

ДИСТРИБУТИВНЫЕ РАСКРАСКИ
ПЛОСКИХ ТРИАНГУЛЯЦИЙ
МИНИМАЛЬНОЙ СТЕПЕНИ ПЯТЬ*)

С. В. Августинович, О. В. Бородин, А. Э. Фрид

Раскраска вершин графа называется *дистрибутивной*, если цвет каждой вершины в ней однозначно определяет число смежных с ней вершин каждого цвета. Описываются дистрибутивные раскраски в два цвета плоских триангуляций минимальной степени пять.

1. Основные понятия

Раскраска (вершин) графа называется *дистрибутивной*, если число вершин цвета j , смежных с какой-либо вершиной цвета i , зависит от i и j , но не зависит от выбора конкретной вершины. Это число обозначается через m_{ij} . Заметим, что в общем случае $m_{ii} \neq 0$, т. е. вершины одного и того же цвета могут быть смежны, и тем самым дистрибутивная раскраска не обязана быть правильной. Квадратная матрица $M = (m_{ij})$, порядок которой равен числу используемых цветов, называется матрицей дистрибутивной раскраски; раскрашенный согласно ей граф будем называть *M-раскрашенным*.

Термин «дистрибутивная раскраска» впервые использован в работе [1], в которой изучалась взаимосвязь между дистрибутивными раскрасками в минимальное число цветов и проблемой изоморфизма графов. В теории кодирования дистрибутивные раскраски известны под названием структурных разбиений (partition designs) и используются в качестве инструмента для изучения кодов (см., например, [5]). Например,

*) Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-00531) и INTAS (грант 97-1001), второго автора — при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 99-01-00581) и российско-нидерландской программы NWO (грант 047-008-006), третьего автора — при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 00-01-00916) и Федеральной целевой программы «Интеграция» (объединенный проект АО-110).

любой совершенный бинарный код длины n с расстоянием 3 может быть определен как $\begin{pmatrix} 0 & n \\ 1 & n-1 \end{pmatrix}$ -раскраска вершин единичного куба E^n .

Приведенный пример показывает, что задача классификации дистрибутивных раскрасок не может быть проще, чем задача классификации совершенных кодов, которая остается нерешенной уже несколько десятилетий. Мы рассматриваем более простую задачу, а именно классификацию возможных *матриц* дистрибутивных раскрасок для конкретных семейств графов.

В данной статье исследуются матрицы дистрибутивных раскрасок в два цвета плоских триангуляций с минимальной степенью 5. Заметим, что свойства графов, дистрибутивно раскрашиваемых в малое число цветов, сходны свойствам архимедовых тел: если в архимедовом теле фиксировано количество граней каждого ранга, инцидентных каждой вершине, то в дистрибутивно раскрашенном графе то же можно сказать о количестве вершин, смежных с произвольной вершиной данного цвета. Неудивительно, что многие приводимые ниже примеры дистрибутивных раскрасок строятся на основе графов архимедовых тел.

2. Основной результат

Матрицу размера 2×2 назовем *допустимой*, если она является матрицей дистрибутивной раскраски какой-либо конечной плоской триангуляции с минимальной степенью 5. Будем говорить, что матрица M_1 *мажорируется* матрицей M_2 , если каждый элемент матрицы M_1 не превышает соответствующего элемента матрицы M_2 .

Теорема 1. *Каждая допустимая матрица M мажорируется одной из следующих 11 матриц:*

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad M_6 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad M_7 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad M_8 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix},$$

$$M_9 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{10} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_{11} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ \infty & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом ни один из элементов матриц M_1 – M_{11} нельзя уменьшить.

Допустимость матриц M_1 – M_{11} доказывается построением примеров соответственно раскрашенных плоских триангуляций (см. разд. 6). Доказательство же неулучшаемости элементов перечисленных матриц проводится в том же разделе перебором с использованием результатов из

разд. 3–5. Чтобы описать структуру этого перебора, введем несколько определений.

Назовем *внутренней* (соответственно *внешней*) степенью цвета число вершин этого же (соответственно другого) цвета, смежных с произвольной вершиной этого цвета. Внутренние степени цветов равны элементам главной, а внешние — побочной диагонали матрицы дистрибутивной раскраски. Сумму внутренней и внешней степеней цвета (т. е. степень любой вершины, окрашенной в этот цвет) будем называть *полной степенью* цвета.

Заметим, что суммы элементов в строках матрицы раскраски равны полным степеням соответствующих цветов. Мы рассматриваем лишь графы с минимальной степенью 5; в них, очевидно, есть вершины лишь степеней 5 и $p \geq 5$, причем при $p = 5$ соответствующая триангуляция единственна (икосаэдр). Следовательно, сумма элементов по некоторой строке матрицы допустимой раскраски равна пяти. Без ограничения общности эту строку и соответствующий ей цвет мы считаем первыми; другой цвет называем вторым.

Перебор в разд. 6 проводится по возрастанию внутренней степени первого цвета; в рамках каждого случая — по убыванию полной и внутренней степеней второго цвета.

В доказательстве будем использовать также понятия *черного* и *белого* цветов. *Черным* будем считать цвет с наибольшей внутренней степенью; другой цвет будем называть *белым*. Если же внутренние степени цветов совпадают, черным считается произвольно выбранный цвет. Заметим, что черный и белый цвета, вообще говоря, не совпадают с первым и вторым.

Будем использовать понятия черного и белого цветов как в рассуждениях, так и на рисунках; более того, подграфы, полностью состоящие из вершин одного цвета, будем называть соответственно черными и белыми. Подграф графа G , индуцированный вершинами черного цвета, будем обозначать через G^\bullet (читается « G черный»); подграф, индуцированный вершинами белого цвета, — через G° (« G белый»).

Наконец, отметим, что во всех рассуждениях разделов 3–5 речь идет о конкретной укладке рассматриваемых графов на плоскость, что позволяет говорить об их внешних и внутренних границах.

3. Свойства допустимых матриц

Пусть $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ — матрица дистрибутивной раскраски ровно в два цвета плоской триангуляции G с минимальной степенью 5. Без

ограничения общности полагаем, что $a_{11} + a_{12} = 5$ и $a_{21} + a_{22} \geq 5$. Установим следующие свойства матрицы M .

Лемма 1. *Внешние степени цветов не равны нулю: $a_{ij} > 0$ при $i \neq j$.*

Доказательство. В противном случае не существует ребер, соединяющих вершины разных цветов, что противоречит связности триангуляции G .

Лемма 2. *Если внутренняя степень a_{ii} цвета i больше нуля, то внешняя степень a_{ji} цвета j , где $j \neq i$, больше единицы.*

Доказательство. Рассмотрим все вершины, смежные с вершиной u и цвета i . По условию и лемме 1 среди них есть вершины обоих цветов. Кроме того, среди них есть две вершины разных цветов, которые вместе с u принадлежат одной грани графа G . Но всякая грань триангуляции G является треугольником, а значит, эти две вершины смежны. В частности, вершина цвета j смежна по меньшей мере с двумя вершинами цвета i . Тем самым внешняя степень цвета j превосходит 1. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пара $(\min_{i \neq j} a_{ij}, \max_{i \neq j} a_{ij})$ из минимальной и максимальной внешних степеней цветов мажорируется одной из пар $(2, \infty)$ или $(3, 5)$.*

Доказательство. Рассмотрим плоский граф, полученный из G удалением ребер, соединяющих вершины одного и того же цвета. Он двудолен, а значит, все его грани имеют четный ранг; в частности, среди них нет треугольников. Степени всех вершин каждой доли одинаковы и равны внешней степени соответствующего цвета. Но по результату Коцига [2] всякий плоский граф без треугольников содержит либо вершину степени не больше двух (а следовательно, в нашем случае, целую долю, все вершины которой имеют такую степень), либо вершину степени три, смежную по крайней мере с одной вершиной степени не более пяти. В первом из этих случаев пара внешних степеней цветов мажорируется парой $(2, \infty)$, а во втором — парой $(3, 5)$.

Лемма 4. *Внутренняя степень белого цвета не превосходит двух, т. е. $\min\{a_{11}, a_{22}\} \leq 2$.*

Доказательство. Предположим обратное: пусть внутренняя степень обоих цветов больше двух. Тогда граф G^\bullet является однородным степени не меньше трех, а значит, не является внешнепланарным (см., например, [3]). Следовательно, в каждой его компоненте связности C^\bullet есть вершина, не инцидентная ее внешней грани. Эта вершина должна быть смежна с какой-либо белой вершиной. Поэтому внутри одной из внутренних граней компоненты C^\bullet находится компонента C° графа G° .

Однако если внутренняя степень белого цвета также превосходит два, то, повторяя приведенные выше рассуждения, получаем, что в одной из внутренних граней компоненты C^o находится еще одна компонента графа G^* , и так далее. Поскольку рассматриваемый нами граф конечен, это невозможно.

Лемма 5. Пусть $\rho = \frac{v_1}{a_{21}}$, где v_1 — число вершин первого цвета в графе G . Тогда

$$6a_{12} + 6a_{21} - a_{11}a_{21} - a_{12}a_{22} - 2a_{12}a_{21} = \frac{12}{\rho} > 0. \quad (1)$$

Доказательство. Число вершин первого цвета в графе G равно $v_1 = \rho a_{21}$, число вершин второго цвета $v_2 = \rho a_{12}$ и общее число вершин $v = v_1 + v_2 = \rho(a_{12} + a_{21})$. Число ребер в G равно $e = \frac{1}{2}\rho a_{11}a_{21} + \frac{1}{2}\rho a_{12}a_{22} + \rho a_{21}a_{12}$; наконец, так как G — триангуляция, число граней f равно $\frac{2}{3}e$. Подставив эти значения в формулу Эйлера $v - e + f = 2$, получим (1).

Лемма 6. Полная степень второго цвета ограничена сверху числом, зависящим от внутренней степени первого цвета:

- 1) $a_{21} + a_{22} \leq 6$ при $a_{11} = 0$ или $a_{11} = 1$;
- 2) $a_{21} + a_{22} \leq 7$ при $a_{11} = 2$;
- 3) $a_{21} + a_{22} \leq 10$ при $a_{11} = 3$.

Доказательство. Это свойство вытекает из следующего результата.

Теорема 2 [4]. Всякая плоская нормальная карта с минимальной степенью 5 содержит 4-звезду веса не более 30 с вершиной степени 5 в центре.

Действительно, рассмотрим в графе G вершину первого цвета. Ее степень равна 5, и она окружена a_{11} вершинами первого цвета (степени 5) и a_{12} вершинами второго цвета (степени $a_{21} + a_{22}$). Из теоремы 2 следует, что $5a_{11} + (a_{21} + a_{22})(4 - a_{11}) \leq 30 - 5 = 25$. Подставляя в это неравенство значения a_{11} от нуля до трех, получаем лемму 6.

4. Структура раскрашенных триангуляций

Установим некоторые свойства триангуляции G , дистрибутивно раскрашенной с матрицей M , зависящие только от внутренней степени белого цвета (т. е. от наименьшей внутренней степени). По лемме 4 последняя может быть равна только 0, 1 или 2.

Во всех трех леммах этого раздела через p обозначается внешняя степень белого цвета.

Лемма 7. Пусть внутренняя степень белого цвета равна 0, а внутренняя степень черного цвета равна 3. Тогда граф G^\bullet является архимедовым телом, состоящим из треугольников и граней ранга p .

Доказательство. Поскольку внутренняя степень белого цвета равна нулю, всякая белая вершина в графе G смежна только с p окружающими ее черными вершинами. Так как G — триангуляция, то все эти вершины объединены в грань ранга p графа G^\bullet . Поскольку в графе нет кратных ребер, всякая такая грань представляет собой цикл. Таковы все грани этого графа, в которые в G вставлены белые вершины. Если же внутри грани графа G^\bullet нет белых вершин, то она является гранью и в графе G , а следовательно, треугольником.

Заметим, что число белых вершин, смежных в G с данной черной вершиной u , равно числу смежных с ней граней графа G^\bullet ранга p . Так как это число (равное внешней степени черного цвета), а также общее количество смежных с u граней графа G^\bullet (равное внутренней степени черного цвета) не зависят от выбора u , то G^\bullet представляет собой архимедово тело. Лемма 7 доказана.

Лемма 8. Пусть внутренняя степень белого цвета равна 1, а внутренняя степень черного цвета равна 3. Тогда граф G^\bullet состоит из треугольников и граней ранга $2(p-1)$, причем хотя бы одна такая грань представляет собой цикл.

Доказательство. Граф G° является 1-однородным, а значит, произвольная его компонента C° имеет вид $(\{u, v\}, \{(u, v)\})$. Вершина u смежна с p черными вершинами в графе G . Так как G — плоская триангуляция, то ровно две из этих вершин (а именно принадлежащие в G тем же граням, что и ребро (u, v)) смежны и с вершиной v . Следовательно, компонента C° окружена $2(p-1)$ черными вершинами в G , причем, так как G — триангуляция, все они объединены гранью в графе G^\bullet . Таково строение любой грани графа G^\bullet с вложенными белыми вершинами. Заметим, что если какая-либо из этих граней не является циклом, то и с внутренней, и с внешней стороны от нее в графе G имеются белые вершины, а значит, и грани ранга $2(p-1)$ графа G^\bullet . В силу конечности из этого следует, что среди таких граней есть циклы. Пример такого цикла длины 6 (т. е. соответствующего $p = 4$) изображен на рис. 9. Не содержащие белых вершин черные грани являются треугольниками.

Лемма 9. Пусть внутренняя степень белого цвета равна 2, а внутренняя степень черного цвета не менее 3. Тогда существует такая компонента C графа G^\bullet , что все лежащие в ее внутренних гранях компоненты графа G° являются треугольными гранями графа G и окружены гранями графа G^\bullet ранга $3(p-1)$, причем по крайней мере один такой треугольник существует.

Доказательство. Возьмем компоненту C графа G^\bullet , не содержащую других черных компонент. Так как G — триангуляция, а компоненты G° представляют собой циклы, то каждая компонента G° , лежащая внутри C , есть треугольная грань графа G . При этом хотя бы одна такая грань найдется, так как G^\bullet не является внешнепланарным графом, и внутри C есть черная вершина; по лемме 2 она должна быть смежна с белой вершиной.

Заметим, что внутренние грани компоненты C либо не содержат внутри себя белых вершин графа G и тогда являются треугольниками, либо содержат вставки в виде белых треугольных граней графа G и тогда имеют ранг $3(p-1)$, что доказывается аналогично лемме 8. Примеры таких граней графа G^\bullet при $p = 3$ и $p = 6$ изображены соответственно на рис. 1 и 14.

5. Леммы о недопустимости

Лемма 10. Матрица $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ недопустима.

Доказательство. Предположим, что существует $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ -раскрашенный граф G , и рассмотрим компоненту C графа G^\bullet , содержащую белые вершины внутри своих внутренних граней только в виде треугольных белых граней графа G : такая компонента существует по лемме 9. Заметим, что все ее внутренние грани являются либо треугольниками, либо шестиугольниками вида, изображенного на рис. 1.

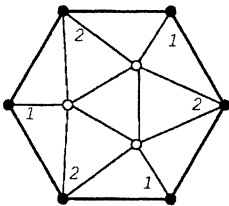


Рис. 1

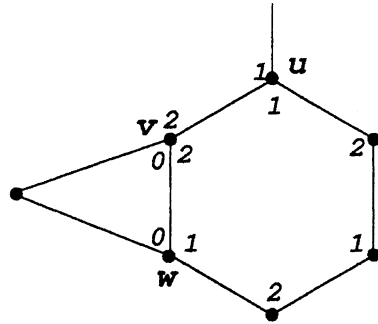


Рис. 2

Сначала предположим, что компонента C совпадает с графом G^\bullet , т. е. в G нет циклов из белых вершин, по обе стороны от которых лежали бы черные вершины. Тогда любая вершина u , которая смежна лишь с одной белой вершиной из лежащих внутри какой-либо шестиугольной грани (см. рис 2, где черные вершины показаны, а число смежных с ними белых вершин обозначено цифрами), смежна с тремя

шестиугольниками в G^\bullet . Следовательно, вершина v инцидентна черному треугольнику, а значит, w смежна не более чем с тремя белыми вершинами. Противоречие.

Пусть теперь компонента C окружена в G циклом C° из белых вершин, вне которого есть черные вершины.

Утверждение 1. Пусть вершина u графа C смежна с вершиной h цикла C° . Тогда u смежна по крайней мере еще с одной вершиной цикла C° , смежной с вершиной w .

Доказательство. Так как G — триангуляция, то в противном случае w должна быть смежна еще и с обеими вершинами внешней грани графа C , смежными с вершиной u . Следовательно, так как внешняя степень белого цвета равна трем, то w не смежна ни с одной черной вершиной из лежащих по другую сторону от C° . Это невозможно, так как G — триангуляция, а C° — не грань G . Утверждение доказано.

Рассмотрим блок компоненты C , соединенный с другими ее блоками не более чем одним мостом. Сначала предположим, что в этом блоке каждая вершина u , смежная с циклом C° , принадлежит двум треугольникам из черных вершин. Так как граф G^\bullet 3-однороден, то существует принадлежащая этим же двум треугольникам вершина $u' \neq u$. Все 4 белых вершины, смежных с u' , лежат в одной грани графа C . Следовательно, эта грань внешняя и u' смежна с C° . Значит, вершина v также смежна с циклом C° , причем связывающие ее с C° ребра лежат по обе стороны от выходящего из нее ребра e (рис. 3). Значит, e — мост, но аналогично мостом является и e' . Противоречие.

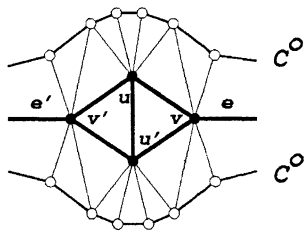


Рис. 3

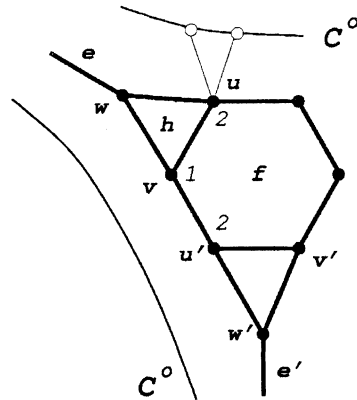


Рис. 4

Пусть теперь в выбранном блоке существует вершина, принадлежащая шестиугольной грани f компоненты C и смежная в G с циклом C° .

Тогда одна из смежных с ней вершин грани f также смежна с циклом C° , причем одна из этих двух вершин (в дальнейшем обозначаемая через u) смежна с двумя белыми вершинами, лежащими внутри f .

Предположим, что u инцидентна мосту e в графе C . Так как G — триангуляция, то две вершины цикла C° , которые смежны с u , лежат по разные стороны от моста e и не являются смежными, что противоречит утверждению 1.

Теперь предположим, что u смежна еще с одним шестиугольником g , где $g \neq f$. Так как внутри g лежит по крайней мере одна белая вершина, смежная с u , то u смежна ровно с одной вершиной цикла C° , что также противоречит утверждению 1.

Наконец, пусть u смежна с прилегающим к f треугольником h и двумя вершинами цикла C° (рис. 4). Ребро, соединяющее две оставшиеся вершины v и w треугольника h , может принадлежать в C либо шестиугольнику, либо внешней грани. Однако в первом случае вершина v (принадлежащая f и смежная только с одной лежащей внутри f белой вершиной) смежна не более чем с тремя белыми вершинами, что невозможно. Значит, ребро (v, w) принадлежит внешней грани компоненты C , а значит, w инцидентна мосту e . Но тогда вершина u' шестиугольника f , смежная с v и отличная от u , обладает всеми свойствами вершины u , т. е. смежна с двумя белыми вершинами внутри f и с циклом C° . Рассуждая о ней так же, как об u , получаем, что вершина w' (см. рис. 4) инцидентна мосту e' графа C^\bullet , где $e' \neq e$. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 11. Матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ недопустимы.

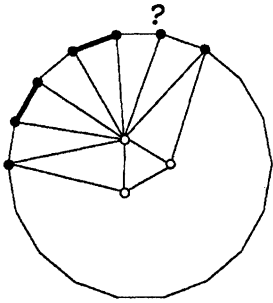


Рис. 5

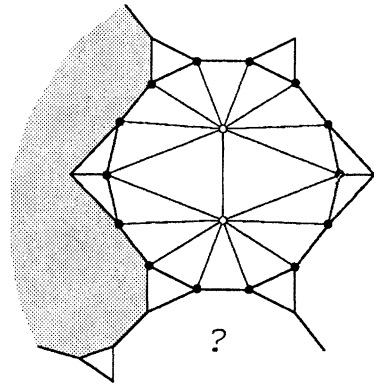


Рис. 6

Доказательство. Докажем недопустимость матрицы $M' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$. Для этого предположим, что M' -раскрашенный граф G существует,

и рассмотрим компоненту C графа G^\bullet , все внутренние грани которой — треугольники или восемнадцатиугольники вида, изображенного на рис. 5; такая компонента существует по лемме 9. Каждая 1-вершина восемнадцатиугольной грани (т. е. вершина, смежная только с одной лежащей внутри грани белой вершиной) инцидентна в G^\bullet только одному треугольнику и одной «большой» (восемнадцатиугольной или внешней) грани. Изобразим ребра, инцидентные двум «большим» граням, жирными. Таким ребрам могут быть инцидентны только 1-вершины, причем каждая 1-вершина инцидентна ровно одному такому ребру. Однако это невозможно, поскольку число последовательно идущих 1-вершин нечетно (равно 5). Значит, матрица M' недопустима.

Недопустимость матриц $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ доказывается с использованием тех же соображений нечетности числа идущих подряд 1-вершин в «больших» (соответственно шестнадцати- и двенадцатиугольных) гранях, являющихся циклами, графа, индуцированного черными вершинами; существование таких граней доказывается ссылкой на лемму 8.

Лемма 12. Матрица $M'' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ недопустима.

Доказательство. Согласно лемме 8 всякая M'' -раскрашенная триангуляция должна состоять из черных треугольников и четырнадцатиугольных черных граней, внутри каждой из которых находятся две белые вершины. При этом каждая четырнадцатиугольная грань, являющаяся циклом (такие грани существуют по лемме 8), инцидентна восьми треугольникам (рис. 6). Далее, вся заштрихованная область должна принадлежать одной и той же четырнадцатиугольной грани. Но тогда область внизу не может ни принадлежать четырнадцатиугольной грани (поскольку ей инцидентны три последовательных одиночных треугольника), ни быть разбитой на черные треугольники. Противоречие.

6. Доказательство теоремы 1

Доказательство проводится перебором по возрастанию внутренней степени первого цвета, т. е. элемента a_{11} матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Напомним, что без ограничения общности мы полагаем $a_{11} + a_{12} = 5$ и $a_{21} + a_{22} \geq 5$. На допустимость проверяются все такие матрицы, удовлетворяющие условиям, сформулированным леммами 1–6; напомним, что рассматриваются только матрицы, не мажорируемые другими допустимыми матрицами.

СЛУЧАЙ $a_{11} = 0$, $a_{21} = 5$. По лемме 6 имеем $a_{21} + a_{22} \leq 6$. При этом согласно леммам 1 и 3 имеем $1 \leq a_{21} \leq 3$. Оказывается достаточным рассмотреть подслучай $a_{21} + a_{22} = 6$: уже все три соответствующие ему матрицы (а именно M_1 – M_3) оказываются допустимыми. Строение соответственно раскрашенных графов описывается леммой 7: каждый из них представляет собой архимедово тело из вершин старшего (черного) цвета, грани которого имеют ранги 3 и 5; при этом в каждый его пятиугольник вставлена белая вершина, смежная со всеми вершинами этого пятиугольника. Матрице M_1 соответствует архимедово тело, с каждой вершиной которого смежны грани рангов (5, 3, 3, 3, 3), матрице M_2 — тело, с каждой вершиной которого смежны грани рангов (5, 3, 5, 3), матрице M_3 — додекаэдр.

СЛУЧАЙ $a_{11} = 1$, $a_{21} = 4$. По лемме 6 выполняется неравенство $a_{21} + a_{22} \leq 6$; при этом согласно леммам 2 и 3 имеем $2 \leq a_{21} \leq 3$. Оказывается достаточным рассмотреть подслучай $a_{21} + a_{22} = 6$: обе соответствующие ему матрицы (а именно M_4 и M_5) допустимы. Соответственно раскрашенные графы, точнее, лишь подграфы, индуцированные множеством вершин второго (черного) цвета, изображены на рис. 7 и 8; каждая шестиугольная грань этих подграфов содержит белые вершины (рис. 9).

СЛУЧАЙ $a_{11} = 2$, $a_{21} = 3$. По лемме 6 выполняется неравенство $a_{21} + a_{22} \leq 7$; при этом согласно леммам 2 и 3 имеем $2 \leq a_{21} \leq 5$.

Подслучай $a_{21} + a_{22} = 7$. Значениям $a_{21} = 2$ и $a_{21} = 3$ соответствуют матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, недопустимые по лемме 5. Значению $a_{21} = 4$ соответствует матрица $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, недопустимая по лемме 10. Наконец, значению $a_{21} = 5$ соответствует допустимая матрица M_8 (рис.10).

Подслучай $a_{21} + a_{22} = 6$. Не противоречат условиям лемм 2 и 3 и не мажорируются матрицей M_8 только матрицы $M_6 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ и $M_7 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$; обе они допустимы. Соответствующие графы изображены на рис. 11 и 12; каждый заштрихованный шестиугольник на рис. 11 и каждый шестиугольник на рис. 12 выглядят так, как показано на рис. 1. Каждый незаштрихованный шестиугольник на рис. 11 содержит ребра, как показано слева.

СЛУЧАЙ $a_{11} = 3$, $a_{21} = 2$. По лемме 6 справедливо неравенство $a_{21} + a_{22} \leq 10$; при этом согласно лемме 4 имеем $a_{22} \in \{0, 1, 2\}$. Следовательно, второй цвет — белый.

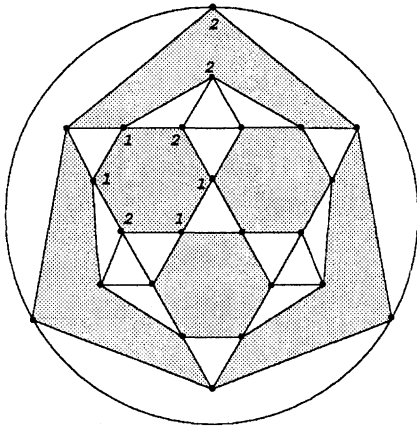


Рис. 7

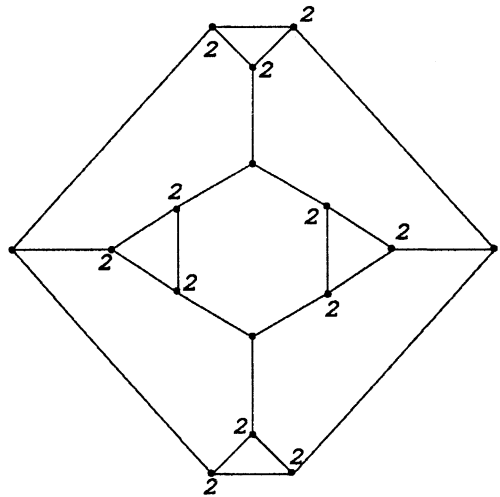


Рис. 8

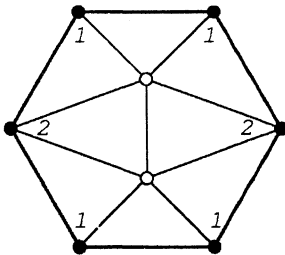


Рис. 9

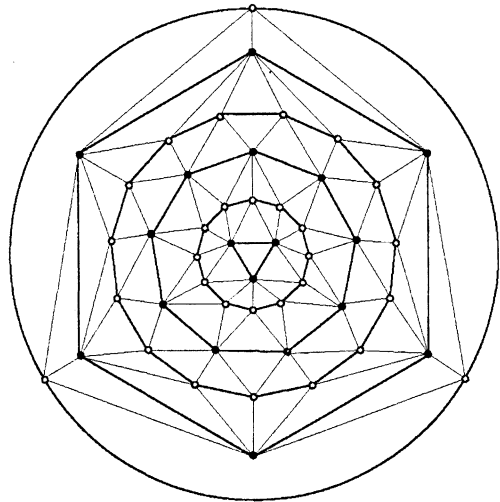


Рис. 10

Подслучай $a_{22} = 2$. По лемме 6 имеем $a_{21} \leq 8$. Однако $a_{21} = 8$ противоречит лемме 5, а $a_{21} = 7$ соответствует матрице $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$, недопустимой по лемме 11. Наконец, $a_{21} = 6$ дает допустимую матрицу M_{10} . Соответственно раскрашенный граф изображен на рис. 13; каждая его пятнадцатигульная грань выглядит так, как показано на рис. 14.

Подслучай $a_{22} = 1$. По лемме 6 имеем $a_{21} \leq 9$, но $a_{21} \neq 9$ и $a_{21} \neq 7$ по лемме 11, и $a_{21} \neq 8$ по лемме 12. Наконец, $a_{21} = 6$ соответствует допустимой матрице, мажорируемой матрицей M_{10} .

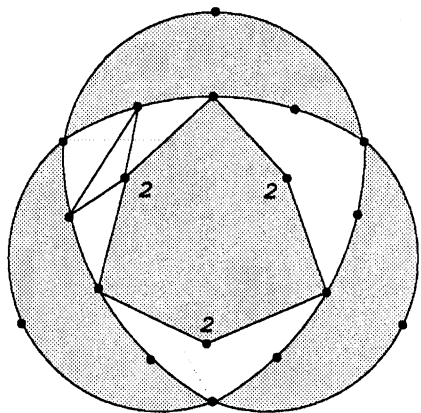


Рис. 11

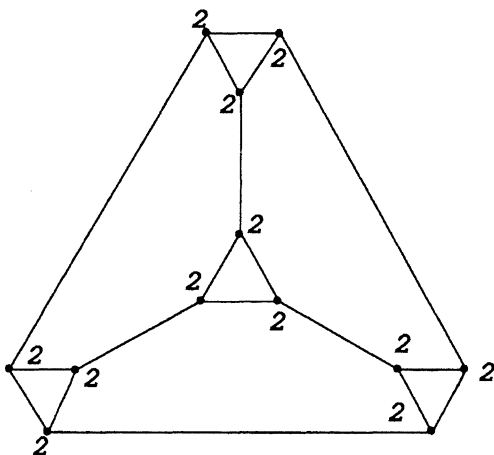


Рис. 12

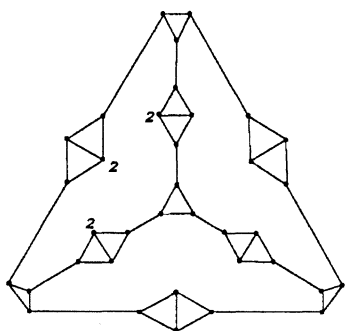


Рис. 13

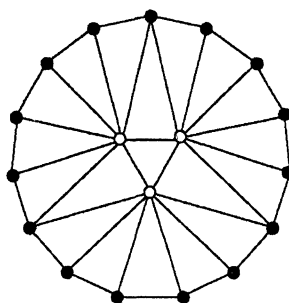


Рис. 14

Подслучай $a_{22} = 0$. По лемме 6 имеем $a_{21} \leq 10$. Уже $a_{21} = 10$ дает допустимую матрицу M_9 : M_9 -раскрашенный граф представляет собой черный усеченный додекаэдр, внутри каждой десятиугольной грани которого находится белая вершина, смежная со всеми вершинами этой грани.

СЛУЧАЙ $a_{11} = 4, a_{21} = 1$. Здесь $a_{22} = 0$, ибо обратное противоречило бы лемме 2. В то же время всякая матрица вида $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}$, где $x \geq 5$, допустима, что изображено на рис. 15. Это соображение добавляет к списку матрицу $M_{11} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ \infty & 0 \end{pmatrix}$.

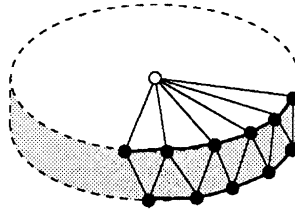


Рис. 15

СЛУЧАЙ $a_{11} = 5$, $a_{21} = 0$. Случай невозможен по лемме 1, что и завершает доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Визинг В. Г.** Дистрибутивная раскраска вершин графа // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 4. С. 3–12.
2. **Коциг А.** Из теории эйлеровых многогранников // Mat.-Fyz. Časopis. 1963. V. 13, N 1. P. 20–31.
3. **Харари Ф.** Теория графов. М.: Мир, 1973.
4. **Borodin O. V., Woodall D. R.** Short cycles of low weight in normal plane maps with minimum degree 5 // Discuss. Math. Graph Theory. 1998. V. 18, N 2. P. 159–164.
5. **Camion P., Courteau B., Delsarte Ph.** On r -partition designs in Hamming spaces // Appl. Algebra Engrg. Commun. Comput. 1992. V. 2, N 3. P. 147–162.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
20 июля 2000 г.