13 Локально одномерные K-пространства и σ-дистрибутивные булевы алгебры[1]

А.Е. Гутман
ИМ СО РАН Новосибирск

Аннотация

Известно, что все нерасширяющие операторы, действующие в расширенном K-пространстве, регулярны тогда и только тогда, когда рассматриваемое K-пространство локально одномерно. Кроме того, локальная одномерность K-пространства с базой B равносильна равенству $R^{\wedge} = \mathbf{R}$ в $V^{(B)}$. До сих пор было по-видимому неизвестно, существуют ли недискретные локально одномерные K-пространства. В настоящей заметке дан положительный ответ на этот вопрос. В качестве вспомогательного результата установлено, что локальная одномерность K-пространства равносильна σ-дистрибутивности его базы.

На протяжение всего текста E — произвольное расширенное K-пространство, E^+ — совокупность положительных элементов E, Q — стоуновский компакт базы E и $\mathrm{Clop}(Q)$ — булева алгебра всех открыто-замкнутых подмножеств Q. Для произвольной булевой алгебры символы 0 и 1 обозначают ее наименьший и наибольший элементы, называемые соответственно нулем и единицей. Подмножества алгебры, супремум которых равен единице, мы называем покрытиями этой алгебры. Покрытия, состоящие из попарно дизъюнктных элементов, называются разбиениями алгебры. Элемент $e \in E^+$ назовем *локально постоянным* относительно $f \in E^+$, если $e = \bigvee_{\xi\in\Xi} \lambda_\xi \pi_\xi f$ для некоторого числового семейства $(\lambda_\xi)_{\xi\in\Xi}$ и семейства $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ попарно дизъюнктных порядковых проекторов. Расширенное K-пространство E называется *локально одномерным*, если оно удовлетворяет одному из следующих эквивалентных условий (см. [MW]: теорема 3.1):

(1) все элементы E^+ являются локально постоянными относительно некоторой порядковой единицы E;

(2) все элементы E^+ являются локально постоянными относительно любой порядковой единицы E;

(3) для любой функции $e \in C_\infty(Q)$ существует разбиение $(U_\xi)_{\xi\in\Xi}$ алгебры $\mathrm{Clop}(Q)$ такое, что функция e постоянна на каждом из множеств U_ξ.

[1]Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 94-01-00529-а) и Международным научным фондом (грант NYU000).

Линейный оператор $T : E \to E$ называется *нерасширяющим* или *сохраняющим компоненты*, если для любых $e, f \in E$ из $|e| \wedge |f| = 0$ следует $|Te| \wedge |f| = 0$.

Следующая теорема объединяет результаты, полученные Ю. А. Абрамовичем, А.И. Векслером и А.В. Колдуновым ([АВК]: теорема 2.1), а также П.Т.Н. Макполином и А.В. Викстедом ([MW]: теорема 3.2).

Теорема 1. *Пусть E — расширенное K-пространство. Каждый нерасширяющий оператор $T : E \to E$ регулярен тогда и только тогда, когда K-пространство E локально одномерно.*

Во избежание недоразумений при чтении статей [АВК] и [MW] следует иметь в виду следующие два обстоятельства. Во-первых, несмотря на то, что в формулировке теоремы 2.1 из [АВК] фигурирует произвольное недискретное K-пространство, доказательство этой теоремы приведено лишь для локально одномерных K-пространств. Во-вторых, пример недискретного локально одномерного K-пространства, приведенный в [MW], содержит ошибку, о чем А. В. Викстед недавно сообщил в статье [AW]. Таким образом, вопрос о том, всякое ли локально одномерное K-пространство должно быть дискретным (т. е. иметь атомную базу), по всей видимости, до сих пор оставался открытым.

Понятие локально одномерного K-пространства имеет следующую булевозначную интерпретацию. (За разъяснением основных понятий булевозначного анализа мы отсылаем читателя ко второй части монографии [КК].) Пусть B — полная булева алгебра, $\mathbf{R}$ — поле вещественных чисел внутри $V^{(B)}$ и $R^\wedge$ — каноническое погружение R в $V^{(B)}$.

Теорема 2. *Равенство $R^\wedge = \mathbf{R}$ имеет место тогда и только тогда, когда спуск $\mathbf{R}$ является локально одномерным K-пространством.*

Зная общее устройство спуска объектов вида $X^\wedge$, сформулированное утверждение легко вывести из известной теоремы Е.И. Гордона (см. [КК]: 3.1.1(1), 5.2.1 и 5.2.2).

Из личных бесед с коллегами автору настоящей заметки известно, что среди специалистов в области булевозначного анализа весьма популярна гипотеза об атомности всех булевых алгебр B, обеспечивающих равенство $R^\wedge = \mathbf{R}$ в $V^{(B)}$. Таким образом, вопрос о связи между дискретными и локально одномерными K-пространствами имеет довольно широкую область приложений, по крайней мере включающую теорию векторных решеток, теорию положительных операторов и булевозначный анализ.

После некоторого предварительного обсуждения основных понятий мы приведем пример безатомного локально одномерного K-пространства. В силу теоремы 1 мы тем самым получим безатомное расширенное K-пространство E, для которого все нерасширяющие операторы $T : E \to E$ регулярны, а в силу теоремы 2 мы будем иметь безатомную полную булеву алгебру B, для которой $R^\wedge = \mathbf{R}$ в $V^{(B)}$.

Напомним, что σ-полная алгебра B называется *σ-дистрибутивной*, если она удовлетворяет одному из следующих эквивалентных условий (см. [С]: 19.1):

(1) $\bigwedge_{n\in N} \bigvee_{m\in N} b^n_m = \bigvee_{m\in N^N} \bigwedge_{n\in N} b^n_{m(n)}$ для любых $b^n_m \in B$ $(n, m \in N)$;

(2) $\bigvee_{n\in N} \bigwedge_{m\in N} b^n_m = \bigwedge_{m\in N^N} \bigvee_{n\in N} b^n_{m(n)}$ для любых $b^n_m \in B$ $(n, m \in N)$;

(3) для любой последовательности $(b_n)_{n\in N}$ элементов B имеет место равенство $\bigvee_{\sigma\in\{1,-1\}^N} \bigwedge_{n\in N} \sigma(n)b_n = 1$, где $1b_n = b_n$ и $(-1)b_n = 1\backslash b_n$.

Пусть B — произвольная булева алгебра. Элемент $b \in B$ называется *вписанным* в покрытие C алгебры B, если $b \le c$ для некоторого элемента $c \in C$. Говорят, что покрытие C_0 вписано в покрытие C, если каждый элемент C_0 вписан в C. Если $(C_n)_{n\in N}$ — последовательность покрытий алгебры B и элемент $b \in B$ вписан в каждое из покрытий C_n $(n \in N)$, то мы будем говорить, что элемент b вписан в последовательность $(C_n)_{n\in N}$. Покрытие, все элементы которого вписаны в последовательность $(C_n)_{n\in N}$, мы также будем называть вписанным в эту последовательность.

Предложение 3. Пусть B — σ-полная булева алгебра. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) алгебра B σ-дистрибутивна;

(2) в любую последовательность счетных покрытий B можно вписать (возможно, несчетное) покрытие;

(3) в любую последовательность конечных покрытий B можно вписать (возможно, бесконечное) покрытие;

(4) в любую последовательность двухэлементных разбиений B можно вписать покрытие.

Доказательство эквивалентности (1)$\Leftrightarrow$(2) можно найти в [C] (см. 19.3). Утверждение (4) является переформулировкой условия (3) в определении σ-дистрибутивности. Импликации (2)$\Rightarrow$(3)$\Rightarrow$(4) очевидны.

Доказательство следующего результата имеется в [C] (см. 20.2).

Теорема 4 (принцип исчерпывания). *В любое покрытие полной булевой алгебры можно вписать разбиение.*

Следствие 5. Пусть B — полная булева алгебра. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) алгебра B σ-дистрибутивна;

(2) в любую последовательность счетных разбиений B можно вписать (возможно, несчетное) разбиение;

(3) в любую последовательность конечных разбиений B можно вписать (возможно, бесконечное) разбиение;

(4) в любую последовательность двухэлементных разбиений B можно вписать разбиение.

Функцию $e \in C_\infty(Q)$ назовем *вписанной* в покрытие C булевой алгебры $\mathrm{Clop}(Q)$, если для любых двух точек $q', q'' \in Q$, удовлетворяющих равенству $e(q') = e(q'')$, существует такой элемент $U \in C$, что $q', q'' \in U$. Если $(C_n)_{n\in N}$ — последовательность покрытий алгебры $\mathrm{Clop}(Q)$ и функция e вписана в каждое из покрытий C_n $(n \in N)$, то мы будем говорить, что функция e вписана в последовательность $(C_n)_{n\in N}$.

Лемма 6. *В любую последовательность конечных покрытий алгебры* $\mathrm{Clop}(Q)$ *можно вписать функцию из* $C(Q)$.

Доказательство. Пусть $(C_n)_{n\in N}$ — последовательность конечных покрытий алгебры $\mathrm{Clop}(Q)$. Методом индукции несложно построить последовательность разбиений $P_m = \{U_1^m, U_2^m, \ldots, U_{2^m}^m\}$ алгебры $\mathrm{Clop}(Q)$, обладающую следующими свойствами:

(1) для каждого $n \in N$ найдется номер $m \in N$ такой, что разбиение P_m вписано в покрытие C_n;

(2) $U_n^m = U_{2j-1}^{m+1} \vee U_{2j}^{m+1}$ для всех $m \in N$ и $j \in \{1, 2, \ldots, 2^m\}$.

Для каждого номера $m \in N$ определим двузначную функцию $\chi_m \in C(Q)$ следующим образом:

$$\chi_m := \sum_{i=1}^{2^{m-1}} \chi(U_{2i}^m),$$

где $\chi(U)$ — характеристическая функция подмножества $U \subset Q$. Поскольку ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{3^m} \chi_m$ равномерно сходится, его сумма e принадлежит $C(Q)$. Мы покажем, что функция e вписана в $(C_n)_{n \in N}$. Благодаря свойству (1) последовательности $(P_m)_{m \in N}$ нам для этого достаточно установить, что функция e вписана в $(P_m)_{m \in N}$.

Предположим противное и рассмотрим наименьшее число $m \in N$, для которого функция e не вписывается в разбиение P_m. В этом случае имеются две точки $q', q'' \in Q$, удовлетворяющие равенству $e(q') = e(q'')$ и принадлежащие различным элементам P_m. Поскольку функция e вписана в разбиение P_{m-1} (при $m > 1$), из свойства (2) последовательности $(P_m)_{m \in N}$ следует, что точки q' и q'' принадлежат соседним элементам P_m, т. е. элементам вида U_j^m и U_{j+1}^m, где $j \in \{1, \ldots, 2^m - 1\}$. Пусть для определенности q' принадлежит элементу с четным нижним индексом, а q'' — с нечетным, т. е. $\chi_m(q') = 1$ и $\chi_m(q'') = 0$. Тогда, учитывая, что $\chi_i(q') = \chi_i(q'')$ для всех $i \in \{1, \ldots, m-1\}$, мы имеем:

$$e(q') - e(q'') = \frac{1}{3^m} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{3^i}(\chi_i(q') - \chi_i(q'')) \geq \frac{1}{3^m} - \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{3^i} = \frac{1}{2 \cdot 3^m} > 0,$$

что противоречит равенству $e(q') = e(q'')$. Лемма доказана.

Теорема 7. *Расширенное K-пространство локально одномерно тогда и только тогда, когда его база σ-дистрибутивна.*

Доказательство. Пусть E — расширенное K-пространство и Q — стоуновский компакт базы E. Предположим, что K-пространство E локально одномерно, и рассмотрим произвольную последовательность $(P_n)_{n \in N}$ конечных разбиений булевой алгебры $\mathrm{Clop}(Q)$. Согласно следствию 5 для доказательства σ-дистрибутивности базы E достаточно вписать в $(P_n)_{n \in N}$ какое-либо разбиение $\mathrm{Clop}(Q)$. В силу леммы 6 в последовательность $(P_n)_{n \in N}$ можно вписать функцию $e \in C_\infty(Q)$. Поскольку K-пространство E локально одномерно, существует такое разбиение $(U_\xi)_{\xi \in \Xi}$ алгебры $\mathrm{Clop}(Q)$ что функция e постоянна на каждом из множеств U_ξ. Покажем, что разбиение $(U_\xi)_{\xi \in \Xi}$ вписано в последовательность $(P_n)_{n \in N}$. Для этого мы зафиксируем произвольные индексы $\xi \in \Xi$ и $n \in N$ и установим, что множество U_ξ вписано в разбиение P_n. Можно считать, что $U_\xi \neq \emptyset$. Пусть q_0 — произвольный элемент U_ξ. Конечность разбиения P_n позволяет подобрать такой его элемент U, что $q_0 \in U$. Осталось заметить, что

$U_\xi \subset U$. Действительно, если $q \in U_\xi$, то $e(q) = e(q_0)$, а поскольку функция e вписана в P_n, точки q и q_0 принадлежат одному и тому же элементу разбиения P_n, т. е. $q \in U$.

Предположим теперь, что база E σ-дистрибутивна, и рассмотрим произвольную функцию $e \in C_\infty(Q)$. Согласно условию (3) определения локальной одномерности, нам достаточно построить такое разбиение $(U_\xi)_{\xi\in\Xi}$ алгебры $\mathrm{Clop}(Q)$, что функция e постоянна на каждом из множеств U_ξ. Для любого натурального n и целого m обозначим через U_m^n внутренность замыкания множества всех точек $q \in Q$, для которых $\frac{m}{n} \le e(q) < \frac{m+1}{n}$, и положим $P_n := \{U_m^n : m \in Z\}$. В силу следствия 5 в последовательность $(P_n)_{n\in N}$ счетных разбиений алгебры $\mathrm{Clop}(Q)$ можно вписать некоторое разбиение $(U_\xi)_{\xi\in\Xi}$. Несложно убедиться в том, что построенное разбиение является искомым. Теорема доказана.

Таким образом, вопрос о существовании безатомного локально одномерного K-пространства сводится к существованию безатомной σ-дистрибутивной полной булевой алгебры. Построению такой алгебры посвящена оставшаяся часть этой заметки.

Булева алгебра B называется *σ-индуктивной*, если любая убывающая последовательность ненулевых элементов B имеет ненулевую нижнюю границу. Подалгебра B_0 булевой алгебры B называется *плотной* или *массивной*, если для любого ненулевого элемента $b \in B$ существует ненулевой элемент $b_0 \in B_0$ такой, что $b_0 \le b$.

Лемма 8. *Если σ-полная булева алгебра содержит σ-индуктивную плотную подалгебру, то она σ-дистрибутивна.*

Доказательство. Пусть B — σ-полная булева алгебра и B_0 — ее σ-индуктивная плотная подалгебра. Рассмотрим произвольную последовательность $(C_n)_{n\in N}$ счетных покрытий алгебры B, обозначим через C множество всех элементов B, вписанных в $(C_n)_{n\in N}$, и предположим вопреки доказываемому, что C не является покрытием алгебры B. Тогда существует ненулевой элемент $b \in B$, дизъюнктный всем элементам C.

Построим по индукции последовательности $(b_n)_{n\in N}$ и $(c_n)_{n\in N}$ следующим образом. Пусть c_1 — такой элемент C_1, что $b \wedge c_1 \ne 0$. В силу плотности B_0 имеется элемент $b_1 \in B_0$ такой, что $0 < b_1 \le b \wedge c_1$. Предположим, что элементы b_n и c_n построены. Пусть c_{n+1} — такой элемент C_{n+1}, что $b_n \wedge c_{n+1} \ne 0$. В качестве b_{n+1} мы возьмем произвольный элемент B_0, удовлетворяющий неравенствам $0 < b_{n+1} \le b_n \wedge c_{n+1}$.

Итак, мы построили такие последовательности $(b_n)_{n\in N}$ и $(c_n)_{n\in N}$, что $b_n \in B_0$, $b_n \le c_n \in C_n$ и $0 < b_{n+1} \le b_n \le b$ для всех $n \in N$. Благодаря σ-индуктивности алгебры B_0 в ней имеется такой ненулевой элемент b_0, что $b_0 \le b_n$ для всех $n \in N$. В силу неравенств $b_0 \le c_n$ элемент b_0 вписан в $(C_n)_{n\in N}$, т. е. принадлежит множеству C. С другой стороны, $b_0 \le b$, что противоречит дизъюнктности b всем элементам C. Лемма доказана.

Как известно, для любой булевой алгебры B существует полная булева алгебра $\overline{B}$, содержащая B как плотную подалгебру (см. [C]: § 35). Такая алгебра $\overline{B}$ единственна с точностью до изоморфизма и называется *пополнением* алгебры B. Очевидно, пополнение безатомной алгебры безатомно. Кроме того, в силу леммы 8 пополнение

σ-индуктивной алгебры σ-дистрибутивно. Поэтому для доказательства существования безатомной σ-дистрибутивной полной булевой алгебры достаточно предъявить произвольную безатомную σ-индуктивную булеву алгебру. Примеры таких алгебр, безусловно, известны. Для полноты картины мы приведем здесь одну из наиболее простых конструкций.

Пример 9. Пусть B — булева алгебра всех подмножеств N, а I — идеал B, состоящий из всех конечных подмножеств N. Тогда фактор-алгебра B/I (см. [C]: § 10) безатомна и σ-индуктивна.

Доказательство. Безатомность алгебры B/I очевидна. Для доказательства σ-индуктивности этой алгебры достаточно рассмотреть произвольную убывающую последовательность $(b_n)_{n \in N}$ бесконечных подмножеств N и построить такое бесконечное множество $b \subset N$, что разность $b \setminus b_n$ конечна для всех $n \in N$. Необходимое множество $b = \{m_n : n \in N\}$ легко получить методом индукции, положив $m_1 := \min b_1$ и $m_{n+1} := \min\{m \in b_{n+1} : m > m_n\}$.

Автор благодарен Э.Ю. Емельянову, С.С. Кутателадзе и С.А. Малюгину за внимание к работе, а также Ю.А. Абрамовичу за предоставленную им информацию, способствовавшую успешному решению проблемы.

Литература

[АВК] *Абрамович Ю. А., Векслер А. И., Колдунов А. В.,* Операторы, сохраняющие дизъюнктность, их непрерывность и мультипликативное представление, Линейные операторы и их приложения, Межвузовский сборник научных трудов, ЛГПИ, Ленинград, 1981, с. 13–34.

[MW] *McPolin P. T. N., Wickstead A. W.,* The order boundedness of band preserving operators on uniformly complete vector lattices. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1985, v. 97, N 3, p. 481–487.

[AW] *Abramovich Y. A., Wickstead A. W.,* The regularity of order bounded operators into $C(K)$. II, Quart. J. Math. Oxford, 1993, v. 44, N 175, p. 257–270.

[КК] *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.,* Нестандартные методы анализа, 1990, Наука, Новосибирск.

[C] *Сикорский Р.,* Булевы алгебры, 1969, Мир, Москва.