

13 Локально одномерные K -пространства и σ -дистрибутивные булевы алгебры¹

А.Е. Гутман
ИМ СО РАН Новосибирск

Аннотация

Известно, что все нерасширяющие операторы, действующие в расширенном K -пространстве, регулярны тогда и только тогда, когда рассматриваемое K -пространство локально одномерно. Кроме того, локальная одномерность K -пространства с базой B равносильна равенству $R^\wedge = \mathbf{R}$ в $V^{(B)}$. До сих пор было по-видимому неизвестно, существуют ли недискретные локально одномерные K -пространства. В настоящей заметке дан положительный ответ на этот вопрос. В качестве вспомогательного результата установлено, что локальная одномерность K -пространства равносильна σ -дистрибутивности его базы.

На протяжении всего текста E — произвольное расширенное K -пространство, E^+ — совокупность положительных элементов E , Q — стоуновский компакт базы E и $\text{Clop}(Q)$ — булева алгебра всех открыто-замкнутых подмножеств Q . Для произвольной булевой алгебры символы 0 и 1 обозначают ее наименьший и наибольший элементы, называемые соответственно нулем и единицей. Подмножества алгебры, супремум которых равен единице, мы называем покрытиями этой алгебры. Покрытия, состоящие из попарно дизъюнктивных элементов, называются разбиениями алгебры. Элемент $e \in E^+$ назовем *локально постоянным* относительно $f \in E^+$, если $e = \bigvee_{\xi \in \Xi} \lambda_\xi \pi_\xi f$ для некоторого числового семейства $(\lambda_\xi)_{\xi \in \Xi}$ и семейства $(\pi_\xi)_{\xi \in \Xi}$ попарно дизъюнктивных порядковых проекторов. Расширенное K -пространство E называется *локально одномерным*, если оно удовлетворяет одному из следующих эквивалентных условий (см. [MW]: теорема 3.1):

- (1) все элементы E^+ являются локально постоянными относительно некоторой порядковой единицы E ;
- (2) все элементы E^+ являются локально постоянными относительно любой порядковой единицы E ;
- (3) для любой функции $e \in C_\infty(Q)$ существует разбиение $(U_\xi)_{\xi \in \Xi}$ алгебры $\text{Clop}(Q)$ такое, что функция e постоянна на каждом из множеств U_ξ .

¹Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 94-01-00529-а) и Международным научным фондом (грант NYU000).

Линейный оператор $T : E \rightarrow E$ называется *нерасширяющим* или *сохраняющим компоненты*, если для любых $e, f \in E$ из $|e| \wedge |f| = 0$ следует $|Te| \wedge |f| = 0$.

Следующая теорема объединяет результаты, полученные Ю.А. Абрамовичем, А.И. Векслером и А.В. Колдуновым ([ABK]: теорема 2.1), а также П.Т.Н. Макполином и А.В. Викстедом ([MW]: теорема 3.2).

Теорема 1. *Пусть E — расширенное K -пространство. Каждый нерасширяющий оператор $T : E \rightarrow E$ регулярен тогда и только тогда, когда K -пространство E локально одномерно.*

Во избежание недоразумений при чтении статей [ABK] и [MW] следует иметь в виду следующие два обстоятельства. Во-первых, несмотря на то, что в формулировке теоремы 2.1 из [ABK] фигурирует произвольное недискретное K -пространство, доказательство этой теоремы приведено лишь для локально одномерных K -пространств. Во-вторых, пример недискретного локально одномерного K -пространства, приведенный в [MW], содержит ошибку, о чем А.В. Викстед недавно сообщил в статье [AW]. Таким образом, вопрос о том, всякое ли локально одномерное K -пространство должно быть дискретным (т. е. иметь атомную базу), по всей видимости, до сих пор оставался открытым.

Понятие локально одномерного K -пространства имеет следующую булевозначную интерпретацию. (За разъяснением основных понятий булевозначного анализа мы отсылаем читателя ко второй части монографии [KK].) Пусть B — полная булева алгебра, \mathbf{R} — поле вещественных чисел внутри $V^{(B)}$ и R^\wedge — каноническое погружение R в $V^{(B)}$.

Теорема 2. *Равенство $R^\wedge = \mathbf{R}$ имеет место тогда и только тогда, когда спуск \mathbf{R} является локально одномерным K -пространством.*

Зная общее устройство спуска объектов вида X^\wedge , сформулированное утверждение легко вывести из известной теоремы Е.И. Гордона (см. [KK]: 3.1.1(1), 5.2.1 и 5.2.2).

Из личных бесед с коллегами автору настоящей заметки известно, что среди специалистов в области булевозначного анализа весьма популярна гипотеза об атомности всех булевых алгебр B , обеспечивающих равенство $R^\wedge = \mathbf{R}$ в $V^{(B)}$. Таким образом, вопрос о связи между дискретными и локально одномерными K -пространствами имеет довольно широкую область приложений, по крайней мере включающую теорию векторных решеток, теорию положительных операторов и булевозначный анализ.

После некоторого предварительного обсуждения основных понятий мы приведем пример безатомного локально одномерного K -пространства. В силу теоремы 1 мы тем самым получим безатомное расширенное K -пространство E , для которого все нерасширяющие операторы $T : E \rightarrow E$ регуляры, а в силу теоремы 2 мы будем иметь безатомную полную булеву алгебру B , для которой $R^\wedge = \mathbf{R}$ в $V^{(B)}$.

Напомним, что σ -полная алгебра B называется *σ -дистрибутивной*, если она удовлетворяет одному из следующих эквивалентных условий (см. [C]: 19.1):

- (1) $\bigwedge_{n \in N} \bigvee_{m \in N} b_m^n = \bigvee_{m \in N^N} \bigwedge_{n \in N} b_{m(n)}^n$ для любых $b_m^n \in B$ ($n, m \in N$);
- (2) $\bigvee_{n \in N} \bigwedge_{m \in N} b_m^n = \bigwedge_{m \in N^N} \bigvee_{n \in N} b_{m(n)}^n$ для любых $b_m^n \in B$ ($n, m \in N$);

(3) для любой последовательности $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ элементов B имеет место равенство $\bigvee_{\sigma \in \{1, -1\}^{\mathbb{N}}} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \sigma(n)b_n = 1$, где $1b_n = b_n$ и $(-1)b_n = 1 \setminus b_n$.

Пусть B — произвольная булева алгебра. Элемент $b \in B$ называется *вписанным* в покрытие C алгебры B , если $b \leq c$ для некоторого элемента $c \in C$. Говорят, что покрытие C_0 вписано в покрытие C , если каждый элемент C_0 вписан в C . Если $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность покрытий алгебры B и элемент $b \in B$ вписан в каждое из покрытий C_n ($n \in \mathbb{N}$), то мы будем говорить, что элемент b вписан в последовательность $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Покрытие, все элементы которого вписаны в последовательность $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$, мы также будем называть вписанным в эту последовательность.

Предложение 3. Пусть B — σ -полная булева алгебра. Следующие утверждения эквивалентны:

- (1) алгебра B σ -дистрибутивна;
- (2) в любую последовательность счетных покрытий B можно вписать (возможно, несчетное) покрытие;
- (3) в любую последовательность конечных покрытий B можно вписать (возможно, бесконечное) покрытие;
- (4) в любую последовательность двухэлементных разбиений B можно вписать покрытие.

Доказательство эквивалентности (1) \Leftrightarrow (2) можно найти в [С] (см. 19.3). Утверждение (4) является переформулировкой условия (3) в определении σ -дистрибутивности. Импликации (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) очевидны.

Доказательство следующего результата имеется в [С] (см. 20.2).

Теорема 4 (принцип исчерпывания). *В любое покрытие полной булевой алгебры можно вписать разбиение.*

Следствие 5. Пусть B — полная булева алгебра. Следующие утверждения эквивалентны:

- (1) алгебра B σ -дистрибутивна;
- (2) в любую последовательность счетных разбиений B можно вписать (возможно, несчетное) разбиение;
- (3) в любую последовательность конечных разбиений B можно вписать (возможно, бесконечное) разбиение;
- (4) в любую последовательность двухэлементных разбиений B можно вписать разбиение.

Функцию $e \in C_\infty(Q)$ назовем *вписанной* в покрытие C булевой алгебры $\text{Clop}(Q)$, если для любых двух точек $q', q'' \in Q$, удовлетворяющих равенству $e(q') = e(q'')$, существует такой элемент $U \in C$, что $q', q'' \in U$. Если $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность покрытий алгебры $\text{Clop}(Q)$ и функция e вписана в каждое из покрытий C_n ($n \in \mathbb{N}$), то мы будем говорить, что функция e вписана в последовательность $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Лемма 6. *В любую последовательность конечных покрытий алгебры $\text{Clop}(Q)$ можно вписать функцию из $C(Q)$.*

Доказательство. Пусть $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность конечных покрытий алге-

бры $\text{Clor}(Q)$. Методом индукции несложно построить последовательность разбиений $P_m = \{U_1^m, U_2^m, \dots, U_{2^m}^m\}$ алгебры $\text{Clor}(Q)$, обладающую следующими свойствами:

(1) для каждого $n \in N$ найдется номер $m \in N$ такой, что разбиение P_m вписано в покрытие C_n ;

(2) $U_n^m = U_{2j-1}^{m+1} \vee U_{2j}^{m+1}$ для всех $m \in N$ и $j \in \{1, 2, \dots, 2^m\}$.

Для каждого номера $m \in N$ определим двузначную функцию $\chi_m \in C(Q)$ следующим образом:

$$\chi_m := \sum_{i=1}^{2^{m-1}} \chi(U_{2i}^m),$$

где $\chi(U)$ — характеристическая функция подмножества $U \subset Q$. Поскольку ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{3^m} \chi_m$ равномерно сходится, его сумма e принадлежит $C(Q)$. Мы покажем, что функция e вписана в $(C_n)_{n \in N}$. Благодаря свойству (1) последовательности $(P_m)_{m \in N}$ нам для этого достаточно установить, что функция e вписана в $(P_m)_{m \in N}$.

Предположим противное и рассмотрим наименьшее число $m \in N$, для которого функция e не вписывается в разбиение P_m . В этом случае имеются две точки $q', q'' \in Q$, удовлетворяющие равенству $e(q') = e(q'')$ и принадлежащие различным элементам P_m . Поскольку функция e вписана в разбиение P_{m-1} (при $m > 1$), из свойства (2) последовательности $(P_m)_{m \in N}$ следует, что точки q' и q'' принадлежат соседним элементам P_m , т. е. элементам вида U_j^m и U_{j+1}^m , где $j \in \{1, \dots, 2^m - 1\}$. Пусть для определенности q' принадлежит элементу с четным нижним индексом, а q'' — с нечетным, т. е. $\chi_m(q') = 1$ и $\chi_m(q'') = 0$. Тогда, учитывая, что $\chi_i(q') = \chi_i(q'')$ для всех $i \in \{1, \dots, m-1\}$, мы имеем:

$$e(q') - e(q'') = \frac{1}{3^m} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{3^i} (\chi_i(q') - \chi_i(q'')) \geq \frac{1}{3^m} - \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{3^i} = \frac{1}{2 \cdot 3^m} > 0,$$

что противоречит равенству $e(q') = e(q'')$. Лемма доказана.

Теорема 7. *Расширенное K -пространство локально одномерно тогда и только тогда, когда его база σ -дистрибутивна.*

Доказательство. Пусть E — расширенное K -пространство и Q — стоуновский компакт базы E . Предположим, что K -пространство E локально одномерно, и рассмотрим произвольную последовательность $(P_n)_{n \in N}$ конечных разбиений булевой алгебры $\text{Clor}(Q)$. Согласно следствию 5 для доказательства σ -дистрибутивности базы E достаточно вписать в $(P_n)_{n \in N}$ какое-либо разбиение $\text{Clor}(Q)$. В силу леммы 6 в последовательность $(P_n)_{n \in N}$ можно вписать функцию $e \in C_{\infty}(Q)$. Поскольку K -пространство E локально одномерно, существует такое разбиение $(U_{\xi})_{\xi \in \Xi}$ алгебры $\text{Clor}(Q)$, что функция e постоянна на каждом из множеств U_{ξ} . Покажем, что разбиение $(U_{\xi})_{\xi \in \Xi}$ вписано в последовательность $(P_n)_{n \in N}$. Для этого мы зафиксируем произвольные индексы $\xi \in \Xi$ и $n \in N$ и установим, что множество U_{ξ} вписано в разбиение P_n . Можно считать, что $U_{\xi} \neq \emptyset$. Пусть q_0 — произвольный элемент U_{ξ} . Конечность разбиения P_n позволяет подобрать такой его элемент U , что $q_0 \in U$. Осталось заметить, что

$U_\xi \subset U$. Действительно, если $q \in U_\xi$, то $e(q) = e(q_0)$, а поскольку функция e вписана в P_n , точки q и q_0 принадлежат одному и тому же элементу разбиения P_n , т. е. $q \in U$.

Предположим теперь, что база E σ -дистрибутивна, и рассмотрим произвольную функцию $e \in C_\infty(Q)$. Согласно условию (3) определения локальной одномерности, нам достаточно построить такое разбиение $(U_\xi)_{\xi \in \Xi}$ алгебры $\text{Clor}(Q)$, что функция e постоянна на каждом из множеств U_ξ . Для любого натурального n и целого m обозначим через U_m^n внутренность замыкания множества всех точек $q \in Q$, для которых $\frac{m}{n} \leq e(q) < \frac{m+1}{n}$, и положим $P_n := \{U_m^n : m \in Z\}$. В силу следствия 5 в последовательность $(P_n)_{n \in N}$ счетных разбиений алгебры $\text{Clor}(Q)$ можно вписать некоторое разбиение $(U_\xi)_{\xi \in \Xi}$. Несложно убедиться в том, что построенное разбиение является искомым. Теорема доказана.

Таким образом, вопрос о существовании безатомного локально одномерного K -пространства сводится к существованию безатомной σ -дистрибутивной полной булевой алгебры. Построению такой алгебры посвящена оставшаяся часть этой заметки.

Булева алгебра B называется σ -индуктивной, если любая убывающая последовательность ненулевых элементов B имеет ненулевую нижнюю границу. Подалгебра B_0 булевой алгебры B называется *плотной* или *массивной*, если для любого ненулевого элемента $b \in B$ существует ненулевой элемент $b_0 \in B_0$ такой, что $b_0 \leq b$.

Лемма 8. *Если σ -полная булева алгебра содержит σ -индуктивную плотную подалгебру, то она σ -дистрибутивна.*

Доказательство. Пусть B — σ -полная булева алгебра и B_0 — ее σ -индуктивная плотная подалгебра. Рассмотрим произвольную последовательность $(C_n)_{n \in N}$ счетных покрытий алгебры B , обозначим через C множество всех элементов B , вписанных в $(C_n)_{n \in N}$, и предположим вопреки доказываемому, что C не является покрытием алгебры B . Тогда существует ненулевой элемент $b \in B$, дизъюнктивный всем элементам C .

Построим по индукции последовательности $(b_n)_{n \in N}$ и $(c_n)_{n \in N}$ следующим образом. Пусть c_1 — такой элемент C_1 , что $b \wedge c_1 \neq 0$. В силу плотности B_0 имеется элемент $b_1 \in B_0$ такой, что $0 < b_1 \leq b \wedge c_1$. Предположим, что элементы b_n и c_n построены. Пусть c_{n+1} — такой элемент C_{n+1} , что $b_n \wedge c_{n+1} \neq 0$. В качестве b_{n+1} мы возьмем произвольный элемент B_0 , удовлетворяющий неравенствам $0 < b_{n+1} \leq b_n \wedge c_{n+1}$.

Итак, мы построили такие последовательности $(b_n)_{n \in N}$ и $(c_n)_{n \in N}$, что $b_n \in B_0$, $b_n \leq c_n \in C_n$ и $0 < b_{n+1} \leq b_n \leq b$ для всех $n \in N$. Благодаря σ -индуктивности алгебры B_0 в ней имеется такой ненулевой элемент b_0 , что $b_0 \leq b_n$ для всех $n \in N$. В силу неравенств $b_0 \leq c_n$ элемент b_0 вписан в $(C_n)_{n \in N}$, т. е. принадлежит множеству C . С другой стороны, $b_0 \leq b$, что противоречит дизъюнктивности b всем элементам C . Лемма доказана.

Как известно, для любой булевой алгебры B существует полная булева алгебра \bar{B} , содержащая B как плотную подалгебру (см. [C]: § 35). Такая алгебра \bar{B} единственна с точностью до изоморфизма и называется *пополнением* алгебры B . Очевидно, пополнение безатомной алгебры безатомно. Кроме того, в силу леммы 8 пополнение

σ -индуктивной алгебры σ -дистрибутивно. Поэтому для доказательства существования безатомной σ -дистрибутивной полной булевой алгебры достаточно предъявить произвольную безатомную σ -индуктивную булеву алгебру. Примеры таких алгебр, безусловно, известны. Для полноты картины мы приведем здесь одну из наиболее простых конструкций.

Пример 9. Пусть B — булева алгебра всех подмножеств N , а I — идеал B , состоящий из всех конечных подмножеств N . Тогда фактор-алгебра B/I (см. [С]: § 10) безатомна и σ -индуктивна.

Доказательство. Безатомность алгебры B/I очевидна. Для доказательства σ -индуктивности этой алгебры достаточно рассмотреть произвольную убывающую последовательность $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ бесконечных подмножеств N и построить такое бесконечное множество $b \subset N$, что разность $b \setminus b_n$ конечна для всех $n \in \mathbb{N}$. Необходимое множество $b = \{m_n : n \in \mathbb{N}\}$ легко получить методом индукции, положив $m_1 := \min b_1$ и $m_{n+1} := \min\{m \in b_{n+1} : m > m_n\}$.

Автор благодарен Э.Ю. Емельянову, С.С. Кутателадзе и С.А. Малюгину за внимание к работе, а также Ю.А. Абрамовичу за предоставленную им информацию, способствовавшую успешному решению проблемы.

Литература

[АВК] Абрамович Ю.А., Векслер А.И., Колдунов А.В., Операторы, сохраняющие дизъюнктность, их непрерывность и мультипликативное представление, Линейные операторы и их приложения, Межвузовский сборник научных трудов, ЛГПИ, Ленинград, 1981, с. 13–34.

[MW] McPolin P.T.N., Wickstead A.W., The order boundedness of band preserving operators on uniformly complete vector lattices. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1985, v. 97, N 3, p. 481–487.

[AW] Abramovich Y.A., Wickstead A.W., The regularity of order bounded operators into $C(K)$. II, Quart. J. Math. Oxford, 1993, v. 44, N 175, p. 257–270.

[КК] Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С., Нестандартные методы анализа, 1990, Наука, Новосибирск.

[С] Сикорский Р., Булевы алгебры, 1969, Мир, Москва.