из доказательства теоремы 3 из [47] (см. предложение 1.5), можно показать, что для п. в. $x \in D$ определена и конечна производная

$$\Psi'_Q(x) = \lim_{r\to 0} \frac{\Psi_Q(B(x,r))}{|B(x,r)|} \tag{3.37}$$

и выполнено неравенство

$$\int\limits_U \Psi'_Q(x)\,dx \le \Psi_Q(U), \tag{3.38}$$

где U — это конечное объединение шаров, замыкания которых не пересекаются. Обозначим символом Σ_Ψ множество меры нуль, на котором производная Ψ'_Q либо не определена, либо равна ∞. Тогда во всех точках дополнения $D\setminus\Sigma_\Psi$ определена конечная производная Ψ'_Q.

Лемма 3.10. *На дополнении $D\setminus\Sigma_\Psi$ отображение φ обладает $\mathcal{N}$-свойством Лузина.*

Доказательство. Пусть $A_k=\{x\in D\setminus\Sigma_\Psi : \Psi'_Q(x)<k\}$, тогда $D\setminus\Sigma_\Psi=\bigcup\limits_k A_k$. Пусть множество нулевой меры $E_k\subset A_k$. Можно считать, что E_k ограничено. Для любого $\varepsilon>0$ существует открытое множество $U_\varepsilon\supset E_k$ такое, что $|U_\varepsilon|<\varepsilon$. С учетом определения множества A_k и (3.37) имеем: для каждого $x\in E_k$ найдется число $r_x>0$ такое, что $B(x,r)\subset U_\varepsilon$ и $|\varphi(B(x,r))|<k|B(x,r)|$ для любого числа $0<r<r_x$. По лемме Витали из семейства шаров $\mathcal{B}=\{B(x,r) : x\in\Sigma_k, B(x,r)\subset U_\varepsilon, 0<r<r_\varepsilon\}$ можно выделить счетное семейство шаров $\{B_j\}$ такое, что будут выполнены следующие условия: $\bar{B}_i\cap\bar{B}_j=\emptyset$ при $i\ne j$ и $E_k\subset\bigcup\limits_j cB_j$, где c – постоянная, зависящая только от ν. Кроме того, $cB(x,r)\subset U_\varepsilon$ и $|\varphi(cB(x,r))|<k|cB(x,r)|$. Тогда

$$|\varphi(E_k)|\le\sum_{j=1}^{\infty}|\varphi(cB_j)|<k\sum_{j=1}^{\infty}|cB_j|\le ck\sum_{j=1}^{\infty}|B_j|\le ck|U_\varepsilon|<ck\varepsilon, \tag{3.39}$$

откуда $|\varphi(E_k)|=0$ так как $\varepsilon>0$ произвольно. Для любого множества меры нуль $E\subset D\setminus\Sigma_\Psi$ имеем также $|\varphi(E)|=0$, поскольку $E=\bigcup\limits_k E\cap A_k$.

Таким образом, отображение $\varphi : D\setminus\Sigma_\Psi\to D'$ обладает $\mathcal{N}$-свойством Лузина. □

Поскольку $|\Sigma_\Psi|=0$, то областью определения отображения φ можно считать множество

$$\operatorname{Dom}_4\varphi=\operatorname{Dom}_3\varphi\setminus\Sigma_\Psi. \tag{3.40}$$

Теперь мы можем обобщить утверждение леммы 3.9.

Лемма 3.11. *Пусть для отображение $\varphi : \operatorname{Dom}_4\varphi\to D'$ выполнены условия леммы 3.9. Если $A_1,A_2\subset\operatorname{Dom}_4\varphi$ — два непересекающихся измеримых множества положительной меры, то $|\varphi(A_1)\cap\varphi(A_2)|=0$.*

Доказательство. Из доказательства леммы 3.9 можно вывести: если $K_1,K_2\subset D$ – два компакта положительной меры и $K_1\cap K_2=\emptyset$, то $|\varphi(K_1\cap\operatorname{Dom}_4\varphi)\cap\varphi(K_2)\cap\operatorname{Dom}_4\varphi|=0$. Действительно, пусть $\{B^1_i\}$ и $\{B^2_j\}$ — конечные покрытия компактов K_1 и K_2 таке, что шары из покрытия 1 находятся на положительном расстоянии от шаров из покрытия 2. Тогда

$$|\varphi(K_1 \cap \mathrm{Dom}_4 \varphi) \cap \varphi(K_2 \cap \mathrm{Dom}_4 \varphi)| \leq \sum_{i,j} |\varphi(B_i^1 \cap \mathrm{Dom}_4 \varphi) \cap \varphi(B_j^2 \cap \mathrm{Dom}_4 \varphi)| = 0.$$

Пусть теперь $A_1, A_2 \subset \mathrm{Dom}_4 \varphi$ — два непересекающихся множества положительной меры. Тогда каждое из этих множеств можно исчерпать копактами: $|A_1 \setminus \bigcup K_i^1| = 0$ и $|A_2 \setminus \bigcup K_j^2| = 0$. В силу того, что отображение φ обладает $\mathcal{N}$-свойством Лузина, имеем $|\varphi(A_l \setminus \bigcup K_i^l)| = 0$, $l = 1{,}2$, откуда получаем $|\varphi(A_1) \cap \varphi(A_2)| = 0$. □

Замечание 3.3. В силу леммы 3.11 для функции множеств Ψ_Q выполнено обычное свойство аддитивности. Другими словами, для двух открытых непересекающихся множеств A_1 и A_2 верно

$$\Psi_Q(A_1 \cup A_2) = |\varphi(A_1 \cup A_2) \cap Q| = |(\varphi(A_1) \cup \varphi(A_2)) \cap Q| =$$
$$|(\varphi(A_1)) \cap Q| + |(\varphi(\varphi(A_2)) \cap Q| - |(\varphi(A_1) \cap \varphi(A_2)) \cap Q| =$$
$$|(\varphi(A_1)) \cap Q| + |(\varphi(\varphi(A_2)) \cap Q| = \Psi_Q(A_1) + \Psi_Q(A_2). \quad (3.41)$$

Замечание 3.4. Отображение, для которого выполнено заключение леммы 3.11, будем называть *почти всюду инъективным.*

Далее мы покажем, что из образа $\varphi(\mathrm{Dom}_4 \varphi)$ можно удалить множество нулевой меры так, что будет определено обратное отображение φ^{-1}.

Предложение 3.3. *Отображение φ инъективно вне некоторого множества нулевой меры.*

Доказательство. Пусть $\{z_i\}$ — счетное всюду плотное множество в $\mathrm{Dom}_4 \varphi$. Рассмотрим набор шаров $\{B_{ij} = B(z_i, \rho_j)\}$ с убывающими радиусами ($\rho_j \to 0$ при $j \to \infty$). Получим счетный набор множеств $V_{ij} = B_{ij} \cap \mathrm{Dom}_4 \varphi$. Будем рассматривать только такие наборы индексов i_1, j_1, i_2, j_2, что множества вида $V_{i_1 j_1}$ и $V_{i_2 j_2}$ не пересекаются ($V_{i_1 j_1} \cap V_{i_2 j_2} = \emptyset$). Обозначим $F_{kl} = \varphi(V_{i_k j_k}) \cap \varphi(V_{i_l j_l})$. Поскольку отображение φ является почти всюду инъективным, имеем $|F_{kl}| = 0$. Положим $\Sigma = \bigcup\limits_{kl} F_{kl}$. Тогда $|\Sigma| = 0$ и $|\varphi^{-1}(\Sigma)| = 0$ (последнее в силу того, что φ обладает $\mathcal{N}^{-1}$-свойством Лузина).

Положим

$$\mathrm{Dom}_5 \varphi = \mathrm{Dom}_4 \varphi \setminus \varphi^{-1}(\Sigma), \quad (3.42)$$

($\mathrm{Dom}\, \varphi^{-1} = \varphi(\mathrm{Dom}_5 \varphi)$), тогда отображение $\varphi : \mathrm{Dom}_5 \varphi \to \mathrm{Dom}\, \varphi^{-1}$ будет взаимно однозначно. Действительно, предположим существование таких $x_1{,}x_2 \in \mathrm{Dom}_5 \varphi$, что $x_1 \neq x_2$, а $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$. Найдутся два непересекающихся множеств положительной меры V_1, V_2, содержащие x_1, x_2 соответственно. С другой стороны, по определению $\mathrm{Dom}_5\,\varphi$ получаем $\varphi(V_1 \cap \mathrm{Dom}_5\,\varphi) \cap \varphi(V_2 \cap \mathrm{Dom}_5\,\varphi) = \emptyset$. Откуда следует, что $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$. $\square$

В силу леммы 3.11 мы можем определить функцию Ψ_Q на открытых подмножествах D (аналогично (3.36)). При этом будет выполнено обычное свойство аддитивности: $\Psi_Q(A_1 \cup A_2) = \Psi_Q(A_1) + \Psi_Q(A_2)$ для таких открытых множеств $A_1, A_2 \subset D$, что $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Предложение 3.4. *Пусть отображение $\varphi : D \to D'$ обладает $\mathcal{N}$-свойством Лузина и является почти всюду инъективным. Тогда для любой суммируемой функции $f : D' \cap Q \to \mathbb{R}$ верна следующая формула замены переменных*

$$\int\limits_D f \circ \varphi(x) J_{\varphi,Q}(x)\, dx = \int\limits_{D' \cap Q} f(y)\, dy, \tag{3.43}$$

где $J_{\varphi,Q}(x) = \Psi'_Q(x)$.

Доказательство. Сначала докажем абсолютную непрерывность функции Ψ_Q (см. ниже соотношение (3.47)).

Для всех $x \in D \setminus \Sigma_0$, где Σ_0 — множество нулевой меры (на котором производная Ψ'_Q не существует или не конечна), имеем следующее: для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\rho_0(x)$ такое, что для всех $\rho < \rho_0(x)$ выполнены неравенства

$$\Psi'_Q(x) - \varepsilon \leq \frac{\Psi_Q(B(x,\rho))}{|B(x,\rho)|} \leq \Psi'_Q(x) + \varepsilon \tag{3.44}$$

и

$$\Psi'_Q(x) - \varepsilon \leq \frac{1}{|B(x,\rho)|} \int\limits_{B(x,\rho)} \Psi'_Q(y)\, dy \leq \Psi'_Q(x) + \varepsilon. \tag{3.45}$$

Неравенство (3.44) следует из определения производной функции множеств (предложение 1.5), а неравенство (3.45) мы получаем из теоремы Лебега (см. теорему 1.1).

Далее имеем

$$\Psi_Q(B(x,\rho)) \leq |B(x,\rho)|\Psi'_Q(x) + \varepsilon|B(x,\rho)| \leq \int\limits_{B(x,\rho)} \Psi'_Q(y)\, dy + 2\varepsilon|B(x,\rho)| \tag{3.46}$$

для всех $x \in D \setminus \Sigma_0$ и для всех $\rho < \rho_0(x)$.

Возьмем открытое множество $U \subset D$ конечной меры. Пусть $\mathcal{B}$ — покрытие Витали множества $U \setminus \Sigma_0$ семейством шаров $\{B(x,\rho) \mid x \in U \setminus \Sigma_0, 0 < \rho < \rho_0(x)\}$. Из семейства

$\mathcal{B}$ можно выделить последовательность попарно непересекающихся шаров $\{B_j\}$ так, что $|U \setminus \bigcup\limits_j B_j| = 0$. Тогда $|U| = |\bigcup\limits_j B_j| = \sum\limits_j |B_j|$. Применяя $\mathcal{N}$-свойство Лузина отображения φ, получаем $\Psi_Q(U) = \Psi_Q(\bigcup\limits_j B_j) = \sum\limits_j \Psi_Q(B_j)$.

Для каждого шара из $\{B_j\}$ выполнено неравенство (3.46). Суммируя неравенство (3.46) по шарам из $\{B_j\}$, имеем

$$\Psi_Q(U) = \sum_j \Psi_Q(B_j) \leq \int\limits_{\bigcup\limits_j B_j} \Psi'_Q(y)\, dy + 2\varepsilon \sum_j |B_j| = \int\limits_U \Psi'_Q(y)\, dy + 2\varepsilon |U|.$$

В силу произвольности ε

$$\Psi_Q(U) \leq \int\limits_U \Psi'_Q(y)\, dy. \tag{3.47}$$

Неравенство (3.47) и обратное к нему неравенство (3.38) обеспечивают равенство

$$\Psi_Q(U) = \int\limits_U \Psi'_Q(y)\, dy. \tag{3.48}$$

Обозначим $J_{\varphi,Q}(x) = \Psi'_Q(x)$. Из равенства (3.48) следует формула замены переменных для ступенчатой функции s

$$\int\limits_D s \circ \varphi(x) J_{\varphi,Q}(x)\, dx = \int\limits_{D' \cap Q} s(y)\, dy. \tag{3.49}$$

Далее стандартной процедурой формула распространяется на функции $f \in L_1(D' \cap Q)$. $\square$

Замечание 3.5. Обозначим $Z = \{x \in D \cap \varphi^{-1}(Q) : J_{\varphi,Q}(x) = 0\}$. В соответствии с формулой замены переменных (3.43) имеем $|\varphi(Z)| = 0$. Поскольку отображение φ обладает $\mathcal{N}^{-1}$-свойством Лузина, то и $|Z| = 0$.

Следующие три леммы доказаны в главе 2 для весовых пространств (см. леммы 2.2, 2.4, 2.5). Сформулируем эти утверждения в данном случае.

Лемма 3.12. *На почти всех интегральных кривых горизонтальных векторных полей отображение* $\varphi : \bigcup\limits_i \widetilde{T}_i \cap \operatorname{Dom}_5 \varphi \to D'$ *непрерывно вне некоторого множества нулевой* 1*-меры Хаусдорфа.*

Лемма 3.13. *Пусть* $u \in \operatorname{Lip}_l(D') \cap L^1_p(D')$ *и* $||u \mid L^1_p(D')|| \leq 1$, $p \leq \nu$. *Тогда*

$$|\nabla_{\mathcal{L}}(u \circ \varphi)|(x) \leq K \cdot J^{\frac{1}{p}}_{\varphi,Q}(x) \tag{3.50}$$

п. в. на $D \cap \varphi^{-1}(Q)$*, где* K *— некоторая постоянная, не зависящая от* Q*.*

Лемма 3.14. *Пусть* $D, D' \subset \mathbb{G}$*,* $p \in [1, \infty)$ *и* $p \leq \nu$*. Если отображение* $\varphi : D \to D'$ *принадлежит классу* IL^1_p*, то* φ *аппроксимативно дифференцируемо п. в. вдоль горизонтальных кривых.*

Замечание 3.6. Из аппроксимативной дифференцируемости отображения φ п. в. вдоль интегральных линий горизонтальных векторных полей вытекает полная аппроксимативная дифференцируемость [43, Theorem 3.3], следовательно, условие следующего утверждения.

Предложение 3.5 ([68, Theorem 3], [43, Theorem 3.3])**.** *Пусть* $D \subset \mathbb{G}$ *и*

$$\operatorname{ap}\varlimsup_{x \to a} \frac{d(\varphi(a), \varphi(x))}{d(a, x)} < \infty$$

для всех $a \in D$*. Тогда множество* D *представимо в виде счетного объединения* $D = \bigcup\limits_i E_i$ *так, что* $\varphi \in \operatorname{Lip}(E_i)$*.*

Замечание 3.7. Каждое множество E_i из предложения 3.5 содержится в счетном объединение множеств $F_{ki} = \{z : d(\varphi(x), \varphi(z)) \geq \frac{1}{k} d(x, z), x \in E_i \cap B(z, \frac{1}{k})\}$, то есть $E_i \subset \bigcup\limits_k F_{ki}$, (см. [68]). Тогда множество D можно представить в виде счетного объединения множеств $D = \bigcup\limits_j D_j$ так, что на каждом D_j отображение φ является билипшицевым. Кроме того, можно считать, что множества D_j состоят из точек плотности 1.

С учетом замечания 3.7 можно считать, что областью определения отображения φ является множество

$$\operatorname{Dom}_6 \varphi = \bigcup_j E_j \cap \operatorname{Dom}_5 \varphi, \tag{3.51}$$

и отображение φ билипшицево на $E_j \cap \operatorname{Dom}_5 \varphi$.

Обозначим символом $D\varphi$ аппроксимативный дифференциал отображения φ, а символом $D_h\varphi$ — горизонтальную часть этого дифференциала.

Лемма 3.15. *Пусть отображение* φ *принадлежит классу* IL^1_p*, а отображение* $\psi = \varphi^{-1}$ *из доказательства предложения 3.3. Тогда верны следующие оценки*

$$|D\varphi|(x) < L, \quad |J(x, \varphi)| > \alpha_1 \quad \text{и} \quad |D\psi|(y) < L', \quad |J(y, \psi)| > \alpha \tag{3.52}$$

для почти всех $x \in D$ *и для п. в.* $y \in \varphi(\operatorname{Dom}_6 \varphi)$*, где* $J(x, \varphi) = \det D\varphi(x)$*. Заметим, что* $J(x, \varphi) = J_\varphi(x) = \lim\limits_{r \to 0} \frac{|\varphi(B(x,r))|}{|B(x,r)|}$ *п. в. в* D*.*

Доказательство. Покажем, что обратное к φ отображение $\psi : \varphi(\mathrm{Dom}_6\,\varphi) \to \mathrm{Dom}_6\,\varphi$ индуцирует по правилу композиции оператор $\varphi^{*-1} : L^1_p(D) \to L^1_p(D')$. Пусть $g \in L^1_p(D)$. Тогда найдется функция $f \in L^1_p(D')$ такая, что $g = \varphi^* f$ (лемма 3.6). С другой стороны, $f \circ \varphi = \varphi^* f$ (на $\mathrm{Dom}_6\,\varphi$) в силу леммы 3.5. Поэтому имеем $\psi^*(\varphi^*(f_n(x))) = f_n \circ \varphi \circ \psi(y) = f_n(y)$ п. в. на D', т. е. $\psi^*(\varphi^* f) = f$ и $\psi^* = \varphi^{*-1}$.

Для липшицевой функции $f \in L^1_p(D')$ имеем $\nabla\varphi^* f = \nabla(f \circ \varphi) = D_h\varphi^T \nabla f$. Подставляя в неравенство (2.16) липшицевы функции η такие, что $|\nabla\eta|(y) = 1$, и учитывая соотношение

$$KJ^{\frac{1}{p}}(x,\varphi) \geq |\nabla(\eta \circ \varphi)|(x) = |D_h\varphi^T \nabla\eta|(x),$$

получаем оценку нормы оператора

$$|D_h\varphi|^p(x) \leq K_1 J(x,\varphi) \quad \text{п. в. на } D. \tag{3.53}$$

Аналогично

$$|D_h\psi|^p(y) \leq K_2 J(y,\psi) \quad \text{почти всюду на } \varphi(\mathrm{Dom}_6\,\varphi). \tag{3.54}$$

Из неравенства (3.54) выводим

$$CK_2^p \geq \frac{|D_h\psi|^p}{|J(y,\psi)|} = \left(\frac{|D_h\psi|^\nu}{|J(y,\psi)|}\right)^{\frac{p}{\nu}} \frac{1}{|J(y,\psi)|^{1-\frac{p}{\nu}}} \geq \frac{1}{|J(y,\psi)|^{1-\frac{p}{\nu}}}. \tag{3.55}$$

Следовательно, $|J(y,\psi)| > \alpha$ и значит $|J(x,\varphi)| < \beta$. Проводя аналогичные рассуждения, из неравенства (3.53), получаем $|J(x,\varphi)| > \alpha_1$ и $|J(y,\psi)| < \beta_1$. В итоге

$$|D\varphi|(x) < L, \quad |J(x,\varphi)| > \alpha_1 \quad \text{и} \quad |D\psi|(y) < L', \quad |J(y,\psi)| > \alpha$$

для п. в. $x \in D$ и для п. в. $y \in \varphi(\mathrm{Dom}_6\,\varphi)$. □

Лемма 3.16. *Пусть $p < \nu$, а отображение $\varphi : D \to D'$ принадлежит классу IL^1_p. Тогда отображение φ совпадает с квазиизометрическим гомеоморфизмом п. в.*

Доказательство. Фиксируем $q > \nu$. Для липшицевой функции f с компактным носителем в D' имеем $f \circ \varphi \in L^1_p(D)$ и $|\nabla_{\mathcal{L}}(f \circ \varphi)|(x) \leq |\nabla_{\mathcal{L}} f||D_h\varphi|(x)$. Отсюда с учетом (3.52) и формулы замены переменных (3.43) получим следующую цепочку неравенств

$$\int\limits_D |\nabla_{\mathcal{L}} f \circ \varphi|^q(x)\,dx \leq C \int\limits_D |\nabla_{\mathcal{L}} f|^q(\varphi(x))|D\varphi|^q(x)\,dx \leq CL^q \int\limits_D |\nabla_{\mathcal{L}} f|^q(\varphi(x))\,dx$$
$$\leq \frac{L^q C}{\alpha} \int\limits_D |\nabla_{\mathcal{L}} f|^q(\varphi(x))|J(x,\varphi)|\,dx = \tilde{C} \int\limits_{\varphi(D)} |\nabla_{\mathcal{L}} f|^q(y)\,dy. \quad (3.56)$$

Таким образом, $||f \circ \varphi \mid L^1_q(D)|| \leq C||f \mid L^1_q(D')||$ для $q > \nu$. Следовательно, выполнено условие 2) леммы 3.8.

Пусть g — липшицева функция в D с компактным носителем. По лемме 3.6 найдется $f \in L^1_p(D')$ такая, что $g = f \circ \varphi$. Далее, имеем $\nabla_{\mathcal{L}} g(x) = D_h\varphi^T(x)\nabla_{\mathcal{L}} f(\varphi(x))$, и, следовательно, $\nabla_{\mathcal{L}} f(\varphi(x)) = (D_h\varphi^T)^{-1}(x)\nabla_{\mathcal{L}} g(x)$. Поскольку $|(D_h\varphi^T)^{-1}| = |(D_h\varphi)^{-1}| < L$, то $f \in L^1_q(D')$ и $\|f \mid L^1_q(D')\| \leq C'\|f \circ \varphi \mid L^1_q(D)\|$. В силу последних неравенств выполнено условие $(2')$ из леммы 3.8 (в котором вместо p надо рассматривать $q > \nu$).

Кроме того, выполнено условие (1) леммы 3.8, где в качестве множества T выбираем T_k.

Далее из лемм 3.8 и 3.7 выводим, что отображение φ совпадает с квазиизометрическим гомеоморфизмом п. в. □

3.2.3 Доказательство теоремы 3.1

Доказательство. Достаточность. Можно считать, что отображение $\varphi : D \to D'$ является квазиизометрией. Квазиизометрия φ обладает $\mathcal{N}$-свойством и $\mathcal{N}^{-1}$-свойством Лузина и является локально билипшицевым отображением.

Для произвольной функций $f \in L^1_p(D') \cap C^\infty(D')$ композиция $f \circ \varphi$ абсолютно непрерывна на почти всех интегральных линиях горизонтальных векторных полей, в силу того, что $f \circ \varphi$ — локально липшицева функция. Более того, $\nabla_{\mathcal{L}}(f \circ \varphi) = D_h\varphi^T(x)\nabla_{\mathcal{L}} f(\varphi(x))$ [48, p. 263], где $D_h\varphi(x) = \{X_i\varphi_j(x)\}$, $i,j = 1,\ldots,n_1$, — горизонтальная часть $\mathcal{P}$-дифференциала. Отсюда имеем

$$\int\limits_D |\nabla_{\mathcal{L}}(f \circ \varphi)|^p\,dx = \int\limits_D |D_h\varphi^T(x)\nabla_{\mathcal{L}} f(\varphi(x))|^p\,dx \leq \int\limits_D |D_h\varphi^T(x)|^p \cdot |\nabla_{\mathcal{L}} f(\varphi(x))|^p\,dx$$
$$\leq M^p \int\limits_D |\nabla_{\mathcal{L}} f|^p(\varphi(x))\,dx = M^p \int\limits_{D'} \frac{|\nabla_{\mathcal{L}} f|^p(y)}{J(\varphi^{-1}(y),\varphi)}\,dy \leq \frac{M^p}{\alpha} \int\limits_{D'} |\nabla_{\mathcal{L}} f|^p(y)\,dy,$$

где во втором и третьем неравенствах мы использовали свойство квазиизометрии (3.15), а во втором равенстве применили формулу замены переменных (3.43). В силу леммы 3.2

полученное неравенство выполняется для всех функций $f \in L^1_p(D')$, т. е.

$$\big\|\varphi^*(f) \mid L^1_p(D)\big\| \leq K_1 \big\|f \mid L^1_p(D')\big\|. \tag{3.57}$$

Отображение $\psi = \varphi^{-1}$ также является квазиизометрией. Тогда для $g \in L^1_p(D)$

$$\big\|\psi^*(g) \mid L^1_p(D')\big\| \leq K_2 \big\|g \mid L^1_p(D)\big\|. \tag{3.58}$$

Заметим, что для $f \in L^1_p(D') \cap C^\infty(D')$ верно $\psi^*(f \circ \varphi) = f$. Следовательно неравенство (3.91) принимает вид

$$K_2^{-1} \big\|f \mid L^1_p(D')\big\| \leq \big\|\varphi^*(f) \mid L^1_p(D)\big\|.$$

Таким образом,

$$K^{-1} \big\|f \mid L^1_p(D')\big\| \leq \big\|\varphi^*(f) \mid L^1_p(D)\big\| \leq K \big\|f \mid L^1_p(D')\big\|,$$

где постоянная K зависит только от свойств отображения φ.

Покажем, что образ $\varphi^*\big(L^1_p(D') \cap C^\infty(D')\big)$ всюду плотен в $L^1_p(D)$. Пусть $g \in L^1_p(D)$. Найдется последовательность $g_n \in L^1_p(D) \cap C^\infty(D)$ такая, что $\big\|g - g_n \mid L^1_p(D)\big\| \to 0$. С другой стороны, в силу двусторонней оценки $g_n \circ \varphi^{-1} \in L^1_p(D')$. Следовательно, найдется последовательность $f_{nk} \in L^1_p(D') \cap C^\infty(D')$ такая, что $\big\|g_n \circ \varphi^{-1} - f_{nk} \mid L^1_p(D')\big\| \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда для некоторой последовательности натуральных чисел l_n имеем $\varphi^* f_{nl_n} \in \varphi^*\big(L^1_p(D') \cap C^\infty(D')\big)$ и $\big\|g - \varphi^* f_{nl_n} \mid L^1_p(D)\big\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Необходимость. Существование квазиизометрии Φ доказано в теореме 3.2 (для случая $p > \nu$) и в лемме 3.16 (для случая $p < \nu$). На основании доказанного выше оператор композиции $\Phi^* : L^1_p(\Phi(D)) \to L^1_p(D)$ изоморфен. Отсюда имеем изоморфизм $\varphi^{*-1} \circ \Phi^* : L^1_p(\Phi(D)) \to L^1_p(D')$ такой, что $\varphi^{*-1} \circ \Phi^*(f)(x) = f(x)$ для всех точек $x \in \Phi(D)) \cap D'$, где $f \in L^1_p(\Phi(D))$ — произвольная функция.

Аналогично доказанному в [67, теорема 3.1] и [58, предложение 6.10] можно получить следующие свойства:

1) $|\Phi(D) \Delta D'| = 0$;

2) для любого шара $B \subset D'$ множество $B \setminus \Phi(D) \Delta D'$ связное.

Докажем, что в этих условиях оператор ограничения $r : L^1_p(D') \to L^1_p(\Phi(D) \cap D')$ изоморфизм. Если это не так, то существует ненулевая функция $f \in L^1_p(D')$ такая, что $f \equiv 0$

на $\Phi(D) \cap D'$. В силу свойств 1 и 2 эта функция — тождественный ноль на D', поскольку $\nabla_{\mathcal{L}} f = 0$ п. в. в D', а дополнение $D' \setminus \Phi(D) \Delta D'$ — локально связное множество.

$\square$

3.3 Квазиконформные отображения и оператор композиции

Определение 3.6. Гомеоморфизм $\Phi : D \to D'$ класса $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}$ называется *квазиконформным*, если существует постоянная K такая, что

$$|D\Phi(x)|^\nu \leq K|J(x,\Phi)| \quad \text{п. в. в } D,$$

где $D\Phi(x)$ — аппроксимативный дифференциал [43] отображения Φ, а $J(x,\Phi) = \det D\Phi(x)$.

Основной результат при $p = \nu$ составляет следующая

Теорема 3.3. *Пусть D, D' — области на группе Карно $\mathbb{G}$, а ν — хаусдорфова размерность $\mathbb{G}$. Измеримое отображение $\varphi : D \to D'$ принадлежит классу IL^1_ν тогда и только тогда, когда φ совпадает почти всюду с некоторым квазиконформным отображением $\Phi : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{G}$, для которого области $\Phi(D \setminus \{x_0\})$ и D' $(1,\nu)$-эквивалентны, где $x_0 \in \overline{\mathbb{G}}$ — некоторая точка (здесь $\overline{\mathbb{G}}$ — одноточечная компактификация $\mathbb{G}$).*

Всюду далее мы изучаем отображение $\varphi : D \to D'$ класса IL^1_ν. Резюмируем свойства отображений класса IL^1_p установленные в 3.1.

Предложение 3.6. 1) *Областью определения отображения φ можно считать множество $T = \bigcup\limits_k T_k$, $|D \setminus T| = 0$, где $\{T_k\}$ — возрастающая по включению последовательность ограниченных множеств положительной меры, состоящих из точек положительной плотности.*

2) *Отображение φ непрерывно на каждом из T_k.*

3) *На множестве T отображения φ обладает $\mathcal{N}$-свойством и $\mathcal{N}^{-1}$-свойством Лузина.*

4) *Отображение $\varphi : T \to D'$ инъективно.*

5) *Образ $\varphi(T)$ всюду плотен в D' и $|D' \setminus \varphi(T)| = 0$.*

3.3.1 Пространство $L^1_{\nu,F}$

Фиксируем $k_0 \in \mathbb{N}$ и замкнутое множество положительной меры $F \subset T_{k_0}$ без изолированных точек. Можно считать, что $F \subset B_F$, где $B_F \subset D$ — некоторый шар. В силу замечания 3.7 можно также предполагать, что отображение $\varphi : F \to \varphi(F)$ билипшицево. Такой выбор обеспечивает для образа $\varphi(F)$ выполнение тех же самых свойств, которые имеет множество F: образ $\varphi(F)$ замкнут, не имеет изолированных точек, и его мера положительна.

Как и в 1.8 рассмотрим совокупность функций

$$L^1_{\nu,F}(D) = \big\{u \in L^1_\nu(D) : u(x) = 0 \text{ для почти всех } x \in F\big\}.$$

Аналогично предыдущему определим еще одно банахово пространство

$$L^1_{\nu,\varphi(F)}(D') = \{v \in L^1_\nu(D') : v(y) = 0 \text{ для почти всех } y \in \varphi(F)\}.$$

С помощью предложения 3.6 и леммы 3.6 можно проверить, что $f \in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')$ тогда и только тогда, когда $f \circ \varphi \in L^1_{\nu,F}(D)$. Следовательно, оператор

$$\varphi^*_F : L^1_{\nu,\varphi(F)}(D') \to L^1_{\nu,F}(D), \quad \varphi^*_F(f) = f \circ \varphi, \quad f \in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')$$

является изоморфизмом.

Применение пространств $L^1_{\nu,F}$ позволит нам установить существование квазинепрерывного представителя для отображения φ.

Введем обозначения $D_F = D \setminus F$ и $D'_F = D' \setminus \varphi(F)$.

3.3.2 Свойства отображения φ

Построение квазинепрерывного представителя отображения φ

В этом пункте мы построим квазинепрерывное отображение ψ, которое будет совпадать с отображением φ почти всюду на D_F.

Лемма 3.17. *Пусть $E \subset D_F$ — множество положительной меры, отображение φ непрерывно на E и $f \in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')$ — полунепрерывная снизу функция. Если $g = \varphi^* f$ — уточненная функция в $L^1_{\nu,F}(D)$, то $g(x) \geq f \circ \varphi(x)$ квазивсюду на $E \cap \widetilde{E}$.*

Доказательство. Поскольку отображение φ непрерывно на E, то функция $f \circ \varphi$ полунепрерывна снизу на E. В силу свойств оператора φ^* (лемма 3.6) $g = f \circ \varphi$ п. в. на D, и, в частности, $g(x) \geq f \circ \varphi(x)$ для почти всех точек $x \in E$. По лемме 1.13 $g(x) \geq f \circ \varphi(x)$ для квазивсех $x \in E \cap \widetilde{E}$. □

Из леммы 3.17 получаем следующее

Следствие 3.2. *Пусть $E \subset D_F$ — множество положительной меры, состоящие из точек положительной плотности, отображение φ непрерывно на E и $f \in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')$ — полуне-*

прерывная снизу функция. Если $g = \varphi^* f$ — уточненная функция в $L^1_{\nu,F}(D)$, то $g(x) \geq f \circ \varphi(x)$ квазивсюду на E.

Лемма 3.18. *Пусть $E \subset D_F$ — множество положительной меры состоящее, из точек положительной плотности, отображение φ непрерывно на E. Если $\Sigma \subset D'_F$ — множество нулевой внешней емкости, то множество $\varphi^{-1}(\Sigma) \cap E$ имеет нулевую емкость.*

Доказательство. Пусть $f \in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')$ — полунепрерывная снизу функция, построенная в лемме 1.15. По следствию 3.2 уточненная функция $g = \varphi^* f$ не меньше функции $f \circ \varphi$ квазивсюду на E. В частности, для квазивсех точек $x \in \varphi^{-1}(\Sigma) \cap E$ имеем $g(x) = \infty$. Из леммы 1.10 получаем $\overline{\mathrm{Cap}}(\varphi^{-1}(\Sigma) \cap E; L^1_{\nu,F}(D)) = 0$. $\square$

Из леммы 3.18 следует

Лемма 3.19. *Пусть $f_k \in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')$ — последовательность уточненных функций, сходящаяся квазивсюду к функции $f \in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')$. Тогда последовательность $f_k \circ \varphi$ сходится к функции $f \circ \varphi \in L^1_{\nu,F}(D)$ почти всюду на D и квазивсюду на $T \cap D_F$, где T — множество из предложения 3.6.*

Доказательство. Напомним, что множество $T = \bigcup\limits_k T_k$, $|D \setminus T| = 0$, где $\{T_k\}$ — возрастающая по включению последовательность ограниченных множеств положительной меры, состоящих из точек положительной плотности. На каждом T_k отображение φ непрерывно.

Пусть $S \subset D'_F$ — множество нулевой внешней емкости, на котором нет сходимости. Тогда в силу леммы 3.18 для каждого k множество $\varphi^{-1}(S) \cap T_k \cap D_F$ имеет нулевую емкость. Следовательно, по п. 5 леммы 1.9 множество $\varphi^{-1}(S) \cap T \cap D_F$ имеет нулевую емкость. Отсюда получаем сходимость последовательности $f_k \circ \varphi$ к функции $f \circ \varphi \in L^1_{\nu,F}(D)$ квазивсюду на $T \cap D_F$. Сходимость последовательность $f_k \circ \varphi$ к функции $f \circ \varphi \in L^1_{\nu,F}(D)$ почти всюду на D очевидна: $|D \setminus T| = 0$. $\square$

Лемма 3.20. *Пусть $E \subset D_F$ — множество положительной меры, состоящее из точек положительной плотности, отображение φ непрерывно на E и $f \in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')$ — уточненная функция. Если $g = \varphi^* f$ — уточненная в $L^1_{\nu,F}(D)$ функция, то $g|_E$ совпадает квазивсюду с функцией $f \circ \varphi|_E$.*

Доказательство. Пусть $f_k \in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')$ — последовательность непрерывных функций, сходящаяся к функции f всюду за исключением множества Σ нулевой внешней емкости. С учетом замечания 1.9 можно считать, что последовательность уточненных функций $g_k = \varphi^* f_k$ сходится квазивсюду к функции $\varphi^* f$. Функции $g_k = \varphi^* f_k$, согласно следствию 1.7, совпадают квазивсюду на E с функциями $f_k \circ \varphi|_E$. Таким образом, функция g совпадает квазивсюду на E с функцией $f \circ \varphi$. $\square$

Следствие 3.3. *Пусть T — множество из предложения 3.6, и $f \in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')$ — уточненная функция. Если $g = \varphi^* f$ — уточненная в $L^1_{\nu,F}(D)$ функция, то $g|_{T\cap D_F}$ совпадает квазивсюду с функцией $f \circ \varphi|_{T\cap D_F}$.*

Доказательство. Напомним, что множество $T = \bigcup\limits_k T_k$, $|D \setminus T| = 0$, где $\{T_k\}$ — возрастающая по включению последовательность ограниченных множеств положительной меры, состоящих из точек положительной плотности. На каждом из T_k отображение φ непрерывно.

Положим в лемме 3.20 $E = T_k \cap D_F$. Тогда уточненная в $L^1_{\nu,F}(D)$ функция $g = \varphi^* f$ совпадает с функцией $f\circ\varphi$ квазивсюду на $T_k \cap D_F$. Отсюда получаем утверждение следствия, так как здесь k — произвольное натуральное число. $\square$

Лемма 3.21. *Существуют множество $S_\varphi \subset D$ нулевой емкости, и квазинепрерывное отображение $\psi : D_F \setminus S_\varphi \to \overline{D'_F}$ такое, что $\psi(x) = \varphi(x)$ почти всюду на D_F.*

Доказательство. В силу следствия 1.5 достаточно для произвольного открытого шара $Q \Subset D_F$ построить квазинепрерывное отображение $\bar\varphi : Q \to \mathbb{G}$, совпадающее с отображением φ почти всюду на Q.

Пусть $f \in L^1_{\nu,F}(D)$ — непрерывная функция и $f \geq 1$ на Q. Существует уточненная функция $g \in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')$, для которой $f = \varphi^* g$. По следствию 3.3 функции $f|_{T\cap Q}$ и $g \circ \varphi|_{T\cap Q}$ совпадают квазивсюду. Пусть $S_Q \subset T \cap Q$ — множество нулевой емкости, на котором значения функций $f|_{T\cap Q}$ и $g\circ\varphi|_{T\cap Q}$ не совпадают. Заметим, что для отображения $\varphi : T\cap Q \to \mathbb{G}$ выполняются условия лемм 3.17 – 3.20 и их следствий. Кроме того, для всех точек $y \in \varphi(T\cap Q\setminus S_Q)$ функция $g(y) = g(\varphi(x)) = f(x) \geq 1$. Таким образом, емкость множества $\varphi(T \cap Q \setminus S_Q)$ конечная. Далее мы рассматриваем отображение φ лишь на множестве $T \cap Q \setminus S_Q$, считая его на $Q \setminus (T \cap Q \setminus S_Q)$ не определенным. Далее под образом множества $V \subset Q$ следует понимать $\varphi(V \cap (T \cap Q \setminus S_Q))$.

Положим $P_k = \varphi(Q) \cap B(0,k)$, $CP_k = \varphi(Q) \setminus P_k$, $k \in \mathbb{N}$. Покажем, что

$$\overline{\mathrm{Cap}}\big(CP_k; L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{3.59}$$

Действительно, фиксируем $k_0 \in \mathbb{N}$ и $0 < r < k_0 - 1$ так, что для $k > k_0$ выполнены включения

$$\varphi(F) \subset B(0,r) \quad \text{и} \quad CP_k \subset \mathbb{G} \setminus B(0,k-1).$$

Отсюда сразу вытекает, что

$$\overline{\operatorname{Cap}}\big(CP_k; L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big) \leq \operatorname{Cap}\big(\mathbb{G} \setminus B(0,k-1); L^1_{\nu,B(0,r)}(\mathbb{G})\big).$$

Емкость справа — это ν-емкость кольца $D_{r,k-1}$: в [58, Теорема 6.6, Теорема 6.9] показано, что эта емкость эквивалентна величине $\big(\ln \frac{k-1}{r}\big)^{1-\nu}$. При $k \to \infty$ получаем (3.59).

Пусть $g_k \in A(CP_k)$ — последовательность функций такая, что

$$\big\| g_k \mid L^1_{\nu,\varphi(F)}(D') \big\|^\nu = \overline{\operatorname{Cap}}\big(CP_k; L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big).$$

По следствию 3.3 уточненная функция $f_k = \varphi^* g_k$ совпадает квазивсюду на множестве $T \cap D_F$ с функцией $g_k \circ \varphi$. Таким образом, $f_k \in A(\varphi^{-1}(CP_k))$.

Обозначим через CF_k подмножество шара Q, состоящее из точек множества $\varphi^{-1}(CP_k)$ и всех точек ненулевой плотности $\varphi^{-1}(CP_k)$. По следствию 1.6 имеем

$$\overline{\operatorname{Cap}}\big(CF_k; L^1_{\nu,F}(D)\big) = \overline{\operatorname{Cap}}\big(\varphi^{-1}(CP_k); L^1_{\nu,F}(D)\big). \tag{3.60}$$

Далее

$$\begin{aligned}\overline{\operatorname{Cap}}\big(\varphi^{-1}(CP_k); L^1_{\nu,F}(D)\big) &\leq \big\| f_k \mid L^1_{\nu,F}(D) \big\|^\nu \\ &\leq K^\nu \big\| g_k \mid L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')) \big\|^\nu = K^\nu\, \overline{\operatorname{Cap}}\big(CP_k; L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big),\end{aligned}$$

где K — норма оператора φ^*. Из (3.59) и (3.60) выводим

$$\lim_{k\to\infty} \overline{\operatorname{Cap}}\big(CF_k; L^1_{\nu,F}(D)\big) = 0. \tag{3.61}$$

Обозначим $F_k = Q \setminus CF_k$. Заметим, что $F_k \supset S_Q$ и $F_k \supset (D \setminus T) \cap Q$. Если $x \in F_k \cap T \setminus S_Q$, то $\varphi(x) \in P_k$ и для всех точек $x \in F_k$

$$\lim_{r\to 0} \frac{|F_k \cap B(x,r)|}{|B(x,r)|} = 1. \tag{3.62}$$

Действительно, для достаточно малых r (таких, что $B(x,r) \subset Q$) получаем $|B(x,r)| = |F_k \cap B(x,r)| + |CF_k \cap B(x,r)|$ или

$$1 = \frac{|F_k \cap B(x,r)|}{|B(x,r)|} + \frac{|CF_k \cap B(x,r)|}{|B(x,r)|}. \tag{3.63}$$

По построению множества CF_k для $x \notin CF_k$ ($x \in F_k$) имеем $|CF_k \cap B(x,r)|/|B(x,r)| \to 0$ при $r \to 0$, то есть из (3.63) следует (3.62).

Рассмотрим срезки $\eta_k \in C_0^\infty(\mathbb{G})$ такие, что $\eta_k(x) = 1$, $x \in B(0,k)$, и $\eta_k(x) = 0$, $x \notin B(0,k+1)$, $k \in \mathbb{N}$. Пусть $\psi_{i,k}$ — уточненная функция такая, что $\psi_{i,k} = \varphi^*(y_i \cdot \eta_k)$ (здесь $y_i(\cdot)$ — координатные функции (в координатах первого рода [44])). Из следствия 3.3 выводим, что $\psi_{i,k}(x) = (y_i \cdot \eta_k)(\varphi(x))$ для квазивсех точек $x \in F_k \cap T$. Поэтому имеем

$$(\varphi^*(y_i\eta_k))(x) = (y_i \cdot \eta_k)(\varphi(x)) = y_i(\varphi(x)) = \varphi_i(x)$$

для квазивсех $x \in F_k \cap T$. Таким образом, почти всюду на F_k координатная функция φ_i совпадает с уточненной функцией $\psi_{i,k}$.

Положим

$$\bar{\varphi}_{i,k}(x) = \begin{cases} \psi_{i,k}(x), & \text{если } x \in F_k \setminus S_Q, \\ \varphi_i(x), & \text{если } x \in Q \setminus F_k. \end{cases}$$

Поскольку функция φ_i изменяется на множестве нулевой меры, то для любого $k \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $\varphi_i(x) = \bar{\varphi}_{i,k}(x)$ п. в. на Q.

Пусть $k < m$. По построению множеств F_k имеем $F_k \subset F_m$, поэтому на $F_k \cap T$ функции $\varphi^*(y_i\eta_k)$ и $\varphi^*(y_i\eta_m)$ совпадают квазивсюду с функцией φ_i.

Так как по построению все точки множеств F_k имеют плотность, равную единице, то уточненные функции $\psi_{i,m}$ и $\psi_{i,k}$ совпадают квазивсюду на F_k (следствие 1.5). Это позволяет корректно определить квазивсюду на Q функцию

$$\bar{\varphi}_{iQ}(x) = \begin{cases} \psi_{i,k}(x), & \text{если } x \in F_k \setminus S_Q, \\ \varphi_i(x), & \text{если } x \in Q \setminus \bigcup\limits_k^\infty F_k. \end{cases}$$

Поскольку $Q \setminus \bigcup\limits_k^\infty F_k = \bigcap\limits_k^\infty CF_k$, то в силу (3.61) функция $\bar{\varphi}_{iQ}$ определена квазивсюду на шаре Q.

Покажем, что функция $\bar{\varphi}_{iQ}$ квазинепрерывна на шаре Q. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда найдутся такие открытые множества U_1, U_2, U_3, что

1) Существует номер k такой, что $CF_k \subset U_1$, и $\overline{\mathrm{Cap}}(U_1) < \varepsilon/3$ (в силу (3.61) и леммы 1.9);

2) На $D_F \setminus U_2$ функция $\psi_{i,k}$ непрерывна и $\overline{\mathrm{Cap}}(U_2) < \varepsilon/3$ (поскольку функция $\psi_{i,k}$ квазинепрерывна);

3) U_3 содержит все точки множества $Q\setminus U_1$ нулевой емкости, где значения функций $\bar\varphi_{iQ}$ и $\psi_{i,k}$ не совпадают, $\overline{\mathrm{Cap}}(U_3)<\varepsilon/3$ (так как $\bar\varphi_{iQ}$ и $\psi_{i,k}$ совпадают квазивсюду на F_k (вне CF_k)).

Множество $U=U_1\cup U_2\cup U_3$ имеет емкость $\overline{\mathrm{Cap}}(U)<\varepsilon$, а на дополнении $Q\setminus U$ функция $\bar\varphi_{iQ}$ непрерывна. В силу произвольности $\varepsilon>0$ функция $\bar\varphi_{iQ}$ квазинепрерывна. Таким образом, построено квазинепрерывное отображение $\bar\varphi_Q : Q\setminus S_Q\to\overline{D'_F}$, где $S_Q\subset Q$ — некоторое множество нулевой емкости.

Покрывая область D_F счетным конечнократным набором открытых шаров Q_j и повторяя описанную выше процедуру на каждом из шаров Q_j, мы построим квазинепрерывное отображение

$$\psi(x)=\bar\varphi_{Q_j}(x),\quad \text{если } x\in Q_j.$$

Корректность определения отображения $\psi(x)$ обеспечивается следующим свойством: для двух шаров Q_j и Q_i с непустым пересечением имеем $\varphi_{Q_j}(x)=\varphi_{Q_i}(x)$ для всех $x\in Q_i\cap Q_j$ за исключением некоторого множества $\Sigma_{ij}\subset Q_i\cap Q_j$ нулевой емкости (см. следствие 1.5). Удалим из D_F множество

$$S_\varphi=\bigcup_{i\neq j}\Sigma_{ij}\cup\bigcup_j S_{Q_j}, \tag{3.64}$$

имеющее нулевую емкость.

Тогда на $D_F\setminus S_\varphi$ отображение ψ опеределено корректно. При этом $\psi(x)=\varphi(x)$ для почти всех $x\in D_F$. $\square$

Будем считать, что образ $V\subset D_F$ это множество $\psi(V\setminus S_\varphi)$.

Замечание 3.8. Для построенного отображения ψ выполняется следующее свойство: $\psi(x)=\varphi(x)$ для всех $x\in T\setminus Z$, где Z — множество нулевой емкости.

Построение отображения φ_0

В этом пункте мы построим отображение φ_0 такое, что $\varphi_0=\psi$ квазивсюду и выполнены эквивалентные оценки на емкости образа и прообраза (см. ниже лемму 3.23).

В следующей лемме мы описываем свойства отображения ψ и усиливаем предыдущие леммы 3.17, 3.18, 3.20.

Лемма 3.22. 1) *Пусть $f\in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')$ — полунепрерывная снизу функция. Если $g=\varphi^*f$ — уточненная функция в $L^1_{\nu,F}(D)$, то $g(x)\geq f\circ\psi(x)$ квазивсюду на $D_F\cap\psi^{-1}(D'_F)$.*

2) *Пусть $\Sigma\subset D'_F$. Если $\overline{\mathrm{Cap}}\big(\Sigma; L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big)=0$, то $\overline{\mathrm{Cap}}\big(\psi^{-1}(\Sigma)\cap D_F; L^1_{\nu,F}(D)\big)=0$.*

3) *Если $f\in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\cap C(D')$, то уточненная функция φ^*f совпадает с функцией $f\circ\psi$ квазивсюду на $D_F\cap\psi^{-1}(D'_F)$.*

4) *Пусть квазивсюду в* D'_F *выполнено* $f(y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(y)$*, где* $f_k \in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D') \cap C(D')$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \| f_k \mid L^1_{\nu,\varphi(F)}(D') \| < \infty$*. Тогда уточненная функция* $\varphi^* f$ *совпадает с суммой* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (f \circ \psi)(x)$ *квазивсюду на* $D_F \cap \psi^{-1}(D'_F)$*.*

5) *Для всякой уточненной функции* $f \in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')$ *уточненная функция* $g = \varphi^* f$ *совпадает с композицией* $f \circ \psi$ *квазивсюду на* $D_F \cap \psi^{-1}(D'_F)$*.*

6) *Для произвольных множеств* $A \subset D_F$ *и* $B \subset D'_F$ *таких, что* $\psi(A) \subset D'_F$ *имеют место оценки*

$$\overline{\mathrm{Cap}}\big(\psi^{-1}(B); L^1_{\nu,F}(D)\big) \leq K^\nu \, \overline{\mathrm{Cap}}\big(B; L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big), \tag{3.65}$$

$$\overline{\mathrm{Cap}}\big(A \cap \psi^{-1}(D'_F); L^1_{\nu,F}(D)\big) \leq K^\nu \, \overline{\mathrm{Cap}}\big(\psi(A) \cap D'_F; L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big), \tag{3.66}$$

где $K = \max(\|\varphi^*\|, \|\varphi^{*-1}\|)$*.*

Доказательство. 1) Имеем $g(x) \geq f \circ \psi(x)$ для почти всех $x \in D_F \cap \psi^{-1}(D'_F)$ (по крайней мере в точках $x \in T$). Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем открытое множество $U_\varepsilon \subset D_F$ такое, что ψ непрерывно на $D_F \setminus U_\varepsilon$ и $\mathrm{Cap}\big(U_\varepsilon; L^1_{\nu,F}(D)\big) < \varepsilon$. По следствию 1.6 имеем также $\overline{\mathrm{Cap}}\big(\widetilde{U}_\varepsilon; L^1_{\nu,F}(D)\big) < \varepsilon$. Заметим, что все точки дополнения $D_F \setminus \widetilde{U}_\varepsilon$ являются точками положительной плотности, а вслед за ними таковыми будут и все точки множества $(D_F \cap \psi^{-1}(D'_F)) \setminus \widetilde{U}_\varepsilon$, так как $|D_F \setminus \psi^{-1}(D'_F)| = 0$.

Композиция $f \circ \psi(x)$ полунепрерывна снизу во всех точках множества $(D_F \cap \psi^{-1}(D'_F)) \setminus U_\varepsilon$. По лемме 3.17 получаем $g(x) \geq f \circ \psi(x)$ квазивсюду на $(D_F \cap \psi^{-1}(D'_F)) \setminus \widetilde{U}_\varepsilon$. В силу произвольности ε имеем $g(x) \geq f \circ \psi(x)$ квазивсюду на $D_F \cap \psi^{-1}(D'_F)$.

2) Пусть $f \in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')$ — полунепрерывная снизу функция, построенная в лемме 1.15. По первому пункту этой леммы уточненная функция $g = \varphi^* f$ не меньше функции $f \circ \varphi$ квазивсюду на $D_F \cap \psi^{-1}(D'_F)$. В частности, для квазивсех точек $x \in \varphi^{-1}(\Sigma) \cap D_F \cap \psi^{-1}(D'_F) = \varphi^{-1}(\Sigma) \cap D_F$ имеем $g(x) = \infty$. Из леммы 1.10 получаем $\mathrm{Cap}(\varphi^{-1}(\Sigma) \cap D_F; L^1_{\nu,F}(D)) = 0$.

3) Если $g = \varphi^* f$ — уточненная функция в $L^1_{\nu,F}(D)$, то в силу первого утверждения леммы одновременно имеем $g(x) \geq f \circ \psi(x)$ и $-g(x) \geq -f \circ \psi(x)$ квазивсюду на $D_F \cap \psi^{-1}(D'_F)$. Отсюда получаем равенство $g(x) = f \circ \psi(x)$ квазивсюду на $D_F \cap \psi^{-1}(D'_F)$.

4) Пусть $f_k \in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D') \cap C(D')$,

$$f(y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y) \quad \text{квазивсюду на } D'_F \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \big\| f_k \mid L^1_{\nu,\varphi(F)}(D') \big\| < \infty.$$

В силу второго утверждения леммы ряд

$$f\circ\psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k\circ\psi(x) \tag{3.67}$$

сходится квазивсюду на $D_F\cap\psi^{-1}(D'_F)$. Кроме того

$$\sum_{k=1}^{\infty}\big\|f_k\circ\psi\mid L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big\|\le K\sum_{k=1}^{\infty}\big\|f_k\mid L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big\|<\infty. \tag{3.68}$$

Из (3.68) известным способом (см. например [17]) выводим, что ряд (3.67) сходится равномерно на D_F вне некоторого открытого множества сколь угодно малой емкости. Таким образом, функция $f\circ\psi$ — является уточненной и, следовательно, $\varphi^*f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(f\circ\psi)(x)$ квазивсюду на $D_F\cap\psi^{-1}(D'_F)$.

5) Пусть $f_k\in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')$ — последовательность непрерывных функций, сходящаяся к функции f всюду за исключением множества Σ нулевой внешней емкости. По утверждениям 2 и 4 леммы последовательность уточненных функций $g_k=\varphi^*f_k$ сходится квазивсюду к уточненной функции $g=\varphi^*f$. Уточненные функции $g_k=\varphi^*f_k$, согласно третьему утверждению леммы, совпадают с функциями $f_k\circ\varphi|_{D_F\cap\psi^{-1}(D'_F)}$ квазивсюду на $D_F\cap\psi^{-1}(D'_F)$. Таким образом, уточненная функция $g=\varphi^*f$ совпадает с функцией $f\circ\psi$ квазивсюду на $D_F\cap\psi^{-1}(D'_F)$.

6) Пусть $f_B\in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')$ — емкостная функция для множества B (см. теорему 1.2), т. е. $\overline{\mathrm{Cap}}\big(B;L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big)=\big\|f_B\mid L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big\|^{\nu}$. Множество $\{y\in B\mid f(y)<1\}$ имеет нулевую емкость (по второму утверждению леммы). Поэтому для уточненной функции $g=\varphi^*f_B$ выполнено следующее свойство: $g(x)\ge 1$ квазивсюду на $\psi^{-1}(B)$. Из соотношения

$$\big\|g\mid L^1_{\nu,F}(D)\big\|\le K\big\|f_B\mid L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big\|$$

выводим цепочку неравенств

$$\overline{\mathrm{Cap}}\big(\psi^{-1}(B);L^1_{\nu,F}(D)\big)\le\big\|g\mid L^1_{\nu,F}(D)\big\|^{\nu}$$
$$\le K^{\nu}\big\|f_B\mid L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big\|^{\nu}=K^{\nu}\,\overline{\mathrm{Cap}}\big(B;L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big),$$

откуда следует оценка (3.65).

Пусть $f_{\psi(A)}\in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')$ — емкостная функция для множества $\psi(A)\cap D'_F$. Множество $\{y\in B\mid f_{\psi(A)}(y)<1\}$ имеет нулевую емкость (по второму утверждению леммы). Поэтому для уточненной функции $g = \varphi^* f_{\psi(A)}$ выполнено следующее свойство: $g(x) \geq 1$ квазивсюду на $A \cap \psi^{-1}(D'_F)$. Из соотношения $\big\|g \mid L^1_{\nu,F}(D)\big\| \leq K\big\|f_{\psi(A)} \mid L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big\|$ выводим

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{Cap}}\big(A \cap \psi^{-1}(D'_F); L^1_{\nu,F}(D)\big) &\leq \big\|g \mid L^1_{\nu,F}(D)\big\|^\nu \\ &\leq K^\nu \big\|f_{\psi(A)} \mid L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big\|^\nu = K^\nu\, \overline{\mathrm{Cap}}\big(\psi(A) \cap D'_F; L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big),\end{aligned}$$

что влечет (3.66). □

Далее мы фиксируем счетную систему

$$\mathcal{B} = \{B_j\} \tag{3.69}$$

шаров в D_F, составляющую базу открытых множеств $U \subset D_F$. Будем считать, что шары, входящие в систему (3.69) обладают следующими свойствами:

1) $B_j \Subset D_F$ для всех $j \in \mathbb{N}$;

2) вместе с каждым шаром $B_j = B_j(x_j, r_j)$ система $\mathcal{B}$ содержит также счетный набор шаров с центром в точке x_j и радиусами вида $2^{-k}\operatorname{dist}(x_j, D_F)$, $k \in \mathbb{N}$.

Лемма 3.23. *Существуют некоторое множество $S_\psi \subset D_F$ нулевой емкости и отображение $\varphi_0 : D_F \setminus S_\psi \to \overline{D'_F}$ такие, что $\varphi_0(x)$ совпадает с $\psi(x)$ для квазивсех на $x \in D_F$ Для отображения φ_0 справедливы все утверждения леммы* 3.22, *а также оценка*

$$\overline{\mathrm{Cap}}(\varphi_0(B_j) \cap D'_F; L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')) \leq K^{-\nu}\, \overline{\mathrm{Cap}}(B_j; L^1_{\nu,F}(D)) \tag{3.70}$$

для любого шара B_j системы (3.69).

Доказательство. Пусть $B \in \mathcal{B}$ — произвольный шар счетной базы окрестностей (3.69), а $g_B \in A(B)$ — емкостная функция шара B (см. теорему 1.2). Поскольку φ^* — изоморфизм (см. лемму 3.6), то существует уточненная функция $f_B \in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')$ такая, что $g_B(x) = f_B \circ \psi(x)$ для квазивсех $x \in D_F \cap \psi^{-1}(D'_F)$ по утверждению 3 леммы 3.22.

Рассмотрим множество $\Sigma_B = \{x \in B \cap \psi^{-1}(D'_F) : f_B(\psi(x)) < 1\}$. Тогда в силу того, что $f(\psi(x)) = g(x) \geq 1$ для квазивсех $x \in B \cap \psi^{-1}(D'_F)$ имеем

$$\overline{\mathrm{Cap}}\big(\Sigma_B; L^1_{\nu,F}(D)\big) = 0.$$

Так как $\psi((B \cap \psi^{-1}(D'_F)) \setminus \Sigma_B) = (\psi(B) \cap D'_F) \setminus \psi(\Sigma_B) \subset D'_F$, то функция f_B является допустимой для множества $(\psi(B) \cap D'_F) \setminus \psi(E_B) \subset D'_F$: $f \in A((\psi(B) \cap D'_F) \setminus \psi(\Sigma_B))$. Поэтому

$$\begin{aligned}\overline{\operatorname{Cap}}\big(\psi((B \cap \psi^{-1}(D'_F)) \setminus \Sigma_B); L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big) &\le \big\| f_B \mid L^1_{\nu,\varphi(F)}(D') \big\|^\nu \\ &\le K^{-\nu} \big\| g_B \mid L^1_{\nu,F}(D) \big\|^\nu = K^{-\nu} \overline{\operatorname{Cap}}\big(B; L^1_{\nu,F}(D)\big). \quad (3.71)\end{aligned}$$

Полагаем отображение $\varphi_0(x)$ равным $\psi(x)$ на множестве $D_F \setminus \bigcup\limits_{B_j \in \mathcal{B}} \Sigma_{B_j}$, и не определенным на множестве $\bigcup\limits_{B_j \in \mathcal{B}} \Sigma_{B_j}$. По лемме 1.9 (пункт 6)) имеем $\overline{\operatorname{Cap}}\big(\bigcup\limits_{B_j \in \mathcal{B}} \Sigma_B; L^1_{\nu,F}(D)\big) = 0$, поэтому отображения φ_0 и ψ совпадают квазивсюду в D_F.

Таким образом, отображение определено теперь на $D_F \setminus S_\psi$, где

$$S_\psi = S_\varphi \cup \bigcup_{B_j \in \mathcal{B}} \Sigma_{B_j}, \tag{3.72}$$

а множество S_φ определено формулой (3.64). Справедливость всех утверждений леммы 3.22 для отображения φ_0 проверяется непосредственно. □

Теперь образом $\varphi_0(V)$ произвольного множества $V \subset D_F$ понимается образ $\psi\big(V \setminus S_\psi\big)$.

Топологические свойства отображения φ_0

В этом пункте мы продолжим изучения свойств квазинепрерывного отображения φ_0. Отметим, что шары $B(x,r)$ и сферы $S(x,r)$ рассматриваются в метрике Карно — Каратеодори.

Предложение 3.7 ([60, Предложение 5])**.** 1) *Отображение φ_0 определено и непрерывно во всех точках сферы $S(x,r)$ для почти всех $r \in (0, \operatorname{dist}(x, \partial D_F))$.*

2) *Отображение φ_0 непрерывно на почти всех интегральных линиях горизонтальных векторных полей: для каждого шара $B(x,r) \subset D_F$ и почти всех интегральных линиях $\gamma \subset B(x,r)$ горизонтального векторного поля X_i, $i = 1, \ldots, n$, отображение φ_0 определено и непрерывно во всех точках интегральной кривой γ.*

Предложение 3.8. *Существует множество нулевой меры $\Sigma \subset D_F$ такое, что в сколь угодно малых окрестностях точек $x_1, x_2 \in B \setminus \Sigma$, где $B \subset D_F$ — произвольный открытый шар, найдутся точки, которые можно соединить кривой $\gamma \subset B$, на которой отображение φ_0 непрерывно.*

Доказательство. 1 шаг. По лемме 1.40 из [44] найдутся постоянные $C > 0$ и $N \in \mathbb{N}$ такие, что любые две точки $x_1, x_2 \in \mathbb{G}$ можно соединить ломаной $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \ldots \cup \sigma_N$, состоящей из отрезков интегральных линий горизонтальных векторных полей. При этом длина σ_i не превосходит $C \cdot d(x_1, x_2)$.

2 шаг. В качестве множества нулевой меры $\Sigma \subset D_F$ возьмем совокупность всех точек в D_F, не принадлежащих объединению всех интегральных линий горизонтальных векторных полей X_i, $i = 1, \dots, n$, на каждой из которых отображение φ_0 непрерывно (см. предложение 3.7).

3 шаг. Пусть теперь $x_1, x_2 \in B \setminus \Sigma$. Рассмотрим непрерывную кривую $\Gamma \subset B$, соединяющую точки x_1 и x_2. Обозначим
$$R_\Gamma = \frac{\operatorname{dist}(\Gamma,\partial B)}{NC}.$$
Покроем кривую Γ конечным числом шаров $B_j \subset B$ с равными радиусами R_Γ и выберем точки $x_1 = y_1, y_2, \dots, y_{l+1} = x_2$ на этой кривой таким образом, чтобы две соседние точки y_j, y_{j+1} принадлежали шару $\{B_j\}$ (при этом некоторые шары могут и повторяться). В силу выбора подходящего радиуса шара $\{B_j\}$ точки y_j, y_{j+1} можно соединить кривой $\gamma_j \subset B$, построенной на первом шаге доказательство. Составная кривая $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \ldots \cup \gamma_l$ может и не быть искомой, поскольку некоторые точки совокупности $y_2, \dots, y_l$ могут принадлежать Σ.

4 шаг. Для построения искомой кривой возьмем шар $B(y_1, \varepsilon)$ настолько малого радиуса, что трубчатая окрестность $\bigcup\limits_t B(\gamma(t), \varepsilon)$ кривой γ принадлежит B. Для любого ε в этой трубчатой окрестности найдется кривая, составленная из интегральных линий горизонтальных векторных полей, на каждой их которых отображение φ_0 непрерывно. Начальная точка такой кривой принадлежит шару $B(x_1, \varepsilon)$, а конечная — шару $B(x_2, \varepsilon)$.

Так как ε может быть взято произвольно малым, доказательство предложения завершено.

$\square$

Пусть $x \in T \cap D_F$. Введем обозначение

$$\widehat{B}(x, r) = \Big\{ \bigcup_{\rho \in (0,r)} S(x, \rho) \mid \text{отображение } \varphi_0 : S(x, \rho) \to \mathbb{G} \text{ непрерывно} \Big\} \subset D_F \tag{3.73}$$

Таким образом, множество $\widehat{B}(x, r)$ отличается от шара $B(x, r)$ лишь тем, что из шара $B(x, r)$ удалены все сферы $S(x, \rho)$, $\rho \in \sigma_{x,r} \subset (0, r)$, на которых отображение φ_0 разрывно, причем совокупность $\sigma_{x,r}$ таких радиусов имеет нулевую меру на интервале $(0, r)$.

Лемма 3.24. *Пусть дана последовательность положительных чисел $\{r_k\}$, сходящаяся к 0 при $k \to \infty$. Пусть еще $x \in D_F$ и существует последовательность $u_k \in \widehat{B}(x,r_k) \cap D_F$, для которой $\varphi_0(u_k) \to y \in D'_F$ при $k \to \infty$, где y — некоторая точка.*

Тогда образы $\varphi_0(\widehat{B}(x,r_k))$ стягиваются к точке $y \subset D'_F$ при $k \to \infty$:

$$\{y\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{\varphi_0(\widehat{B}(x,r_k))} \in D'_F. \tag{3.74}$$

Доказательство. Очевидно равенство (3.74) эквивалентно следующему:

$$\sup_{z\in\widehat{B}(x,r_k)\cap D_F} d(\varphi_0(z),y) \to 0 \tag{3.75}$$

при $k \to \infty$. Пусть, вопреки доказываемому, (3.75) не выполняется. Тогда существуют число $\vartheta > 0$, и последовательность радиусов $\varkappa_k \in (0,r_k) \setminus \sigma_{x,r_k}$, для которой

$$\operatorname{diam}(\{y\} \cup \varphi_0(S(x,\varkappa_k)) = \sup_{z\in S(x,\varkappa_k)\cap D_F} d(\varphi_0(z),y) \geq \vartheta, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.76}$$

Поскольку $u_k \in \widehat{B}(x,r_k)) \cap D_F$, то $u_k \in S(x,\tau_k)$, где $\tau_k \in (0,r_k) \setminus \sigma_{x,r_k}$ и $\tau_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Понятно, что каждый шар $B(x,r_k)$ при достаточно большом k содержится в некотором шаре $B_k = B(x_{j_k},\rho_{j_k})$ совокупности (3.69) таком, что $x_{j_k} \in B(x,r_k)$ и $\rho_{j_k} > 2r_k$ (последнее неравенство гарантирует включение $B(x,r_k) \subset B_k$), при этом $\rho_{j_k} \to 0$ при $k \to \infty$ (т. е. с уменьшением r_k до нуля ρ_{j_k} также уменьшается до нуля) (см. выше описание совокупности (3.69)).

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим еще непрерывную кривую $\gamma_k \subset B_k$ из предложения 3.8 с концевыми точка в шаре $B(x, \min(\tau_k,\varkappa_k))$ и дополнении $B_k \setminus B(x,r_k)$, в точках которой отображение φ_0 определено и непрерывно.

Обозначим символом K_k компактное множество $S(x,\tau_k) \cup S(x,\varkappa_k) \cup \gamma_k$. Имеем включение $K_k \subset B_k$. Компакт K_k связен, и отображение $\varphi_0 : K_k \to \overline{D'_F}$ непрерывно.

При вышеописанном выборе компакта K_k и шаров $B_k = B(x_{j_k},\rho_{j_k})$ с учетом соотношения (3.70) имеем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned}\overline{\operatorname{Cap}}\big(\varphi_0(K_k) \cap D'_F; L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big) &\leq \overline{\operatorname{Cap}}\big(\varphi_0(\widehat{B}(x,r_k)) \cap D'_F; L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big)\\ &\leq \overline{\operatorname{Cap}}\big(\varphi_0(B_k) \cap D'_F; L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')\big)\\ &\leq K^{-\nu}\,\overline{\operatorname{Cap}}\big(B_k; L^1_{\nu,F}(D)\big) = O\Big(\Big(\ln\frac{2}{\rho_{j_k}}\Big)^{1-\nu}\Big) = o(1)\end{aligned} \tag{3.77}$$

при $k \to \infty$ (см. замечание 1.12). Из (3.77) выводим $\overline{\operatorname{Cap}}(\varphi_0(K_k) \cap D'_F; L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')) \to 0$ при $k \to \infty$. Применяя теперь теорему 1.3 к компактному множеству $\varphi_0(K_k)$, получаем $\operatorname{diam}\varphi_0(K_k) \to$

0 при $k\to\infty$. С учетом условия $\varphi_0(u_k)\to y\in D'_F$ при $k\to\infty$ имеем $\operatorname{diam}(\{y\}\cap\varphi_0(K_k))\to 0$ при $k\to\infty$. Последнее противоречит (3.76), поскольку $S(x,\varkappa_k)\subset K_k$. □

В следующем утверждении мы показываем, что образы концентрических сфер, на которых отображение φ_0 непрерывно, стягиваются в точку при стремлении радиуса к нулю.

Следствие 3.4. *Пусть $x\in T\cap D_F$. Тогда*

$$\sup_{y\in\varphi_0(\widehat{B}(x,r))\cap D_F} d(y,\varphi_0(x))\to 0 \tag{3.78}$$

при $r\to 0$.

Доказательство. Фиксируем k, для которого $x\in T_k\cap D_F$. Пусть, вопреки доказываемому, (3.78) не выполняется. Тогда существуют число $\vartheta>0$, и последовательность $r_l\to 0$ при $l\to\infty$ такие, что

$$\sup_{y\in\varphi_0(\widehat{B}(x,r_l))\cap D_F} d(y,\varphi_0(x))\geq 2\vartheta$$

для всех $l\in\mathbb{N}$. Отсюда извлекаем последовательность радиусов $\varkappa_l\in(0,r_l)\setminus\sigma_{x,r_l}$, для которой

$$\sup_{y\in\varphi_0(S(x,\varkappa_l))\cap D_F} d(y,\varphi_0(x))\geq \vartheta,\quad l\in\mathbb{N}. \tag{3.79}$$

Поскольку x — точка положительной плотности, то для всех r_l найдется $\tau_l\in(0,r_l)\setminus\sigma_{x,r_l}$ такое, что $S(x,\tau_l)\cap T_k\neq\emptyset$. В силу непрерывности отображения φ_0 на $T_k\cap D_F$ (см. предложение 3.7) для любого выбора точек $u_l\in S(x,\tau_l)\cap T_k\neq\emptyset$ имеем

$$u_l\to x\quad\text{и}\quad \varphi_0(u_l)\to y=\varphi_0(x)\in D'_F\quad\text{при } l\to\infty. \tag{3.80}$$

Следовательно, для последовательности u_l выполнены все условия леммы 3.24, из заключения которой выводим (3.78). □

Из предложения 3.7 и следствия 3.4 выводим следующие свойства отображения φ_0.

Следствие 3.5. *Пусть $x\in T\cap D_F$. Для любого достаточно малого $\rho>0$ найдется число $\delta_{x,\rho}>0$ такое, что*

1) для сфер $S(x,r)\subset D_F$ радиуса $r\in(0,\delta_{x,\rho})\setminus\sigma_{x,r}$, их образы $\varphi_0(S(x,r))$ содержатся в шаре $B(\varphi_0(x),\rho)\subset D'_F$, т. е.

$$\varphi_0(\widehat{B}(x,\delta_{x,\rho}))\subset B(\varphi_0(x),\rho)\subset D'_F. \tag{3.81}$$

2) *для почти всех интегральных линий* γ *горизонтальных векторных полей образы* $\varphi_0(\gamma\cap B(x,\delta_{x,\rho}))$ *содержатся в шаре* $B(\varphi_0(x),\rho)\subset D'_F$.

Следствие 3.6. *Пусть* $x\in T\cap D_F$. *Для шаров, удовлетворяющих соотношению* (3.81), *справедливо следующее свойство: для любой точки* $y\in B(x,\delta_{x,\rho})$ *образы* $\varphi_0(\widehat{B}(y,\tau))$ *стягиваются к единственной точке* $z\in\overline{B(\varphi_0(x),\rho)}\subset D'_F$ *при* $\tau\to 0$.

Доказательство. Фиксируем произвольную последовательность $\tau_k\to$ при $k\to\infty$. Для $k\in\mathbb{N}$ можно найти точку $u_k\in B(x,\delta_{x,\rho})\cap\widehat{B}(y,\tau)$. Имеем следующие свойства: $u_k\to x$ при $k\to\infty$, а $\varphi_0(u_k)\in\overline{B(\varphi_0(x),\rho)}\subset D'_F$. Переходя к подпоследоватльности, можно считать, что $\varphi_0(u_k)\to y\in D'_F$. Следовательно, для последовательности u_k выполнены все условия леммы 3.24, из заключения которой выводим утверждения следствия 3.6. □

Определение 3.7. Пусть $x\in T\cap D_F$. Для достаточно малого $\rho>0$ найдем по следствию 3.5 число $\delta_{x,\rho}>0$, для которого будет выполняться следующее включение:

$$\varphi_0(\widehat{B}(x,\delta_{x,\rho}))\subset B(\varphi_0(x),\rho)\subset D'_F.$$

Всякая точка $y\in B(x,\delta_{x,\rho})$ либо принадлежит пересечению $T\cap D_F$, либо ему не принадлежит. В первом случае имеем

$$\lim_{z\to y,z\in\widehat{B}(y,\delta_1)}\varphi_0(z)=\varphi_0(y),$$

где δ_1 — достаточно малое положительное число. Во втором случае значение отображения φ_0 в точке y не задано, но по следствию 3.6 определен предел

$$\lim_{z\to y,z\in\widehat{B}(y,\delta_2)}\varphi_0(z)\in D'_F,$$

который мы возьмем в качестве $\varphi_0(y)$ (здесь δ_2 — достаточно малое положительное число).

Следовательно, во всех точках шара $B(x,\delta_{x,\rho})$ определено отображение, которое мы обозначим тем же символом φ_0. Это отображение имеет следующее свойство:

$$\varphi_0(y)\in\overline{B(\varphi_0(x),\rho)}\subset D'_F \text{ для любой точки } y\in B(x,\delta_{x,\rho}),\tag{3.82}$$

более этого, в этом случае

$$\{\varphi_0(y)\}=\bigcap_{r\to 0}\overline{\varphi_0(\widehat{B}(y,r))}\in D'_F.$$

Предложение 3.9. *Отображение* $\varphi_0:B(x,\delta_{x,\rho})\to\overline{B(\varphi_0(x),\rho)}\subset D'_F$, *где* $x\in T\cap D_F$, *непрерывно.*

Доказательство. 1 СЛУЧАЙ: пусть $y \in B(x,\delta_{x,\rho}) \cap T \cap D_F$. В силу определения 3.7 для достаточно малого $\tau > 0$ существует число $\delta_{y,\tau} > 0$, для которого в силу (3.82) будут выполняться следующие включения: $\varphi_0(\widehat{B}(y,\delta_{y,\tau})) \subset B(\varphi_0(y),\tau) \subset \overline{B(\varphi_0(x),\rho)} \subset D'_F$, что и доказывает непрерывность отображения φ_0 в точке $y \in B(x,\delta_{x,\rho}) \cap T \cap D_F$.

2 СЛУЧАЙ: пусть $y \in B(x,\delta_{x,\rho}) \setminus (T \cap D_F)$. В силу определения 3.7 для достаточно малого $\tau > 0$ существует число $\delta_{y,\tau} > 0$, для которого будут выполняться следующие включения: $\varphi_0(\widehat{B}(y,\delta_{y,\tau})) \subset B(\varphi_0(y),\tau) \subset \overline{B(\varphi_0(y),\tau)} \subset D'_F$. Так же, как и предыдущем случае, для любой точки $z \in B(y,\delta_{y,\tau})$ имеем $\varphi_0(z) \in \overline{B(\varphi_0(y),\tau)} \subset D'_F$. Откуда аналогично предыдущему получаем непрерывность отображения φ_0 в точке $y \in B(x,\delta_{x,\rho}) \setminus (T \cap D_F)$. □

Предложение 3.10. *Отображения* $\varphi_0 : B(x,\delta_{x,\rho}) \to \overline{B(\varphi_0(x),\rho)}$ *и* $\varphi_0 : B(y,\delta_{y,\rho}) \to \overline{B(\varphi_0(y),\rho)}$, *где* $x,y \in T \cap D_F$, *совпадают на пересечении* $B(x,\delta_{x,\rho}) \cap B(y,\delta_{y,\rho})$, *если оно не пустое.*

Доказательство. В соответствии с определением 3.7 значение отображения φ_0 в точке $z \in B(x,\delta_{x,\rho}) \cap B(y,\delta_{y,\rho})$ можно определить, исходя либо из отображения $\varphi_0 : B(x,\delta_{x,\rho}) \to \overline{B(\varphi_0(x),\rho)}$, либо из отображения $\varphi_0 : B(y,\delta_{y,\rho}) \to \overline{B(\varphi_0(y),\rho)}$. Найдется шар $B(z,r_z) \subset B(x,\delta_{x,\rho}) \cap B(y,\delta_{y,\rho})$, на котором оба способа определения значения отображения φ_0 в точке z будут совпадать. □

Определение 3.8. Для точек $x \in T \cap D_F$ рассмотрим семейство шаров $B(x,\delta_{x,\rho}) \subset D_F$ из определения 3.7. На открытом множестве

$$U = \bigcup_{x \in T \cap D_F} B(x,\delta_{x,\rho})$$

в силу предложения 3.10 корректно определено непрерывное отображение, которое мы будем обозначать символом $\widetilde{\varphi}_0$. При этом $U \subset D_F$ и $|D_F \setminus U| = 0$.

Очевидно, отображение $\widetilde{\varphi}_0 : U \to D'_F$ — продолжение отображения $\varphi_0 : T \cap D_F \to D'_F$ до непрерывного отображения на открытом множестве U. Так как $T \cap D_F$ всюду плотно в U, такое продолжение единственное.

Предложение 3.11. *Отображение* $\widetilde{\varphi}_0 : U \to D'_F$ *— гомеоморфизм.*

Доказательство. В силу предложения 3.6 отображение $\varphi : T \cap D_F \to D'_F$

1) инъективно,

2) образ $\varphi(T \cap D_F)$ всюду плотен в D'_F и $|D'_F \setminus \varphi(T \cap D_F)| = 0$,

3) отображение $\varphi : T \cap D_F \to D'_F$ обладает $\mathcal{N}$-свойством и $\mathcal{N}^{-1}$-свойством Лузина.

Следовательно, по лемме 3.6 обратное отображение $\varphi^{-1} : T' \to D_F$, где $T' = \varphi_0(T)$, порождает оператор композиции $\varphi^{*-1} : L^1_p(D) \cap C^\infty(D) \to L^1_p(D')$.

Применяя вышедоказанные результаты к отображению $\varphi^{-1} : T' \to D_F$, получаем непрерывное отображение $\widetilde{\varphi^{-1}}_0 : V \to D_F$, определенное на некотором открытом множестве $V \subset D'_F$ со значениями в D_F, при этом $|D'_F \setminus V| = 0$. Можно сделать так, чтобы $\widetilde{\varphi}_0(U) = V$.

Поскольку $\varphi_0(T \cap D_F)$ всюду плотно в V из вышеустановленного выводим инъективность отображения $\widetilde{\varphi}_0 : U \to V \subset D'_F$ и его гомеоморфность. □

Квазиконформность отображения $\widetilde{\varphi}_0 : U \to V$

В этом разделе $U \subset D_F$ — открытое множество из определения 3.8, а $V = \widetilde{\varphi}_0(U)$. Основной результат настоящего раздела сформулирован в следующем утверждении.

Предложение 3.12. *Отображение $\widetilde{\varphi}_0 : U \to V$ квазиконформно.*

Доказательство этого утверждения можно найти в [69]. Однако, мы приведем другие рассуждения, имеющие более широкую область применения.

Доказательство предложения 3.12 по существу сводится к тому, чтобы установить абсолютную непрерывность отображения $\widetilde{\varphi}_0 : U \to V$ на почти всех интегральных линиях горизонтальных векторных полей (коротко $\varphi_0 \in \mathrm{ACL}(U)$) и поточечное неравенство

$$|D(x,\varphi)| \leq K|J(x,\varphi)|^{\frac{1}{\nu}} \quad \text{п. в. в } U. \tag{3.83}$$

Поскольку $\widetilde{\varphi}_0 : U \to V$ — аппроксимативно дифференцируемый гомеоморфизм, из формулы (3.43) выводим, что якобиан $J(x,\varphi)$ локально интегрируем в U. Более того, в силу неравенства Гёльдера, локально интегрируемой будет также и степень якобиана $J(x,\varphi)^{\frac{1}{\nu}}$.

Лемма 3.25. *Пусть $u \in \mathrm{Lip}_l(D') \cap L^1_\nu(D')$ и $||u \mid L^1_\nu(D')|| \leq 1$. Тогда*

$$|\nabla_{\mathcal{L}}(u \circ \varphi)|(x) \leq K \cdot J(x,\varphi)^{\frac{1}{\nu}} \qquad \text{п. в. на } D, \tag{3.84}$$

где K — некоторая постоянная.

Лемма 3.26. *Пусть $D,D' \subset \mathbb{G}$. Если отображение $\varphi : D \to D'$ принадлежит классу IL^1_ν, то $\widetilde{\varphi}_0 \in W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(U)$.*

Доказательство. Докажем, что $\widetilde{\varphi}_0 \in \mathrm{ACL}(U)$. Пусть $\{z_j\}$ — счетное всюду плотное множество точек в V. Зададим счетное семейство функций $d^r_{z_j} : V \to \mathbb{R}^+$, $d^r_{z_j}(y) = (r - d_{z_j}(y))^+$, где $r \in \mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$, $(d_{z_j}(y) = d(z_j,y))$. Для каждой такой функции выполняется поточечное равенство $\varphi^* d^r_{z_j}(x) = d^r_{z_j} \circ \widetilde{\varphi}_0(x)$, $r \in \mathbb{Q}^+$, $j \in \mathbb{N}$, для всех точек $x \in U$.

Кроме того, каждая такая функция удовлетворяет условиям леммы 3.25. Поэтому

$$|\nabla_{\mathcal{L}}(d^r_{z_j} \circ \widetilde{\varphi}_0)|(x) \leq CJ(x,\varphi)^{\frac{1}{\nu}}$$

для почти всех $x \in U$.

Рассмотрим слоение Γ_j открытого множества U, порожденное горизонтальным векторным полем X_j, и интегральную линию γ из этого слоения. Для почти всех кривых γ из слоения Γ_j выполнены следующие условия:

1) $\widetilde{\varphi}_0$ непрерывно на γ (предложение 3.7);

2) выполняется поточечное неравенство для измеримых функций: $|\nabla_{\mathcal{L}}\big(\varphi^* d^r_{z_j}\big)|(t) \leq KJ(t,\varphi)^{\frac{1}{\nu}}$, $r \in \mathbb{Q}^+$, $j \in \mathbb{N}$, п. вс. на γ, и функция $J(t,\varphi)^{\frac{1}{\nu}}$ интегрируема на произвольной компактной части γ.

3) для почти всех $x_0 \in \gamma$ существует конечный предел отношения $\frac{1}{d(x_0,x)} \int\limits_{[x_0,x]} J(t,\varphi)^{\frac{1}{\nu}}\, d\sigma$ при $x \to x_0$ по кривой γ, равный $J(x_0,\varphi)^{\frac{1}{\nu}}$ (здесь $[x_0,x] \subset \gamma$ — отрезок интегральной линии);

4) неравенство (3.84) верно для всех функций $\{d^r_{z_j}\}$ одновременно п. вс. на γ;

5) функции $\varphi^* d^r_{z_j}$ абсолютно непрерывны на γ для всех $j \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Q}^+$.

Фиксируем кривую $\gamma \in \Gamma_j$, на которой выполняются все 5 свойств.

Пусть $x_0 \in U \cap \gamma$ — точка положительной линейной плотности на кривой γ и точка, в которой выполняется условие 3. Положим $z = \widetilde{\varphi}_0(x_0)$. Фиксируем подпоследовательность $\{z_{j_l}\}$ точек из $\{z_j\}$, сходящаяся к $z = \widetilde{\varphi}_0(x_0)$ (далее будем обозначать элементы этой подпоследовательности как z_l). Так как отображение $\widetilde{\varphi}_0$ непрерывно на γ в точке x_0, можно подобрать числа δ, r и L такие, что $\widetilde{\varphi}_0(B(x_0,\delta) \cap \gamma) \subset V$ (следствие 3.5) и $d^r_{z_l} \circ \widetilde{\varphi}_0(x) \neq 0$ для всех $l \geq L$, и всех точек $x \in B(x_0,\delta) \cap \gamma$.

Далее, интегрируя функцию $CJ(x,\varphi)^{\frac{1}{\nu}}$ (где C не зависит от r,z) по части кривой γ от x_0 до x, где $x \in B(x_0,\delta) \cap \gamma$, выводим

$$C \int\limits_{[x_0,x]} J(t,\varphi)^{\frac{1}{\nu}}\, dt \geq \int\limits_{[x_0,x]} |\nabla_{\mathcal{L}}\big(\varphi^* d^r_{z_j}\big)|(t)\, dt \geq$$
$$|d^r_{z_l} \circ \widetilde{\varphi}_0(x_0) - d^r_{z_l} \circ \widetilde{\varphi}_0(x)| = |r - d_{z_l}(\widetilde{\varphi}_0(x_0)) - r + d_{z_l}(\widetilde{\varphi}_0(x))| =$$
$$|-d_{z_l}(\widetilde{\varphi}_0(x_0)) + d_{z_l}(\widetilde{\varphi}_0(x))| \to d_z(\widetilde{\varphi}_0(x)) = d(\widetilde{\varphi}_0(x_0),\widetilde{\varphi}_0(x)) \quad \text{при } l \to \infty.$$

Таким образом, получаем

$$d(\widetilde{\varphi}_0(x_0),\widetilde{\varphi}_0(x)) \leq C \int\limits_{[x_0,x]} J(t,\varphi)^{\frac{1}{\nu}}\, d\sigma \tag{3.85}$$

для всех $x \in B(x_0,\delta) \cap \gamma$. Из оценки (3.85) и абсолютной непрерывности интеграла выводим, что отображение $\widetilde{\varphi}_0$ абсолютно непрерывно на $B(x_0,\delta) \cap \gamma$.

В силу произвола в выборе горизонтального поля X_j, интегральной кривой $\gamma \in \Gamma_j$ и точки $z_0 \in \gamma$ отображение φ абсолютно непрерывно вдоль почти всех горизонтальных кривых.

Из (3.85) имеем

$$\frac{d(\widetilde{\varphi}_0(x_0),\widetilde{\varphi}_0(x))}{d(x_0,x)} \leq \frac{C}{d(x_0,x)} \int\limits_{[x_0,x]} J(t,\varphi)^{\frac{1}{\nu}}\, d\sigma. \tag{3.86}$$

Переходя к пределу при $x \to x_0$, получаем оценку

$$|X_j\widetilde{\varphi}_0(x_0)| \leq CJ(x_0,\varphi)^{\frac{1}{\nu}}. \tag{3.87}$$

Следовательно $|X_j\varphi| \in L_{\nu,\mathrm{loc}}(D_F)$ для всех j, и $\widetilde{\varphi}_0 \in W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(U)$. $\square$

Другие свойства отображений классов Соболева на группе Карно, в частности, формулу замены переменной, можно найти в [70].

Доказательство предложения 3.12. Принадлежность гомеоморфизма $\widetilde{\varphi}_0 : U \to V$ классу Соболева $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(U)$ доказана в лемме 3.26. Поточечное неравенство (3.83) вытекает из (3.87).

Локальная связность U и V

Обозначим $S = D_F \setminus U$. Пусть $x \in S$, тогда возможны два случая:

1) найдется $r_0 > 0$ такое, что $\overline{\widetilde{\varphi}_0(\widehat{B}(x,r))} \subset D'_F$ для всех $r < r_0$,

2) $\widetilde{\varphi}_0(S(x,r_k)) \cap \partial D'_F \neq \emptyset$ для некоторой последовательности $r_k \to 0$.

При выполнении случая 1), отображению $\widetilde{\varphi}_0$ можно приписать значение в точке x: полагаем

$$\widetilde{\varphi}_0(x) = \bigcap_{r\to 0} \overline{\widetilde{\varphi}_0(\widehat{B}(x,r))} \in D_F.$$

При таком задании значения $\widetilde{\varphi}_0(x)$ мы приходим к ситуации, аналогичной той, которая была рассмотрена в определении 3.7. Следовательно, отображение $\widetilde{\varphi}_0(x)$ можно задать не только в точке x, но и в точках некоторого шара $B(x,\delta_{x,\rho})$ способом, указанным в определении 3.7. Так же, как и в предложении 3.9, доказывается, что отображение $\widetilde{\varphi}_0 : B(x,\delta_{x,\rho}) \to D'_F$ непрерывно во всех точках шара $B(x,\delta_{x,\rho})$. Тогда области U и V можно расширить, а множество S сузить.

Далее считаем, что для всех точек $x \in S$ выполнено свойство 2).

Пусть $x \in S$. Найдется последовательность $\{x_k \in U\}$, сходящаяся к x, такая, что $\widetilde{\varphi}_0(x_k) \to \partial D'$ при $k \to \infty$. В этом случае справедлива

Лемма 3.27. *Для любого шара $B(x,r) \subset D_F$ с центром $x \in S$ множество $B(x,r) \cap U$ связно.*

Доказательство. Предположим, что это не так и $B(x,r) \cap U$ состоит из нескольких компонент связности. Тогда образ $\widetilde{\varphi}_0(B(x,r))$ разделяется границей $\partial D'_F$ на несколько компонент связности: $\widetilde{\varphi}_0(B(x,r)) = V_1 \cup V_2 \cup \dots$. Или $D'_F \setminus \widetilde{\varphi}_0(S(x,r)) = V_0 \cup V_1 \cup V_2 \cup \dots$.

Рассмотрим в области D_F гладкую срезку

$$\eta = \begin{cases} 1 & \text{на } B(x,r/2), \\ 0 & \text{вне } B(x,r). \end{cases}$$

Можно считать, что $|\widetilde{\varphi}_0^{-1}(V_1) \cap B(x,r/2)| > 0$. Построим функцию $g : D'_F \to \mathbb{R}$ такую, что

$$g(y) = \begin{cases} \eta \circ \widetilde{\varphi}_0^{-1}(y) & \text{на } V_1, \\ 0 & \text{на } V_0 \cup V_2 \cup V_3 \cup \dots. \end{cases} \tag{3.88}$$

Очевидно, что g — непрерывная функция на V. Покажем, что $g \in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')$. Так как отображение $\varphi_0 : B(x,r) \cap U \to \varphi_0(B(x,r)) \cap V$ квазиконформно, то функция $g \in L^1_\nu(\varphi_0(B(x,r)) \cap V)$. Следовательно, g локально интегрируема и имеет суммируемые в степени ν обобщенные производные в $\varphi_0(B(x,r)) \cap V$. В частности, функция g абсолютно непрерывна на почти всех интегральных линиях горизонтальных векторных полей и существуют производные $v_j = X_j g$ п. в. в $\varphi_0(B(x,r)) \cap V$, $j = 1,2,\dots,n$. Остается показать, что v_j — обобщенная производная функции g в D'_F, т. е. выполнено равенство

$$\int\limits_{D'_F} g(y) \cdot X_j \psi(y)\, dy = -\int\limits_{D'_F} v_j \cdot \psi\, dy \tag{3.89}$$

для любой тестовой функции $\psi \in C_0^\infty(D'_F)$. По теореме Фубини имеем

$$\int\limits_{D'_F} g(y) \cdot X_j \psi(y)\, dy = \int\limits_{\mathrm{Pr}_j\, D'_F} dy_1 \dots \widehat{dy_j} \dots dy_N \int\limits_{\Gamma_j(y) \cap D'_F} g(y) \cdot X_j \psi(y)\, dy_j,$$

где $\Pr_j D'_F$ — проекция D'_F на гиперповерхность, трансверсальную векторному полю X_j, $\Gamma_j(y)$ — интегральная линия X_j, проходящая через точку $y \in \Pr_j D'_F$. Поскольку $g = 0$ на $V_0 \cup V_2 \cup V_3 \cup \ldots$ получаем

$$\int\limits_{\Gamma_j(y)\cap D'_F} g(y)\cdot X_j\psi(y)\,dy_j = \int\limits_{\Gamma_j(y)\cap V_0\cup V_1\cap V_2\cup\ldots} g(y)\cdot X_j\psi(y)\,dy_j = \int\limits_{\Gamma_j(y)\cap V_1} g(y)\cdot X_j\psi(y)\,dy_j.$$

Пересечение $\Gamma_j(y)\cap V_1$ можно представить в виде счетного объединения кривых: $\Gamma_j(y)\cap V_1 = \bigcup\limits_l \gamma_l$. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma_j(y)\cap V_1} g(y)\cdot X_j\psi(y)\,dy_j = \sum_l \int\limits_{\gamma_l} g(y)\cdot X_j\psi(y)\,dy_j.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, выводим

$$\int\limits_{\gamma_l} g(y)\cdot X_j\psi(y)\,dy_j = g(y)\psi(y)\Big|_{\gamma_l(t_0^l)}^{\gamma_l(t_1^l)} - \int\limits_{\gamma_l} X_j g(y)\cdot\psi(y)\,dy_j.$$

Заметим, что $\gamma_l(t_0^l) \in \partial V_1$ и возможны два случая

1) $\gamma_l(t_0^l) \in D'_F$, тогда $g(\gamma_l(t_0^l)) = 0$,

2) $\gamma_l(t_0^l) \in \partial D'_F$, тогда $\psi(\gamma_l(t_0^l)) = 0$.

Аналогично для точки $\gamma_l(t_1^l)$. Таким образом

$$g(y)\psi(y)\Big|_{\gamma_l(t_0^l)}^{\gamma_l(t_1^l)} = 0,$$

и равенство (3.89) доказано. То есть $g \in L^1_{\nu,\varphi(F)}(D')$.

Далее $\varphi^* g \in L^1_{\nu,F}(D)$ и почти всюду на $B(x,r/2)$ принимает только два значения (0 и 1). Следовательно, $\nabla\varphi^* g = 0$ почти всюду на $B(x,r/2)$, и, значит, $\varphi^* g = g\circ\widetilde{\varphi}_0$ — постоянная функция на $B(x,r/2)$. Это противоречие приводит к выводу: пересечение $B(x,r)\cap U$ связно.

□

Аналогичное свойство выполняется и в образе.

Лемма 3.28. *Для любого шара $B(y,r) \subset D'_F$ с центром $y \in \varphi_0(S)$ пересечение $B(y,r)\cap V$ связное.*

Продолжение отображения $\widetilde{\varphi}_0$ на S и его свойства

В этом разделе нам понадобится следующая

Лемма 3.29. *Пусть даны кривые $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1) \to V$ и расстояние между ними положительное. Тогда никакая точка из D_F не может предельной точкой для каждого из прообразов $\beta_1 = \widetilde{\varphi}_0{}^{-1}(\gamma_1)$ и $\beta_2 = \widetilde{\varphi}_0{}^{-1}(\gamma_2)$.*

Доказательство. Пусть, напротив, найдется точка $y \in D'$, предельная для прообразов $\widetilde{\varphi}_0{}^{-1}(\gamma_1)$ и $\widetilde{\varphi}_0{}^{-1}(\gamma_2)$: существует последовательность $t_k \in [0,1)$, $t_k \to 1$ ($\tau_k \in [0,1)$, $\tau_k \to 1$) при $k \to \infty$, такая, что $\beta_1(t_k) \to y$ ($\beta_2(\tau_k) \to y$) при $k \to \infty$. Рассмотрим непрерывную функцию $g \in L^1_\nu(D')$ такую, что $g = 0$ на γ_1 и $g = 1$ на γ_2. Тогда композиция $f = g \circ \widetilde{\varphi}_0 : U \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, принимающая значение 0 на β_1 и 1 на β_2. Более того, $\varphi^*(g) \in L^1_\nu(D)$. Существование такой функции противоречит предложению 1.9. □

Покажем, что отображение можно продолжить на часть множества S (исключая те точки, образы которых могут переходить в бесконечно удаленную точку). Пусть $x \in S$. Возможны два случая.

1) Для некоторой последовательность $\{x_n \in U\}$, сходящейся к x, последовательность образов $\widetilde{\varphi}_0(x_n)$ сходится к некоторой точке $z \in \partial D'_F$.

2) Для любой последовательности $\{x_n \in U\}$, сходящейся к x, имеем $d(\widetilde{\varphi}_0(x_n),0) \to \infty$ (этот случай будет рассмотрен ниже отдельно).

Ниже мы доказываем, что в первом случае отображение $\widetilde{\varphi}_0$ продолжается по непрерывности в точку $x \in S$.

Предложение 3.13. *Отображение $\widetilde{\varphi}_0 : U \to V$ продолжается по непрерывности во все точки $x \in S$, для каждой из которых существует последовательность $\{x_n \in U\}$, сходящаяся к x, такая, что последовательность образов $\widetilde{\varphi}_0(x_n)$ сходится к некоторой точке $z \in \partial D'_F$.*

Продолженное отображение инъективно.

Доказательство. Покажем, что предел z не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$. Допустим $U \ni x'_n \to x$ — другая последовательность, и $\widetilde{\varphi}_0(x'_n) \to z' \in \partial D'_F$, причем $z \neq z'$. В силу локальной связности V можно построить две кривые $\gamma,\gamma' \subset V$, находящиеся на положительном расстоянии $\operatorname{dist}(\gamma,\gamma') \geq \delta > 0$ и проходящие через образы $\widetilde{\varphi}_0(x_n)$, $\widetilde{\varphi}_0(x'_n)$ соответственно (начиная с некоторого $n > n_0$). Тогда прообразы $\widetilde{\varphi}_0{}^{-1}(\gamma)$ и $\widetilde{\varphi}_0{}^{-1}(\gamma')$ будут иметь предельную точку $x \in D_F$. По лемме 3.29 получаем противоречие.

Доопределим отображение $\widetilde{\varphi}_0$ в точке x: $\widetilde{\varphi}_0(x) = z$. Таким образом, построено непрерывное продолжение отображения $\widetilde{\varphi}_0$ на S, за исключением тех точек, которые отображаются в бесконечно удаленную точку. Будем обозначать продолжение тем же символом.

Проверим инъективность отображения $\widetilde{\varphi}_0$. Допустим, что нашлась точка $z \in Z$ такая, что $z = \widetilde{\varphi}_0(x_1) = \widetilde{\varphi}_0(x_2)$, где $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in S$. Рассмотрим кривые γ_1, γ_2, проходящие через точки x_1,x_2 соответственно, и находящиеся на положительном расстоянии ($\delta = \operatorname{dist}(\gamma_1, \gamma_2)$). Рассмотрим произвольные последовательности $\{x_n^1 \in U\}$, $\{x_n^2 \in U\}$ такие, что $x_n^i \to x_i$ при $n \to \infty$ и $x_n^i \in \gamma_i$. Построим последовательность кривых σ_n, соединяющих точки $\widetilde{\varphi}_0(x_n^1)$ и $\widetilde{\varphi}_0(x_n^2)$, так, что $\operatorname{diam} \sigma_n \to 0$. Тогда $\operatorname{Cap}\big(\widetilde{\varphi}_0^{-1}(\sigma_n); L_\nu^1(U)\big) \to 0$ и $\operatorname{diam} \widetilde{\varphi}_0^{-1}(\sigma_n) \to 0$. Приходим к противоречию, поскольку $\operatorname{diam} \widetilde{\varphi}_0^{-1}(\sigma_n) \geq \delta$. $\square$

Таким образом, от множества S остаются лишь точки, удовлетворяющие второму из описанных перед предложением 3.13 случаев. В следующем утверждении мы доказываем, если множество S не пусто, то оно состоит только из одной точки.

Лемма 3.30. *Может существовать самое большее одна точка $x_{\text{inv}} \in S$ такая, что для любой последовательности $\{x_n\} \subset U$, сходящейся к x_{inv}, имеет место $d(\widetilde{\varphi}_0(x_n)) \to \infty$ при $n \to \infty$ (случай инверсии).*

Доказательство. Сначала покажем, что множество S имеет нулевую емкость. Выберем два шара $B(0,r_0)$, $B(0,R_k)$ такие, что $\varphi(F) \subset B(0,r_0)$, r_0 — фиксировано, $R_k > r$ и $\lim\limits_{k\to\infty} R_k = \infty$. Заметим, что

$$S \subset \bigcap_k \overline{\widetilde{\varphi}_0^{-1}(\mathbb{G} \setminus B(0,R_k))}.$$

Имеем следующие неравенства

$$\begin{aligned}\overline{\operatorname{Cap}}\big(S; L_{\nu,F}^1(D)\big) &\leq \overline{\operatorname{Cap}}\big(\widetilde{\varphi}_0^{-1}(\mathbb{G} \setminus B(0,R_k)) \cap D_F; L_{\nu,F}^1(D)\big) \\ &\leq K^\nu \overline{\operatorname{Cap}}\big((\mathbb{G} \setminus B(0,R_k) \cap D'_F; L_{\nu,\varphi(F)}^1(D')\big) \leq K^\nu \operatorname{Cap}\big(\mathbb{G} \setminus B(0,R_k); L_{\nu,B(0,r)}^1(\mathbb{G})\big).\end{aligned}$$

Из [58, Теорема 6.6, Теорема 6.9] получаем, что емкость $\operatorname{Cap}\big(\mathbb{G} \setminus B(0,R); L_{\nu,B(0,r)}^1(\mathbb{G})\big)$ эквивалентна величине $\big(\ln \frac{R}{r_0}\big)^{1-\nu}$, следовательно

$$\lim_{k\to\infty} \overline{\operatorname{Cap}}\big(\widetilde{\varphi}_0^{-1}(\mathbb{G} \setminus B(0,R_k)) \cap D_F; L_{\nu,F}^1(D)\big) = 0 \quad \text{и} \quad \overline{\operatorname{Cap}}\big(S; L_{\nu,F}^1(D)\big).$$

Таким образом, множество S имеет нулевую емкость. Покажем, что S не может состоять более чем из одной точки.

Пусть, напротив, нашлись две различные точки x_1,$x_2 \in S$, удовлетворяющие указанному свойству. Рассмотрим последовательности $\{x_n^1\}, \{x_n^2\} \subset U$, такие, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n^1 = x_1 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} x_n^2 = x_2.$$

Выберем сферы $S(x_1,r_1), S(x_2,r_2) \subset U$, на которых отображение $\widetilde{\varphi}_0$ непрерывно (см. предложение 3.7), таким образом, чтобы $\overline{B}(x_1,r_1) \cap \overline{B}(x_2,r_2) = \emptyset$.

Поскольку $\widetilde{\varphi}_0$ — непрерывное и инъективное отображение, образ $\widetilde{\varphi}_0(S(x_1,r_1))$ разбивает $\mathbb{G}$ на две компоненты связности (ограниченную и неограниченную), при этом $\widetilde{\varphi}_0(B(x_1,r_1)\setminus S)$ принадлежит неограниченной компоненте, а $\widetilde{\varphi}_0(U \setminus B(x_1,r_1))$ — ограниченной компоненте.

С другой стороны, $B(x_2,r_2) \setminus S \subset U \setminus B(x_1,r_1)$ и, следовательно, $\widetilde{\varphi}_0(B(x_2,r_2) \setminus S)$ принадлежит ограниченной компоненте $\mathbb{G} \setminus \widetilde{\varphi}_0(S(x_1,r_1))$, что противоречит предположению $d(\widetilde{\varphi}_0(x_n^2)) \to \infty$ при $n \to \infty$. $\square$

В итоге мы получили непрерывное инъективное отображение $\widetilde{\varphi}_0 : D_F \setminus \{x_{\text{inv}}\} \to \overline{D'_F}$.

Предложение 3.14. *Отображение $\widetilde{\varphi}_0 : D_F \setminus \{x_{\text{inv}}\} \to \mathbb{G}$ гомеоморфно.*

Для доказательства достаточно проверить, что отображение $\widetilde{\varphi}_0 : D_F \setminus \{x_{\text{inv}}\} \to G$ открыто. Действительно, для любого шара $B(x,r) \subset D_F$ степень $\mu(\widetilde{\varphi}_0,B(x,r),\varphi_0(x)) \neq 0$. Отсюда выводим, что $\widetilde{\varphi}_0(x)$ — внутренняя точка образа.

Теперь мы можем доказать, что отображение $\widetilde{\varphi}_0$ принадлежит классу Соболева $W^1_{\nu,\text{loc}}(D_F \setminus \{x_{\text{inv}}\})$ (расширение леммы 3.26).

Лемма 3.31. *Пусть $D,D' \subset \mathbb{G}$. Если отображение $\varphi : D \to D'$ принадлежит классу IL^1_ν, то $\widetilde{\varphi}_0 \in W^1_{\nu,\text{loc}}(D_F \setminus \{x_{\text{inv}}\})$.*

Доказательство. Эта лемма — прямое следствие леммы 3.26, в условии которой в качестве U следует взять $D_F \setminus \{x_{\text{inv}}\}$. $\square$

Из вышесказанного выводим

Предложение 3.15. *Отображение $\widetilde{\varphi}_0 : D_F \setminus \{x_{\text{inv}}\} \to \mathbb{G}$ квазиконформно.*

Доказательство. Из последних утверждений вытекает, что гомеоморфизм $\widetilde{\varphi}_0$ принадлежит классу $W^1_\nu(D_F \setminus \{x_{\text{inv}}\})$ и п. в. в $D_F \setminus \{x_{\text{inv}}\}$ выполняется поточечное неравенство

$$|D(x,\widetilde{\varphi}_0)| \leq K|J(x,\varphi)|^{\frac{1}{\nu}},$$

поскольку $|S| = 0$ (заметим, что $J(x,\varphi) = J(x,\widetilde{\varphi}_0)$ п. в.). Следовательно, отображение $\widetilde{\varphi}_0 : D_F \setminus \{x_{\text{inv}}\} \to \mathbb{G}$ квазикоформно. $\square$

Предложение 3.16. *Отображение $\widetilde{\varphi}_0 : D \setminus \{x_{\text{inv}}\} \to \mathbb{G}$ квазикоформно.*

Доказательство. Выберем другое замкнутое множество положительной меры $F_1 \subset T_{k_0}$ без изолированных точек, находящееся на положительном расстоянии от F. Повторяя вышеописанную процедуру, доказываем квазиконформность $\widetilde{\varphi}_0$ на открытом множестве $D\setminus\{x_{\text{inv}}\}$. $\square$

3.3.3 Доказательство теоремы 3.3

Доказательство. Достаточность. Можно считать, что отображение $\varphi : D \to D'$ квазиконформное. По определению 3.6 этой работы квазиконформное отображение φ локально принадлежит классу Соболева ($\varphi \in W^1_{\nu,\mathrm{loc}}$). Кроме того, отображение φ $\mathcal{P}$-дифференцируемо и обладает $\mathcal{N}$-свойством и $\mathcal{N}^{-1}$-свойством Лузина [70].

Для произвольной функций $f \in L^1_\nu(D') \cap C^\infty(D')$ композиция $f \circ \varphi$ абсолютно непрерывна на почти всех интегральных линиях горизонтальных векторных полей, в силу того, что отображение f является таковым. Более того, $\nabla(f \circ \varphi) = D_h\varphi^T(x)\nabla f(\varphi(x))$ [48, p. 263], где $D_h\varphi(x) = \{X_i\varphi_j(x)\}$, $i,j = 1,\dots,n_1$, — горизонтальная часть $\mathcal{P}$-дифференциала. Отсюда

$$
\begin{aligned}
\int\limits_D |\nabla(f \circ \varphi)|^\nu\, dx &= \int\limits_D |D_h\varphi^T(x)\nabla f(\varphi(x))|^\nu\, dx \\
&\leq \int\limits_D |D_h\varphi^T(x)|^\nu \cdot |\nabla f(\varphi(x))|^\nu\, dx = \int\limits_D |\nabla f|^\nu(\varphi(x)) \cdot |D_h\varphi(x)|^\nu\, dx \\
&\leq K \int\limits_D |\nabla f|^\nu(\varphi(x)) \cdot |J(x,\varphi)|\, dx = K \int\limits_{D'} |\nabla f|^\nu(y)\, dy.
\end{aligned}
$$

Здесь мы воспользовались поточечным неравенством $|D_h\varphi(x)|^\nu \leq K|J(x,\varphi)|$ для п. в. $x \in D$, и формулой замены переменной (3.43).

В силу леммы 3.6 полученное неравенство верно для всех функций $f \in L^1_\nu(D')$, т. е.

$$
\|\varphi^*(f) \mid L^1_\nu(D)\| \leq K^{\frac{1}{\nu}} \|f \mid L^1_\nu(D')\|. \tag{3.90}
$$

Отображение φ^{-1} также квазиконформно. Тогда для $g \in L^1_\nu(D)$ имеем

$$
\|\varphi^{-1*}(g) \mid L^1_\nu(D')\| \leq K_1^{\frac{1}{\nu}} \|g \mid L^1_\nu(D)\|, \tag{3.91}
$$

где K_1 — коэффициент квазиконформности обратного отображения. Заметим, что для $f \in L^1_\nu(D') \cap C^\infty(D')$ верно $\varphi^{-1*}(f \circ \varphi) = f$. Следовательно неравенство (3.91) принимает вид

$$
K_1^{-\frac{1}{\nu}} \|f \mid L^1_\nu(D')\| \leq \|\varphi^*(f) \mid L^1_\nu(D)\|.
$$

Таким образом,

$$
K_1^{-\frac{1}{\nu}} \|f \mid L^1_\nu(D')\| \leq \|\varphi^*(f) \mid L^1_\nu(D)\| \leq K^{\frac{1}{\nu}} \|f \mid L^1_\nu(D')\|,
$$

где постоянные K и K_1 зависят только от свойств отображения φ.

Покажем, что образ $\varphi^*\big(L^1_\nu(D')\cap C^\infty(D')\big)$ всюду плотен в $L^1_\nu(D)$. Пусть $g\in L^1_\nu(D)$. Найдется последовательность $g_n\in L^1_\nu(D)\cap C^\infty(D)$ такая, что $\big\|g-g_n\mid L^1_\nu(D)\big\|\to 0$. С другой стороны, в силу двусторонней оценки $g_n\circ\varphi^{-1}\in L^1_\nu(D')$. Следовательно, найдется последовательность $f_{nk}\in L^1_\nu(D')\cap C^\infty(D')$ такая, что $\big\|g_n\circ\varphi^{-1}-f_{nk}\mid L^1_\nu(D')\big\|\to 0$ при $k\to\infty$. Тогда для некоторой последовательности натуральных чисел l_n имеем $\varphi^*f_{nl_n}\in\varphi^*\big(L^1_\nu(D')\cap C^\infty(D')\big)$ и $\big\|g-\varphi^*f_{nl_n}\mid L^1_\nu(D)\big\|\to 0$ при $n\to\infty$.

Необходимость. Существование квазиконформного отображения Φ доказано в предложении 3.15: $\Phi=\widetilde{\varphi}_0 : D\setminus\{x_{\rm inv}\}\to G$. На основании доказанного выше оператор композиции $\Phi^* : L^1_\nu(\Phi(D\setminus\{x_{\rm inv}\}))\to L^1_\nu(D\setminus\{x_{\rm inv}\})$ изоморфен. Так как очевидно $L^1_\nu(D\setminus\{x_{\rm inv}\})=L^1_p(D)$, отсюда имеем изоморфизм $\varphi^{*-1}\circ\Phi^* : L^1_\nu(\Phi(D\setminus\{x_{\rm inv}\}))\to L^1_\nu(D')$ такой, что $\varphi^{*-1}\circ\Phi^*(f)(x)=f(x)$ для всех точек $x\in\Phi(D\setminus\{x_{\rm inv}\})\cap D'$, где $f\in L^1_\nu(\Phi(D\setminus\{x_{\rm inv}\}))$ — произвольная функция.

Следовательно, пространство $L^1_\nu(\Phi(D\setminus\{x_{\rm inv}\})\cup D')$ изоморфно через оператор ограничения как пространству $L^1_\nu(\Phi(D\setminus\{x_{\rm inv}\}))$, так и $L^1_\nu(D')$. Таким образом, $\Phi(D\setminus\{x_{\rm inv}\})$ и D' — $(1,\nu)$-эквивалентные области.

Аналогично доказанному в [67, теорема 3.1] и [58, предложение 6.10] можно получить следующие свойства:

1) $|\Phi(D)\Delta D'|=0$;

2) для любого шара $B\subset D'$ множество $B\setminus\Phi(D)\Delta D'$ связное. $\square$

3.3.4 Устранимые множества для квазиконформных отображений

Напомним, что замкнутое множество $E\subset D$ называется *устранимым* для квазиконформных отображений, если всякое квазиконформное отображение $\varphi : D\setminus E\to\mathbb{G}$ продолжается до квазиконформного отображения области D.

Следствие 3.7. *Пусть U и D $(1,\nu)$-эквивалентны, $U\subset D$. Тогда множество $D\setminus U$ является устранимым для квазиконформных отображений.*

Доказательство. Пусть $\varphi_1 : U\to\mathbb{G}$ — квазиконформное отображение. Для доказательства следствия построим квазиконформное продолжение отображения φ_1 на область D.

По теореме 3.3 оператор композиции $\varphi_1^* : L^1_\nu(\varphi_1(U))\to L^1_\nu(U)$ является изоморфизмом. Поскольку множества U и D $(1,\nu)$-эквивалентны, то оператор ограничения $r^* : L^1_\nu(D)\to L^1_\nu(U)$ также изоморфизм.

Рассмотрим измеримое отображение $\varphi : D\to\varphi_1(U)$ такое, что $\varphi(x)=\varphi_1(x)$ для $x\in U$. Оператор композиции $\varphi^* : L^1_\nu(\varphi_1(U))\cap C^\infty(\varphi_1(U))\to L^1_\nu(D)$, определенный правилом

$\varphi^* f = f \circ \varphi$ продолжается до изоморфизма пространств $L^1_\nu(\varphi_1(U))$ и $L^1_\nu(D)$, поскольку $\varphi^* f = r^{*-1} \circ \varphi_1^* f$ для $f \in L^1_\nu(\varphi_1(U)) \cap C^\infty(\varphi_1(U))$. В силу теоремы 3.3 найдется квазиконформное отображение $\Phi : D \to \mathbb{G}$, совпадающее с φ почти всюду. При этом $\Phi(x) = \varphi(x)$, если $x \in U$. Таким образом Φ — искомое продолжение.

$\square$

Заключение

Изложенные результаты имеют теоретический характер и могут быть использованы специалистами, работающими в различных областях анализа, геометрии и уравнений в частных производных. Следующие достижения наиболее важны:

1. Описаны операторы композиции весовых пространств Соболева и установлены необходимые и достаточные условия, при которых измеримое отображение индуцирует ограниченный оператор весовых пространств Соболева.

2. Описаны изоморфизмы пространств Соболева, порожденные измеримыми отображениями. Доказано, что такие отображения можно переопределить на множестве меры нуль так, что они будут либо квазиконформными, когда показатель суммируемости совпадает с хаусдорфовой размерностью группы, либо квазиизометрическими в противном случае.

Результаты диссертационного исследования могут быть применены в образовательном процессе при организации спецкурсов по анализу на субримановых пространствах, предназначенных для студентов, магистрантов и аспирантов высших учебных заведений.

Список литературы

1. *Соболев С. Л.* О некоторых группах преобразований n-мерного пространства // *Докл. АН.* — 1941. — Т. 32, № 6. — С. 380–382.

2. *Водопьянов С. К.* О регулярности отображений, обратных к соболевским // *Матем. сб.* — 2012. — Т. 203, № 10. — С. 3–32.

3. *Мазья В. Г.* Классы множеств и теоремы вложения функциональных классов. Некоторые проблемы теории эллиптических операторов: дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Л.: Ленинградский госуниверситет, 1961.

4. *Gehring F. W.* Lipschitz mappings and the p-capacity of rings in n-space // Advances in the theory of Riemann surfaces (Proc. Conf., Stony Brook, N.Y., 1969). — Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1971. — Pp. 175–193. Ann. of Math. Studies, No. 66.

5. *Poleckiĭ E. A.* Quasiconformal homeomorphisms and orthogonal isomorphisms // Metric questions of the theory of functions and mappings, No. V (Russian). — Izdat. “Naukova Dumka”, Kiev, 1974. — Pp. 120–127.

6. *Водопьянов С. К. Гольдштейн В. М.* Структурные изоморфизмы пространств W_n^1 и квазиконформные отображения // *Сиб. мат. журн.* — 1975. — Т. 16, № 2. — С. 224–246.

7. *Водопьянов С. К. Гольдштейн В. М.* Функциональные характеристики квазиизометрических отображений // *Сиб. мат. журн.* — 1976. — Т. 17, № 4. — С. 768–773.

8. *Гольдштейн В. М. Романов А. С.* Об отображениях, сохраняющих пространства Соболева // *Сиб. мат. журн.* — 1984. — Т. 25, № 3. — С. 55–61.

9. *Vodopyanov S.K.* Composition operators on Sobolev spaces. // Complex analysis and dynamical systems II. Proceedings of the 2nd conference in honor of Professor Lawrence Zalcman’s sixtieth birthday, Nahariya, Israel, June 9–12, 2003. — Providence, RI: American Mathematical Society (AMS); Ramat Gan: Bar-Ilan University, 2005. — Pp. 401–415.

10. *Данфорд Н. Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. — М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962.

11. *Garrido M. I. Jaramillo J. A.* Variations on the Banach-Stone Theorem // *Extracta Mathematicae.* — 2002. — Vol. 17, no. 3. — Pp. 351–383.

12. *Nakai M.* Algebraic criterion on quasiconformal equivalence of Riemann surfaces // *Nagoya Math. J.* — 1960. — Vol. 16. — Pp. 157–184.

13. *Lewis L. G.* Quasiconformal mappings and Royden algebras in space // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1971. — Vol. 158, no. 2. — Pp. 481–492.

14. *Водопьянов С. К. Гольдштейн В. М.* Новый функциональный инвариант для квазиконформных отображений // Некоторые вопросы современной теории функций: Материалы конф. — Новосибирск, 1976. — С. 18–20.

15. *Водопьянов С. К.* Отображения однородных групп и вложения функциональных пространств // *Сиб. мат. журн.* — 1989. — Т. 30, № 5. — С. 25–41.

16. *Романов А. С.* О замене переменной в пространствах потенциалов Бесселя и Рисса // Функциональный анализ и математическая физика: Сб. научных трудов / АН ССР. Сиб. отд-ние. — Новосибирск: Ин-т математики, 1985. — С. 117–133.

17. *Водопьянов С. К.* L_p-теория потенциала и квазиконформные отображения на однородных группах // Современные проблемы геометрии и анализа. — Новосибирск: Наука, 1989. — С. 45–89.

18. *Мазья В. Г. Шапошникова Т. О.* Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986.

19. *Водопьянов С. К.* Формула Тейлора и функциональные пространства. — Новосибирск: Изд-во Новосибирского ун-та, 1988.

20. *Водопьянов С. К.* Геометрические аспекты пространств обобщенно-дифференцируемых функций: дис. ... д-ра. физ.-мат. наук. — Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева, 1992.

21. *Мазья В. Г.* О слабых решениях задач Дирихле и Неймана // *Тр. ММО.* — 1969. — Vol. 20. — Pp. 137–172.

22. *Lelong-Ferrand J.* Étude d'une classe d'applications liées à des homomorphismes d'algèbres de fonctions, et généralisant les quasi conformes // *Duke Math. J.* — 1973. — Vol. 40. — Pp. 163–186.

23. *Reimann H. M.* Über harmonische Kapazität und quasikonforme Abbildungen im Raum // *Comment. Math. Helv.* — 1969. — Vol. 44. — Pp. 284–307.

24. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. — Новосибирск: Наука, 1982.

25. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Definitions for quasiregular mappings // *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I No.* — 1969. — Vol. 448. — P. 40.

26. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 229. — Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971. — Pp. xiv+144.

27. *Gol′dshteĭn V., Gurov L., Romanov A.* Homeomorphisms that induce monomorphisms of Sobolev spaces // *Israel J. Math.* — 1995. — Vol. 91, no. 1-3. — Pp. 31–60. http://dx.doi.org/10.1007/BF02761638.

28. *Ухлов А. Д.* Отображения, порождающие вложения пространств Соболева // *Сиб. мат. журн.* — 1993. — Т. 34, № 1. — С. 185–192.

29. *Водопьянов С. К. Ухлов А. Д.* Пространства Соболева и (P,Q)-квазиконформные отображения групп Карно // *Сиб. мат. журн.* — 1998. — Т. 39, № 4. — С. 776–795.

30. *Водопьянов С. К. Ухлов А. Д.* Операторы суперпозиции в пространствах Соболева // *Известия вузов. Математика.* — 2002. — № 10. — С. 11–33.

31. *Водопьянов С. К. Ухлов А. Д.* Функции множества и их приложения в теории пространств Лебега и Соболева. I // *Матем. тр.* — 2004. — Т. 6, № 2. — С. 14–65.

32. *Водопьянов С. К.* Пространства дифференциальных форм и отображения с контролируемым искажением // *Изв. РАН. Сер. матем.* — 2010. — Т. 74, № 4. — С. 5–32.

33. *Ukhlov A. Vodopyanov S. K.* Mappings associated with weighted Sobolev spaces // Complex analysis and dynamical systems III. — Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008. — Vol. 455 of *Contemp. Math.* — Pp. 369–382. http://dx.doi.org/10.1090/conm/455/08868.

34. *Ukhlov A.* Composition operators in weighted Sobolev spaces on Carnot groups // *Acta Math. Hungar.* — 2011. — Vol. 133, no. 1-2. — Pp. 103–127. http://dx.doi.org/10.1007/s10474-011-0104-4.

35. *Bourdaud G. Sickel G.* Changes of variable in Besov spaces // *Math. Nachr.* — 1999. — Vol. 198. — Pp. 19–39.

36. *Koch H. Koskela P. Saksman E. Soto T.* Bounded compositions on scaling invariant Besov spaces // *J. Funct. Anal.* — 2014. — Vol. 266, no. 5. — Pp. 2765–2788.

37. *Koskela P. Yang D. Zhou Y.* Pointwise characterizations of Besov and Triebel-Lizorkin spaces and quasiconformal mappings // *Adv. Math.* — 2011. — Vol. 226, no. 4. — Pp. 3579–3621.

38. *Hencl S. Koskela P.* Composition of quasiconformal mappings and functions in Triebel-Lizorkin spaces // *Math. Nachr.* — 2013. — Vol. 286, no. 7. — Pp. 669–678. http://dx.doi.org/10.1002/mana.201100130.

39. *Hencl S. Kleprlík L. Malý J.* Composition operator and Sobolev-Lorentz spaces $WL^{n,q}$ // *Studia Math.* — 2014. — Vol. 221, no. 3. — Pp. 197–208. http://dx.doi.org/10.4064/sm221-3-1.

40. *Hencl S. Kleprlík L.* Composition of q-quasiconformal mappings and functions in Orlicz-Sobolev spaces // *Illinois J. Math.* — 2012. — Vol. 56, no. 3. — Pp. 931–955. http://projecteuclid.org/euclid.ijm/1391178556.

41. *Kleprlík L.* Mappings of finite signed distortion: Sobolev spaces and composition of mappings // *J. Math. Anal. Appl.* — 2012. — Vol. 386, no. 2. — Pp. 870–881. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.08.045.

42. *Kleprlík L.* Composition operators on W^1X are necessarily induced by quasiconformal mappings // *Cent. Eur. J. Math.* — 2014. — Vol. 12, no. 8. — Pp. 1229–1238. http://dx.doi.org/10.2478/s11533-013-0392-8.

43. *Vodopyanov S. K.* $\mathcal{P}$-differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics // Труды по анализу и геометрии / Под ред. С. К. Водопьянова. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000. — С. 603–670.

44. *Folland G. B. Stein E. M.* Hardy spaces on homogeneous group. — Princeton: Princeton, 1982.

45. *Решетняк Ю. Г.* Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве // *Сиб. мат. журн.* — 1997. — Т. 38, № 3. — С. 657–675.

46. *Pansu P.* Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un // *Ann. Math.* — 1989. — Vol. 129, no. 1. — Pp. 1–60.

47. *Водопьянов С. К.* Дифференцируемость кривых в категории многообразий Карно // *Докл. АН.* — 2006. — Т. 410, № 4. — С. 439–444.

48. *Vodopyanov S. K.* Geometry of Carnot-Carathéodory spaces and differentiability of mappings // The interaction of analysis and geometry. — Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007. — Vol. 424 of *Contemp. Math.* — Pp. 247–301. `http://dx.doi.org/10.1090/conm/424/08105`.

49. *Hajłasz P.* Change-of-variables formula under the minimal assumptions // *Colloq. Math.* — 1993. — Vol. 64, no. 1. — Pp. 93–101.

50. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.

51. *Kilpeläinen T.* Weighted Sobolev spaces and capacity // *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Series A. I. Mathematica.* — 1994. — Vol. 19. — Pp. 95–113.

52. *Lu G.* Weighted Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander's condition and applications // *Revista Mat. Iberoamericana.* — 1992. — Vol. 8, no. 3. — Pp. 368–439.

53. *Folland G. B.* Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups // *Ark. Math.* — 1975. — Vol. 13, no. 2. — Pp. 161–207.

54. *Dairbekov N. S.* Mappings with Bounded Distortion of Two-Step Carnot Groups // Proceedings on Analysis and Geometry / Ed. by Vodopyanov S. K. — Novosibirsk: Sobolev Inst. of Mathematics, 2000. — Pp. 122–155.

55. *Jerison D.* The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander's condition // *Duke Math J.* — 1986. — Vol. 53, no. 2. — Pp. 503–523.

56. *Isangulova D. V. Vodopyanov S. K.* Coercive estimates and integral representation formulas on Carnot groups // *Eurasian Math. J.* — 2010. — Vol. 1, no. 3. — Pp. 58–96.

57. *Vodop'yanov S. K.* Differentiability of maps of Carnot groups of Sobolev classes // *Mat. Sb.* — 2003. — Vol. 194, no. 6. — Pp. 67–86.

58. *Водопьянов С. К. Черников В. М.* Пространства Соболева и гипоэллиптические уравнения // *Тр. Ин-та математики / РАН. Сиб. отд-ние.* — 1995. — Т. 29. — С. 3–64.

59. *Choquet G.* Theory of capacities // *Ann. Inst. Fourier (Grenoble).* — 1959. — Vol. 9. — Pp. 83–89.

60. *Водопьянов С. К. Кудрявцева Н. А.* Нелинейная теория потенциала для пространств Соболева на группах Карно // *Сиб. мат. журн.* — 2009. — Т. 50, № 5. — С. 1016–1036.

61. *Решетняк Ю. Г. Гольдштейн В. М.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. — М.: Наука, 1983.

62. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974.

63. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. — М.: Наука, 1987.

64. *Vodop'yanov S. K.* Composition operators of Sobolev spaces // Modern Problems of Function Theory and its Applications. — The address of the publisher: Saratov, 2002. — 1. — Pp. 42–43.

65. *Ukhlov A.* Composition operators in weighted Sobolev spaces on Carnot groups // *Acta Mathematica Hungarica.* — 2011. — Vol. 133, no. 1-2. — Pp. 103–127.

66. *Isangulova D. V. Vodopyanov S. K.* Sharp geometric rigidity of isometries on Heisenberg groups // *Mathematische Annalen.* — 2012. — Vol. 355, no. 4. — Pp. 1301–1329.

67. *Водопьянов С. К. Гольдштейн В. М.* Критерий устранимости множеств для пространств L^1_p квазиконформных и квазиизометрических отображений // *Сиб. мат. журн.* — 1977. — Т. 18, № 1. — С. 48–68.

68. *Водопьянов С. К. Ухлов А. Д.* Аппроксимативно дифференцируемые преобразования и замена переменных на нильпотентных группах // *Сиб. мат. журн.* — 1996. — Т. 37, № 1. — С. 70–89.

69. *Водопьянов С. К.* Монотонные функции и квазиконформные отображения на группах Карно // *Сиб. мат. журн.* — 1995. — Т. 37, № 6. — С. 1269–1295.

70. *Vodopyanov S. K.* Differentiability of maps of Carnot groups of Sobolev classes // *Sbornik Mathematics.* — 2003. — Vol. 194, no. 6. — Pp. 857–877.

Публикации автора по теме диссертации

[A1] *Водопьянов, С. К.* Изоморфизмы соболевских пространств на группах Карно и квазиизометрические отображения. /С. К. Водопьянов, Н. А. Евсеев// *Сибирский математический журнал.* — 2014. — Т. 55, № 5. — С. 1001–1039.

[A2] *Водопьянов С. К.* Изоморфизмы соболевских пространств на группах Карно и квазиконформные отображения. /С. К. Водопьянов, Н. А. Евсеев // *Сибирский математический журнал.* — 2015. — Т. 56, № 5. — С. 989–1029.

[A3] *Водопьянов С. К.* Изоморфизмы соболевских пространств на группах Карно и метрические свойства отображений. /С. К. Водопьянов, Н. А. Евсеев // *Доклады Академии Наук.* — 2015. — Т. 464, № 2. — С. 131–135.

[A4] *Евсеев Н. А.* Об операторах замены переменной в весовых пространствах Соболева на группе Карно. /Н. А. Евсеев // *Сибирский журнал чистой и прикладной математики (старое название: Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Математика, механика, информатика).* — 2015. — Т. 15, № 3. — С. 63–70.

[A5] *Евсеев Н. А.* Инвариантность весовых пространств Соболева на группе Карно // Материалы XLVIII международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс». — Новосибирск: НГУ, 2010. — С. 121.

[A6] *Евсеев Н. А.* Инвариантность весовых пространств Соболева // Материалы школы-конференции по геометрическому анализу. — РИО ГАГУ, Горно-Алтайск, 2012. — С. 21–22.

[A7] *Водопьянов С. К. Евсеев Н. А.* Изоморфизмы соболевских пространств на группах Карно и квазиизометрические отображения // Тезисы докладов международной конференции «Дифференциальные уравнения Функциональные пространства Теория приближений», посвященной 105-летию со дня рождения Сергея Львовича Соболева. — Новосибирск, 2013. — С. 327.

[A8] *Евсеев Н. А.* Изоморфизмы соболевских пространств на группах Карно и метрические свойства отображений // Материалы школы-конференции молодых учёных по геометрическому анализу. — РИО ГАГУ, Горно-Алтайск, 2014. — С. 10–11.

[A9] *Evseev N. A.* Composition operators on Sobolev spaces in a Carnot group and metric properties of mappings // Тезисы международной конференции «Дни геометрии в Новосибирске – 2014», посвященной 85-летию академика Юрия Григорьевича Решетняка. — Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, 2014. — С. 96.

[A10] *Evseev N. A.* Composition operators on weighted Sobolev spaces on a Carnot group // Тезисы международной конференции «Дни геометрии в Новосибирске – 2015». — Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, 2015. — С. 79–80.