А.Е.Гутман (Новосибирск)

ИЗМЕРИМЫЕ БАНАХОВЫ РАССЛОЕНИЯ И ВЕСОВЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Мы будем следовать терминологии и обозначениям из /I/. На протяжении всего текста Ω – пространство с мерой.

Предположим, что $\mathcal{X}$ – отображение, ставящее в соответствие каждой точке $\omega\in\Omega$ некоторое банахово пространство $\mathcal{X}(\omega)$. Сечением $\mathcal{X}$ будем называть функцию u, определенную почти всюду в Ω и принимающую значения $u(\omega)\in\mathcal{X}(\omega)$ для всех $\omega\in\operatorname{dom}u$. Пусть $\mathcal{C}$ – некоторое множество сечений. Пару $(\mathcal{X},\mathcal{C})$ назовем измеримым банаховым расслоением (ИБР) над Ω, если

(а) $\lambda_1c_1+\lambda_2c_2\in\mathcal{C}$ для всех $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ и $c_1,c_2\in\mathcal{C}$, где $\lambda_1c_1+\lambda_2c_2:\omega\in\operatorname{dom}c_1\cap\operatorname{dom}c_2\mapsto\lambda_1c_1(\omega)+\lambda_2c_2(\omega)$;

(б) функция $|c|:\omega\in\operatorname{dom}c\mapsto\|c(\omega)\|$ измерима при $c\in\mathcal{C}$;

(в) для каждой точки $\omega\in\Omega$ множество $\{c(\omega):c\in\mathcal{C},\ \omega\in\operatorname{dom}c\}$ плотно в $\mathcal{X}(\omega)$.

Вместо $(\mathcal{X},\mathcal{C})$ будем писать просто $\mathcal{X}$. Сечение s назовем ступенчатым, если найдутся измеримые подмножества $A_1,\dots,A_n\subset\Omega$ и сечения $c_1,\dots,c_n\in\mathcal{C}$ такие, что $s(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\chi_{A_i}(\omega)c_i(\omega)$ почти для всех $\omega\in\Omega$. Сечение u будем называть измеримым, если для любого измеримого подмножества $A\subset\Omega$ конечной меры найдется такая последовательность (s_n) ступенчатых сечений, что $s_n(\omega)\to u(\omega)$ почти для всех $\omega\in A$. Символом $\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{X})$ обозначается множество всех измеримых сечений, а символом $M(\Omega,\mathcal{X})$ – факторизация $\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{X})$ по отношению равенства почти всюду. Кроме того, вводятся обозначения $\mathcal{L}^\infty(\Omega,\mathcal{X})=\{u\in\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{X}):|u|\in\mathcal{L}^\infty(\Omega)\}$ и $L^\infty(\Omega,\mathcal{X})=\{\mathbf{u}\in M(\Omega,\mathcal{X}):u\in\mathcal{L}^\infty(\Omega,\mathcal{X})$ при $u\in\mathbf{u}\}$. Если $\mathbf{u}\in M(\Omega,\mathcal{X})$ и $u\in\mathbf{u}$, то класс эквивалентности, содержащий функцию $|u|$, будем обозначать через $|\mathbf{u}|$. Таким образом, отображение $|\cdot|$ действует из $M(\Omega,\mathcal{X})$ в пространство $M(\Omega)$ классов эквивалентности измеримых функций. Множество $M(\Omega,\mathcal{X})$ естественным образом наделяется структурой векторного пространства.

Теорема I. Если $\mathcal{X}$ – ИБР над пространством с мерой Ω, обладающим свойством прямой суммы, то $(M(\Omega,\mathcal{X}),|\cdot|,M(\Omega))$ – пространство Банаха-Канторовича (ПБК).

Если E – идеал $M(\Omega)$, то символом $E(\mathcal{X})$ будем обозначать ПБК $\{u \in M(\Omega, \mathcal{X}) : |u| \in E\}$, нормированное посредством E.

Лифтингом $L^\infty(\Omega)$ называется отображение $e \in L^\infty(\Omega) \mapsto$ $\mapsto e_\sim \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$, удовлетворяющее требованиям:

(а) $e_\sim \in e$, $\operatorname{dom} e_\sim = \Omega$, $\sup\limits_{\omega \in \Omega} |e_\sim(\omega)| < \infty$ для всех $e \in L^\infty(\Omega)$;

(б) $\mathbb{1}_\sim = \mathbb{1}$;

(в) если $e \in L^\infty(\Omega)$ и $e \geqslant 0$ то $e_\sim(\omega) \geqslant 0$ для всех $\omega \in \Omega$;

(г) $(\alpha e + \beta f)_\sim = \alpha e_\sim + \beta f_\sim$ при $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $e, f \in L^\infty(\Omega)$;

(д) $(ef)_\sim = e_\sim f_\sim$ для всех $e, f \in L^\infty(\Omega)$.

Функцию $e : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ назовем непрерывной, если для любого $n \in \mathbb{N}$ функции $e^+ \wedge n\mathbb{1}$ и $e^- \wedge n\mathbb{1}$ принадлежат множеству $L^\infty(\Omega)_\sim = \{e_\sim : e \in L^\infty(\Omega)\}$.

Предложение I. Пусть существует лифтинг $L^\infty(\Omega)$. Тогда в каждом классе $e \in M(\Omega)$ имеется единственный непрерывный представитель $e_\sim \in e$.

Рассмотрим ИБР $\mathcal{X}$ над Ω и предположим, что $e \mapsto e_\sim$ – лифтинг $L^\infty(\Omega)$. Отображение $u \in L^\infty(\Omega, \mathcal{X}) \mapsto u_\sim \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{X})$ будем называть лифтингом $L^\infty(\Omega, \mathcal{X})$, если

(а) для всех $u \in L^\infty(\Omega, \mathcal{X})$ выполнено: $u_\sim \in u$, $\operatorname{dom} u_\sim = \Omega$;

(б) $|u_\sim| = |u|_\sim$ для всех $u \in L^\infty(\Omega, \mathcal{X})$;

(в) если $u, v \in L^\infty(\Omega, \mathcal{X})$, то $(u + v)_\sim = u_\sim + v_\sim$;

(г) если $u \in L^\infty(\Omega, \mathcal{X})$ и $e \in L^\infty(\Omega)$, то $(eu)_\sim = e_\sim u_\sim$;

(д) множество $\{u_\sim(\omega) : u \in L^\infty(\Omega, \mathcal{X})\}$ плотно в $\mathcal{X}(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$.

Измеримое сечение u назовем непрерывным, если для любой непрерывной характеристической функции χ_A такой, что $\chi_A u \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{X})$, сечение $\chi_A u$ продолжается до элемента множества $L^\infty(\Omega, \mathcal{X})_\sim = \{u_\sim : u \in L^\infty(\Omega, \mathcal{X})\}$.

Предложение 2. Пусть $\mathcal{X}$ –ИБР с лифтингом над Ω. Тогда в каждом классе $u \in M(\Omega, \mathcal{X})$ существует единственный непрерывный представитель $u_\sim \in u$ такой, что $\operatorname{dom} u_\sim = |u|_\sim^{-1}[\mathbb{R}]$.

Изоморфизмом ИБР $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ над Ω называется отображение φ, ставящее в соответствие каждой точке $\omega \in \Omega$ линейную изометрию $\varphi(\omega) : \mathcal{X}(\omega) \to \mathcal{Y}(\omega)$ так, что $\varphi(\cdot)u(\cdot) \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{Y})$ при $u \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{X})$ и наоборот, если $v \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{Y})$, то $v(\cdot) = \varphi(\cdot)u(\cdot)$ почти всюду для некоторого $u \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{X})$.

Теорема 2. Пусть пространство с мерой Ω обладает свойством прямой суммы, и E – идеал $M(\Omega)$. Тогда для любого E-нормированного ПБК $\mathcal{U}$ существует единственное с точностью до изоморфизма ИБР с лифтингом $\mathcal{X}$ над Ω такое, что $E(\mathcal{X})$ линейно изометрично $\mathcal{U}$.

Теорема 3. Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ – ИБР с лифтингом над Ω. Тогда существует (единственное) такое ИБР с лифтингом $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ над Ω, что

(а) для всех $\omega\in\Omega$ слой $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})(\omega)$ является банаховым подпространством пространства $\mathcal{L}(\mathcal{X}(\omega),\mathcal{Y}(\omega))$ всех линейных ограниченных операторов из $\mathcal{X}(\omega)$ в $\mathcal{Y}(\omega)$;

(б) если $H\in\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y}))$ и $u\in\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{X})$, то $H(\cdot)u(\cdot)\in\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{Y})$, где $H(\cdot)u(\cdot): \omega\in\operatorname{dom}H\cap\operatorname{dom}u\mapsto H(\omega)u(\omega)$;

(в) если $\boldsymbol{H}\in L^\infty(\Omega,\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y}))$ и $\boldsymbol{u}\in L^\infty(\Omega,\mathcal{X})$, то $(\boldsymbol{H}(\cdot)\boldsymbol{u}(\cdot))_\sim = \boldsymbol{H}_\sim(\cdot)\boldsymbol{u}_\sim(\cdot)$;

(г) если отображение $H: \omega\in\Omega\mapsto H(\omega)\in\mathcal{L}(\mathcal{X}(\omega),\mathcal{Y}(\omega))$ таково, что $H(\cdot)u(\cdot)\in L^\infty(\Omega,\mathcal{Y})_\sim$ при любом $u\in L^\infty(\Omega,\mathcal{X})_\sim$, то $H\in L^\infty(\Omega,\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y}))_\sim$.

Предположим, что $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ – ИБР с лифтингом над Ω, а E и F – идеалы в $M(\Omega)$. Оператор $T: E(\mathcal{X})\to F(\mathcal{Y})$ назовем весовым, если

$$(T\boldsymbol{u})_\sim(\cdot) = \boldsymbol{H}_\sim(\cdot)\boldsymbol{u}_\sim(\cdot), \quad \boldsymbol{u}\in E(\mathcal{X}) \qquad (*)$$

для некоторого $\boldsymbol{H}\in M(\Omega,\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y}))$. (Заметим, что $(*)$ можно переписать в виде: $T\boldsymbol{u} = \boldsymbol{H}(\cdot)\boldsymbol{u}(\cdot)$.)

Теорема 4. Линейный оператор $T: E(\mathcal{X})\to F(\mathcal{Y})$ является весовым в том и только в том случае, если он удовлетворяет следующим двум условиям:

(а) для всех $\boldsymbol{u}\in E(\mathcal{X})$ класс $|T\boldsymbol{u}|$ лежит в компоненте, порожденной $|\boldsymbol{u}|$;

(б) если $r\text{-}\lim|\boldsymbol{u}_n| = 0$, то $\inf|T\boldsymbol{u}_n| = 0$.

При этом T мажорируем как оператор из $E(\mathcal{X})$ в $M(\Omega,\mathcal{Y})$, и его точная мажоранта $|T|$ является оператором умножения на $|\boldsymbol{H}|$, где $\boldsymbol{H}$ удовлетворяет соотношению $(*)$.

Литература

1. Кусраев А.Г. Векторная двойственность и ее приложения.– Новосибирск:Наука,1985.