УДК 517.98

БАНАХОВЫ РАССЛОЕНИЯ В ТЕОРИИ РЕШЕТОЧНО НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ *)

А. Е. Гутман

Семёну Самсоновичу Кутателадзе
к его пятидесятилетию

Одним из традиционных методов функционального анализа является построение аналитических представлений различных абстрактных пространств (векторных решеток, нормированных алгебр и др.) и действующих в них операторов (линейных, монотонных, непрерывных и т. п.). Это обусловлено прежде всего тем, что наличие у объекта того или иного аналитического представления значительно облегчает работу с ним. Например, вместо списка абстрактных свойств оператора мы получаем его выражение в виде конкретной формулы, в которую автоматически заложены все эти свойства. (Такой формулой может быть матрица, интеграл с ядром, оператор взвешенного сдвига и т. д.) Аналогичное преимущество перед аксиоматическим описанием алгебраических систем имеет их конкретная реализация, например, в виде какого-либо пространства функций. К тому же, вести речь об аналитическом представлении оператора можно лишь после того, как объекты, в которых он действует, получат надлежащую реализацию.

С другой стороны, естественным является и противоположное стремление — найти список абстрактных свойств пространства или оператора, эквивалентный наличию у него конкретного аналитического представления. В первую очередь, такой список используется для того, чтобы проверить, имеет ли данный объект рассматриваемое представление. Кроме того, абстрактное описание сосредоточивает в себе свойства многих изучаемых объектов и тем самым позволяет сэкономить время, затрачиваемое на исследование каждого из них в отдельности, сконцентрировав усилия на развитии общей теории.

Описанные традиции в полной мере свойственны теории векторных решеток и (в частности) K-пространств. Понятие K-пространства, введенное Л. В. Канторовичем в 1935 г., несомненно явилось результатом абстрактного обобщения известных к тому времени пространств непрерывных и измеримых вещественных функций, а также линейных функционалов на этих пространствах. Последовавшее затем развитие теории векторных решеток привело к тому, что в 40-е годы Б. З. Вулихом и независимо Т. Огасаварой было получено представление произвольного K-пространства в виде фундамента векторной решетки $C_\infty(Q)$ расширенных непрерывных функций на экстремально несвязном компакте Q. Таким образом, теория K-пространств завершила «полный цикл»:

$$\begin{array}{lll} \text{конкретные примеры} \ \rightarrow & & \\ & \text{абстрактное понятие} \ \rightarrow & \\ & & \text{универсальная реализация} \end{array} \qquad (*)$$

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94–01–00529–а), а также Международного научного фонда (ISF, код проекта NYU 000).

— и дала начало новому этапу теоретических исследований: поиску аналитических представлений для различных классов операторов, действующих в абстрактных векторных решетках.

Если рассмотреть теорию решеточно нормированных пространств (РНП), сосредоточивая внимание на их аналитическом представлении, то можно прийти к выводу, что история РНП в общих чертах повторяет схему развития теории векторных решеток. Прежде всего, понятие РНП можно рассматривать как абстрактное обобщение пространств непрерывных и измеримых функций, принимающих значения в нормированном пространстве. (Впрочем, Л. В. Канторович, вводя понятие РНП все в том же 1935 г., едва ли руководствовался именно этим соображением: систематическое исследование вектор-функций в то время тоже находилось в стадии зарождения.) Если аналитическое представление K-пространств было получено сравнительно через короткое время после их введения, то РНП долгое время оставались без универсальной функциональной реализации. Лишь в 1987 г. А. Г. Кусраев и В. З. Стрижевский получили первый результат в этом направлении: всякое РНП представляется в виде пространства классов эквивалентности непрерывных сечений некоторого банахова расслоения [23].

Реализационная теорема Кусраева — Стрижевского, завершая цикл (*) применительно к теории РНП и тем самым имея несомненную методологическую ценность, обладает тем не менее двумя очевидными техническими недостатками. Во-первых, бросается в глаза упоминание о классах эквивалентности, не свойственных пространствам непрерывных функций. Во-вторых, банахово расслоение в приведенной формулировке не является единственным (с точностью до изометрии). А. Г. Кусраев сам предложил своему ученику — автору этой статьи — подумать над исправлением указанных недостатков. Результатом этих размышлений явилась теория просторных банаховых расслоений и измеримых банаховых расслоений с лифтингом. Систематическому изложению этой теории главным образом и посвящена данная работа.

Предлагаемая статья адресована прежде всего специалистам в теории РНП. В названии отражена ее цель — превратить понятие банахова расслоения в привычный инструмент исследования решеточно нормированных пространств и действующих в них операторов. Естественно, самое большое внимание в данной работе уделяется банаховым расслоениям. Поэтому читателю, знакомому с этим понятием, покажется излишне подробным изложение материала, касающегося элементарных свойств банаховых расслоений и их сечений. Наоборот, приведенные сведения о векторных решетках и решеточно нормированных пространствах могут оказаться неполными. Автор старался восполнить недостаток информации указанием библиографических источников и явной формулировкой основных фактов, хотя бы и без доказательств.

Материал статьи разбит на шесть глав, каждая из которых, в свою очередь, содержит несколько параграфов. Гл. 1 содержит определения и предварительные сведения об основных объектах, фигурирующих в статье. К предварительным сведениям можно отнести и большинство параграфов гл. 2, включающей информацию общего характера о непрерывных банаховых расслоениях. Гл. 3 является центральной как по расположению, так и по содержанию: в ней сосредоточен материал, касающийся просторных банаховых расслоений и реализации РНП в виде пространств сечений. В гл. 4 автор попытался развить теорию измеримых банаховых расслоений, перенеся схему П. Даниэля на случай сечений. Заметим, что эта идея не нова (Н. Динкулеану высказывал ее еще в 1966 г.), однако автору не известны публикации, реализующие упомянутый подход с достаточной систематичностью. В этой же главе вводится и исследуется понятие лифтинга в пространстве измеримых сечений, а также приводятся результаты использования теории просторных банаховых расслоений в исследовании измеримых расслоений. Гл. 5 содержит приложения результатов предыдущих глав к разнообразным пространствам непрерывных и измеримых вектор-функций. Наконец, гл. 6 посвящена исследованию сохраняющих дизъюнктность операторов и построению их аналитических представлений. Надо сказать, что обобщение устанавливаемых результатов на случай произвольных векторных решеток и решеточно нормированных пространств не входит в наши планы, и мы, как правило, ограничиваемся рассмотрением K-пространств и пространств Банаха — Канторовича.

Необходимо отметить, что многие из обсуждаемых нами вопросов изложены также в статьях [40–43]. Тем не менее данная работа не только объединяет имеющиеся там сведения, но и дополняет и развивает их. В частности, материал гл. 6 публикуется впервые.

Автор глубоко благодарен А. Г. Кусраеву, который познакомил его с теорией РНП и предложил интересные задачи. Автор также выражает свою признательность Ю. А. Абрамовичу, С. К. Водопьянову, Э. Ю. Емельянову, А. Г. Качуровскому, Е. В. Колесникову, С. С. Кутателадзе, С. А. Малюгину, Д. Е. Пальчунову, Ан. А. Рубану и В. Г. Троицкому за плодотворные обсуждения некоторых вопросов, возникших в ходе работы над материалом статьи.

Глава 1. Предварительные сведения

Основными объектами, с которыми ведется работа в статье, являются экстремально несвязные компакты, пространства с мерой, булевы алгебры, векторные решетки (главным образом, K-пространства), решеточно нормированные пространства, регулярные и мажорируемые операторы, банаховы расслоения, а также непрерывные и измеримые функции разных типов — вещественные функции, вектор-функции и сечения банаховых расслоений. Эта глава содержит предварительные сведения о большинстве из перечисленных объектов.

§ 1.1. Топологические пространства и пространства с мерой

Идея максимального расширения (= наибольшего продолжения) плотно определенных непрерывных функций является удобным инструментом построения и изучения разного рода функциональных представлений. Наряду с другими смежными вопросами, в этом параграфе мы обсуждаем возможность такого продолжения.

Среди основных объектов, возникающих в ходе изложения, экстремально несвязный компакт встречается, пожалуй, наиболее часто. Популярность этого топологического пространства объясняется тем, что именно оно выступает в роли области определения для функций, участвующих в аналитическом представлении векторных решеток и решеточно нормированных пространств. В данном параграфе идет речь об экстремально несвязных компактах, а также некоторых свойствах их подмножеств и точек. В частности, обсуждается понятие σ-изолированной точки. Сведения об экстремально несвязных компактах в их связи с булевыми алгебрами и векторными решетками имеются в [11, 25]. Общие топологические свойства экстремально несвязных компактов подробно обсуждаются в [55]. Основные факты об абсолютах и идеи их доказательств можно найти в [4, гл. VI, § 6].

В этом параграфе перечислены также определения и обозначения, касающиеся другого базового пространства, рассматриваемого в статье, — пространства с мерой. Приведены понятие и основные свойства лифтинга в факторпространствах измеримых функций и множеств. Различные подходы к определению меры и интеграла подробно изложены в [46]. В [15] пространства с мерой рассмотрены, пожалуй, с наиболее близкой нам точки зрения. Монография [45] является основным источником сведений о лифтинге. Компактами мы, как обычно, называем хаусдорфовы компактные топологические пространства.

1.1.1. Пусть X и Y — топологические пространства, причем Y хаусдорфово, D — всюду плотное подмножество X и $f\colon D \to Y$ — непрерывная функция. Будем говорить, что функция f ***имеет предел*** $y \in Y$ в точке $x \in X$, если для любой окрестности $V \in \mathrm{Op}(y)$ найдется окрестность $U \in \mathrm{Op}(x)$ такая, что $f[U] \subset V$. (Здесь и далее $\mathrm{Op}(x)$ — совокупность всех открытых окрестностей точки x.) Благодаря непрерывности f наше определение предела отличается от классического лишь тем, что значения функции в изолированных точках объявляются ее пределами в этих точках. Рассмотрим множество $\overline{D}$ всех точек $x \in X$, в которых функция f имеет предел, и обозначим этот предел через $\bar{f}(x)$. Ясно, что функция $\bar{f}\colon \overline{D} \to Y$ является продолжением f. Если функция $\bar{f}$ непрерывна, то мы будем называть ее ***максимальным расширением*** f и обозначать символом $\mathrm{ext}(f)$ или, более подробно, $\mathrm{ext}_Y(f)$. Очевидно, максимальное расширение f (коль скоро оно существует) является наибольшим непрерывным Y-значным продолжением f. Точнее говоря, если $D \subset \widetilde{D} \subset X$ и $\tilde{f}\colon \widetilde{D} \to Y$ — непрерывное продолжение f, то $\widetilde{D} \subset \overline{D}$ и $\tilde{f} = \bar{f}$ на $\widetilde{D}$. Ниже мы покажем, что максимальные расширения существуют довольно часто.

Объединения счетных семейств нигде не плотных множеств (= множества первой категории по Бэру) принято называть ***тощими***, а дополнения к ним — ***котощими*** множествами.

Лемма. (1) *Если пространство Y компактно, то f имеет максимальное расширение, т. е. функция $\bar{f}$ непрерывна.*

(2) *Если Y — метризуемый компакт, то $\overline{D}$ — котощее подмножество X.*

◀ Для каждой точки $x \in X$ положим $F(x) := \bigcap\limits_{U \in \mathrm{Op}(x)} \mathrm{cl}\, f[U]$, где cl — операция замыкания. Благодаря компактности Y замкнутые множества $F(x)$ непусты. Ясно, что $\overline{D}$ совпадает с множеством всех тех точек $x \in X$, для которых $F(x)$ состоит из одного элемента. При этом $F(x) = \{\bar{f}(x)\}$ для всех $x \in \overline{D}$.

(1) Пусть $x \in \overline{D}$ и $V \in \mathrm{Op}(\bar{f}(x))$. Тогда $\bigcap\limits_{U \in \mathrm{Op}(x)} \mathrm{cl}\, f[U] \subset V$. В силу компактности Y и фильтрованности семейства $(\mathrm{cl}\, f[U])_{U \in \mathrm{Op}(x)}$ найдется такая окрестность $U \in \mathrm{Op}(x)$, что $\mathrm{cl}\, f[U] \subset V$. Для доказательства непрерывности $\bar{f}$ осталось заметить, что $\bar{f}(x') \in F(x') \subset \mathrm{cl}\, f[U] \subset V$ для всех $x' \in \overline{D} \cap U$, т. е. $\bar{f}[U] \subset V$.

(2) Для каждой точки $x \in D$ и числа $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $V_n(f(x))$ открытый шар с центром $f(x)$ радиуса $1/n$ и зафиксируем такую окрестность $U_n(x) \in \mathrm{Op}(x)$, что $f[U_n(x)] \subset V_n(f(x))$. Положим $U_n := \bigcup\limits_{x \in D} U_n(x)$. Поскольку U_n — открытые всюду плотные подмножества X, достаточно показать, что $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} U_n \subset \overline{D}$. Пусть $\bar{x} \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Тогда найдутся такие элементы $x_n \in D$, что $\bar{x} \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} U_n(x_n)$. Из соотношений

$$F(\bar{x}) = \bigcap_{U \in \mathrm{Op}(\bar{x})} \mathrm{cl}\, f[U] \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{cl}\, f[U_n(x_n)] \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{cl}\, V_n(f(x_n))$$

следует, что $F(\bar{x})$ — одноэлементное множество, т. е. $\bar{x} \in \overline{D}$. ▶

Теорема. *Пусть X и Y — топологические пространства, причем Y вполне регулярно. Тогда любая непрерывная функция f, определенная на всюду плотном подмножестве X и действующая в Y, имеет максимальное расширение $\mathrm{ext}_Y(f)$. Если Y — котощее подмножество метризуемого компакта, то область определения $\mathrm{ext}_Y(f)$ является котощим подмножеством X.*

◀ Пусть $\overline{Y}$ — какая-либо компактификация Y (см. [55, 14.2]). Тогда по утверждению (1) леммы существует максимальное $\overline{Y}$-значное расширение $\mathrm{ext}_{\overline{Y}}(f)$ функции f. Ясно, что $\mathrm{ext}_{\overline{Y}}(f)|^{Y} = \mathrm{ext}_Y(f)$. Утверждение об области определения $\mathrm{ext}_Y(f)$ следует из утверждения (2) леммы. ▶

1.1.2. Пусть X — бэровское, а Y — вполне регулярное топологическое пространство. Непрерывную функцию, определенную на котощем (а следовательно, всюду плотном) подмножестве X и действующую в Y, будем называть *расширенной*, если она совпадает со своим максимальным расширением. В том случае, когда Y является котощим подмножеством метризуемого компакта, условие на область определения расширенной функции можно ослабить, потребовав лишь ее плотность в X (см. теорему 1.1.1). Совокупность всех расширенных функций из подмножеств X в Y обозначается через $C_\infty(X, Y)$.

Множество $C_\infty(X, \mathbb{R})$ расширенных вещественных функций обозначается более коротко: $C_\infty(X)$. Множество $C_\infty(X)$ можно естественным образом снабдить структурой векторного пространства и алгебры: для $f, g \in C_\infty(X)$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ следует положить $\lambda f + \mu g := \mathrm{ext}(\lambda f|_{\mathrm{dom}\, g} + \mu g|_{\mathrm{dom}\, f})$ и $fg := \mathrm{ext}(f|_{\mathrm{dom}\, g} \cdot g|_{\mathrm{dom}\, f})$. Похожим образом множество $C_\infty(X)$ наделяется (частичным) порядком: $f \leqslant g$, если $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g$. Относительно введенных операций $C_\infty(X)$ является векторной решеткой и упорядоченной коммутативной алгеброй с единицей.

1.1.3. Следует иметь в виду, что функция $f \in C_\infty(X)$ не обязана иметь продолжение $\bar{f} \in C(X, \overline{\mathbb{R}})$. Совокупность тех функций f, у которых указанное продолжение $\bar{f}$ существует, будем обозначать символом $\overline{C}_\infty(X)$. Функции f и $\bar{f}$ обычно отождествляются, однако за символом $\mathrm{dom}\, \bar{f}$ сохраняется значение $\bar{f}^{-1}[\mathbb{R}]$. В частности, записи $|f(x)| < \infty$ и $|f(x)| = \infty$ означают соответственно $x \in \mathrm{dom}\, f$ и $x \notin \mathrm{dom}\, f$. Очевидно, область определения любой функции из $\overline{C}_\infty(X)$ является открытым σ-замкнутым всюду плотным подмножеством X. (Напоминаем, что подмножество топологического пространства называется *σ-замкнутым*, если оно представимо в виде объединения последовательности замкнутых множеств. Подмножество, имеющее σ-замкнутое дополнение, называется *σ-открытым*.)

1.1.4. Топологическое пространство X называется *вполне несвязным*, если совокупность $\mathrm{Clop}(X)$ всех открыто-замкнутых (т. е. открытых и замкнутых одновременно) подмножеств X является базой его открытой топологии. Если замыкание $\mathrm{cl}\, U$ всякого открытого подмножества $U \subset X$ является открытым, то пространство X называется *экстремально несвязным*. Если же замыкание $\mathrm{cl}\, U$ открыто лишь для любого открытого σ-замкнутого множества $U \subset X$, то пространство X называется *σ-экстремально несвязным* или *квазиэкстремально несвязным*. Всякое регулярное экстремально несвязное пространство вполне регулярно и вполне несвязно. Таким образом, регулярные экстремально несвязные пространства — это в точности всюду плотные подмножества экстремально несвязных компактов.

Известно, что экстремально несвязный компакт является компактификацией по Стоуну — Чеху любого своего всюду плотного подмножества (см. [55, 24.2]). Иными словами, если D — всюду плотное подмножество экстремально несвязного компакта Q и K — произвольный компакт, то всякая непрерывная функция $f\colon D \to K$ имеет (единственное) непрерывное продолжение $\bar{f}\colon Q \to K$. В частности, $C_\infty(Q) = \overline{C}_\infty(Q)$.

Если Q — σ-экстремально несвязный компакт, а D — открытое σ-замкнутое всюду плотное подмножество Q, то всякая непрерывная функция $f\colon D \to \mathbb{R}$ имеет (единственное) непрерывное продолжение $\bar{f}\colon Q \to \overline{\mathbb{R}}$ (см. [11, лемма V.2.1]). Используя этот факт, несложно убедиться в том, что $\overline{C}_\infty(Q)$ представляет собой векторную подрешетку и подалгебру $C_\infty(Q)$.

1.1.5. В дальнейшем нам пригодится следующая модификация теоремы Титце — Урысона.

Лемма. *Пусть X — замкнутое подмножество экстремально несвязного компакта Q. Тогда любую функцию $f \in \overline{C}_\infty(X)$ можно продолжить до функции $\bar{f} \in C_\infty(Q)$. Для положительной и/или ограниченной функции f можно подобрать продолжение $\bar{f}$ с тем же свойством.* ▸

◂ Согласно теореме Титце — Урысона функция f имеет продолжение $\tilde{f} \in C(Q, \overline{\mathbb{R}})$ (если требуется, положительное и/или ограниченное). Каждая точка $x \in \operatorname{dom} f$ имеет открытую окрестность $U_x \subset Q$, в которой функция $\tilde{f}$ принимает лишь конечные значения. Ясно, что формула

$$\bar{f}(q) := \begin{cases} \tilde{f}(q), & \text{если } q \in \operatorname{cl} \bigcup\limits_{x \in \operatorname{dom} f} U_x, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

определяет искомое продолжение $\bar{f}$ функции f. ▸

1.1.6. Пусть X — топологическое пространство.

Лемма. *Следующие свойства множества $A \subset X$ эквивалентны:*

(1) *существует такое открытое множество $G \subset X$, что симметрическая разность $A \triangle G$ является тощей;*
(2) *существует такое замкнутое множество $F \subset X$, что симметрическая разность $A \triangle F$ является тощей;*
(3) *существует такое борелевское множество $B \subset X$, что симметрическая разность $A \triangle B$ является тощей.*

Если множество $A \subset X$ удовлетворяет любому из условий (1)–(3), то говорят, что оно обладает ***свойством Бэра.*** Совокупность всех подмножеств X, обладающих свойством Бэра, является σ-алгеброй.

Теорема. *Следующие свойства функции $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ эквивалентны:*

(1) *прообраз $f^{-1}[B]$ любого борелевского подмножества $B \subset \overline{\mathbb{R}}$ обладает свойством Бэра;*
(2) *для любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in X : f(x) > \lambda\}$ обладает свойством Бэра;*
(3) *существует такое котощее подмножество $D \subset X$, что сужение $f|_D$ непрерывно.*

Если функция $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ удовлетворяет любому из условий (1)–(3), то говорят, что она обладает ***свойством Бэра.*** Доказательство последней теоремы и некоторые другие сведения о множествах и функциях, обладающих свойством Бэра, можно найти в [55, раздел 15.6].

Следствие. *Пусть D — котощее подмножество бэровского топологического пространства X. Для любой функции $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}}$, обладающей свойством Бэра и принимающей конечные значения на котощем подмножестве X, существует единственная функция $\tilde{f} \in C_\infty(X)$, совпадающая с f на котощем подмножестве X.*

Такую функцию $\tilde{f}$ будем обозначать символом $\operatorname{cont}(f)$.

1.1.7. Всякое регулярное топологическое пространство однозначно задает некоторое экстремально несвязное пространство, называемое его абсолютом. Поскольку это понятие в дальнейшем будет нами неоднократно задействовано, дадим необходимые определения. Пусть X и Y — топологические пространства. Отображение $\alpha\colon X \to Y$ назовем ***абсолютным***, если оно

(а) сюръективно;
(б) непрерывно;
(в) компактно, т. е. прообраз $\alpha^{-1}(y)$ каждой точки $y \in Y$ компактен;
(г) замкнуто, т. е. переводит замкнутые подмножества $F \subset X$ в замкнутые подмножества $\alpha[F] \subset Y$;
(д) неприводимо, т. е. переводит собственные замкнутые подмножества $F \subset X$ в собственные подмножества $\alpha[F] \subset Y$.

Абсолютом регулярного топологического пространства X называется топологическое пространство $\overset{\bullet}{X}$, обладающее следующими свойствами:

(1) существует абсолютное отображение $\overset{\bullet}{X}$ на X;
(2) если существует абсолютное отображение топологического пространства $\overset{\bullet\bullet}{X}$ на $\overset{\bullet}{X}$, то $\overset{\bullet\bullet}{X}$ гомеоморфно $\overset{\bullet}{X}$.

Теорема. *Пусть X — произвольное регулярное топологическое пространство.*

(1) *Абсолют X существует и единствен с точностью до гомеоморфизма.*

(2) *Абсолют X вполне регулярен и экстремально несвязен.*

(3) *Топологическое пространство является абсолютом X тогда и только тогда, когда оно регулярно, экстремально несвязно и допускает абсолютное отображение на X.*

(4) *Пространство X является своим собственным абсолютом тогда и только тогда, когда оно экстремально несвязно.*

(5) *Абсолют X компактен тогда и только тогда, когда пространство X компактно.*

Доказательства сформулированных фактов можно найти, например, в [4, гл. VI, § 6]. Там же имеется подробная информация об абсолютных (= совершенных неприводимых) отображениях, а также о других топологических объектах, связанных с абсолютами.

1.1.8. Предложение. *Следующие свойства открытого подмножества U вполне несвязного компакта Q равносильны:*

(1) *множество U σ-замкнуто;*
(2) *множество U представимо в виде объединения последовательности открыто-замкнутых подмножеств Q;*
(3) *множество U представимо в виде объединения последовательности попарно не пересекающихся открыто-замкнутых подмножеств Q.*

Разумеется, последнее предложение имеет двойственный вариант, описывающий замкнутые σ-открытые подмножества вполне несвязного компакта.

Предложение. *Следующие свойства элемента q экстремально несвязного компакта Q равносильны:*

(1) *пересечение любой последовательности окрестностей q является окрестностью q;*
(2) *если U — открытое σ-замкнутое подмножество Q, то из $q \in \mathrm{cl}\, U$ следует $q \in U$;*
(3) *q принадлежит любому открытому σ-замкнутому всюду плотному подмножеству Q;*
(4) *$q \in \mathrm{dom}\, f$ для любой функции $f \in C_\infty(Q)$;*
(5) *для любой функции $f \in C_\infty(Q)$ найдется окрестность точки q, в которой f постоянна.*

Если точка $q \in Q$ удовлетворяет любому из эквивалентных условий (1)–(5), то ее называют *σ-изолированной* или *P-точкой*.

1.1.9. Очевидно, любая изолированная точка Q является σ-изолированной. Обратное, вообще говоря, неверно. Действительно, пусть X — множество измеримой мощности, т. е. на алгебре $\mathscr{P}(X)$ всех подмножеств X можно определить σ-аддитивную меру $\delta\colon \mathscr{P}(X) \to \{0,1\}$ так, что $\delta(X) = 1$ и $\delta(\{x\}) = 0$ для всех $x \in X$ (см. [17, гл. 9, § 3]). Обозначим через Q компактификацию по Стоуну — Чеху [55, 14.1.1] дискретного топологического пространства X [55, 14.4.1]. Известно, что Q является экстремально несвязным компактом [55, 24.7.1] и X представляет собой открытое всюду плотное подмножество Q. Компактность Q позволяет ввести в рассмотрение элемент $q \in \bigcap\{\mathrm{cl}\,A : A \subset X,\ \delta(A) = 1\}$. Несложная проверка показывает, что точка $q \in Q$ является σ-изолированной, но не изолированной.

Предложение. *Если любое семейство попарно не пересекающихся непустых открыто-замкнутых подмножеств экстремально несвязного компакта Q имеет неизмеримую мощность, то любая σ-изолированная точка Q является изолированной.*

◀ Предположим, что σ-изолированная точка $q \in Q$ не является изолированной. Тогда существует такое множество X попарно не пересекающихся непустых открыто-замкнутых подмножеств Q, что $q \in \mathrm{cl} \bigcup X$ и $q \notin \bigcup X$. Достаточно показать, что мощность X измерима. Для каждого подмножества $A \subset X$ положим $\delta(A) := 1$, если $q \in \mathrm{cl} \bigcup A$, и $\delta(A) := 0$ в противном случае. Тогда из σ-изолированности точки q следует σ-аддитивность меры $\delta\colon \mathscr{P}(X) \to \{0,1\}$, принадлежность $q \in \mathrm{cl} \bigcup X$ обеспечивает равенство $\delta(X) = 1$, а соотношение $q \notin \bigcup X$ влечет $\delta(\{x\}) = 0$ для всех $x \in X$. ▶

Замечание. Требование неизмеримости в условии последнего предложения не является обременительным. Известно, что первый неизмеримый кардинал сильно недостижим [17, гл. 9, § 3], т. е. в «обозримой» части универсума измеримых кардиналов нет. Более того, предположение о полном отсутствии измеримых кардиналов не противоречит аксиомам теории множеств ZFC [13, § 13]. Таким образом, можно считать, что понятия изолированной и σ-изолированной точек совпадают.

1.1.10. Отметим одно полезное свойство тощих множеств, которое не раз будет использовано в дальнейшем изложении.

Теорема [32]. *Пусть $(G_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство открытых подмножеств топологического пространства X. Если множество $A \subset X$ таково, что пересечение $A \cap G_\xi$ является тощим для всех $\xi \in \Xi$, то пересечение $A \cap \bigcup\limits_{\xi\in\Xi} G_\xi$ также является тощим.*

Доказательство этой теоремы имеется также в [55, 15.6.7].

1.1.11. Под *пространством с мерой* в данной работе понимается тройка $(\Omega, \mathscr{B}, |\cdot|)$, где множество Ω, σ-алгебра $\mathscr{B}$ его подмножеств и мера (= положительная счетно-аддитивная функция) $|\cdot|\colon \mathscr{B}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ удовлетворяют следующим условиям:

(а) если $A \subset \Omega$ и $A \cap K \in \mathscr{B}$ для всех элементов $K \in \mathscr{B}$ конечной меры, то $A \in \mathscr{B}$;

(б) если $A \in \mathscr{B}$ и $|A| = \infty$, то существует такой элемент $A_0 \in \mathscr{B}$, что $A_0 \subset A$ и $0 < |A_0| < \infty$;

(в) если $A \in \mathscr{B}$, $|A| = 0$ и $A_0 \subset A$, то $A_0 \in \mathscr{B}$.

Вместо $(\Omega, \mathscr{B}, |\cdot|)$ мы будем писать просто Ω. При этом σ-алгебра $\mathscr{B}$ обозначается через $\mathscr{B}(\Omega)$, а ее элементы называются измеримыми подмножествами Ω. Символ меры $|\cdot|$ в случае необходимости снабжается индексом: $|\cdot|_\Omega$. Совокупность всех элементов $\mathscr{B}(\Omega)$ конечной меры обозначается через $\mathscr{B}_{\mathrm{fin}}(\Omega)$. Как обычно, мы будем говорить, что то или иное условие выполнено *почти всюду* *в* $A \in \mathscr{B}(\Omega)$ или *почти для всех* $\omega \in A$, если оно имеет место для всех элементов A, за исключением некоторого пренебрежимого множества (= множества нулевой меры). «Почти всюду» означает «почти всюду в Ω». Символом $\mathscr{M}(\Omega)$ обозначается совокупность всех почти всюду определенных вещественных функций, измеримых относительно σ-алгебры $\mathscr{B}(\Omega)$. Множество всех существенно ограниченных функций из $\mathscr{M}(\Omega)$ обозначается через $\mathscr{L}^{\infty}(\Omega)$.

Часто функцию $f \in \mathscr{M}(\Omega)$ доопределяют в точках $\omega \in \Omega \setminus \operatorname{dom} f$ значением $f(\omega) := \infty$ и тем самым считают определенной всюду на Ω. При этом, однако, сохраняют за символом $\operatorname{dom} f$ старое значение $f^{-1}[\mathbb{R}]$. В частности, записи $|f(\omega)| < \infty$ и $|f(\omega)| = \infty$ означают соответственно $\omega \in \operatorname{dom} f$ и $\omega \notin \operatorname{dom} f$.

1.1.12. Пусть Ω — пространство с ненулевой мерой. Множества $A, B \in \mathscr{B}(\Omega)$ называются *эквивалентными* (пишем $A \sim B$), если симметрическая разность $A \mathbin{\triangle} B$ пренебрежима. Фактор-множество $\mathscr{B}(\Omega)/{\sim}$ будет обозначаться через $B(\Omega)$. Для произвольного элемента $A \in \mathscr{B}(\Omega)$ символом $A^{\sim}$ обозначается содержащий его класс эквивалентности из $B(\Omega)$. На множестве $B(\Omega)$ естественным образом вводится (частичный) порядок: $\mathbf{A} \leqslant \mathbf{B}$ тогда и только тогда, когда разность $A \setminus B$ пренебрежима для некоторых (а тогда и для любых) представителей $A \in \mathbf{A}$ и $B \in \mathbf{B}$. По отношению к этому порядку множество $B(\Omega)$, очевидно, является булевой алгеброй с нулем $\varnothing^{\sim}$ и единицей $\Omega^{\sim}$. Булевы операции в алгебре $B(\Omega)$ осуществляются по формулам $A^{\sim} \vee B^{\sim} = (A \cup B)^{\sim}$, $A^{\sim} \wedge B^{\sim} = (A \cap B)^{\sim}$ и $(A^{\sim})^{\perp} = (\Omega \setminus A)^{\sim}$, где $A, B \in \mathscr{B}(\Omega)$.

Функции $f, g \in \mathscr{M}(\Omega)$ называются *эквивалентными* (пишем $f \sim g$), если они совпадают почти всюду. Фактор-множество $\mathscr{M}(\Omega)/{\sim}$ будет обозначаться через $M(\Omega)$. Для произвольного элемента $f \in \mathscr{M}(\Omega)$ символом $f^{\sim}$ обозначается содержащий его класс эквивалентности из $M(\Omega)$. Мы полагаем $L^{\infty}(\Omega) = \{f^{\sim} : f \in \mathscr{L}^{\infty}(\Omega)\}$. Соотношения $\lambda f^{\sim} + \mu g^{\sim} = (\lambda f|_{\operatorname{dom} g} + \mu g|_{\operatorname{dom} f})^{\sim}$ и $f^{\sim} g^{\sim} = (f|_{\operatorname{dom} g} \cdot g|_{\operatorname{dom} f})^{\sim}$, где $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и $f, g \in \mathscr{M}(\Omega)$, определяют на множествах $M(\Omega)$ и $L^{\infty}(\Omega)$ структуру векторного пространства с нулем $0^{\sim}$ и коммутативной алгебры с единицей $1^{\sim}$. Кроме того, на множестве $M(\Omega)$ естественным образом вводится (частичный) порядок: $\mathbf{f} \leqslant \mathbf{g}$ тогда и только тогда, когда $f \leqslant g$ почти всюду для некоторых (а тогда и для любых) представителей $f \in \mathbf{f}$ и $g \in \mathbf{g}$. Относительно введенных операций пространство $M(\Omega)$ и его подпространство $L^{\infty}(\Omega)$ являются векторными решетками и упорядоченными алгебрами. Точные границы в этих решетках вычисляются по формулам $f^{\sim} \vee g^{\sim} = (f|_{\operatorname{dom} g} \vee g|_{\operatorname{dom} f})^{\sim}$ и $f^{\sim} \wedge g^{\sim} = (f|_{\operatorname{dom} g} \wedge g|_{\operatorname{dom} f})^{\sim}$ для $f, g \in \mathscr{M}(\Omega)$.

1.1.13. Отображение $\rho\colon L^{\infty}(\Omega) \to \mathscr{L}^{\infty}(\Omega)$ называется *лифтингом фактор-пространства* $L^{\infty}(\Omega)$, если для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in L^{\infty}(\Omega)$ имеют место следующие соотношения:

(а) $\rho(\mathbf{f}) \in \mathbf{f}$ и $\operatorname{dom} \rho(\mathbf{f}) = \Omega$;

(б) если $\mathbf{f} \leqslant \mathbf{g}$, то $\rho(\mathbf{f}) \leqslant \rho(\mathbf{g})$ всюду на Ω;

(в) $\rho(\lambda \mathbf{f} + \mu \mathbf{g}) = \lambda \rho(\mathbf{f}) + \mu \rho(\mathbf{g})$, $\rho(\mathbf{fg}) = \rho(\mathbf{f})\rho(\mathbf{g})$, $\rho(\mathbf{f} \vee \mathbf{g}) = \rho(\mathbf{f}) \vee \rho(\mathbf{g})$ и $\rho(\mathbf{f} \wedge \mathbf{g}) = \rho(\mathbf{f}) \wedge \rho(\mathbf{g})$;

(г) $\rho(0^{\sim}) = 0$ и $\rho(1^{\sim}) = 1$ всюду на Ω.

(Некоторые из перечисленных условий являются следствиями остальных.) Если $f \in \mathscr{L}^{\infty}(\Omega)$, то для функции $\rho(f^{\sim})$ принято более короткое обозначение: $\rho(f)$. Поскольку лифтинг представляет собой правое обратное отображение к операции $f \mapsto f^{\sim}$, мы будем иногда использовать запись $\mathbf{f}_{\sim}$ вместо $\rho(\mathbf{f})$ там, где это не приведет к путанице. Аналогично символ $f_{\sim}$ будет употребляться вместо $\rho(f)$.

Зафиксируем произвольный класс $\mathbf{A} \in B(\Omega)$ и обозначим через $\chi_{\mathbf{A}}$ класс из $L^{\infty}(\Omega)$, содержащий характеристическую функцию некоторого (а тогда и любого) элемента $\mathbf{A}$. Из свойств лифтинга с очевидностью вытекает, что функция $\rho(\chi_{\mathbf{A}})$ принимает только значения 0 или 1. Обозначим через $\rho(\mathbf{A})$ подмножество Ω, характеристическая функция которого равна $\rho(\chi_{\mathbf{A}})$. Полученное таким образом отображение $\rho\colon B(\Omega) \to \mathscr{B}(\Omega)$ является *лифтингом фактор-алгебры* $B(\Omega)$, т. е. для всех $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in B(\Omega)$ имеют место следующие соотношения:

(а) $\rho(\mathbf{A}) \in \mathbf{A}$;
(б) если $\mathbf{A} \leqslant \mathbf{B}$, то $\rho(\mathbf{A}) \subset \rho(\mathbf{B})$;
(в) $\rho(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) = \rho(\mathbf{A}) \cup \rho(\mathbf{B})$, $\rho(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \rho(\mathbf{A}) \cap \rho(\mathbf{B})$ и $\rho(\mathbf{A}^{\perp}) = \Omega \backslash \rho(\mathbf{A})$;
(г) $\rho(\varnothing^{\sim}) = \varnothing$ и $\rho(\Omega^{\sim}) = \Omega$.

По аналогии с лифтингом пространства $L^{\infty}(\Omega)$ мы будем иногда употреблять символ $\mathbf{A}_{\sim}$ в качестве $\rho(\mathbf{A})$, а также писать $\rho(A)$ или $A_{\sim}$ вместо $\rho(A^{\sim})$.

Точки $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ называются *ρ-неразличимыми*, если для каждого класса $\mathbf{f} \in L^{\infty}(\Omega)$ выполнено $\rho(\mathbf{f})(\omega_1) = \rho(\mathbf{f})(\omega_2)$. Очевидно, точки ω_1 и ω_2 ρ-неразличимы тогда и только тогда, когда включения $\omega_1 \in \rho(\mathbf{A})$ и $\omega_2 \in \rho(\mathbf{A})$ равносильны для любого $\mathbf{A} \in B(\Omega)$.

1.1.14. Будем говорить, что семейство $(A_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов $\mathscr{B}(\Omega)$ *аппроксимирует* множество $A \in \mathscr{B}(\Omega)$, если для каждого измеримого подмножества $A_0 \subset A$ конечной меры существует такая последовательность $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в Ξ, что $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_{\xi_n} \cap A_0 \sim A_0$. Говорят, что пространство с мерой Ω *обладает свойством прямой суммы*, если в $\mathscr{B}(\Omega)$ существует семейство, аппроксимирующее Ω и состоящее из попарно не пересекающихся множеств конечной меры. Пространство с σ-конечной мерой, очевидно, обладает свойством прямой суммы.

Теорема. *Пространство с ненулевой мерой Ω обладает свойством прямой суммы тогда и только тогда, когда существует лифтинг пространства $L^{\infty}(\Omega)$.*

Существование лифтинга для произвольного σ-конечного пространства с мерой было впервые установлено Д. Магарам [48]. Более простое доказательство последней теоремы можно найти в [45].

1.1.15. В дальнейшем мы довольно часто будем иметь дело с различного рода сходимостями (поточечной, равномерной, порядковой и др.) и связанными с ними понятиями (непрерывностью, замыканием, плотностью и т. п.). Для того чтобы каждый раз не приводить новых определений, мы сформулируем соответствующие понятия лишь один раз для абстрактной сходимости.

Пусть X — произвольное множество и c — какая-либо сходимость на X. Совокупность c-пределов всех c-сходящихся в X сетей, составленных из элементов некоторого подмножества $A \subset X$, называется *c-замыканием* множества A. Множество называется *c-замкнутым*, если оно совпадает со своим c-замыканием. Говорят, что A *c-плотно* в X, если X является c-замыканием A. Предположим теперь, что X_1 и X_2 — некоторые множества со сходимостями c_1 и c_2 соответственно. Отображение $f\colon X_1 \to X_2$ называется *c_1-c_2-непрерывным*, если c_1-сходимость $x_\alpha \to x$ влечет c_2-сходимость $f(x_\alpha) \to f(x)$ для любой сети $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ в X_1 и любого элемента $x \in X_1$. Если сходимости c_1 и c_2 имеют одно и то же обозначение c, то c_1-c_2-непрерывное отображение называют *c-непрерывным*.

Рассмотрение лишь счетных сетей в данных выше определениях приводит к понятиям *счетного c-замыкания*, *счетной c-замкнутости*, *счетной c-плотности* и *счетной c-непрерывности*. Замена же сетей последовательностями приводит к понятиям *секвенциального c-замыкания*, *секвенциальной c-замкнутости*, *секвенциальной c-плотности* и *секвенциальной c-непрерывности*.

§ 1.2. Булевы алгебры

В данной статье две булевы алгебры чаще всего оказываются в центре внимания: алгебра $\mathrm{Clop}(Q)$ открыто-замкнутых подмножеств экстремально несвязного компакта Q и алгебра $B(\Omega)$ классов эквивалентности измеримых подмножеств пространства с мерой Ω. В этом параграфе описаны свойства названных алгебр и, в частности, указаны формулы для вычисления точных границ их подмножеств. Согласно теореме Стоуна — Огасавары $\mathrm{Clop}(Q)$ представляет собой общий вид полной булевой алгебры. Поэтому в большинстве случаев алгебра $B(\Omega)$ изоморфна $\mathrm{Clop}(Q)$ для подходящего компакта Q. Наличие лифтинга в $B(\Omega)$ позволяет выразить связь между алгебрами $B(\Omega)$ и $\mathrm{Clop}(Q)$ более явно — посредством канонического погружения $\tau\colon \Omega \to Q$ (см. [45, гл. V, § 3]), основные свойства которого обсуждаются в данном параграфе. Булева алгебра $\mathrm{Clop}(Q)$ является частным случаем еще одного типичного примера полной булевой алгебры — алгебры $\mathrm{Rop}(X)$ регулярных открытых подмножеств регулярного топологического пространства X. Изоморфизм между алгебрами $\mathrm{Rop}(X)$ и $\mathrm{Clop}(Q)$ (для подходящего компакта Q) опять же может быть выражен явно с помощью некоторой функции α_X, определенной на всюду плотном подмножестве $Q_X \subset Q$ и действующей в X. Некоторые свойства этой функции также приведены в данном параграфе.

Вся необходимая нам информация об абстрактных булевых алгебрах имеется в [25]. Сведения об алгебре $\mathrm{Clop}(Q)$ можно найти в монографиях [11, 25, 55], последняя из которых содержит также основные факты об алгебре $\mathrm{Rop}(X)$. Некоторые свойства булевой алгебры $B(\Omega)$ рассмотрены в [15, 45].

1.2.1. Если x и y — элементы упорядоченного множества X, удовлетворяющие неравенству $x \leqslant y$, то символом $[x, y]$ или, более подробно, $[x, y]_X$ обозначается порядковый интервал $\{z \in X : x \leqslant z \leqslant y\}$. Для произвольной булевой алгебры символы 0 и 1 обозначают наименьший и наибольший ее элементы, $a \vee b$ и $a \wedge b$ — точные границы множества $\{a, b\}$, $a^{\perp}$ — дополнение элемента a, запись $a \backslash b$, как обычно, обозначает $a \wedge b^{\perp}$. Булева алгебра B называется *полной* (*σ-полной*), если всякое (счетное) ее подмножество $B_0 \subset B$ имеет точные границы $\sup B_0$ и $\inf B_0$.

Говорят, что элементы $a, b \in B$ *дизъюнктны* (и пишут $a \perp b$), если $a \wedge b = 0$. Семейство элементов булевой алгебры называют *дизъюнктным*, если его члены попарно дизъюнктны. *Разбиением единицы* в булевой алгебре называется всякое дизъюнктное семейство $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ ее элементов, удовлетворяющее условию $\sup_{\xi \in \Xi} b_\xi = 1$. Ненулевой элемент $a \in B$ называется *атомом* алгебры B, если $[0, a] = \{0, a\}$. Алгебру, не имеющую атомов, называют *непрерывной* или *безатомной*. Говорят, что алгебра B *дискретна* или *атомна*, если для каждого ее ненулевого элемента $b \in B$ существует такой атом a, что $a \leqslant b$. Очевидно, полная булева алгебра B является дискретной тогда и только тогда, когда $\sup A = 1$, где A — множество атомов алгебры B.

Теорема (принцип исчерпывания). *Пусть B — полная (σ-полная) булева алгебра. Тогда для всякого (счетного) семейства $(a_\xi)_{\xi \in \Xi}$ элементов B существует такое дизъюнктное семейство $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$, что $b_\xi \leqslant a_\xi$ для всех $\xi \in \Xi$ и $\sup_{\xi \in \Xi} a_\xi = \sup_{\xi \in \Xi} b_\xi$.*

Доказательство последней теоремы можно найти, например, в [25, теорема 20.2].

Следствие. *Полная булева алгебра является дискретной в том и только том случае, если в ней имеется разбиение единицы, состоящее из атомов.*

1.2.2. Говорят, что подмножество Y упорядоченного множества X *наследственно вложено в X*, если для любого подмножества $Z \subset Y$ из существования $\sup_Y Z$ следуют существование $\sup_X Z$ и равенство $\sup_X Z = \sup_Y Z$, а из существования $\inf_Y Z$ — существование $\inf_X Z$ и равенство $\inf_X Z = \inf_Y Z$. Если перечисленные условия выполнены лишь для счетных подмножеств $Z \subset Y$, то говорят, что множество Y *σ-наследственно вложено в X*. Наследственно (σ-наследственно) вложенную подалгебру булевой алгебры называют *наследственной* (*σ-наследственной*) *подалгеброй*.

Предложение. *Пусть A — булева алгебра, a — ее элемент и B — подалгебра булевой алгебры $[0, a]$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *множество B наследственно (σ-наследственно) вложено в A;*
(2) *для любого (счетного) подмножества $C \subset B$ из соотношения $\inf_B C = 0$ следует $\inf_A C = 0$;*
(3) *если (счетная) сеть o-сходится в B, то она o-сходится и в A, причем к тому же пределу;*
(4) *если (счетная) сеть o-сходится к нулю в B, то она o-сходится к нулю и в A.*

Говорят, что подмножество Y упорядоченного множества X *правильно вложено в X*, если для любого подмножества $Z \subset Y$ из существования $\sup_X Z$ следует включение $\sup_X Z \in Y$, а из существования $\inf_X Z$ — включение $\inf_X Z \in Y$. Если перечисленные условия выполнены лишь для счетных подмножеств $Z \subset Y$, то говорят, что множество Y *σ-правильно вложено в X*. Правильно (σ-правильно) вложенную подалгебру булевой алгебры называют *правильной (σ-правильной) подалгеброй*.

Предложение. *Пусть A — полная (σ-полная) булева алгебра, a — ее элемент и B — подалгебра булевой алгебры $[0, a]$. Множество B правильно (σ-правильно) вложено в A тогда и только тогда, когда оно o-замкнуто (счетно и/или секвенциально o-замкнуто).*

Предложение. *Пусть A — булева алгебра, a — ее элемент и B — подалгебра булевой алгебры $[0, a]$.*

(1) *Если алгебра B правильно (σ-правильно) вложена в A, то она наследственно (σ-наследственно) вложена в A.*

(2) *Если алгебра B наследственно (σ-наследственно) вложена в A и полна (σ-полна), то она правильно (σ-правильно) вложена в A.*

1.2.3. Пусть A и B — булевы алгебры. Отображение $h\colon A \to B$ называется *кольцевым гомоморфизмом*, если для всех $a_1, a_2 \in A$ имеют место равенства

(а) $h(a_1 \vee a_2) = h(a_1) \vee h(a_2)$;
(б) $h(a_1 \wedge a_2) = h(a_1) \wedge h(a_2)$;
(в) $h(a_1 \backslash a_2) = h(a_1) \backslash h(a_2)$.

Заметим, что условие (а) вытекает из (б) и (в), а условие (б) — из (а) и (в). Каждый кольцевой гомоморфизм $h\colon A \to B$ сохраняет порядок, т. е. для любых $a_1, a_2 \in A$ из $a_1 \leqslant a_2$ следует $h(a_1) \leqslant h(a_2)$.

Кольцевой гомоморфизм $h\colon A \to B$ называется *булевым гомоморфизмом*, если $h(1) = 1$. Очевидно, отображение $h\colon A \to B$ является булевым гомоморфизмом тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет одному из условий (а) или (б) и, кроме того, $h(a^\perp) = h(a)^\perp$ для всех $a \in A$. Каждый кольцевой гомоморфизм $h\colon A \to B$ является булевым гомоморфизмом в булеву алгебру $[0, h(1)]$. Образ $h[A]$ гомоморфизма h является булевой подалгеброй $[0, h(1)]$.

Отображение $h\colon A \to B$ называется *изоморфным вложением A в B*, если оно обладает любым из следующих эквивалентных свойств:

(1) h — инъективный булев гомоморфизм;
(2) h — инъекция, причем h и h^{-1} — булевы гомоморфизмы;
(3) h — булев гомоморфизм и $h^{-1}(0) = \{0\}$;
(4) h — булев гомоморфизм и $h^{-1}(1) = \{1\}$.

Сюръективное изоморфное вложение называется *булевым изоморфизмом*. Если существует булев изоморфизм A на B, то говорят, что алгебры A и B *изоморфны*.

1.2.4. Предложение. *Пусть A и B — булевы алгебры. Отображение $h\colon A \to B$ является булевым гомоморфизмом тогда и только тогда, когда для любого разбиения единицы (a_1, a_2, a_3) в алгебре A тройка $(h(a_1), h(a_2), h(a_3))$ является разбиением единицы в алгебре B.*

◀ Применяя условие предложения к тройке (0,0,1), получаем равенство $h(0) = 0$. Рассматривая тройку $(a, a^\perp, 0)$, приходим к выводу, что $h(a^\perp) = h(a)^\perp$ (см. 1.2.3 (в)) для любого элемента $a \in A$. Остается установить соотношение $h(a_1 \vee a_2) = h(a_1) \vee h(a_2)$ (см. 1.2.3 (а)), доказательство которого мы разобьем на два этапа. Сначала докажем это равенство для дизъюнктных элементов $a_1, a_2 \in A$. Для этого достаточно применить условие предложения к тройкам $(a_1, a_2, (a_1 \vee a_2)^\perp)$ и $(a_1 \vee a_2, (a_1 \vee a_2)^\perp, 0)$. Наконец, рассматривая произвольные элементы $a_1, a_2 \in A$ и используя установленное, получаем

$$\begin{aligned} h(a_1 \vee a_2) &= h((a_1 \backslash a_2) \vee (a_1 \wedge a_2) \vee (a_2 \backslash a_1)) \\ &= h(a_1 \backslash a_2) \vee h(a_1 \wedge a_2) \vee h(a_2 \backslash a_1) \\ &= (h(a_1 \backslash a_2) \vee h(a_1 \wedge a_2)) \vee (h(a_1 \wedge a_2) \vee h(a_2 \backslash a_1)) \\ &= h(a_1) \vee h(a_2). \quad ▶ \end{aligned}$$

1.2.5. Предложение. *Пусть A и B — булевы алгебры.*

(а) *Следующие свойства булева гомоморфизма $h\colon A \to B$ эквивалентны:*
 (1) *гомоморфизм h o-непрерывен;*
 (2) *если подмножество $C \subset A$ имеет супремум, то $h(\sup C) = \sup h[C]$;*
 (3) *если подмножество $C \subset A$ имеет инфимум, то $h(\inf C) = \inf h[C]$;*
 (4) *если $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — сеть элементов A и $a_\lambda \uparrow 1$, то $\sup_{\lambda\in\Lambda} h(a_\lambda) = 1$;*
 (5) *если $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — сеть элементов A и $a_\lambda \downarrow 0$, то $\inf_{\lambda\in\Lambda} h(a_\lambda) = 0$.*

(б) *Следующие свойства булева гомоморфизма $h\colon A \to B$ эквивалентны:*
 (1) *гомоморфизм h счетно o-непрерывен;*
 (2) *если счетное подмножество $C \subset A$ имеет супремум, то $h(\sup C) = \sup h[C]$;*
 (3) *если счетное подмножество $C \subset A$ имеет инфимум, то $h(\inf C) = \inf h[C]$;*
 (4) *если $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность элементов A и $a_n \uparrow 1$, то $\sup_{n\in\mathbb{N}} h(a_n) = 1$;*
 (5) *если $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность элементов A и $a_n \downarrow 0$, то $\inf_{n\in\mathbb{N}} h(a_n) = 0$.*

Если булева алгебра A полна (σ-полна), то каждое из пяти условий (а) (соответственно (б)) равносильно следующему: $\sup h[D] = 1$ для любого (счетного) разбиения единицы D в алгебре A.

В силу эквивалентности условий (а)(1)–(а)(3) o-непрерывные гомоморфизмы часто называют *полными*. Заметим, что из импликации (б)(5)$\Rightarrow$(б)(1) следует эквивалентность счетной и секвенциальной o-непрерывностей булева гомоморфизма.

1.2.6. Пусть A и B — булевы алгебры. Будем говорить, что кольцевой гомоморфизм $h\colon A \to B$ *мажорирует* функцию $h_0\colon A \to B$ (и писать $h_0 \leqslant h$), в том случае, когда $h_0(a) \leqslant h(a)$ для всех $a \in A$.

Предложение. *Пусть A и B — булевы алгебры. Кольцевой гомоморфизм $h\colon A \to B$ мажорирует кольцевой гомоморфизм $h_0\colon A \to B$ тогда и только тогда, когда $h_0(a) = h_0(1) \wedge h(a)$ для всех $a \in A$.*

◀ Равенство $h_0(a) = h_0(1) \wedge h(a)$ вытекает из соотношений $h_0(a) \leqslant h_0(1) \wedge h(a)$, $h_0(a^\perp) \leqslant h_0(1) \wedge h(a^\perp)$ и $h_0(a) \vee h_0(a^\perp) = h_0(1)$. ▶

1.2.7. Пусть булевы алгебры A_1 и A_2 имеют общую подалгебру B. Говорят, что алгебры A_1 и A_2 являются *B-изоморфными*, если между A_1 и A_2 имеется булев изоморфизм, тождественный на B.

Как известно (см. [25, § 35]), для любой булевой алгебры B существует такая полная булева алгебра $\overset{\bullet}{B}$, что

(а) B является подалгеброй $\overset{\bullet}{B}$;

(б) для каждого ненулевого элемента $\overset{\bullet}{b} \in \overset{\bullet}{B}$ имеется ненулевой элемент $b \in B$, удовлетворяющий неравенству $b \leqslant \overset{\bullet}{b}$.

Булева алгебра $\overset{\bullet}{B}$ называется *пополнением* алгебры B. Корректность введенного термина и обозначения обосновывается тем, что пополнение алгебры B единственно с точностью до изоморфизма и даже с точностью до B-изоморфизма. Пополнение $\overset{\bullet}{B}$ алгебры B обладает следующими свойствами:

(в) B — наследственная подалгебра $\overset{\bullet}{B}$;

(г) единственной наследственной подалгеброй $\overset{\bullet}{B}$, содержащей B, является вся алгебра $\overset{\bullet}{B}$;

(д) для каждого элемента $\overset{\bullet}{b} \in \overset{\bullet}{B}$ имеются такие подмножества $A_1, A_2 \subset B$, что $\sup A_1 = \inf A_2 = \overset{\bullet}{b}$.

1.2.8. Пусть Q — произвольное топологическое пространство. Тогда упорядоченное по включению множество $\mathrm{Clop}(Q)$ всех его открыто-замкнутых подмножеств является булевой алгеброй. Булевы операции в алгебре $\mathrm{Clop}(Q)$ совпадают с теоретико-множественными: $0 = \varnothing$, $1 = Q$, $U \vee V = U \cup V$, $U \wedge V = U \cap V$, $U^{\perp} = Q \backslash U$.

Теорема Стоуна — Огасавары [51, 59]. *Пусть B — произвольная булева алгебра и Q — совокупность всех ультрафильтров в B. Для каждого элемента $b \in B$ обозначим множество $\{q \in Q : b \in q\}$ через $\hat{b}$.*

(1) *Множество $\{\hat{b} : b \in B\}$ является базой некоторой топологии на Q, относительно которой Q является вполне несвязным компактом.*

(2) *Отображение $b \mapsto \hat{b}$ осуществляет булев изоморфизм между алгебрами B и $\mathrm{Clop}(Q)$.*

(3) *Булева алгебра B является полной (σ-полной) тогда и только тогда, когда компакт Q экстремально несвязен (σ-экстремально несвязен).*

Компакт Q, который построен в формулировке последней теоремы, называется *стоуновским компактом булевой алгебры* B, а отображение $b \mapsto \hat{b}$ — *каноническим изоморфизмом* B на $\mathrm{Clop}(Q)$ или *стоуновской реализацией* алгебры B. Стоуновским компактом алгебры B называют также любой вполне несвязный компакт K, алгебра $\mathrm{Clop}(K)$ открыто-замкнутых подмножеств которого изоморфна B. Это соглашение оправдано, так как такой компакт K определяется алгеброй B однозначно с точностью до гомеоморфизма.

Итак, согласно теореме Стоуна — Огасавары булева алгебра $\mathrm{Clop}(Q)$, где Q — вполне несвязный компакт, представляет собой общий вид булевой алгебры. Если же Q — экстремально несвязный (σ-экстремально несвязный) компакт, то $\mathrm{Clop}(Q)$ — общий вид полной (σ-полной) булевой алгебры. Точные границы в этой алгебре вычисляются по формулам $\sup_{\xi\in\Xi} U_\xi = \mathrm{cl} \bigcup\limits_{\xi\in\Xi} U_\xi$ и $\inf_{\xi\in\Xi} U_\xi = \mathrm{int} \bigcap\limits_{\xi\in\Xi} U_\xi$, где cl и int соответственно операции замыкания и внутренности в пространстве Q.

1.2.9. Открытое подмножество U топологического пространства X называется *регулярным*, если $\operatorname{int}\operatorname{cl} U = U$. Совокупность всех открытых регулярных подмножеств X обозначается символом $\operatorname{Rop}(X)$. Множество $\operatorname{Rop}(X)$, упорядоченное по включению, представляет собой булеву алгебру: $0 = \varnothing$, $1 = X$, $U \vee V = \operatorname{int}\operatorname{cl}(U \cup V)$, $U \wedge V = U \cap V$, $U^{\perp} = \operatorname{int}(X \backslash U)$. Известно, что булева алгебра $\operatorname{Rop}(X)$ является полной (см. [55, 16.1]) и точные границы в ней вычисляются по формулам $\sup_{\xi\in\Xi} U_\xi = \operatorname{int}\operatorname{cl} \bigcup\limits_{\xi\in\Xi} U_\xi$ и $\inf_{\xi\in\Xi} U_\xi = \operatorname{int}\operatorname{cl} \bigcap\limits_{\xi\in\Xi} U_\xi$.

Предположим, что X — регулярное топологическое пространство. Для каждой точки $x \in X$ обозначим фильтр $\{U \in \operatorname{Rop}(X) : x \in U\}$ символом $\operatorname{Rop}(x)$. Пусть Q — стоуновский (экстремально несвязный) компакт полной булевой алгебры $\operatorname{Rop}(X)$, составленный из ультрафильтров этой алгебры. Обозначим через Q_X совокупность всех ультрафильтров $q \in Q$, для которых найдется такая точка $x \in X$, что $\operatorname{Rop}(x) \subset q$. Из хаусдорфовости X следует, что для каждого элемента $q \in Q_X$ имеется ровно одна точка $\alpha(q) \in X$, удовлетворяющая условию $\operatorname{Rop}(\alpha(q)) \subset q$.

Лемма. *Пусть $U \mapsto \widehat{U}$ — канонический изоморфизм $\operatorname{Rop}(X)$ на $\operatorname{Clop}(Q)$.*

(1) *Если $U \in \operatorname{Rop}(X)$, то $\widehat{U} = \operatorname{cl}\alpha^{-1}[U]$, где замыкание берется в пространстве Q.*

(2) *Если $U \in \operatorname{Rop}(X)$, то $\alpha^{-1}[U] \subset \widehat{U} \cap Q_X \subset \alpha^{-1}[\operatorname{cl} U]$.*

(3) *Отображение $\alpha\colon Q_X \to X$ абсолютно.*

◄ (1) Включение $\alpha^{-1}[U] \subset \widehat{U}$, из которого в силу замкнутости $\widehat{U}$ следует $\operatorname{cl}\alpha^{-1}[U] \subset \widehat{U}$, является очевидным следствием включений $\operatorname{Rop}(\alpha(q)) \subset q$ $(q \in Q_X)$. Для обоснования обратного включения $\widehat{U} \subset \operatorname{cl}\alpha^{-1}[U]$ следует зафиксировать произвольный элемент $q \in \widehat{U}$ и для каждой его окрестности $\widehat{V} \in \operatorname{Clop}(Q)$ показать, что $\alpha^{-1}[U] \cap \widehat{V} \neq \varnothing$. Поскольку множества U и V являются элементами ультрафильтра q, их пересечение $U \cap V$ непусто. Остается заметить, что $\varnothing \neq \alpha^{-1}[U \cap V] \subset \alpha^{-1}[U] \cap \widehat{V}$.

(2) Включение $\alpha^{-1}[U] \subset \widehat{U} \cap Q_X$ вытекает из (1). Покажем, что $\widehat{U} \cap Q_X \subset \alpha^{-1}[\operatorname{cl} U]$. Если $q \in \widehat{U} \cap Q_X$ и $\alpha(q) \notin \operatorname{cl} U$, то в силу регулярности пространства X имеется такая окрестность $V \in \operatorname{Rop}(\alpha(q))$, что $U \cap V = \varnothing$. Принадлежность множеств U и V ультрафильтру q приводит к искомому противоречию.

(3) Проверим условия (а)–(д), фигурирующие в определении 1.1.7 абсолютного отображения.

(а) Сюръективность α следует из того факта, что каждый фильтр $\operatorname{Rop}(x)$, $x \in X$, может быть расширен до ультрафильтра.

(б) Покажем, что отображение α непрерывно. Пусть $q \in Q_X$ и U — окрестность точки $\alpha(q)$ в пространстве X. Из регулярности X следует существование такого множества $U_0 \in \operatorname{Rop}(X)$, что $\alpha(q) \in U_0 \subset \operatorname{cl} U_0 \subset U$. Соотношения $q \in \widehat{U}_0 \cap Q_X \subset \alpha^{-1}[U]$ означают, что $\alpha^{-1}[U]$ — окрестность точки q в пространстве Q_X.

(в) Покажем, что отображение α компактно. Зафиксируем произвольную точку $x \in X$. Благодаря компактности Q достаточно показать, что множество $Q \backslash \alpha^{-1}(x)$ открыто в Q. По построению α для любого ультрафильтра $q \in Q \backslash \alpha^{-1}(x)$ найдется окрестность $U \in \operatorname{Rop}(x)$, не принадлежащая q. Обозначим через V дополнение U в булевой алгебре $\operatorname{Rop}(X)$. Тогда $V \in q$, а значит, $q \in \widehat{V}$. Осталось заметить, что $\widehat{V} \subset Q \backslash \alpha^{-1}(x)$. Действительно, если $p \in \widehat{V}$, то $V \in p$, а тогда $U \notin p$ и, следовательно, $p \notin \alpha^{-1}(x)$ по построению α.

(г) Покажем, что отображение α замкнуто. Зафиксируем произвольное замкнутое подмножество $F \subset Q_X$ и установим открытость множества $X \backslash \alpha[F]$.

Рассмотрим произвольную точку $x \in X \backslash \alpha[F]$. Поскольку прообраз $\alpha^{-1}(x)$ лежит в открытом подмножестве $Q \backslash F$ вполне несвязного пространства Q, найдется покрытие $\alpha^{-1}(x)$ открыто-замкнутыми подмножествами Q, лежащими в $Q \backslash F$. Компактность $\alpha^{-1}(x)$, установленная в п. (в), позволяет нам извлечь из указанного покрытия конечное подпокрытие, объединив элементы которого мы получим такой элемент $U \in \mathrm{Clop}(Q)$, что $\alpha^{-1}(x) \subset U \subset Q \backslash F$. Согласно (1) множество U имеет вид $\mathrm{cl}\,\alpha^{-1}[V]$, где $V \in \mathrm{Rop}(X)$. Ясно, что $V \subset X \backslash \alpha[F]$. Осталось установить включение $x \in V$.

Включение $\alpha^{-1}(x) \subset U$ и равенство $U = \widehat{V}$ позволяют нам заключить, что $V \in \bigcap\{q \in Q : \mathrm{Rop}(x) \subset q\}$. Покажем, что $V \in \mathrm{Rop}(x)$. Если это не так, то совокупность $\{W \wedge V^{\perp} : W \in \mathrm{Rop}(x)\}$ является базой фильтра в алгебре $\mathrm{Rop}(X)$. Расширив эту базу до ультрафильтра $q \in Q$, мы приходим к противоречию: $\mathrm{Rop}(x) \subset q$, но $V \notin q$.

(д) Покажем, что отображение α неприводимо. Пусть F — собственное замкнутое подмножество Q_X. Тогда найдется такой элемент $U \in \mathrm{Clop}(Q)$, что $\varnothing \neq U \subset Q \backslash F$. В силу (1) множество U имеет вид $\mathrm{cl}\,\alpha^{-1}[V]$, где $V \in \mathrm{Rop}(X)$. Элементарная проверка показывает, что $\varnothing \neq V \subset X \backslash \alpha[F]$. ▶

Согласно теореме 1.1.7 (3) последняя лемма означает, что Q_X является абсолютом X. В связи с этим отображение $\alpha\colon Q_X \to X$ мы будем называть *абсолютизацией* X.

1.2.10. Теорема. *Пусть X — регулярное топологическое пространство, Q — стоуновский компакт булевой алгебры $\mathrm{Rop}(X)$ и $\alpha\colon Q_X \to X$ — абсолютизация X.*

(1) *Множество Q_X всюду плотно в Q.*

(2) *Равенство $Q_X = Q$ имеет место тогда и только тогда, когда пространство X компактно.*

(3) *Если Y — всюду плотное подмножество X, то $\alpha^{-1}[Y]$ — всюду плотное подмножество Q.*

(4) *Если Y — нигде не плотное подмножество X, то $\alpha^{-1}[Y]$ — нигде не плотное подмножество Q_X.*

(5) *Если Y — тощее (котощее) подмножество X, то $\alpha^{-1}[Y]$ — тощее (котощее) подмножество Q_X.*

◀ (1) Непосредственное следствие леммы 1.2.9 (1).

(2) Вытекает из (1) и 1.1.7 (5).

(3) Пусть Y — всюду плотное подмножество X. Всякое непустое открытое подмножество Q содержит $\widehat{U}$ для некоторого непустого $U \in \mathrm{Rop}(X)$ (здесь $U \mapsto \widehat{U}$ — канонический изоморфизм $\mathrm{Rop}(X)$ на $\mathrm{Clop}(Q)$). Остается заметить, что прообраз $\alpha^{-1}[U \cap Y]$ непуст и содержится в $\widehat{U} \cap \alpha^{-1}[Y]$.

(4) Пусть Y — нигде не плотное подмножество X. Из непрерывности α следует замкнутость прообраза $\alpha^{-1}[\mathrm{cl}\,Y]$ в пространстве Q_X. Допустим, что $\alpha^{-1}[\mathrm{cl}\,Y]$ имеет непустую внутренность. Тогда найдется непустое множество $U \in \mathrm{Rop}(X)$, удовлетворяющее условию $\widehat{U} \cap Q_X \subset \alpha^{-1}[\mathrm{cl}\,Y]$. Поскольку множество Y нигде не плотно, (благодаря сюръективности отображения α) существует такой элемент $q \in Q_X$, что $\alpha(q) \in U$ и $\alpha(q) \notin \mathrm{cl}\,Y$. С другой стороны, из включения $\mathrm{Rop}(\alpha(q)) \subset q$ вытекает $U \in q$, а тогда $q \in \widehat{U}$ и, следовательно, $q \in \alpha^{-1}[\mathrm{cl}\,Y]$. Полученное противоречие означает, что множество $\alpha^{-1}[\mathrm{cl}\,Y]$ нигде не плотно, и поэтому его подмножество $\alpha^{-1}[Y]$ обладает тем же свойством.

(5) Следует из (4). ▶

1.2.11. Предложение. *Пусть B — произвольная булева алгебра, $\dot{B}$ — ее пополнение, Q — стоуновский компакт B и $\alpha\colon \dot{Q} \to Q$ — абсолютизация Q.*

(1) *Булева алгебра* $\mathrm{Rop}(Q)$ *является пополнением алгебры* $\mathrm{Clop}(Q)$. *В частности, алгебры* $\mathrm{Rop}(Q)$ *и* $\overset{\bullet}{B}$ *изоморфны.*

(2) *Отображение* $U \mapsto \mathrm{cl}\,\alpha^{-1}[U]$ *осуществляет булев изоморфизм* $\mathrm{Rop}(Q)$ *на* $\mathrm{Clop}(\overset{\bullet}{Q})$. *В частности,* $\overset{\bullet}{Q}$ *является стоуновским компактом алгебры* $\overset{\bullet}{B}$.

◀ Утверждение (1) очевидно по определению пополнения булевой алгебры (см. 1.2.7). Утверждение (2) непосредственно следует из леммы 1.2.9 (1). ▶

1.2.12. Как было отмечено в 1.1.12, совокупность $B(\Omega)$ классов эквивалентности измеримых подмножеств пространства с ненулевой мерой Ω представляет собой булеву алгебру. Булева алгебра $B(\Omega)$ является σ-полной. Счетные точные границы в этой алгебре вычисляются по формулам $\sup_{n\in\mathbb{N}} A_n^{\sim} = \big(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\big)^{\sim}$ и $\inf_{n\in\mathbb{N}} A_n^{\sim} = \big(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\big)^{\sim}$ для $A_n \in \mathscr{B}(\Omega)$. В следующей теореме приведены некоторые сведения, касающиеся (бесконечных) точных границ в $B(\Omega)$. Доказательства сформулированных утверждений можно найти, например, в [45, гл. I].

Теорема. *Пусть* Ω *— пространство с ненулевой мерой.*

(1) *Семейство* $(A_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *измеримых подмножеств* $A \in \mathscr{B}(\Omega)$ *аппроксимирует множество* A *тогда и только тогда, когда в булевой алгебре* $B(\Omega)$ *выполнено соотношение* $\sup_{\xi\in\Xi} A_\xi^{\sim} = A^{\sim}$.

(2) *Пусть семейство* $(A_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *элементов* $\mathscr{B}(\Omega)$ *аппроксимирует* Ω. *Тогда для любого подмножества* $A \subset \Omega$ *имеют место следующие соотношения:*

(а) $A \in \mathscr{B}(\Omega)$ *тогда и только тогда, когда* $A \cap A_\xi \in \mathscr{B}(\Omega)$ *для всех* $\xi \in \Xi$;

(б) $A \sim \varnothing$ *тогда и только тогда, когда* $A \cap A_\xi \sim \varnothing$ *для всех* $\xi \in \Xi$;

(в) *если* $A \in \mathscr{B}(\Omega)$, *то* $\sup_{\xi\in\Xi}(A \cap A_\xi)^{\sim} = A^{\sim}$ *в булевой алгебре* $B(\Omega)$.

(3) *Если пространство с ненулевой мерой* Ω *обладает свойством прямой суммы, то булева алгебра* $B(\Omega)$ *является полной.*

(4) *Пусть* ρ *— лифтинг фактор-алгебры* $B(\Omega)$ (см. 1.1.13). *Тогда для любого семейства* $(\mathbf{A}_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *элементов* $B(\Omega)$ *объединение* $\Sigma := \bigcup\limits_{\xi\in\Xi} \rho(\mathbf{A}_\xi)$ *и пересечение* $\Pi := \bigcap\limits_{\xi\in\Xi} \rho(\mathbf{A}_\xi)$ *измеримы, причем* $\Sigma^{\sim} = \sup_{\xi\in\Xi} \mathbf{A}_\xi$ *и* $\Pi^{\sim} = \inf_{\xi\in\Xi} \mathbf{A}_\xi$.

1.2.13. Пусть ρ — лифтинг пространства $L^\infty(\Omega)$. Согласно 1.1.14 и 1.2.12 булева алгебра $B(\Omega)$ полна, и в силу 1.2.8 ее стоуновский компакт Q экстремально несвязен.

Лемма. *Совокупности тощих и нигде не плотных подмножеств* Q *совпадают.*

◀ Свойство прямой суммы, которым обладает Ω (см. 1.1.14), позволяет без труда свести ситуацию к случаю конечной меры, рассмотренному в [52, § 22]. ▶

Для каждой точки $\omega \in \Omega$ обозначим ультрафильтр $\{\mathbf{A} \in B(\Omega) : \omega \in \rho(\mathbf{A})\}$ через $\tau(\omega)$. Построенное таким образом отображение $\tau : \Omega \to Q$ будем называть *каноническим погружением* Ω *в* Q, соответствующим лифтингу ρ.

Теорема. *Пусть* ρ *— лифтинг пространства* $L^\infty(\Omega)$, τ *— соответствующее каноническое погружение* Ω *в стоуновский компакт* Q *булевой алгебры* $B(\Omega)$ *и* $\mathbf{A} \mapsto \widehat{\mathbf{A}}$ *— канонический изоморфизм* $B(\Omega)$ *на* $\mathrm{Clop}(Q)$.

(1) *Для каждого класса* $\mathbf{A} \in B(\Omega)$ *имеет место равенство* $\rho(\mathbf{A}) = \tau^{-1}[\widehat{\mathbf{A}}]$. *В частности, прообраз* $\tau^{-1}[U]$ *всякого открыто-замкнутого множества* $U \subset Q$ *измерим.*

(2) *Отображение* $U \mapsto \tau^{-1}[U]^{\sim}$ *осуществляет изоморфизм булевой алгебры* $\mathrm{Clop}(Q)$ *на* $B(\Omega)$, *обратный к изоморфизму* $\mathbf{A} \mapsto \widehat{\mathbf{A}}$.

(3) *Образ* $\tau[\Omega]$ *всюду плотен в* Q.

(4) *Прообраз* $\tau^{-1}[V]$ *всякого открытого множества* $V \subset Q$ *измерим, причем* $\tau^{-1}[V] \sim \tau^{-1}[\mathrm{cl}\, V]$.

(5) *Отображение* $\tau\colon \Omega \to Q$ *измеримо по Борелю.*

(6) *Прообраз* $\tau^{-1}[N]$ *всякого тощего (= нигде не плотного) множества* $N \subset Q$ *измерим в* Ω *и имеет нулевую меру.*

(7) *Точки* $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ ρ*-неразличимы тогда и только тогда, когда выполнено равенство* $\tau(\omega_1) = \tau(\omega_2)$.

◀ Утверждение (1) легко проверить непосредственно, (2) следует из (1), а (3) — из (2). Приступая к обоснованию утверждения (4), рассмотрим произвольное открытое множество $V \subset Q$. Пусть семейство $(U_\xi)_{\xi\in\Xi}$ открыто-замкнутых подмножеств Q таково, что $V = \bigcup\limits_{\xi\in\Xi} U_\xi$. Тогда из (1) вытекает измеримость прообразов $\tau^{-1}[U_\xi]$ для всех $\xi \in \Xi$, а из 1.2.12(4) следует измеримость множества $\tau^{-1}[V] = \bigcup\limits_{\xi\in\Xi} \tau^{-1}[U_\xi]$. Соотношение $\sup_{\xi\in\Xi} U_\xi = \mathrm{cl}\, V$ в булевой алгебре $\mathrm{Clop}(Q)$ с учетом (2) и 1.2.12(4) обеспечивает эквивалентность $\tau^{-1}[V] \sim \tau^{-1}[\mathrm{cl}\, V]$. Утверждения (5) и (6) вытекают из (4), а (7) — непосредственно из определения отображения τ. ▶

§ 1.3. Векторные решетки

В этом параграфе собраны основные сведения об абстрактных векторных решетках, а также об их конкретных примерах — K-пространстве $C_\infty(Q)$ расширенных непрерывных функций на экстремально несвязном компакте Q и K_σ-пространстве $M(\Omega)$ классов эквивалентности измеримых функций на пространстве с мерой Ω. Внимание сосредоточено на описании точных границ, порядковой сходимости и порядковых проекторов в $C_\infty(Q)$ и $M(\Omega)$. Согласно теореме Вулиха — Огасавары $C_\infty(Q)$ представляет собой общий вид (расширенного) K-пространства. Поэтому векторная решетка $M(\Omega)$ в большинстве случаев изоморфна $C_\infty(Q)$ для подходящего компакта Q. В данном параграфе приводится явное описание этого изоморфизма в терминах канонического погружения $\tau\colon \Omega \to Q$, определенного в 1.2.13. Векторная решетка $C_\infty(Q)$ является частным случаем еще одного типичного примера K-пространства — пространства $C_\infty(X)$ расширенных непрерывных функций на бэровском топологическом пространстве X. Изоморфизм между векторными решетками $C_\infty(X)$ и $C_\infty(Q)$ (для подходящего компакта Q) может быть выражен явно с помощью функции α_X, описанной в § 1.2.

Информация об абстрактных векторных решетках и K-пространстве $C_\infty(Q)$ имеется в [5, 11, 16, 18]. Основные свойства пространств $M(\Omega)$ и $L^\infty(\Omega)$ приведены в [15, 45].

Все векторные пространства в данной статье рассматриваются над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел и по умолчанию предполагаются ненулевыми. Все векторные решетки по умолчанию предполагаются архимедовыми.

1.3.1. В произвольной векторной решетке (= решеточно упорядоченном архимедовом векторном пространстве) бинарные решеточные операции обозначаются символами $\vee$ и $\wedge$. Положительная часть $e\vee 0$, отрицательная часть $(-e)\vee 0$ и модуль $e \vee (-e)$ элемента e векторной решетки обозначаются соответственно через e^+, e^- и $|e|$. Множество всех положительных элементов векторной решетки E обозначается символом E^+. Символ $\perp$ обозначает отношение дизъюнктности: $e \perp f \Leftrightarrow |e| \wedge |f| = 0$. Дизъюнктное дополнение $\{e \in E : e \perp f$ для всех $f \in F\}$ подмножества F векторной решетки E обозначатся через $F^\perp$, символ $F^{\perp\perp}$ является сокращением записи $(F^{\perp})^{\perp}$. Подмножество векторной решетки E, имеющее вид $F^{\perp\perp}$ для некоторого $F \subset E$, называется *компонентой* E (порожденной множеством F). Подмножество $F \subset E$ является компонентой тогда и только тогда, когда $F^{\perp\perp} = F$. Компонента вида $\{e\}^{\perp\perp}$, где $e \in E$, называется *главной*. Элемент $1 \in E$ называют (*слабой*) *порядковой единицей*, если $1 \geqslant 0$ и $\{1\}^{\perp\perp} = E$. Если для каждого элемента $e \in E$ существует число $\lambda \in \mathbb{R}$ такое, что $|e| \leqslant \lambda 1$, то элемент $1 \in E$ называется *сильной* (*порядковой*) *единицей*.

Тот факт, что сеть $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ монотонно убывает и $\inf_{\alpha\in\mathrm{A}} e_\alpha = e$, коротко обозначается формулой $e_\alpha \downarrow e$. Говорят, что сеть $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ элементов векторной решетки E *o-сходится к* $e \in E$ (и пишут $e = o\text{-}\lim e_\alpha$), если в E существует такая сеть $(f_\beta)_{\beta\in\mathrm{B}}$, что $f_\beta \downarrow 0$ и $\forall \beta \in \mathrm{B}\ \exists \bar{\alpha} \in \mathrm{A}\ \forall \alpha \geqslant \bar{\alpha}\ |e_\alpha - e| \leqslant f_\beta$. Если в роли сети $(f_\beta)_{\beta\in\mathrm{B}}$ выступает последовательность $(f/n)_{n\in\mathbb{N}}$, где $f \geqslant 0$, то говорят, что сеть $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ *r-сходится к* e (*с регулятором* f) и пишут $e = r\text{-}\lim e_\alpha$. Сеть $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ называется *o-фундаментальной* (*r-фундаментальной с регулятором* $f \in E$), если сеть $(e_\alpha - e_\beta)_{(\alpha,\beta)\in\mathrm{A}\times\mathrm{A}}$ o-сходится (соответственно r-сходится с регулятором f) к нулю. Если сеть $\big(\sum_{\xi\in\theta} e_\xi\big)_{\theta\in\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\Xi)}$ o-сходится к $e \in E$, то семейство $(e_\xi)_{\xi\in\Xi}$ называют *o-суммируемым* и пишут $e = o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} e_\xi$ (здесь $\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\Xi)$ — совокупность всех конечных подмножеств Ξ). В том случае, когда элементы e_ξ попарно дизъюнктны, сумму $o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} e_\xi$ называют *дизъюнктной*. Сеть $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ называется *асимптотически ограниченной*, если существует такой индекс $\bar{\alpha} \in \mathrm{A}$, что множество $\{e_\alpha : \alpha \geqslant \bar{\alpha}\}$ порядково ограничено. Очевидно, всякая o-сходящаяся сеть является асимптотически ограниченной.

Пусть E — векторная решетка. Линейный оператор $\pi\colon E \to E$ называется *порядковым проектором*, если $\pi^2 = \pi$ и $\pi e \leqslant e$ для всех положительных элементов $e \in E$. На множестве $\Pr(E)$ всех порядковых проекторов в E вводится порядок: $\pi_1 \leqslant \pi_2$ означает $\pi_1 e \leqslant \pi_2 e$ для всех положительных $e \in E$. Относительно такого порядка множество $\Pr(E)$ представляет собой булеву алгебру. Нулем и единицей в этой алгебре являются соответственно нулевой и тождественный id_E операторы, а булевы операции осуществляются следующим образом: $\pi_1 \wedge \pi_2 = \pi_1 \circ \pi_2$, $\pi_1 \vee \pi_2 = \pi_1 + \pi_2 - \pi_1 \circ \pi_2$, $\pi^{\perp} = \mathrm{id}_E - \pi$. Если $e \in E$, то элементы вида πe, где $\pi \in \Pr(E)$, называют *осколками* e.

Образ любого порядкового проектора векторной решетки является компонентой. Каждый порядковый проектор однозначно определяется своим образом. Для произвольного элемента $e \in E$ символом $\langle e\rangle$ обозначается порядковый проектор на компоненту $\{e\}^{\perp\perp}$ (если таковой существует). Аналогично для подмножества $F \subset E$ символом $\langle F\rangle$ обозначается проектор на компоненту $F^{\perp\perp}$. Для любых $e, f \in E$ полагаем $\langle e < f\rangle := \langle (f-e)^+\rangle$, $\langle e \leqslant f\rangle := \langle f < e\rangle^{\perp}$, $\langle e > f\rangle := \langle f < e\rangle$ и $\langle e \geqslant f\rangle := \langle f \leqslant e\rangle$. Ясно, что $\langle e \leqslant f\rangle = \max\{\pi \in \Pr(E) : \pi e \leqslant \pi f\}$. Естественно, запись $\langle e \leqslant f < g\rangle$ обозначает $\langle e \leqslant f\rangle \wedge \langle f < g\rangle$. В дальнейшем мы будем использовать подобные обозначения без дополнительных пояснений.

Векторное подпространство $F \subset E$ называется (*порядковым*) *идеалом* векторной решетки E, если для любых $f \in F$ и $e \in E$ из $|e| \leqslant |f|$ следует $e \in F$. Если D — подмножество векторной решетки E, то наименьший идеал E, содержащий D, обозначается символом E_D и называется *идеалом, порожденным* D. Очевидно, такой идеал существует и представляет собой множество всех $e \in E$, удовлетворяющих неравенству $|e| \leqslant |d_1| + \cdots + |d_n|$ для каких-либо элементов $d_i \in D$. Для произвольного элемента $d \in E$ идеал $E_{\{d\}}$ называется (*главным*) *идеалом* E, *порожденным элементом* d, и обозначается символом E_d. Очевидно, $E_d = \{e \in E : |e| \leqslant n|d| \text{ для некоторого } n \in \mathbb{N}\}$. Идеал $F \subset E$ называют *фундаментом*, если $F^{\perp\perp} = E$.

Векторная решетка называется ***пространством Канторовича*** или, более коротко, ***K-пространством***, если всякое ее порядково ограниченное подмножество имеет точные границы. Если наличие точных границ гарантируется лишь для счетных порядково ограниченных подмножеств, то векторная решетка именуется ***K_σ-пространством.*** В K-пространстве (K_σ-пространстве) каждая o- или r-фундаментальная сеть (счетная сеть) имеет соответственно o- или r-предел. Для любой векторной решетки E имеется (единственное с точностью до линейного и порядкового изоморфизма) K-пространство $\overline{E}$, содержащее E как o-плотную векторную подрешетку. Такое K-пространство $\overline{E}$ называется ***o-пополнением*** решетки E. Говорят, что K-пространство является ***расширенным***, если любое семейство попарно дизъюнктных его элементов порядково ограничено. Всякое K-пространство является фундаментом некоторого (единственного с точностью до линейного и порядкового изоморфизма) расширенного K-пространства, которое называется его ***максимальным расширением.*** Любой идеал K-пространства (K_σ-пространства) является K-пространством (K_σ-пространством). Для всякого K-пространства E булева алгебра $\mathrm{Pr}(E)$ полна. Если F — фундамент K-пространства E, то отображение $\pi \mapsto \pi|_F$ осуществляет изоморфизм между булевыми алгебрами $\mathrm{Pr}(E)$ и $\mathrm{Pr}(F)$. Мы условимся отождествлять алгебры $\mathrm{Pr}(E)$ и $\mathrm{Pr}(F)$ посредством этого изоморфизма. В K-пространстве (K_σ-пространстве) имеются порядковые проекторы на любую компоненту (соответственно на любую главную компоненту).

K-пространство E называется ***непрерывным*** (***дискретным***), если булева алгебра $\mathrm{Pr}(E)$ непрерывна (дискретна) (см. 1.2.1).

1.3.2. Наследственно (σ-наследственно, правильно, σ-правильно) вложенную векторную подрешетку векторной решетки (см. 1.2.2) называют ***наследственной*** (***σ-наследственной***, ***правильной***, ***σ-правильной***) ***подрешеткой.***

Предложение. *Пусть E — векторная решетка и F — векторная подрешетка E. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *F — наследственная (σ-наследственная) подрешетка E;*
(2) *для любого (счетного) подмножества $G \subset F^+$ из соотношения $\inf_F G = 0$ следует $\inf_E G = 0$;*
(3) *если (счетная) сеть o-сходится в F, то она o-сходится и в E, причем к тому же пределу;*
(4) *если (счетная) сеть o-сходится к нулю в F, то она o-сходится к нулю и в E.*

Предложение. *Векторная подрешетка K-пространства (K_σ-пространства) является правильной (σ-правильной) тогда и только тогда, когда она o-замкнута (счетно и/или секвенциально o-замкнута).*

1.3.3. Теорема. *Пусть 1 — порядковая единица в K-пространстве E.*

(1) *Если порядково ограниченная сеть $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ элементов E o-сходится к $e \in E$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение единицы $(\pi_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ в булевой алгебре $\mathrm{Pr}(E)$, что $\pi_\alpha|e_\alpha - e| \leqslant \varepsilon 1$ для всех $\alpha \in \mathrm{A}$.*

(2) *Для любого элемента $e \in E$ существует такое разбиение единицы $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в булевой алгебре $\mathrm{Pr}(E)$, что $\pi_n|e| \leqslant n1$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

◀ Доказательство (1) имеется, например, в [5, теорема 1.3.9]. Утверждение (2) является переформулировкой (1) для сети $(e/n)_{n\in\mathbb{N}}$. ▶

1.3.4. Пусть f — произвольный положительный элемент векторной решетки E. Элемент $s \in E$ назовем ***f-ступенчатым***, если $s = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \pi_i f$ для некоторых $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ и $\pi_1, \dots, \pi_n \in \mathrm{Pr}(E)$.

Предложение. *Предположим, что в векторной решетке E существуют порядковые проекторы на главные компоненты (это выполнено, если, например, E является K_σ-пространством). Пусть E_f — главный идеал E, порожденный положительным элементом $f \in E$. Тогда для каждого элемента $e \in E_f$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой f-ступенчатый элемент $s \in E_f$, что $|s| \leqslant |e|$ и $|e - s| \leqslant \varepsilon f$. В частности, множество f-ступенчатых элементов r-плотно в E_f.*

◀ Предположим выполненными все условия предложения и рассмотрим произвольные элемент $e \in E_f$ и число $\varepsilon > 0$. Пусть числа $m, n \in \mathbb{N}$ таковы, что $|e| \leqslant mf$ и $1/n \leqslant \varepsilon$. Тогда сумма

$$\sum_{i=-mn}^{-1} \frac{i}{n} \left\langle \frac{i-1}{n} f < e \leqslant \frac{i}{n} f \right\rangle f + \sum_{i=1}^{mn} \frac{i}{n} \left\langle \frac{i}{n} f \leqslant e < \frac{i+1}{n} f \right\rangle f$$

является искомым f-ступенчатым элементом. ▶

1.3.5. Пусть X — произвольное множество. Для любого семейства функций $f_\xi \colon D_\xi \to \overline{\mathbb{R}}$ $(\xi \in \Xi)$, определенных на подмножествах $D_\xi \subset X$, определим *верхнюю огибающую* $\operatorname{Sup}_{\xi\in\Xi} f_\xi \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, положив $(\operatorname{Sup}_{\xi\in\Xi} f_\xi)(x) := \sup\{f_\xi(x) : \xi \in \Xi,\ x \in \operatorname{dom} f_\xi\}$. Двойственная формула $(\operatorname{Inf}_{\xi\in\Xi} f_\xi)(x) := \inf\{f_\xi(x) : \xi \in \Xi,\ x \in \operatorname{dom} f_\xi\}$ определяет *нижнюю огибающую* $\operatorname{Inf}_{\xi\in\Xi} f_\xi \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$. (Как обычно, мы полагаем $\sup \varnothing := -\infty$ и $\inf \varnothing := \infty$.)

Лемма. *Пусть X — бэровское топологическое пространство. Верхняя и нижняя огибающие любого семейства элементов $C_\infty(X)$ обладают свойством Бэра.*

◀ Рассмотрим произвольное семейство $(f_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов $C_\infty(X)$, зафиксируем число $\lambda \in \mathbb{R}$ и покажем, что множество $A := \{x \in X : (\operatorname{Sup}_{\xi\in\Xi} f_\xi)(x) > \lambda\}$ обладает свойством Бэра. В силу непрерывности функций f_ξ найдутся такие открытые множества $G_\xi \subset X$, что $\{x \in \operatorname{dom} f_\xi : f_\xi(x) > \lambda\} = G_\xi \cap \operatorname{dom} f_\xi$. Обозначим открытое множество $\bigcup_{\xi\in\Xi} G_\xi$ через G. В силу равенства $A = \bigcup_{\xi\in\Xi} G_\xi \cap \operatorname{dom} f_\xi$, для каждого $\xi \in \Xi$ пересечение $(A \mathbin{\triangle} G) \cap G_\xi$ содержится в $X \setminus \operatorname{dom} f_\xi$ и поэтому является тощим. Следовательно, по теореме 1.1.10 тощим является и пересечение $(A \mathbin{\triangle} G) \cap G$, совпадающее с $A \mathbin{\triangle} G$. ▶

Теорема. *Пусть X — бэровское топологическое пространство.*

(1) Векторная решетка $C_\infty(X)$ является расширенным K-пространством.

(2) Непустое семейство $(f_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов векторной решетки $C_\infty(X)$ порядково ограничено сверху (снизу) тогда и только тогда, когда его верхняя (нижняя) огибающая принимает конечные значения на котощем подмножестве X.

(3) Если семейство $(f_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов $C_\infty(X)$ ограничено сверху (снизу), то $\operatorname{cont}(\operatorname{Sup}_{\xi\in\Xi} f_\xi) = \sup_{\xi\in\Xi} f_\xi$ (соответственно $\operatorname{cont}(\operatorname{Inf}_{\xi\in\Xi} f_\xi) = \inf_{\xi\in\Xi} f_\xi$).

◀ С очевидностью вытекает из последней леммы. ▶

1.3.6. ***Теорема*** [51]. *Если Q — σ-экстремально несвязный компакт, то векторная решетка $\overline{C}_\infty(Q)$ является K_σ-пространством.*

1.3.7. Пусть X — бэровское топологическое пространство. Для каждого множества $U \subset X$, обладающего свойством Бэра, определим порядковый проектор $\langle U \rangle \colon C_\infty(X) \to C_\infty(X)$, положив $\langle U \rangle f := \operatorname{cont}(\chi_U f)$, где χ_U — характеристическая функция множества U. Несложно убедиться в истинности следующего утверждения.

Предложение. *Пусть X — бэровское топологическое пространство. Отображение $U \mapsto \langle U \rangle$ осуществляет изоморфизм между булевыми алгебрами* $\mathrm{Rop}(X)$ *и* $\mathrm{Pr}(C_\infty(X))$.

Заметим, что в случае, когда пространство X является экстремально несвязным компактом, выполнены равенства $\mathrm{Rop}(X) = \mathrm{Clop}(X)$ и $\langle U \rangle f = \mathrm{ext}(\chi_U f)$ для всех $U \in \mathrm{Clop}(X)$ и $f \in C_\infty(X)$.

Если $f \in C_\infty(X)$, то множество $\mathrm{cl}\{x \in X : f(x) \neq 0\}$, где cl — операция замыкания, называется *носителем функции* f и обозначается символом $\mathrm{supp}\, f$. Если $F \subset C_\infty(X)$, то множество $\mathrm{cl} \bigcup\limits_{f \in F} \mathrm{supp}\, f$ называется *носителем множества функций* F и обозначается символом $\mathrm{supp}\, F$. Очевидно, $\langle \mathrm{supp}\, F \rangle = \langle F \rangle$, т. е. оператор $f \mapsto \mathrm{cont}(\chi_{\mathrm{supp}\, F} f)$ является порядковым проектором на компоненту, порожденную множеством F. В частности, $\langle \mathrm{supp}\, f \rangle = \langle f \rangle$ для любой функции $f \in C_\infty(X)$.

Теорема [11, 51]. *Пусть E — произвольное K-пространство, Q — стоуновский (экстремально несвязный) компакт булевой алгебры $\mathrm{Pr}(E)$ и $\pi \mapsto \hat{\pi}$ — канонический изоморфизм $\mathrm{Pr}(E)$ на $\mathrm{Clop}(Q)$.*

(1) *Существует линейный и порядковый изоморфизм $e \mapsto \hat{e}$ K-пространства E на фундамент $C_\infty(Q)$ такой, что $(\pi e)^\wedge = \langle \hat{\pi} \rangle \hat{e}$ для всех $\pi \in \mathrm{Pr}(E)$ и $e \in E$.*

(2) *Если в E фиксирована порядковая единица 1, то существует единственный изоморфизм $e \mapsto \hat{e}$ K-пространства E на фундамент $C_\infty(Q)$ такой, что $(\pi 1)^\wedge = \chi_{\hat{\pi}}$ для всех $\pi \in \mathrm{Pr}(E)$.*

(3) *Образ любого изоморфизма расширенного K-пространства на фундамент $C_\infty(Q)$ совпадает с $C_\infty(Q)$.*

Отображение $e \mapsto \hat{e}$, фигурирующее в формулировке последней теоремы, называется *реализацией* K-пространства E.

Замечание. Из последней теоремы, в частности, следует, что в любом расширенном K-пространстве E можно определить произведение так, что E превратится в коммутативную упорядоченную алгебру. Если дополнительно фиксировать порядковую единицу в K-пространстве E и потребовать, чтобы она была единицей умножения, то способ определения произведения в E становится единственным. В этом случае для каждого элемента $f \in E$ существует единственный элемент $g \in E$ такой, что $fg = \langle f \rangle 1$, где $1 \in E$ — единица умножения. Такой элемент g мы будем обозначать символом $1/f$. Произведение $e(1/f)$ обозначается более коротко: e/f.

1.3.8. Предложение. *Пусть X — регулярное бэровское топологическое пространство, Q — стоуновский компакт булевой алгебры $\mathrm{Rop}(X)$ и $\alpha \colon Q_X \to X$ — абсолютизация X* (см. 1.2.9). *Тогда для любой функции $f \in C_\infty(X)$ композиция $f \circ \alpha$ определена на всюду плотном подмножестве Q и отображение $f \mapsto \mathrm{ext}(f \circ \alpha)$ осуществляет линейный и порядковый изоморфизм K-пространства $C_\infty(X)$ на $C_\infty(Q)$.*

◀ Из теоремы 1.2.10 следует, что отображение $i \colon f \mapsto \mathrm{ext}(f \circ \alpha)$ является линейным и порядковым изоморфизмом $C_\infty(X)$ на $\mathrm{im}\, i$. Поскольку образ i является K-пространством, для доказательства равенства $\mathrm{im}\, i = C_\infty(Q)$ достаточно установить, что $\mathrm{im}\, i$ содержит характеристические функции всех открыто-замкнутых подмножеств Q. Последнее вытекает из 1.2.9 и 1.2.10. ▶

1.3.9. Если Ω — пространство с мерой, то при употреблении поточечных точных границ $\mathrm{Inf}_{\xi \in \Xi} f_\xi$ и $\mathrm{Sup}_{\xi \in \Xi} f_\xi$, мы считаем, что функции $f_\xi \in \mathscr{M}(\Omega)$ определены всюду на Ω и действуют в $\overline{\mathbb{R}}$ (см. 1.1.11).

Предложение. *Пусть Ω — пространство с ненулевой мерой.*

(1) *Векторная решетка $M(\Omega)$ является K_σ-пространством.*

(2) *Последовательность $(f_n^\sim)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов $M(\Omega)$ ограничена сверху тогда и только тогда, когда $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(\omega) < \infty$ почти для всех $\omega \in \Omega$. При этом $\mathrm{Sup}_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n^\sim$.*

(3) *Если последовательность $(f_n^\sim)$ o-сходится к $f^\sim$ в $M(\Omega)$, то $f_n(\omega) \to f(\omega)$ почти для всех $\omega \in \Omega$.*

1.3.10. Из следующей теоремы, в частности, вытекает, что векторные решетки $M(\Omega)$ и $L^\infty(\Omega)$ являются K-пространствами, если Ω — пространство с конечной или σ-конечной мерой.

Теорема. *Предположим, что пространство с ненулевой мерой Ω обладает свойством прямой суммы, и пусть ρ — лифтинг $L^\infty(\Omega)$.*

(1) *Векторная решетка $M(\Omega)$ является расширенным K-пространством.*

(2) *Семейство $(\mathbf{f}_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов $M(\Omega)$ порядково ограничено сверху тогда и только тогда, когда существует такое семейство представителей $f_\xi \in \mathbf{f}_\xi$ ($\xi \in \Xi$), что $\sup_{\xi\in\Xi} f_\xi(\omega) < \infty$ почти для всех $\omega \in \Omega$.*

(3) *Если подмножество $\mathbf{F} \subset M(\Omega)$ состоит из положительных элементов и порядково ограничено сверху, то $\mathrm{Sup}_{\mathbf{f}\in\mathbf{F}^\infty} \rho(\mathbf{f}) \in \sup \mathbf{F}$, где $\mathbf{F}^\infty := \{\pi\mathbf{f} : \pi \in \mathrm{Pr}(M(\Omega)), \mathbf{f} \in \mathbf{F}\} \cap L^\infty(\Omega)$.*

(4) *Если семейство $(\mathbf{f}_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов $L^\infty(\Omega)$ порядково ограничено в $L^\infty(\Omega)$, то $\mathrm{Sup}_{\xi\in\Xi} \rho(\mathbf{f}_\xi) \in \sup_{\xi\in\Xi} \mathbf{f}_\xi$ и $\mathrm{Inf}_{\xi\in\Xi} \rho(\mathbf{f}_\xi) \in \inf_{\xi\in\Xi} \mathbf{f}_\xi$.*

◀ Доказательство утверждений (1) и (2) имеется в [15, I.6.10]. Утверждения (3) и (4) можно извлечь из [45, гл. III, теорема 3]. ▶

1.3.11. Пусть Ω — пространство с ненулевой мерой. Если $A \in \mathscr{B}(\Omega)$ и $f \in \mathscr{M}(\Omega)$, то символом $\langle A\rangle f$ обозначается поточечное произведение $\chi_A f$, где χ_A — характеристическая функция множества A. Если $\mathbf{A} \in B(\Omega)$ и $\mathbf{f} \in M(\Omega)$, то символом $\langle\mathbf{A}\rangle\mathbf{f}$ обозначается класс из $M(\Omega)$, содержащий функцию $\langle A\rangle f$ для некоторых (а тогда и для любых) представителей $A \in \mathbf{A}$ и $f \in \mathbf{f}$. Отображение $\mathbf{A} \mapsto \langle\mathbf{A}\rangle$ осуществляет изоморфизм между булевыми алгебрами $B(\Omega)$ и $\mathrm{Pr}(M(\Omega))$.

Следующее предложение является функциональным аналогом утверждения теоремы 1.2.12 (2).

Предложение. *Предположим, что семейство $(A_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов $\mathscr{B}(\Omega)$ аппроксимирует Ω. Тогда для любой функции $f : \Omega \to \mathbb{R}$ имеют место следующие соотношения:*

(1) *$f \in \mathscr{M}(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $\langle A_\xi\rangle f \in \mathscr{M}(\Omega)$ для всех $\xi \in \Xi$;*

(2) *$f \sim 0$ тогда и только тогда, когда $\langle A_\xi\rangle f \sim 0$ для всех $\xi \in \Xi$;*

(3) *если $f \in \mathscr{M}(\Omega)$ и $f \geqslant 0$, то $\sup_{\xi\in\Xi}(\langle A_\xi\rangle f)^\sim = f^\sim$ в $M(\Omega)$.*

1.3.12. Всякое K-пространство, содержащее фундамент с достаточным числом порядково непрерывных функционалов, называется *пространством Канторовича — Пинскера.*

Теорема [16]. (1) *Если Ω — пространство с ненулевой мерой, обладающее свойством прямой суммы, то $M(\Omega)$ — пространство Канторовича — Пинскера.*

(2) *Всякое пространство Канторовича — Пинскера линейно и порядково изоморфно фундаменту K-пространства $M(\Omega)$ для подходящего пространства с мерой Ω, обладающего свойством прямой суммы.*

1.3.13. Теорема. *Пусть Ω — пространство с мерой, ρ — лифтинг пространства $L^\infty(\Omega)$ и $\tau : \Omega \to Q$ — соответствующее каноническое погружение Ω в стоуновский компакт Q булевой алгебры $B(\Omega)$* (см. 1.2.13).

(1) *Почти всюду в Ω определенная вещественная функция e измерима тогда и только тогда, когда $e \sim f \circ \tau$ для некоторого элемента $f \in C_\infty(Q)$.*

(2) *Для любого класса* $\widehat{\mathrm{e}}^{\sim} \in M(\Omega)$ *существует единственная функция* $\hat{\mathrm{e}} \in C_\infty(Q)$, *дающая представление* e *в виде* $(\hat{\mathrm{e}} \circ \tau)^\sim$.

(3) *Отображение* $\mathrm{e} \mapsto \hat{\mathrm{e}}$ *осуществляет линейный, алгебраический и порядковый изоморфизм* $M(\Omega)$ *на* $C_\infty(Q)$. *Обратный изоморфизм* $C_\infty(Q)$ *на* $M(\Omega)$ *действует по правилу* $f \mapsto (f \circ \tau)^\sim$.

(4) *Образ* $L^\infty(\Omega)$ *при изоморфизме* $\mathrm{e} \mapsto \hat{\mathrm{e}}$ *совпадает с* $C(Q)$. *Для каждого класса* $\mathrm{e} \in L^\infty(\Omega)$ *имеет место равенство* $\rho(\mathrm{e}) = \hat{\mathrm{e}} \circ \tau$.

◀ Пусть $\mathbf{A} \mapsto \widehat{\mathbf{A}}$ — канонический изоморфизм $B(\Omega)$ на $\mathrm{Clop}(Q)$. Согласно 1.3.11 и теореме 1.3.7 существует (и единствен) такой изоморфизм $\mathrm{e} \mapsto \hat{\mathrm{e}}$ расширенного K-пространства $M(\Omega)$ на $C_\infty(Q)$, что $\chi_{\mathbf{A}} = \chi_{\widehat{\mathbf{A}}}$ для всех $\mathbf{A} \in B(\Omega)$. Выделим в $M(\Omega)$ совокупность $\mathrm{St}(\Omega)$ ступенчатых классов вида $\sum\limits_{i=1}^{n} \langle \mathbf{A}_i \rangle \lambda_i^\sim$, где $\mathbf{A}_i \in B(\Omega)$ и $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Аналогичным образом определим множество $\mathrm{St}(Q) \subset C(Q)$ всевозможных сумм $\sum\limits_{i=1}^{n} \langle U_i \rangle \lambda_i$, где $U_i \in \mathrm{Clop}(Q)$ и $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Очевидно, отображение $\mathrm{s} \mapsto \hat{\mathrm{s}}$ осуществляет изоморфизм $\mathrm{St}(\Omega)$ на $\mathrm{St}(Q)$. Поскольку множество $\mathrm{St}(\Omega)$ плотно в $L^\infty(\Omega)$ относительно r-сходимости с регулятором $1^\sim$, а $\mathrm{St}(Q)$ равномерно плотно в $C(Q)$, образ $L^\infty(\Omega)$ при изоморфизме $\mathrm{e} \mapsto \hat{\mathrm{e}}$ совпадает с $C(Q)$. Из теоремы 1.2.13 следует, что $\rho(\mathrm{s}) = \hat{\mathrm{s}} \circ \tau$ для всех $\mathrm{s} \in \mathrm{St}(\Omega)$. Учитывая это обстоятельство, а также используя тот факт, что r-сходимость $\mathrm{s}_n \to \mathrm{e}$ с регулятором $1^\sim$ влечет равномерную сходимость $\rho(\mathrm{s}_n) \rightrightarrows \rho(\mathrm{e})$, приходим к равенству $\rho(\mathrm{e}) = \hat{\mathrm{e}} \circ \tau$ для всех $\mathrm{e} \in L^\infty(\Omega)$.

Для завершения доказательства теоремы достаточно показать включение $\hat{\mathrm{e}} \circ \tau \in \mathrm{e}$ для каждого класса $\mathrm{e} \in M(\Omega)$. Согласно 1.3.3 любой элемент $\mathrm{e} \in M(\Omega)$ разлагается в дизъюнктную сумму $o\text{-}\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \langle \mathbf{A}_n \rangle \mathrm{e}$ ограниченных элементов $\langle \mathbf{A}_n \rangle \mathrm{e} \in L^\infty(\Omega)$. Остается заметить, что $\hat{\mathrm{e}} \circ \tau = \big(o\text{-}\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \langle \widehat{\mathbf{A}}_n \rangle \hat{\mathrm{e}}\big) \circ \tau \sim \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \rho(\langle \mathbf{A}_n \rangle \mathrm{e}) \in \mathrm{e}$. ▶

Функция $\hat{\mathrm{e}} \in C_\infty(Q)$, соответствующая классу $\mathrm{e} \in M(\Omega)$ согласно п. (2), называется *стоуновским преобразованием* e.

§ 1.4. Решеточно нормированные пространства

Этот параграф содержит основные определения и обозначения, связанные с решеточно нормированными пространствами, а также некоторые классические факты теории пространств Банаха — Канторовича.

Понятие РНП было введено Л. В. Канторовичем в 1935 г. и позднее более детально рассмотрено в монографии [16]. Новейшие достижения в теории РНП в основном связаны с работами А. Г. Кусраева и его учеников. Подробная информация о современном состоянии этой теории имеется в [5, 18, 19, 23], а также в обзорной статье А. Г. Кусраева, опубликованной в этом же сборнике.

1.4.1. Рассмотрим векторное пространство $\mathscr{U}$, векторную решетку E и функцию $|\cdot|: \mathscr{U} \to E$. Пара $(\mathscr{U}, |\cdot|)$ называется *решеточно нормированным пространством над* E, если для любых $u, v \in \mathscr{U}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ имеют место следующие соотношения:

(а) $|u| \geqslant 0$;
(б) $|\lambda u| = |\lambda||u|$;
(в) $|u + v| \leqslant |u| + |v|$;
(г) $|u| = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$.

При этом отображение $|\cdot|$ именуется *решеточной* (*векторной*, E-*значной*) *нормой*, а пространство E называется *нормирующей решеткой*. Вместо $(\mathscr{U}, |\cdot|)$ обычно пишут просто $\mathscr{U}$ и в случае необходимости снабжают символ $|\cdot|$ индексом: $|\cdot|_{\mathscr{U}}$. РНП $\mathscr{U}$ называют *разложимым* (*d-разложимым*), если для любого элемента $u \in \mathscr{U}$ и любого разложения $|u| = f + g$ в сумму положительных (соответственно дизъюнктных) элементов $f, g \in E$ найдутся такие $v, w \in \mathscr{U}$, что $|v| = f$, $|w| = g$ и $v + w = u$. В настоящей статье по умолчанию предполагается, что все рассматриваемые РНП d-разложимы и их нормирующие решетки являются K-пространствами. Кроме того, зачастую удобно предполагать, что образ нормы РНП $\mathscr{U}$ максимально широк в нормирующей решетке E, т. е. $\{|u| : u \in \mathscr{U}\}^{\perp\perp} = E$.

Пусть $\mathscr{U}$ — РНП над E. Подмножество $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$ называется (*порядково*) *ограниченным*, если множество $\{|v| : v \in \mathscr{V}\}$ порядково ограничено в E. Говорят, что *элементы* $u, v \in \mathscr{U}$ *дизъюнктны* (и пишут $u \perp v$), если $|u| \perp |v|$. Всякое семейство, состоящее из попарно дизъюнктных элементов РНП, называют *дизъюнктным семейством*.

Говорят, что сеть (u_α) элементов РНП $\mathscr{U}$ над E *о-сходится* (*r-сходится с регулятором* $e \in E$) *к* $u \in \mathscr{U}$ (и пишут $u = o\text{-}\lim u_\alpha$ и соответственно $u = r\text{-}\lim u_\alpha$), если в E выполнено $o\text{-}\lim|u_\alpha - u| = 0$ ($r\text{-}\lim|u_\alpha - u| = 0$ с регулятором e). Сеть $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ называется *о-фундаментальной* (*r-фундаментальной с регулятором* $e \in E$), если сеть $(u_\alpha - u_\beta)_{(\alpha,\beta)\in\mathrm{A}\times\mathrm{A}}$ o-сходится (соответственно r-сходится с регулятором e) к нулю. Если сеть $\big(\sum\limits_{\xi\in\theta} u_\xi\big)_{\theta\in\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\Xi)}$ o-сходится к $u \in \mathscr{U}$, то семейство $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ называют *о-суммируемым* и пишут $u = o\text{-}\sum\limits_{\xi\in\Xi} u_\xi$ (здесь $\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\Xi)$ — совокупность всех конечных подмножеств Ξ). В том случае, когда элементы u_ξ попарно дизъюнктны, выражение $o\text{-}\sum\limits_{\xi\in\Xi} u_\xi$ называют *дизъюнктной суммой*.

Совокупность o-пределов (r-пределов) всевозможных o-сходящихся (r-сходящихся) сетей элементов подмножества $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$ называется *о-замыканием* (*r-замыканием*) множества $\mathscr{V}$. Множество называется *о-замкнутым* (*r-замкнутым*), если оно совпадает со своим o-замыканием (r-замыканием). Подмножество $\mathscr{U}$ называется *о-плотным* (*r-плотным*) в $\mathscr{U}$, если его o-замыкание (r-замыкание) совпадает с $\mathscr{U}$.

Предположим, что $\mathscr{U}$ — d-разложимое РНП над K-пространством E и рассмотрим произвольный порядковый проектор $\pi \in \mathrm{Pr}(E)$. Легко убедиться в том, что любой элемент $u \in \mathscr{U}$ единственным образом разлагается в сумму $u = v + w$ так, что $|v| = \pi|u|$ и $|w| = \pi^\perp|u|$. Обозначим слагаемое v символом $\pi_{\mathscr{U}} u$. Тогда отображение $\pi_{\mathscr{U}} : \mathscr{U} \to \mathscr{U}$ является линейным проектором. Множество $\mathrm{Pr}(\mathscr{U}) := \{\pi_{\mathscr{U}} : \pi \in \mathrm{Pr}(E)\}$, снабженное порядком $\pi_{\mathscr{U}} \leqslant \rho_{\mathscr{U}} \Leftrightarrow \pi_{\mathscr{U}} \circ \rho_{\mathscr{U}} = \pi_{\mathscr{U}}$, представляет собой булеву алгебру, булевы операции которой совпадают с операциями, транслированными из $\mathrm{Pr}(E)$ отображением $\pi \mapsto \pi_{\mathscr{U}}$. Точнее говоря, для любых $\pi, \rho \in \mathrm{Pr}(E)$ имеют место соотношения $\pi_{\mathscr{U}} \wedge \rho_{\mathscr{U}} = (\pi\wedge\rho)_{\mathscr{U}} = \pi_{\mathscr{U}} \circ \rho_{\mathscr{U}}$, $\pi_{\mathscr{U}} \vee \rho_{\mathscr{U}} = (\pi\vee\rho)_{\mathscr{U}} = \pi_{\mathscr{U}} + \rho_{\mathscr{U}} - \pi_{\mathscr{U}} \circ \rho_{\mathscr{U}}$ и $(\pi_{\mathscr{U}})^\perp = (\pi^\perp)_{\mathscr{U}} = \mathrm{id}_{\mathscr{U}} - \pi_{\mathscr{U}}$. Отображение $\pi \mapsto \pi_{\mathscr{U}}$ осуществляет изоморфизм булевой алгебры $\mathrm{Pr}(\{|u| : u \in \mathscr{U}\}^{\perp\perp})$ на $\mathrm{Pr}(\mathscr{U})$, в связи с чем индекс $\mathscr{U}$ в обозначении проектора $\pi_{\mathscr{U}}$, как правило, опускается. В случае равенства $\{|u| : u \in \mathscr{U}\}^{\perp\perp} = E$ (которое обычно подразумевается по умолчанию) изоморфные алгебры $\mathrm{Pr}(E)$ и $\mathrm{Pr}(\mathscr{U})$ отождествляются. Для всякого $u \in \mathscr{U}$ элементы вида πu, где $\pi \in \mathrm{Pr}(E)$, называют *осколками* u. Проектор $\langle |u| \rangle$ обозначается более коротко: $\langle u \rangle$. Для произвольного подмножества $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$ символом $\langle \mathscr{V} \rangle$ обозначается проектор на компоненту $\{|v| : v \in \mathscr{V}\}^{\perp\perp}$.

Если $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — произвольное семейство элементов $\mathscr{U}$, а $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — разбиение единицы в булевой алгебре порядковых проекторов, то сумма $o\text{-}\sum\limits_{\xi\in\Xi} \pi_\xi u_\xi$ (коль скоро таковая существует) называется *перемешиванием* семейства $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ относительно $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$. Пусть $\mathscr{V}$ — подмножество $\mathscr{U}$. Совокупность всевозможных перемешиваний произвольных (конечных) семейств элементов $\mathscr{V}$ называется *циклической оболочкой* (соответственно *конечно-циклической оболочкой*) множества $\mathscr{V}$ и обозначается символом $\mathrm{mix}\,\mathscr{V}$ (соответственно $\mathrm{mix}_{\mathrm{fin}}\,\mathscr{V}$). Циклическую оболочку объединения $\mathscr{V} \cup \{0\}$ мы называем *d-замыканием* множества $\mathscr{V}$ и обозначаем символом $d\mathscr{V}$. Аналогично символ $d_{\mathrm{fin}}\mathscr{V}$ используется для обозначения конечно-циклической оболочки множества $\mathscr{V}\cup\{0\}$. Множество $\mathscr{V}$ называется *цикличным* (*конечно-цикличным*), если $\operatorname{mix}\mathscr{V}=\mathscr{V}$ (соответственно $\operatorname{mix}_{\mathrm{fin}}\mathscr{V}=\mathscr{V}$). Легко проверить, что (конечно) циклическая оболочка множества $\mathscr{V}$ представляет собой наименьшее (конечно) цикличное множество, содержащее $\mathscr{V}$. Очевидно, для конечной цикличности множества $\mathscr{V}$ достаточно, чтобы оно содержало суммы $\pi v+\pi^{\perp}w$ для любых $v,w\in\mathscr{V}$ и $\pi\in\Pr(E)$.

1.4.2. Предположим, что $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ — РНП над E и F соответственно, и пусть j — линейный и порядковый изоморфизм E на F. Линейный оператор $i\colon\mathscr{U}\to\mathscr{V}$ называется *изометрическим вложением, ассоциированным с* j, если $|i(u)|=j(|u|)$ для всех $u\in\mathscr{U}$. Сюръективное изометрическое вложение называется *изометрией*. Говорят, что РНП $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ *изометричны*, если существуют изоморфизм E на F и ассоциированная с ним изометрия $\mathscr{U}$ на $\mathscr{V}$.

В том случае, когда $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ — РНП над одной и той же решеткой E, всякое изометрическое вложение $i\colon\mathscr{U}\to\mathscr{V}$ по умолчанию предполагается ассоциированным с тождественным изоморфизмом: $|i(u)|=|u|$ для всех $u\in\mathscr{U}$. При необходимости подчеркнуть последнее обстоятельство мы будем называть такое вложение E*-изометрическим*, а в случае его сюръективности — E*-изометрией*. Соответствующие РНП будут называться E*-изометричными*.

1.4.3. РНП называется *порядково полным* или *o-полным* (*r-полным*), если всякая o-фундаментальная (r-фундаментальная) сеть его элементов o-сходится (r-сходится). Говорят, что РНП *счетно* (*секвенциально*) *o-полно*, если в нем o-сходится всякая o-фундаментальная счетная сеть (последовательность). РНП называют *d-полным*, если всякое ограниченное дизъюнктное семейство его элементов o-суммируемо. *Пространством Банаха — Канторовича* (ПБК) называется d-разложимое o-полное РНП над K-пространством. Можно показать, что всякое ПБК является разложимым РНП.

Предложение [22]. *Нормирующая решетка E любого* ПБК $\mathscr{U}$ *является K-пространством и* $\{|u| : u\in\mathscr{U}\}=\{e\in E : e\geqslant 0\}$.

Теорема [18]. *Разложимое* РНП *над K-пространством o-полно* (т. е. *является* ПБК) *тогда и только тогда, когда оно d- и r-полно.*

Пусть $\mathscr{U}$ — d-разложимое РНП над E. Векторное подпространство $\mathscr{V}\subset\mathscr{U}$ называется *решеточно нормированным подпространством* $\mathscr{U}$, если оно d-разложимо относительно нормы $|\cdot||_{\mathscr{V}}\colon\mathscr{V}\to E$. Если F — идеал (фундамент) векторной решетки E, то множество $\mathscr{U}_F:=\{u\in\mathscr{U} : |u|\in F\}$ называется *идеалом* (*фундаментом*) РНП $\mathscr{U}$. Если F — идеал E, порожденный элементом $e\in E$, то соответствующее ему множество $\mathscr{U}_F$ называется (*главным*) *идеалом* $\mathscr{U}$, *порожденным* e. Идеал $\mathscr{U}_F$ по умолчанию рассматривается как РНП над F относительно нормы $|\cdot||^F\colon\mathscr{U}_F\to F$.

Известно, что для любого РНП $\mathscr{U}$ над K-пространством E существует единственное с точностью до E-изометрии ПБК $\overline{\mathscr{U}}$ над E, содержащее $\mathscr{U}$ как o-плотное решеточно нормированное подпространство (см. [23, 3.10; 12, 2.8]). Такое ПБК $\overline{\mathscr{U}}$ называется *o-пополнением* РНП $\mathscr{U}$.

ПБК над расширенным K-пространством называется *расширенным* ПБК. Всякое ПБК является фундаментом некоторого (единственного с точностью до изометрии) расширенного ПБК, которое называется его *максимальным расширением*. Любой идеал ПБК является ПБК.

1.4.4. Говорят, что фундаменты E и F расширенного K-пространства G образуют *дуализирующую пару*, если идеал $E^*:=\{e^*\in G : ee^*\in F$ для всех $e\in E\}$ является фундаментом G (о произведении элементов K-пространства см. 1.3.7). Пусть $\mathscr{U}$ — РНП над E. Обозначим через $\mathscr{U}^*$ совокупность всех линейных операторов $u^*\colon\mathscr{U}\to F$, для которых существует такой положительный элемент $e^*\in E^*$, что

$$|\langle u|u^*\rangle|\leqslant|u|e^*\ \text{для всех}\ u\in\mathscr{U}. \qquad (*)$$

Для каждого $u^* \in \mathcal{U}^*$ существует наименьший положительный элемент $e^* \in E^*$, удовлетворяющий соотношению $(*)$, который мы обозначим через $|u^*|$. Пространство $\mathcal{U}^*$ в паре с отображением $u^* \mapsto |u^*|$ является РНП над E^* и называется РНП, ***сопряженным к*** $\mathcal{U}$.

Теорема [18]. *Для любого* РНП $\mathcal{U}$ *соответствующее сопряженное* РНП $\mathcal{U}^*$ *представляет собой* ПБК.

1.4.5. Пусть E — расширенное K-пространство и $(E_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — некоторое семейство попарно дизъюнктных идеалов E. Символом $\bigoplus\limits_{\xi\in\Xi} E_\xi$ обозначается идеал K-пространства E, состоящий из всех элементов $e \in E$, удовлетворяющих соотношению $\langle E_\xi\rangle e \in E_\xi$ для каждого $\xi \in \Xi$. Очевидно, что

$$\bigoplus_{\xi\in\Xi} E_\xi = \Big\{ o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} e_\xi \ : \ (e_\xi)_{\xi\in\Xi} \in \prod_{\xi\in\Xi} E_\xi \Big\}.$$

Предположим, что для каждого $\xi \in \Xi$ имеется РНП $\mathcal{U}_\xi$ над E_ξ. Несложно убедиться в том, что векторное пространство $\prod\limits_{\xi\in\Xi} \mathcal{U}_\xi$ представляет собой РНП над $\bigoplus\limits_{\xi\in\Xi} E_\xi$ относительно нормы $|(u_\xi)_{\xi\in\Xi}| = o\text{-}\sum\limits_{\xi\in\Xi} |u_\xi|$. Это РНП обозначается символом $\bigoplus\limits_{\xi\in\Xi} \mathcal{U}_\xi$ и называется ***дизъюнктной суммой семейства*** РНП $(\mathcal{U}_\xi)_{\xi\in\Xi}$.

1.4.6. Пусть $\mathcal{U}$ — произвольное (не обязательно d-разложимое) РНП над векторной решеткой E. Предположим, что d-разложимое РНП $\overline{\mathcal{U}}$ над E содержит $\mathcal{U}$ как подпространство с индуцированной нормой. Будем говорить, что РНП $\overline{\mathcal{U}}$ над E является ***d-разложимой оболочкой*** $\mathcal{U}$, если $d_{\text{fin}}\mathcal{U} = \overline{\mathcal{U}}$, т. е. $\overline{\mathcal{U}}$ представляет собой минимальное d-разложимое РНП, содержащее $\mathcal{U}$ как подпространство с индуцированной нормой.

Предложение. *Предположим, что в векторной решетке E имеются порядковые проекторы на главные компоненты. Тогда любое (не обязательно d-разложимое)* РНП $\mathcal{U}$ *над E имеет единственную с точностью до изометрии d-разложимую оболочку.*

◀ Для построения d-разложимой оболочки мы привлечем схему формальных перемешиваний, традиционно используемую в подобных ситуациях (ср. [6, 7, 23]). Обозначим через $\widetilde{\mathcal{U}}$ совокупность всевозможных конечных семейств $((\pi_i, u_i))_{i\in I}$ элементов $\mathrm{Pr}(E) \times \mathcal{U}$ таких, что $(\pi_i)_{i\in I}$ — разбиение единицы в булевой алгебре $\mathrm{Pr}(E)$. Введем на $\widetilde{\mathcal{U}}$ отношение эквивалентности, положив $((\pi_i, u_i))_{i\in I} \sim ((\rho_j, v_j))_{j\in J}$ в том и только том случае, если $\pi_i\rho_j|u_i - v_j| = 0$ для всех $i \in I$ и $j \in J$. Положим $\overline{\mathcal{U}}$ равным фактор-множеству $\widetilde{\mathcal{U}}/\!\sim$ и условимся обозначать класс эквивалентности, содержащий семейство $((\pi_i, u_i))_{i\in I}$, через $\sum\limits_{i\in I} \pi_i u_i$. Отождествляя элементы $u \in \mathcal{U}$ с «одночленами» $1u \in \overline{\mathcal{U}}$, мы будем считать, что $\mathcal{U} \subset \overline{\mathcal{U}}$. Легко убедиться в том, что $\overline{\mathcal{U}}$ представляет собой РНП над E относительно операций

$$\sum_{i\in I} \pi_i u_i + \sum_{j\in J} \rho_j v_j := \sum_{i\in I, j\in J} \pi_i\rho_j(u_i + v_j),$$

$$\lambda \sum_{i\in I} \pi_i u_i := \sum_{i\in I} \pi_i \lambda u_i, \qquad \Big|\sum_{i\in I} \pi_i u_i\Big| := \sum_{i\in I} \pi_i |u_i|$$

и является d-разложимой оболочкой $\mathcal{U}$. Единственность d-разложимой оболочки очевидна. ▶

1.4.7. Пусть E и F — K-пространства и $\mathscr{U}$ — РНП над E. Предположим, что функция $S\colon E \to F$ удовлетворяет следующим условиям:

(а) $S(e_1 + e_2) \leqslant Se_1 + Se_2$ для любых положительных $e_1, e_2 \in E$;
(б) $S(\lambda e) = \lambda Se$ для любых положительных $e \in E$ и $\lambda \in \mathbb{R}$;
(в) если $0 \leqslant e_1 \leqslant e_2$, то $Se_1 \leqslant Se_2$.

Рассмотрим векторное подпространство $\mathscr{U}_0 := \{u \in \mathscr{U} : S|u| = 0\}$ и условимся обозначать класс эквивалентности из $\mathscr{U}/\mathscr{U}_0$, содержащий элемент $u \in \mathscr{U}$, через $S_{\mathscr{U}}u$. Легко убедиться в том, что пространство $\mathscr{U}/\mathscr{U}_0$ представляет собой РНП над F относительно нормы $|S_{\mathscr{U}}u| := S|u|$. Заметим, что РНП $\mathscr{U}/\mathscr{U}_0$ может не быть d-разложимым (например, в случае $\mathscr{U} = E = F = \mathbb{R}^2$ и $S(x,y) = (x,x)$). Мы будем называть d-разложимую оболочку РНП $\mathscr{U}/\mathscr{U}_0$ *нормативным преобразованием* $\mathscr{U}$ *посредством* S и обозначать ее символом $S\mathscr{U}$. Линейный оператор $S_{\mathscr{U}} : \mathscr{U} \to S\mathscr{U}$ называется *оператором нормативного преобразования* $\mathscr{U}$ *посредством* S.

§ 1.5. Аппроксимирующие подмножества

Идея порядковой аппроксимации, развиваемая в этом параграфе, оказывается довольно полезной как с точки зрения общей теории РНП, так и применительно к ее специальным разделам, связанным с пополнениями РНП и продолжениями линейных операторов. Определив понятие порядково аппроксимирующего подмножества РНП, мы затем предлагаем его эквивалентные описания в терминах сходимостей разного рода. Некоторая модификация введенного понятия приводит к так называемым h-аппроксимирующим множествам. Изучаемые в этом параграфе основные свойства таких множеств будут активно использованы в гл. 6 для исследования операторов, сохраняющих дизъюнктность.

1.5.1. *Лемма.* *Пусть $\mathscr{U}$ — РНП над K-пространством E и $\mathscr{V}$ — конечно-цикличное подмножество $\mathscr{U}$. Тогда для всякого $u \in \mathscr{U}$ найдется такая сеть $(v_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ элементов $\mathscr{V}$, что сеть $(|u - v_\alpha|)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ убывает и $\{|u - v_\alpha| : \alpha \in \mathrm{A}\} = \{|u - v| : v \in \mathscr{V}\}$. В частности, $|u - v_\alpha| \downarrow \inf_{v\in\mathscr{V}} |u - v|$.*

◀ Предположим, что подмножество $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$ удовлетворяет условиям леммы, и зафиксируем произвольный элемент $u \in \mathscr{U}$. Введем на $\mathscr{V}$ отношения эквивалентности и предпорядка следующими формулами:

$$v \sim w \ \Leftrightarrow\ |u - v| = |u - w|,$$
$$v \preccurlyeq w \ \Leftrightarrow\ |u - v| \geqslant |u - w|.$$

Для любых элементов $v, w \in \mathscr{V}$ можно подобрать такой проектор $\pi \in \mathrm{Pr}(E)$, что $|u - (\pi v + \pi^\perp w)| = |u - v| \wedge |u - w|$. С учетом конечной цикличности $\mathscr{V}$ это означает, что предупорядоченное множество $(\mathscr{V}, \preccurlyeq)$ направлено вверх. Тогда фактор-множество $\mathrm{A} := \mathscr{V}/{\sim}$, снабженное фактор-порядком, является направленным вверх упорядоченным множеством. Выбирая в каждом классе эквивалентности $\alpha \in \mathrm{A}$ по элементу $v_\alpha \in \alpha$, получаем искомую сеть $(v_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$. ▶

1.5.2. Пусть $\mathscr{V}$ — подмножество РНП $\mathscr{U}$. Будем говорить, что множество $\mathscr{V}$ (*порядково*) *аппроксимирует элемент* $u \in \mathscr{U}$, если $\inf_{v\in\mathscr{V}} |u - v| = 0$. Будем говорить, что $\mathscr{V}$ (*порядково*) *аппроксимирует множество* $\mathscr{W} \subset \mathscr{U}$, если $\mathscr{V}$ аппроксимирует каждый элемент $\mathscr{W}$. Подмножество РНП $\mathscr{U}$ назовем (*порядково*) *аппроксимирующим*, если оно аппроксимирует $\mathscr{U}$. Примером аппроксимирующего подмножества РНП может служить любой его фундамент.

Предложение. *Пусть X, Y и Z — подмножества РНП. Если X аппроксимирует Y, а Y аппроксимирует Z, то X аппроксимирует Z.*

◀ Рассмотрим произвольный элемент $z \in Z$, обозначим $\inf_{x\in X}|x-z|$ через e и предположим, вопреки доказываемому, что $e \neq 0$. Поскольку $\inf_{y\in Y}|y-z| = 0$, найдутся элемент $y \in Y$ и порядковый проектор ρ такие, что $\rho|y-z| < \rho e/2$. Аналогично в силу равенства $\inf_{x\in X}|x-y| = 0$ найдутся элемент $x \in X$ и порядковый проектор π такие, что $\pi|x-y| < \pi\rho e/2$. Следующие противоречивые соотношения завершают доказательство:

$$\pi\rho e \leqslant \pi\rho|x-z| \leqslant \pi\rho|x-y| + \pi\rho|y-z| < \pi\rho e/2 + \pi\rho e/2 = \pi\rho e. \quad ▶$$

1.5.3. *Предложение.* *Пусть $\mathscr{V}$ — подмножество, а u — элемент РНП. Множество $\mathscr{V}$ аппроксимирует u тогда и только тогда, когда u является o-пределом некоторой сети элементов $\mathrm{mix}_{\mathrm{fin}}\,\mathscr{V}$.*

◀ Необходимость. Если $\mathscr{V}$ аппроксимирует u, то

$$\inf\{|u-w| \;:\; w \in \mathrm{mix}_{\mathrm{fin}}\,\mathscr{V}\} = 0.$$

Поэтому в силу 1.5.1 существует такая сеть $(w_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ элементов $\mathrm{mix}_{\mathrm{fin}}\,\mathscr{V}$, что $|u-w_\alpha| \downarrow 0$.

Достаточность. Если u является o-пределом сети элементов $\mathrm{mix}_{\mathrm{fin}}\,\mathscr{V}$, то $\mathrm{mix}_{\mathrm{fin}}\,\mathscr{V}$ аппроксимирует u. Остается заметить, что $\mathscr{V}$ аппроксимирует $\mathrm{mix}_{\mathrm{fin}}\,\mathscr{V}$, и воспользоваться предложением 1.5.2. ▶

Следствие. *Если подмножество $\mathscr{V}$ РНП $\mathscr{U}$ конечно-циклично, то его o-замыкание состоит из всех элементов $u \in \mathscr{U}$, аппроксимируемых множеством $\mathscr{V}$.*

Следствие. *Если подмножество $\mathscr{V}$ РНП $\mathscr{U}$ конечно-циклично, то его o-замыкание o-замкнуто и, следовательно, является наименьшим o-замкнутым подмножеством $\mathscr{U}$, содержащим $\mathscr{V}$.*

◀ Вытекает из предыдущего следствия и предложения 1.5.2. ▶

1.5.4. *Предложение.* *Следующие свойства подмножества $\mathscr{V}$ РНП $\mathscr{U}$ эквивалентны:*

(1) *$\mathscr{V}$ — аппроксимирующее подмножество $\mathscr{U}$;*
(2) *для любого идеала $\mathscr{U}_0 \subset \mathscr{U}$ множество $d_{\mathrm{fin}}\mathscr{V} \cap \mathscr{U}_0$ o-плотно в $\mathscr{U}_0$;*
(3) *множество $d_{\mathrm{fin}}\mathscr{V}$ o-плотно в $\mathscr{U}$;*
(4) *$d_{\mathrm{fin}}\mathscr{V}$ — аппроксимирующее подмножество $\mathscr{U}$.*

◀ Импликации (2)⇒(3)⇒(4) очевидны. Остается доказать, что (1)⇒(2) и (4)⇒(1).

(1)⇒(2). Предположим, что подмножество $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$ удовлетворяет условию (1), зафиксируем произвольный идеал $\mathscr{U}_0 \subset \mathscr{U}$ и его элемент $u \in \mathscr{U}_0$, обозначим множество $d_{\mathrm{fin}}\mathscr{V} \cap \mathscr{U}_0$ через $\mathscr{W}$ и положим $e := \inf_{w\in\mathscr{W}}|u-w|$. Очевидно, что $e \leqslant |u|$. Согласно 1.5.1 существует такая сеть $(w_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ элементов $\mathscr{W}$, что $|u-w_\alpha| \downarrow e$. Осталось показать, что $e = 0$. Если $e \neq 0$, то в силу предложения 1.5.3 найдутся $w \in \mathrm{mix}_{\mathrm{fin}}\,\mathscr{V}$ и $\pi \in \mathrm{Pr}(E)$ такие, что $\pi|u-w| < \pi e$. Неравенства $|\pi w| \leqslant |\pi w - \pi u| + |\pi u| \leqslant e + |u| \leqslant 2|u|$ обеспечивают включение $\pi w \in \mathscr{W}$, и, таким образом, имеют место противоречивые соотношения $\pi e \leqslant \pi|u-\pi w| < \pi e$.

(4)⇒(1). Обозначим множество $d_{\mathrm{fin}}\mathscr{V}$ через $\mathscr{W}$ и предположим, что оно аппроксимирует $\mathscr{U}$.

Обозначим $\inf_{v\in\mathscr{V}}|v|$ через e и докажем, что $e = 0$. Если это не так, то найдется элемент $u \in \mathscr{U}$, удовлетворяющий неравенствам $0 < |u| \leqslant e/2$. Поскольку $\inf_{w\in\mathscr{W}}|u-w| = 0$, найдутся порядковый проектор $\pi \neq 0$ и элемент $w = \pi_1 v_1 + \dots + \pi_n v_n \in \mathscr{W}$ $(v_i \in \mathscr{V})$ такие, что $\pi_0|u-w| < \pi_0|u|$ для всех $0 \neq \pi_0 \leqslant \pi$. Ясно, что $\pi w \neq 0$, и поэтому $\rho := \pi_i \wedge \pi \neq 0$ для некоторого i. Теперь неравенства $\rho|u-v_i| < \rho|u| \leqslant \rho e/2$ приводят к противоречию: $\rho e \leqslant \rho|v_i| \leqslant \rho|u-v_i| + \rho|u| < \rho e/2 + \rho e/2 = \rho e$.

Таким образом, $\inf_{v\in\mathscr{V}}|v| = 0$, откуда следует, что $\mathscr{V}$ аппроксимирует $\mathscr{V}\cup\{0\}$. Множество же $\mathscr{V}\cup\{0\}$, очевидно, аппроксимирует $d_{\mathrm{fin}}\mathscr{V}$, которое, в свою очередь, аппроксимирует $\mathscr{U}$. Остается привлечь предложение 1.5.2. ▶

Замечание. Замена $d_{\mathrm{fin}}\mathscr{V}$ на $\mathrm{mix}_{\mathrm{fin}}\mathscr{V}$ в условии (2) последнего предложения может привести к неэквивалентному утверждению уже в случае $\mathscr{U} = E$. Действительно, совокупность $\mathscr{V}$ всех сходящихся к единице числовых последовательностей является аппроксимирующим подмножеством K-пространства $\mathscr{U}$ всех последовательностей, однако совпадающее с $\mathscr{V}$ множество $\mathrm{mix}_{\mathrm{fin}}\mathscr{V}$ имеет пустое пересечение с фундаментом $\mathscr{U}_0\subset\mathscr{U}$ всех последовательностей, сходящихся к нулю.

1.5.5. Лемма. *Если $\mathscr{V}$ — аппроксимирующее подмножество $\mathscr{U}$, $e\in E$ и $n\in\mathbb{N}$, то найдется такой элемент $w\in\mathrm{mix}\,\mathscr{V}$, что $\langle e\rangle|u-w|\leqslant e/n$.*

◀ Предположим, что $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ удовлетворяют условиям леммы, и рассмотрим произвольные элементы $u\in\mathscr{U}$, $e\in E$ и $n\in\mathbb{N}$. Согласно 1.5.4 найдется сеть $(v_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ элементов $\mathrm{mix}_{\mathrm{fin}}\mathscr{V}$, o-сходящаяся к u. Можно считать, что эта сеть порядково ограничена. В силу 1.3.3 (1) имеется такое разбиение единицы $(\pi_\alpha^n)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ в булевой алгебре $\mathrm{Pr}(E)$, что $\pi_\alpha^n\langle e\rangle|v_\alpha-u|\leqslant e/n$ при всех $\alpha\in\mathrm{A}$. Ясно, что сумма $w := o\text{-}\sum\limits_{\alpha\in\mathrm{A}}\pi_\alpha^n v_\alpha$ является искомым элементом $\mathrm{mix}\,\mathscr{V}$. ▶

1.5.6. Предположим, что в нормирующем K-пространстве РНП фиксирована порядковая единица 1. Тогда r-сходимость с регулятором 1 будет называться *равномерной сходимостью* в этом РНП. Аналогичным образом в таком РНП вводятся понятия *равномерной плотности* и *равномерного замыкания*.

Предложение. *Пусть $\mathscr{V}$ — подмножество, а u — элемент РНП над K-пространством с порядковой единицей. Множество $\mathscr{V}$ аппроксимирует u тогда и только тогда, когда u является равномерным пределом некоторой последовательности элементов $\mathrm{mix}\,\mathscr{V}$.*

◀ Необходимость является непосредственным следствием леммы 1.5.5, а достаточность устанавливается по той же схеме, что и в доказательстве предложения 1.5.3. ▶

1.5.7. Предложение. *Следующие свойства подмножества $\mathscr{V}$ d-полного РНП $\mathscr{U}$ над K-пространством с порядковой единицей эквивалентны:*

(1) *$\mathscr{V}$ — аппроксимирующее подмножество $\mathscr{U}$;*
(2) *для любого идеала $\mathscr{U}_0\subset\mathscr{U}$ множество $d\mathscr{V}\cap\mathscr{U}_0$ равномерно плотно в $\mathscr{U}_0$;*
(3) *множество $d\mathscr{V}$ равномерно плотно в $\mathscr{U}$;*
(4) *$d\mathscr{V}$ — аппроксимирующее подмножество $\mathscr{U}$.*

◀ Предположим, что РНП $\mathscr{U}$ над E удовлетворяет условиям предложения и 1 — порядковая единица в E. Импликации (2)⇒(3)⇒(4) очевидны, а импликация (4)⇒(1) устанавливается по той же схеме, что и в доказательстве предложения 1.5.4. Остается показать, что (1)⇒(2).

Предположим, что подмножество $\mathscr{V}\subset\mathscr{U}$ удовлетворяет условию (1), зафиксируем произвольный идеал $\mathscr{U}_0\subset\mathscr{U}$ и обозначим множество $d\mathscr{V}\cap\mathscr{U}_0$ через $\mathscr{W}$.

Покажем, что множество $\mathscr{W}$ аппроксимирует $\mathscr{U}_0$. Для этого мы зафиксируем произвольный элемент $u\in\mathscr{U}_0$, положим $e := \inf_{w\in\mathscr{W}}|u-w|$ и установим равенство $e=0$. Если $e\neq 0$, то в силу 1.5.6 найдутся $w\in\mathrm{mix}\,\mathscr{V}$ и $\pi\in\mathrm{Pr}(E)$ такие, что $\pi|u-w|<\pi e$. Очевидно, что $e\leqslant|u|$. Неравенства $|\pi w|\leqslant|\pi w-\pi u|+|\pi u|\leqslant e+|u|\leqslant 2|u|$ обеспечивают включение $\pi w\in\mathscr{W}$, и, таким образом, имеют место противоречивые соотношения $\pi e\leqslant\pi|u-\pi w|<\pi e$.

Поскольку $\mathscr{W}$ аппроксимирует $\mathscr{U}_0$, в силу 1.5.5 существует такая последовательность $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов $\mathrm{mix}\,\mathscr{W}$, что $\langle u\rangle|u-w_n|\leqslant(|u|\wedge 1)/n$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Ясно, что последовательность $(\langle u\rangle w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ составлена из элементов $\mathscr{W}$ и r-сходится к u с регулятором 1. ▶

Замечание. Замена $d\mathscr{V}$ на $\mathrm{mix}\,\mathscr{V}$ в условии (2) последнего предложения может привести к неэквивалентному утверждению уже в случае $\mathscr{U} = E$. Действительно, совокупность $\mathscr{V}$ всех числовых последовательностей, отличных от нуля в каждом члене, является аппроксимирующим подмножеством K-пространства $\mathscr{U}$ всех последовательностей, однако совпадающее с $\mathscr{V}$ множество $\mathrm{mix}\,\mathscr{V}$ имеет пустое пересечение с фундаментом $\mathscr{U}_0 \subset \mathscr{U}$ всех последовательностей, устанавливающихся на нуле.

1.5.8. *Предложение.* *Пусть $\mathscr{V}$ — подмножество, а u — элемент* РНП. *Множество $\mathscr{V}$ аппроксимирует u тогда и только тогда, когда u является r-пределом некоторой последовательности элементов $\mathrm{mix}\,\mathscr{V}$.*

◀ Достаточность. Предположим, что $\mathscr{V}$ аппроксимирует u. Рассмотрим произвольный элемент $v \in \mathscr{V}$ и положим $e := |u| \vee |v|$. Нам достаточно зафиксировать $n \in \mathbb{N}$ и найти элемент $w \in \mathrm{mix}\,\mathscr{V}$, удовлетворяющий неравенству $|u - w| \leqslant e/n$. Согласно лемме 1.5.5 существует элемент $w_0 \in \mathrm{mix}\,\mathscr{V}$, удовлетворяющий неравенству $\langle e\rangle|u - w_0| \leqslant e/n$. Ясно, что сумма $\langle e\rangle w_0 + \langle e\rangle^{\perp} v$ принадлежит $\mathrm{mix}\,\mathscr{V}$, совпадает с $\langle e\rangle w_0$ и тем самым является искомым элементом w.

Необходимость устанавливается так же, как и в предложении 1.5.3. ▶

1.5.9. *Предложение.* *Следующие свойства подмножества $\mathscr{V}$ d-полного* РНП *$\mathscr{U}$ эквивалентны:*

(1) *$\mathscr{V}$ — аппроксимирующее подмножество $\mathscr{U}$;*
(2) *для любого идеала $\mathscr{U}_0 \subset \mathscr{U}$ множество $d\mathscr{V} \cap \mathscr{U}_0$ r-плотно в $\mathscr{U}_0$.*
(3) *множество $d\mathscr{V}$ r-плотно в $\mathscr{U}$;*
(4) *$d\mathscr{V}$ — аппроксимирующее подмножество $\mathscr{U}$.*

◀ Импликации (2)⇒(3)⇒(4) очевидны, эквивалентность (4)⇔(1) установлена в предложении 1.5.7, а доказательство импликации (1)⇒(2) дословно повторяет доказательство аналогичной импликации в предложении 1.5.7 с единственным отличием: 1 следует заменить на $|u|$. ▶

Замечание. Замена $d\mathscr{V}$ на $\mathrm{mix}\,\mathscr{V}$ в условии (2) последнего предложения может привести к неэквивалентному утверждению. Соответствующий пример имеется в замечании 1.5.7.

1.5.10. *Лемма.* *Пусть $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ — сеть элементов K-пространства E и $e \in E$.*

(1) *Сеть $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ o-сходится к e тогда и только тогда, когда она асимптотически ограничена и в булевой алгебре $\mathrm{Pr}(E)$ имеет место соотношение $o\text{-}\lim_{\alpha\in\mathrm{A}}\langle d\rangle\langle|e_\alpha - e| > d\rangle = 0$ для всех положительных $d \in E$.*

(2) *Пусть D — множество положительных элементов E такое, что компонента $D^{\perp\perp}$ содержит e и все члены сети $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$. Если сеть $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ асимптотически ограничена и $o\text{-}\lim_{\alpha\in\mathrm{A}}\langle d\rangle\langle|e_\alpha - e| > d/n\rangle = 0$ для всех $d \in D$ и $n \in \mathbb{N}$, то $o\text{-}\lim\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} e_\alpha = e$.*

◀ (1) Проверка необходимости сформулированного критерия сходимости не представляет труда, а его достаточность вытекает из (2).

(2) Пусть индекс $\bar\alpha \in \mathrm{A}$ таков, что множество $\{e_\alpha : \alpha \geqslant \bar\alpha\}$ ограничено. Положим $e_0 := \inf_{\alpha\geqslant\bar\alpha}\sup_{\beta\geqslant\alpha}|e_\beta - e|$. Если сеть $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ не сходится к e, то $e_0 > 0$, и поэтому найдутся $\pi \in \mathrm{Pr}(E)$, $d \in D$ и $n \in \mathbb{N}$ такие, что $0 < \pi d/n < e_0$. Тогда для каждого индекса $\alpha \geqslant \bar\alpha$ имеем

$$\sup_{\beta\geqslant\alpha}\langle d\rangle\langle|e_\beta - e| > d/n\rangle = \langle d\rangle\Big\langle \sup_{\beta\geqslant\alpha}|e_\beta - e| > d/n\Big\rangle \geqslant \pi,$$

что противоречит сходимости $\langle d\rangle\langle|e_\alpha - e| > d/n\rangle$ к нулю. ▶

Следствие. *Пусть в K-пространстве E имеется порядковая единица 1, $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ — асимптотически ограниченная сеть элементов E и $e \in E$. Тогда $o\text{-}\lim\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} e_\alpha = e$ в том и только том случае, если в булевой алгебре $\mathrm{Pr}(E)$ имеет место соотношение $o\text{-}\lim\limits_{\alpha\in\mathrm{A}}\langle|e_\alpha - e| > 1/n\rangle = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

Условие асимптотической ограниченности, фигурирующее в сформулированных выше утверждениях, является существенным. Действительно, пусть сеть $(\pi_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ порядковых проекторов и элемент $e \in E$ таковы, что $o\text{-}\lim\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} \pi_\alpha = 0$ и $\pi_\alpha e \neq 0$ для всех $\alpha \in \mathrm{A}$. Снабдим произведение $\mathrm{A} \times \mathbb{N}$ лексикографическим порядком:

$$(\alpha, m) < (\beta, n) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < \beta \text{ или } (\alpha = \beta \text{ и } m < n).$$

Тогда $o\text{-}\lim\limits_{(\alpha,n)\in\mathrm{A}\times\mathbb{N}} \langle d\rangle\langle|n\pi_\alpha e| > d\rangle = 0$ для всех положительных $d \in E$, однако сеть $(n\pi_\alpha e)_{(\alpha,n)\in\mathrm{A}\times\mathbb{N}}$ не является асимптотически ограниченной и, следовательно, не имеет порядкового предела.

1.5.11. Несколько упростив доказательство леммы 1.5.10, можно получить следующее утверждение.

Лемма. *Пусть $(e_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство положительных элементов K-пространства E.*

(1) Равенство $\inf_{\xi\in\Xi} e_\xi = 0$ выполнено тогда и только тогда, когда в булевой алгебре $\mathrm{Pr}(E)$ имеет место соотношение $\inf_{\xi\in\Xi}\langle d\rangle\langle e_\xi > d\rangle = 0$ для всех положительных $d \in E$.

(2) Пусть D такое множество положительных элементов E, что $e_\xi \in D^{\perp\perp}$ для всех $\xi \in \Xi$. Если $\inf_{\xi\in\Xi}\langle d\rangle\langle e_\xi > d/n\rangle = 0$ для всех $d \in D$ и $n \in \mathbb{N}$, то $\inf_{\xi\in\Xi} e_\xi = 0$.

Следствие. *Пусть в K-пространстве E имеется порядковая единица 1 и $(e_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство положительных элементов E. Тогда $\inf_{\xi\in\Xi} e_\xi = 0$ в том и только том случае, если в булевой алгебре $\mathrm{Pr}(E)$ имеет место соотношение $\inf_{\xi\in\Xi}\langle e_\xi > 1/n\rangle = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

1.5.12. На протяжении оставшейся части параграфа E — K-пространство, B — полная булева алгебра и $h\colon \mathrm{Pr}(E) \to B$ — кольцевой гомоморфизм (см. 1.2.3). Будем говорить, что сеть $(\pi_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ элементов $\mathrm{Pr}(E)$ *h-сходится к нулю* (и писать $h\text{-}\lim_{\alpha\in\mathrm{A}} \pi_\alpha = 0$), если $o\text{-}\lim\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} \pi_\alpha = 0$ в булевой алгебре $\mathrm{Pr}(E)$ и $o\text{-}\lim\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} h(\pi_\alpha) = 0$ в булевой алгебре B. Если же $h\text{-}\lim\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} \pi_\alpha^\perp = 0$, т. е. $o\text{-}\lim\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} \pi_\alpha = 1$ и $o\text{-}\lim\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} h(\pi_\alpha) = h(1)$, то будем говорить, что сеть $(\pi_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ *h-сходится к единице*, и писать $h\text{-}\lim_{\alpha\in\mathrm{A}} \pi_\alpha = 1$. Будем говорить, что сеть $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ элементов E *h-сходится к $e \in E$* (и писать $h\text{-}\lim\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} e_\alpha = e$), если сеть $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ асимптотически ограничена и $h\text{-}\lim\limits_{\alpha\in\mathrm{A}}\langle d\rangle\langle|e_\alpha - e| > d\rangle = 0$ для всех положительных $d \in E$. Элемент e в этом случае будет называться *h-пределом* сети $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$. Будем говорить, что сеть $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ элементов РНП $\mathscr{U}$ *h-сходится к $u \in \mathscr{U}$* (и писать $h\text{-}\lim\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} u_\alpha = u$), если $h\text{-}\lim\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} |u_\alpha - u| = 0$. Элемент u в этом случае будет называться *h-пределом* сети $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$. Совокупность h-пределов всевозможных h-сходящихся сетей элементов подмножества $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$ будет называться *h-замыканием* множества $\mathscr{V}$. Множество назовем *h-замкнутым*, если оно совпадает со своим h-замыканием. Будем говорить, что множество *h-плотно в $\mathscr{U}$*, если его h-замыкание совпадает с $\mathscr{U}$.

Если семейство $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов $\mathrm{Pr}(E)$ таково, что $\inf_{\xi\in\Xi} \pi_\xi = 0$ в булевой алгебре $\mathrm{Pr}(E)$ и $\inf_{\xi\in\Xi} h(\pi_\xi) = 0$ в булевой алгебре B, то будем писать $h\text{-}\inf_{\xi\in\Xi} \pi_\xi = 0$. Если же $h\text{-}\inf_{\xi\in\Xi} \pi_\xi^\perp = 0$, т. е. $\sup_{\xi\in\Xi} \pi_\xi = 1$ и $\sup_{\xi\in\Xi} h(\pi_\xi) =$

$h(1)$, то будем писать $h\text{-sup}_{\xi\in\Xi}\pi_\xi = 1$. Для произвольного семейства $(e_\xi)_{\xi\in\Xi}$ положительных элементов K-пространства E запись $h\text{-inf}_{\xi\in\Xi} e_\xi = 0$ будет использоваться в том случае, если $h\text{-inf}_{\xi\in\Xi}\langle d\rangle\langle e_\xi > d\rangle = 0$ для всех положительных $d \in E$.

Замечание. Критерий o-сходимости, фигурирующий в следствии 1.5.10, не имеет аналога для h-сходимости. То же можно сказать и о следствии 1.5.11. Действительно, рассмотрим в качестве E K-пространство всех числовых последовательностей. Пусть булев гомоморфизм $h\colon \mathrm{Pr}(E) \to \{0,1\}$ является характеристической функцией некоторого неглавного ультрафильтра в булевой алгебре $\mathrm{Pr}(E)$. Обозначим через F множество всех положительных последовательностей, сходящихся к единице. Очевидно, последовательность $e = (m)_{m\in\mathbb{N}}$ является порядковой единицей в E и для всех $n \in \mathbb{N}$ имеет место соотношение $h\text{-inf}_{f\in F}\langle f > e/n\rangle = 0$. Более того, индексируя каждый элемент F самим собой и рассматривая на множестве индексов обратный поточечный порядок, мы получаем сеть $(f)_{f\in F}$, удовлетворяющую соотношению $h\text{-}\lim\limits_{f\in F}\langle f > e/n\rangle = 0$. Тем не менее $h\langle f > 1/2\rangle = 1$ для всех $f \in F$.

Предложение. (1) *Для любой сети $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ элементов E и произвольного элемента $e \in E$ из $h\text{-}\lim\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} e_\alpha = e$ следует $o\text{-}\lim\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} e_\alpha = e$. Если гомоморфизм h o-непрерывен, то соотношения $h\text{-}\lim\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} e_\alpha = e$ и $o\text{-}\lim\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} e_\alpha = e$ равносильны.*

(2) *Для любого семейства $(e_\xi)_{\xi\in\Xi}$ положительных элементов E из равенства $h\text{-inf}_{\xi\in\Xi} e_\xi = 0$ следует $\inf_{\xi\in\Xi} e_\xi = 0$. Если гомоморфизм h o-непрерывен, то соотношения $h\text{-inf}_{\xi\in\Xi} e_\xi = 0$ и $\inf_{\xi\in\Xi} e_\xi = 0$ равносильны.*

◄ Прямое следствие лемм 1.5.10 и 1.5.11. ►

1.5.13. Замечание. Устанавливая равенства вида

$$\lim_{\alpha\in\mathrm{A}} h(\langle d\rangle\langle e_\alpha > d\rangle) = 0 \quad \text{или} \quad \inf_{\xi\in\Xi} h(\langle d\rangle\langle e_\xi > d\rangle) = 0,$$

мы часто будем предполагать, что $h\langle d\rangle = 1$. Это предположение не нарушает общности, поскольку, оставив без рассмотрения тривиальный случай $h\langle d\rangle = 0$ и заменив B булевой алгеброй $\{b \in B : b \leqslant h\langle d\rangle\}$, мы оказываемся в ситуации $h\langle d\rangle = 1$.

1.5.14. Пусть $\mathscr{V}$ — подмножество РНП $\mathscr{U}$, а u — элемент $\mathscr{U}$. Если

$$h\text{-}\inf_{v\in\mathscr{V}} |u - v| = 0,$$

то мы говорим, что множество $\mathscr{V}$ *h-аппроксимирует элемент u*. Будем говорить, что $\mathscr{V}$ *h-аппроксимирует множество $\mathscr{W}$* $\subset \mathscr{U}$, если $\mathscr{V}$ h-аппроксимирует каждый элемент $\mathscr{W}$. Подмножество РНП $\mathscr{U}$ назовем *h-аппроксимирующим*, если оно h-аппроксимирует $\mathscr{U}$. Из предложения 1.5.12 следует, что всякое h-аппроксимирующее множество является аппроксимирующим, а в случае o-непрерывного гомоморфизма h понятия аппроксимирующего и h-аппроксимирующего множества совпадают.

Предложение. *Пусть X, Y и Z — подмножества РНП. Если X h-аппроксимирует Y, а Y h-аппроксимирует Z, то X h-аппроксимирует Z.*

◄ Рассмотрим произвольный элемент $z \in Z$, зафиксируем положительный элемент d нормирующей решетки и положим

$$b := \inf_{x\in X} h(\langle d\rangle\langle |x - z| > d\rangle).$$

Благодаря 1.5.2 достаточно установить равенство $b = 0$. Для простоты будем считать, что $h\langle d\rangle = 1$ (см. 1.5.13). Допустим, вопреки доказываемому, что $b \neq 0$. Тогда в силу равенства $\inf_{y\in Y} h\langle|y-z| > d/2\rangle = 0$ найдется такой элемент $y \in Y$, что $b_0 := b \wedge h\langle|y-z| > d/2\rangle < b$. Аналогично в силу равенства $\inf_{x\in X} h\langle|x-y| > d/2\rangle = 0$ найдется такой элемент $x \in X$, что $(b\backslash b_0) \wedge h\langle|x-y| > d/2\rangle < (b\backslash b_0)$. Несложно убедиться в том, что x удовлетворяет неравенству $b \wedge h\langle|x-z| > d\rangle < b$, которое противоречит определению b. ▶

1.5.15. Предложение. *Пусть $\mathscr{V}$ — подмножество, а u — элемент РНП. Множество $\mathscr{V}$ h-аппроксимирует u тогда и только тогда, когда u является h-пределом некоторой сети элементов $\operatorname{mix_{fin}}\mathscr{V}$.*

◀ Необходимость. Если $\mathscr{V}$ h-аппроксимирует u, то согласно 1.5.1 существует такая сеть $(w_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ элементов $\operatorname{mix_{fin}}\mathscr{V}$, что сеть $(|u-w_\alpha|)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ убывает и $\{|u-w_\alpha| : \alpha\in\mathrm{A}\} = \{|u-w| : w \in \operatorname{mix_{fin}}\mathscr{V}\}$. Остается заметить, что $h\text{-}\lim\limits_{\alpha\in\mathrm{A}}|u-w_\alpha| = 0$.

Достаточность. Если u является h-пределом сети элементов $\operatorname{mix_{fin}}\mathscr{V}$, то $\operatorname{mix_{fin}}\mathscr{V}$ h-аппроксимирует u. Остается заметить, что $\mathscr{V}$ h-аппроксимирует $\operatorname{mix_{fin}}\mathscr{V}$, и воспользоваться предложением 1.5.14. ▶

Следствие. *Если подмножество $\mathscr{V}$ РНП $\mathscr{U}$ конечно-циклично, то его h-замыкание состоит из всех элементов $u \in \mathscr{U}$, h-аппроксимируемых множеством $\mathscr{V}$.*

Следствие. *Если подмножество $\mathscr{V}$ РНП $\mathscr{U}$ конечно-циклично, то его h-замыкание h-замкнуто и, следовательно, является наименьшим h-замкнутым подмножеством $\mathscr{U}$, содержащим $\mathscr{V}$.*

◀ Вытекает из предыдущего следствия и предложения 1.5.14. ▶

1.5.16. Предложение. *Пусть $\mathscr{V}$ — подмножество РНП $\mathscr{U}$, удовлетворяющее условию $h\text{-}\inf_{v\in\mathscr{V}}|v| = 0$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *$\mathscr{V}$ — h-аппроксимирующее подмножество $\mathscr{U}$;*
(2) *для любого идеала $\mathscr{U}_0 \subset \mathscr{U}$ множество $d_{\mathrm{fin}}\mathscr{V} \cap \mathscr{U}_0$ h-плотно в $\mathscr{U}_0$;*
(3) *множество $d_{\mathrm{fin}}\mathscr{V}$ h-плотно в $\mathscr{U}$;*
(4) *$d_{\mathrm{fin}}\mathscr{V}$ — h-аппроксимирующее подмножество $\mathscr{U}$.*

◀ Импликации (2)⇒(3)⇒(4) очевидны.

(1)⇒(2). Предположим, что подмножество $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$ удовлетворяет условию (1). Зафиксируем произвольный идеал $\mathscr{U}_0 \subset \mathscr{U}$ и обозначим множество $d_{\mathrm{fin}}\mathscr{V} \cap \mathscr{U}_0$ через $\mathscr{W}$. Рассмотрим произвольный элемент $u \in \mathscr{U}_0$. Согласно предложению 1.5.15 имеется h-сходящаяся к u сеть $(w_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ элементов $\operatorname{mix_{fin}}\mathscr{V}$. Для каждого $\alpha\in\mathrm{A}$ положим $\pi_\alpha := \langle|u-w_\alpha| \leqslant |u|\rangle$. Соотношения

$$\begin{aligned}|\pi_\alpha w_\alpha| &\leqslant |u| + |u-\pi_\alpha w_\alpha|\\ &= |u| + (\pi_\alpha|u-w_\alpha| + \pi_\alpha^\perp|u|)\\ &\leqslant |u| + (\pi_\alpha|u| + \pi_\alpha^\perp|u|)\\ &= 2|u|\end{aligned}$$

показывают, что сеть $(\pi_\alpha w_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ составлена из элементов $\mathscr{W}$, а соотношения

$$\begin{aligned}|u-\pi_\alpha w_\alpha| &= \pi_\alpha|u-w_\alpha| + \pi_\alpha^\perp|u|\\ &\leqslant \pi_\alpha|u-w_\alpha| + \pi_\alpha^\perp|u-w_\alpha|\\ &= |u-w_\alpha|\end{aligned}$$

с учетом $h\text{-}\lim\limits_{\alpha\in\mathrm{A}}|u-w_\alpha| = 0$ дают $h\text{-}\lim\limits_{\alpha\in\mathrm{A}}|u-\pi_\alpha w_\alpha| = 0$.

(4)⇒(1). Из соотношения $h\text{-}\inf_{v\in\mathscr{V}}|v| = 0$ следует, что $\mathscr{V}$ h-аппроксимирует $\mathscr{V}\cup\{0\}$. Множество же $\mathscr{V}\cup\{0\}$, очевидно, h-аппроксимирует $d_{\mathrm{fin}}\mathscr{V}$, которое, в свою очередь, h-аппроксимирует $\mathscr{U}$. Остается привлечь предложение 1.5.14. ▶

1.5.17. Различие между формулировками предложений 1.5.4 и 1.5.16 является принципиальным: условие $h\text{-}\inf_{v\in\mathscr{V}}|v| = 0$ в последнем предложении не может быть опущено. Действительно, рассмотрим K-пространство E всех числовых последовательностей и положим $\mathscr{U} := \{u \in E : \inf(\mathrm{Lim}|u|\setminus\{0\}) > 0\}$, где $\mathrm{Lim}|u|$ — множество частичных пределов последовательности $|u|$. Превратим $\mathscr{U}$ в РНП над E, положив $|u| := |u|$ для всех $u \in \mathscr{U}$. Пусть, как и в замечании 1.5.12, булев гомоморфизм $h\colon \mathrm{Pr}(E) \to \{0,1\}$ является характеристической функцией некоторого неглавного ультрафильтра в булевой алгебре $\mathrm{Pr}(E)$. Рассмотрим в качестве $\mathscr{V}$ множество $\{u \in E : \inf \mathrm{Lim}|u| > 0\}$ и положим $d := (1/n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ясно, что $d_{\mathrm{fin}}\mathscr{V} = \mathscr{U}$, но тем не менее $h\langle|v| > d\rangle = 1$ для всех $v \in \mathscr{V}$.

Предложение. *Пусть $\mathscr{U}$ — РНП над E. Предположим, что для каждого положительного $e \in E$ имеется элемент $u \in \mathscr{U}$, удовлетворяющий неравенствам $e \leqslant |u| \leqslant 2e$* (это выполнено, например, в случае o-полноты $\mathscr{U}$ — см. 1.4.3). *Тогда условие $h\text{-}\inf_{v\in\mathscr{V}}|v| = 0$ в предложении 1.5.16 может быть опущено.*

◀ Рассмотрим произвольное подмножество $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$, обозначим $d_{\mathrm{fin}}\mathscr{V}$ через $\mathscr{W}$, предположим, что $\mathscr{W}$ h-аппроксимирует $\mathscr{U}$, и установим соотношение $h\text{-}\inf_{v\in\mathscr{V}}|v| = 0$. Благодаря 1.5.4((4)$\Rightarrow$(1)) достаточно зафиксировать произвольный положительный элемент $d \in E$ и показать, что $\inf_{v\in\mathscr{V}} h(\langle d\rangle\langle|v| > d\rangle) = 0$. Будем считать, что $h\langle d\rangle = 1$ (см. 1.5.13). Обозначим $\inf_{v\in\mathscr{V}} h\langle|v| > d\rangle$ через b и допустим, вопреки доказываемому, что $b \neq 0$. Рассмотрим произвольный элемент $u \in \mathscr{U}$, удовлетворяющий неравенствам $d/4 \leqslant |u| \leqslant d/2$. В силу равенства $\inf_{w\in\mathscr{W}} h\langle|u - w| > d/5\rangle = 0$ имеется такой элемент $w = \pi_1 v_1 + \dots + \pi_n v_n \in \mathscr{W}$ ($v_i \in \mathscr{V}$), что $b \wedge h\langle|u - w| > d/5\rangle < b$. Используя равенство

$$\begin{aligned}&\langle|u - w| > d/5\rangle\\ &\quad= \pi_1\langle|u - v_1| > d/5\rangle \vee \dots \vee \pi_n\langle|u - v_n| > d/5\rangle \vee (\pi_1 \vee \dots \vee \pi_n)^{\perp}\langle d\rangle,\end{aligned}$$

несложно убедиться в том, что $b \wedge h\langle|u - v_i| > d/5\rangle < b$ по крайней мере для одного индекса $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда, привлекая соотношения

$$\langle|v_i| > d\rangle \leqslant \langle|u - v_i| + |u| > d\rangle \leqslant \langle|u - v_i| > d/2\rangle \leqslant \langle|u - v_i| > d/5\rangle,$$

приходим к неравенству $b \wedge h\langle|v_i| > d\rangle < b$, которое противоречит определению b. ▶

1.5.18. Дизъюнктное семейство $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов булевой алгебры $\mathrm{Pr}(E)$ назовем ***h-разбиением единицы***, если $h\text{-}\sup_{\xi\in\Xi} \pi_\xi = 1$. Если $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — произвольное семейство элементов РНП $\mathscr{U}$ над E, а $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — h-разбиение единицы в $\mathrm{Pr}(E)$, то сумму $o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} \pi_\xi u_\xi$ (если таковая существует) будем называть ***h-перемешиванием*** семейства $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ относительно $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$. Для произвольного подмножества $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$ совокупность всевозможных h-перемешиваний любых (счетных) семейств элементов $\mathscr{V}$ будет называться ***h-циклической оболочкой*** (соответственно ***счетно h-циклической оболочкой***) множества $\mathscr{V}$ и обозначаться символом $h\text{-}\mathrm{mix}\,\mathscr{V}$ (соответственно $h\text{-}\mathrm{mix}_\sigma \mathscr{V}$). Множество $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$ назовем ***h-цикличным***, если оно совпадает со своей h-циклической оболочкой. Легко проверить, что h-циклическая оболочка $\mathscr{V}$ представляет собой наименьшее h-цикличное множество, содержащее $\mathscr{V}$.

1.5.19. Замечание. Мы ограничимся описанием h-аппроксимирующих множеств, данным в предложениях 1.5.16 и 1.5.15. Автору не удалось использовать понятие h-циклической оболочки для установления работоспособных критериев h-аппроксимации, аналогичных приведенным в 1.5.6–1.5.9.

§ 1.6. Порядково ограниченные операторы

Порядково ограниченные операторы (а в особенности регулярные и мажорируемые операторы) играют важную роль в приложениях теории РНП к функциональным уравнениям различного рода. Основные идеи, связанные с этими понятиями, были сформированы Л. В. Канторовичем в 1935–1936 гг. Современное развитие теории порядково ограниченных операторов, как и развитие самой теории РНП, главным образом, связано с исследованиями, проводимыми А. Г. Кусраевым и его школой. Информацию о современном состоянии теории операторов, действующих в РНП, можно найти в работах [5, 18, 19, 23], а также в статье А. Г. Кусраева, опубликованной в этом сборнике.

Здесь мы вводим и обсуждаем несколько типов порядковой ограниченности операторов, действующих в РНП. Основная часть параграфа отведена описанию вводимых понятий с различных точек зрения и поиску примеров, уточняющих взаимосвязи между ними. Говоря о порядково ограниченных операторах, мы отходим от принятого в § 1.4 соглашения и рассматриваем не только разложимые РНП над K-пространствами, но и произвольные РНП над произвольными векторными решетками. Это делается не столько ради общности, сколько во избежание повторения одних и тех же формулировок как для РНП, так и для векторных решеток. Действительно, каждая векторная решетка в паре с функцией модуля $|\cdot|$ представляет собой РНП над самой собой. Таким образом, определение или утверждение, сформулированное для РНП, может быть формально перенесено на случай векторных решеток. Отметим, что векторная решетка, рассматриваемая как РНП, является o-полной (т. е. представляет собой ПБК) тогда и только тогда, когда она является K-пространством.

1.6.1. Пусть $\mathscr{U}$ — РНП над векторной решеткой E. Сеть $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ элементов $\mathscr{U}$ называется *асимптотически ограниченной*, если этим свойством обладает сеть $(|u_\alpha|)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ (см. 1.3.1), т. е. если существует такой индекс $\bar\alpha\in\mathrm{A}$, что множество $\{|u_\alpha| : \alpha\geqslant\bar\alpha\}$ порядково ограничено в E.

(а) Будем говорить, что подмножество $\mathscr{W}\subset\mathscr{U}$ *r-аннулируемо* (*o-аннулируемо*, *ограничиваемо*), если для любой сети $(w_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ элементов $\mathscr{W}$ и сходящейся к нулю числовой сети $(\varepsilon_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ сеть $(\varepsilon_\alpha w_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ r-сходится к нулю (o-сходится к нулю, асимптотически ограничена).

(б) Будем говорить, что подмножество $\mathscr{W}\subset\mathscr{U}$ *счетно r-аннулируемо* (*счетно o-аннулируемо*, *счетно ограничиваемо*), если для любой счетной сети $(w_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ элементов $\mathscr{W}$ и сходящейся к нулю числовой сети $(\varepsilon_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ сеть $(\varepsilon_\alpha w_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ r-сходится к нулю (o-сходится к нулю, асимптотически ограничена).

(в) Будем говорить, что подмножество $\mathscr{W}\subset\mathscr{U}$ *секвенциально r-аннулируемо* (*секвенциально o-аннулируемо*, *секвенциально ограничиваемо*), если для любой последовательности $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов $\mathscr{W}$ и сходящейся к нулю числовой последовательности $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ последовательность $(\varepsilon_n w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ r-сходится к нулю (o-сходится к нулю, ограничена).

(г) Будем говорить, что подмножество $\mathscr{W}\subset\mathscr{U}$ *полуограничено* (*счетно полуограничено*, *секвенциально полуограничено*), если для любой сети (счетной сети, последовательности) $(w_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ элементов $\mathscr{W}$ и сходящейся к нулю числовой сети $(\varepsilon_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ имеет место соотношение $\inf_{\alpha\in\mathrm{A}}|\varepsilon_\alpha w_\alpha| = 0$ в векторной решетке E.

Теорема. *Пусть $\mathscr{U}$ — РНП над векторной решеткой E и $\mathscr{W}$ — подмножество $\mathscr{U}$.*

(а) *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *множество $\mathscr{W}$ r-аннулируемо;*

(2) *множество $\mathscr{W}$ o-аннулируемо;*

(3) *множество $\mathscr{W}$ ограничиваемо;*

(4) *множество $\{|w| : w\in\mathscr{W}\}$ порядково ограничено в E.*

(б) *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *множество $\mathscr{W}$ счетно r-аннулируемо;*

(2) *множество $\mathscr{W}$ счетно o-аннулируемо;*

(3) *множество $\mathscr{W}$ счетно ограничиваемо;*

(4) *для любого счетного подмножества $\mathscr{W}_0 \subset \mathscr{W}$ множество $\{|w| : w \in \mathscr{W}_0\}$ порядково ограничено в E.*

(в) *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *множество $\mathscr{W}$ секвенциально r-аннулируемо;*

(2) *множество $\mathscr{W}$ секвенциально o-аннулируемо;*

(3) *множество $\mathscr{W}$ секвенциально ограничиваемо.*

(г) *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *множество $\mathscr{W}$ полуограничено;*

(2) *множество $\mathscr{W}$ счетно полуограничено;*

(3) *множество $\mathscr{W}$ секвенциально полуограничено;*

(4) $\inf_{n\in\mathbb{N}}|w_n|/n = 0$ *для любой последовательности* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *элементов* $\mathscr{W}$.

◀ (а) Импликации (4)⇒(1)⇒(2)⇒(3) очевидны. Покажем, что (3)⇒(4). Упорядочим декартово произведение $\mathscr{W} \times \mathbb{N}$ по второй компоненте:

$$(w_1, n_1) < (w_2, n_2) \quad \Longleftrightarrow \quad n_1 < n_2.$$

Применив утверждение (3) к сетям $(w)_{(w,n)\in\mathscr{W}\times\mathbb{N}}$ и $(1/n)_{(w,n)\in\mathscr{W}\times\mathbb{N}}$, мы получим пару $(\overline{w}, \bar{n}) \in \mathscr{W} \times \mathbb{N}$ и элемент $e \in E$ такие, что $|w/n| \leqslant e$ для всех $(w,n) \geqslant (\overline{w}, \bar{n})$. В частности, $|w/(\bar{n}+1)| \leqslant e$ для всех $w \in \mathscr{W}$, откуда следует, что множество $\{|w| : w \in \mathscr{W}\}$ ограничено сверху элементом $(\bar{n}+1)e$.

(б) Устанавливается в точности так же, как и (а).

(в) Импликации (1)⇒(2)⇒(3) очевидны. Покажем, что (3)⇒(1). Зафиксируем произвольные последовательность $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов $\mathscr{W}$ и сходящуюся к нулю числовую последовательность $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$. В силу (3) множество $\{||\varepsilon_n|^{1/2}w_n| : n \in \mathbb{N}\}$ имеет некоторую верхнюю границу $e \in E$. Для доказательства утверждения (1) осталось заметить, что $|\varepsilon_n w_n| \leqslant |\varepsilon_n|^{1/2}e$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

(г) Импликации (1)⇒(2)⇒(3)⇒(4) очевидны. Покажем, что (4)⇒(1). Зафиксируем произвольные сеть $(w_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ элементов $\mathscr{W}$ и сходящуюся к нулю числовую сеть $(\varepsilon_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$. Для каждого натурального $n \in \mathbb{N}$ выберем такой индекс $\alpha(n) \in \mathrm{A}$, что $\varepsilon_{\alpha(n)} \leqslant 1/n$. Тогда, используя (4), мы имеем $\inf_{\alpha\in\mathrm{A}}|\varepsilon_\alpha w_\alpha| \leqslant \inf_{n\in\mathbb{N}}|\varepsilon_{\alpha(n)}w_{\alpha(n)}| = 0$. ▶

Подмножество $\mathscr{W} \subset \mathscr{U}$, удовлетворяющее условиям, перечисленным в частях (а), (б) и (в) последней теоремы, будет называться соответственно *ограниченным, счетно ограниченным* и *секвенциально ограниченным.*

1.6.2. Очевидно, всякое ограниченное множество является счетно ограниченным, счетно ограниченное — секвенциально ограниченным, а секвенциально ограниченное — полуограниченным. Заметим, что рассмотренные четыре типа ограниченности попарно различны уже в ситуации $\mathscr{U} = E$. Действительно, в K-пространстве функций $e: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ со счетными носителями $e^{-1}[\mathbb{R}\backslash\{0\}]$ множество $\{e_t : t \in \mathbb{R}\}$ характеристических функций одноэлементных подмножеств $\{t\} \subset \mathbb{R}$ является счетно ограниченным, но не ограниченным. Множество $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ характеристических функций подмножеств $\{n\} \subset \mathbb{N}$ является секвенциально ограниченным, но не счетно ограниченным подмножеством K-пространства сходящихся к нулю числовых последовательностей.

Приведем пример полуограниченного, но не секвенциально ограниченного подмножества в K-пространстве $M([0,1])$ классов вещественных измеримых по

Лебегу функций на отрезке $[0,1]$. Для этого мы построим семейство отрезков I_m^n $(n \in \mathbb{N}, m \in \{1,2,\dots,2^n\})$ следующим образом:

$$I_1^1 := [0/2,\ 1/2],\ \ I_2^1 := [1/2,\ 2/2];$$
$$I_1^2 := [0/4,\ 1/4],\ \ I_2^2 := [1/4,\ 2/4],\ \ I_3^2 := [2/4,\ 3/4],\ \ I_4^2 := [3/4,\ 4/4];$$
$$\dots$$
$$I_1^n := [0,\ 1/2^{-n}],\ \ I_2^n := [1/2^{-n},\ 2/2^{-n}],\ \dots,\ I_{2^n}^n := [1-1/2^{-n},\ 1];$$
$$\dots$$

— и обозначим через $\mathbf{f}_m^n$ класс из $M([0,1])$, содержащий характеристическую функцию отрезка I_m^n. Тогда множество $\{2^n\mathbf{f}_m^n : n \in \mathbb{N},\ m \in \{1,2,\dots,2^n\}\}$ является искомым.

1.6.3. Теорема. *Пусть $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ — РНП над векторными решетками E и F соответственно и T — линейный оператор из $\mathscr{U}$ в $\mathscr{V}$.*

(а) *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *оператор T r-непрерывен;*

(2) *оператор T r-o-непрерывен;*

(3) *если сеть $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ элементов $\mathscr{U}$ r-сходится к нулю, то сеть $(Tu_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ асимптотически ограничена;*

(4) *оператор T переводит ограниченные подмножества $\mathscr{U}$ в ограниченные подмножества $\mathscr{V}$;*

(5) *для любого положительного элемента $e \in E$ множество $\{|Tu| : |u| \leqslant e\}$ ограничено в F.*

(б) *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *оператор T счетно r-непрерывен;*

(2) *оператор T счетно r-o-непрерывен;*

(3) *если счетная сеть $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ элементов $\mathscr{U}$ r-сходится к нулю, то сеть $(Tu_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ асимптотически ограничена;*

(4) *оператор T переводит счетно ограниченные подмножества $\mathscr{U}$ в счетно ограниченные подмножества $\mathscr{V}$;*

(5) *оператор T переводит ограниченные подмножества $\mathscr{U}$ в счетно ограниченные подмножества $\mathscr{V}$;*

(6) *оператор T переводит ограниченные счетные подмножества $\mathscr{U}$ в ограниченные подмножества $\mathscr{V}$.*

(в) *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *оператор T секвенциально r-непрерывен;*

(2) *оператор T секвенциально r-o-непрерывен;*

(3) *если последовательность $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов $\mathscr{U}$ r-сходится к нулю, то последовательность $(Tu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ограничена;*

(4) *оператор T переводит секвенциально ограниченные подмножества $\mathscr{U}$ в секвенциально ограниченные подмножества $\mathscr{V}$;*

(5) *оператор T переводит ограниченные подмножества $\mathscr{U}$ в секвенциально ограниченные подмножества $\mathscr{V}$.*

(г) *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *если сеть $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ элементов $\mathscr{U}$ r-сходится к нулю, то $\inf_{\alpha\in\mathrm{A}}|Tu_\alpha| = 0$;*

(2) *если счетная сеть $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ элементов $\mathscr{U}$ r-сходится к нулю, то $\inf_{\alpha\in\mathrm{A}}|Tu_\alpha| = 0$;*

(3) *если последовательность $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов $\mathscr{U}$ r-сходится к нулю, то $\inf_{n\in\mathbb{N}}|Tu_n| = 0$;*

(4) *оператор T переводит полуограниченные подмножества $\mathscr{U}$ в полуограниченные подмножества $\mathscr{V}$;*

(5) *оператор T переводит ограниченные подмножества $\mathscr{U}$ в полуограниченные подмножества $\mathscr{V}$.*

◀ (а) Импликации (1)⇒(2)⇒(3) и (4)⇒(5) очевидны. Используя ограничиваемость в качестве критерия ограниченности (см. 1.6.1 (а)), можно без труда вывести (4) из (3). Остается показать, что (5)⇒(1). Предположим, что оператор T удовлетворяет условию (5), и для каждого положительного элемента $e \in E$ обозначим через f_e какую-нибудь верхнюю границу множества $\{|Tu| : |u| \leqslant e\}$ в решетке F. Пусть $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ — произвольная сеть элементов $\mathscr{U}$, r-сходящаяся к нулю с регулятором $e \in E$. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$ и выберем индекс $\bar{\alpha} \in A$ так, чтобы $|u_\alpha| \leqslant \varepsilon e$ для всех $\alpha \geqslant \bar{\alpha}$. Тогда для всех $\alpha \geqslant \bar{\alpha}$ мы имеем $|Tu_\alpha| = \varepsilon|Tu_\alpha/\varepsilon| \leqslant \varepsilon f_e$.

(б) Импликации (1)⇒(2)⇒(3) и (4)⇒(5)⇒(6) очевидны. Используя счетную ограничиваемость в качестве критерия счетной ограниченности (см. 1.6.1 (б)), можно без труда вывести (4) из (3). Остается показать, что (6)⇒(1). Предположим, что оператор T удовлетворяет условию (6). Пусть $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ — произвольная счетная сеть элементов $\mathscr{U}$, r-сходящаяся к нулю с регулятором $e \in E$. Для каждого натурального n обозначим через α_n такой элемент A, что $|u_\alpha| \leqslant e/n$ для всех $\alpha \geqslant \alpha_n$. Множество $\mathscr{U}_0 := \{nu_\alpha : n \in \mathbb{N},\ \alpha \in \mathrm{A},\ \alpha \geqslant \alpha_n\}$ является счетным и ограниченным, следовательно, найдется такой элемент $f \in F$, что $|Tu| \leqslant f$ для всех $u \in \mathscr{U}_0$. Тогда $|Tu_\alpha| = |Tnu_\alpha|/n \leqslant f/n$ для всех $\alpha \geqslant \alpha_n$.

(в) Импликации (1)⇒(2)⇒(3) и (4)⇒(5) очевидны. Используя секвенциальную ограничиваемость в качестве критерия секвенциальной ограниченности (см. 1.6.1 (в)), можно без труда вывести (4) из (3). Остается показать, что (5)⇒(1). Пусть $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — произвольная последовательность элементов $\mathscr{U}$, r-сходящаяся к нулю с регулятором $e \in E$. Тогда существует такая сходящаяся к нулю последовательность чисел $\varepsilon_n > 0$, что $|u_n| \leqslant \varepsilon_n e$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Ограниченность множества $\{u_n/\varepsilon_n : n \in \mathbb{N}\}$ и условие (5) позволяют заключить, что множество $\{Tu_n/\varepsilon_n : n \in \mathbb{N}\}$ секвенциально r-аннулируемо и, следовательно, последовательность $(Tu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ r-сходится к нулю.

(г) Импликации (1)⇒(2)⇒(3)⇒(4) очевидны. Покажем, что (4)⇒(1). Пусть $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ — произвольная сеть элементов $\mathscr{U}$, r-сходящаяся к нулю с регулятором $e \in E$. Тогда для любого натурального $n \in \mathbb{N}$ существует такой индекс $\alpha(n) \in \mathrm{A}$, что $|u_{\alpha(n)}| \leqslant e/n$. Ограниченность множества $\{nu_{\alpha(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ и условие (4) позволяют заключить, что множество $\{Tnu_{\alpha(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ полуограничено и, следовательно, $\inf_{\alpha \in \mathrm{A}}|Tu_\alpha| \leqslant \inf_{n \in \mathbb{N}}|Tu_{\alpha(n)}| = \inf_{n \in \mathbb{N}}|Tnu_{\alpha(n)}|/n = 0$ (см. 1.6.1 (г)). ▶

Оператор $T\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$, удовлетворяющий условиям, перечисленным в частях (а), (б), (в) и (г) последней теоремы, будет называться соответственно *ограничным*, *счетно ограниченным*, *секвенциально ограниченным* и *полуограниченным*. Очевидно, всякий ограниченный оператор является счетно ограниченным, счетно ограниченный — секвенциально ограниченным, а секвенциально ограниченный — полуограниченным. Значительную часть этого параграфа мы посвятим поиску примеров, показывающих, что рассмотренные четыре типа ограниченности операторов попарно различны. Операторы, фигурирующие в каждом из приводимых ниже примеров, действуют из банаховых пространств в K-пространства.

1.6.4. Пример. Существуют банахово пространство X, расширенное K-пространство F и оператор $T\colon X \to F$, являющийся счетно ограниченным, но не ограниченным.

Последовательность $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ счетных ординалов α_n назовем *финитной*, если найдется такой индекс $n \in \mathbb{N}$, что $\alpha_n \neq 0$ и $\alpha_m = 0$ для всех $m > n$. В этом случае число n будет называться размерностью последовательности α и обозначаться символом $\dim(\alpha)$. Обозначим множество всех финитных последовательностей счетных ординалов через A и снабдим его лексикографическим порядком, положив $\alpha < \beta$ в том и только том случае, если для некоторого $n \in \mathbb{N}$ выполняется $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_{n-1} = \beta_{n-1}$ и $\alpha_n < \beta_n$. Для любых $\alpha, \beta \in A$ символом $]\alpha, \beta[$ будем обозначать открытый интервал $\{\gamma \in A : \alpha < \gamma < \beta\}$.

Для каждой последовательности $\alpha \in A$ положим

$$\alpha + 1 := (\alpha_1, \dots, \alpha_{\dim(\alpha)-1},\ \alpha_{\dim(\alpha)} + 1,\ 0, 0, \dots).$$

Пусть $\alpha, \beta \in A$. Будем говорить, что α является *осколком* β и писать $\alpha \sqsubset \beta$, если $\alpha = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\dim(\alpha)}, 0, 0, \dots)$.

Лемма 1. *Для любых $\alpha, \beta \in A$ эквивалентны следующие соотношения:*

(1) $]\alpha, \alpha+1[\cap]\beta, \beta+1[\neq \varnothing$;
(2) $]\alpha, \alpha+1[\subset]\beta, \beta+1[$ *или* $]\alpha, \alpha+1[\supset]\beta, \beta+1[$;
(3) $\alpha \sqsubset \beta$ *или* $\beta \sqsubset \alpha$.

◀ Если $\dim(\alpha) = \dim(\beta)$, то доказываемое утверждение очевидно. Предположим для определенности, что $\dim(\alpha) < \dim(\beta)$. Если $\alpha < (\beta_1, \dots, \beta_{\dim(\alpha)}, 0, 0, \dots)$, то $\alpha + 1 < \beta$, а если $\alpha > (\beta_1, \dots, \beta_{\dim(\alpha)}, 0, 0, \dots)$, то $\alpha > \beta + 1$. В обоих случаях интервалы $]\alpha, \alpha+1[$ и $]\beta, \beta+1[$ не пересекаются. ▶

Снабдим множество A порядковой топологией с базой открытых множеств $\{]\alpha, \beta[\ :\ \alpha, \beta \in A\}$. Обозначим через Q стоуновский компакт полной булевой алгебры $\mathrm{Rop}(A)$ регулярных открытых подмножеств A (см. 1.2.9). Пусть $U \mapsto \widehat{U}$ — изоморфизм $\mathrm{Rop}(A)$ на булеву алгебру $\mathrm{Clop}(Q)$ открыто-замкнутых подмножеств Q (см. 1.2.8). Заметим, что $\mathrm{Rop}(A)$ содержит все интервалы $]\alpha, \beta[$ $(\alpha, \beta \in A)$. Для каждой последовательности $\alpha \in A$ положим $Q_\alpha :=]\alpha, \alpha+1[^{\wedge} \in \mathrm{Clop}(Q)$ и обозначим характеристическую функцию подмножества $Q_\alpha \subset Q$ символом χ_α. Таким образом, $\chi_\alpha \in C(Q)$.

Лемма 2. *Для любого непустого открытого множества $U \subset A$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется такая последовательность $\alpha \in A$, что $\dim(\alpha) > n$ и $]\alpha, \alpha+1[\subset U$.*

◀ По определению порядковой топологии множество U содержит некоторый интервал $]\alpha, \beta[$, $\alpha < \beta$. Положим $m := \min\{i \in \mathbb{N} : \alpha_i < \beta_i\}$ и $k := \max\{m, n\}$. Тогда последовательность $(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}+1, 0, 0, \dots)$ искомая. ▶

Лемма 3. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ в булевой алгебре $\mathrm{Rop}(A)$ имеет место соотношение* $\sup\{]\alpha, \alpha+1[\ : \alpha \in A,\ \dim(\alpha) \geqslant n\} = 1$.

◀ Следует непосредственно из леммы 2. ▶

Лемма 4. *Для любого счетного подмножества $S \subset A$ существует $f_S := o\text{-}\sum\limits_{\alpha \in S} \dim(\alpha)\chi_\alpha$ в K-пространстве $C_\infty(Q)$.*

◀ Определим функцию $f_S : Q \to \overline{\mathbb{R}}$ формулой

$$f_S(q) := \sum_{\alpha \in S} \dim(\alpha)\chi_\alpha(q).$$

Согласно теореме 1.3.5 (2) для доказательства леммы достаточно установить, что $f_S^{-1}(\infty)$ является тощим подмножеством Q. Принимая во внимание лемму 1, мы приходим к следующему выводу: если точка $q \in Q$ такова, что $f_S(q) = \infty$, то найдется такая цепочка $\alpha^{(1)} \sqsubset \alpha^{(2)} \sqsubset \dots \sqsubset \alpha^{(n)} \sqsubset \dots$ попарно различных элементов S, что $q \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} Q_{\alpha^{(n)}}$. Таким образом, $f_S^{-1}(\infty) \subset \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \bigcup\limits_{\alpha \in S(n)} Q_\alpha$, где $S(n) = \{\alpha \in S : \dim(\alpha) \geqslant n\}$. Следовательно, лемма будет доказана, если мы установим, что

$$\mathrm{int} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{cl} \bigcup_{\alpha \in S(n)} Q_\alpha = \varnothing,$$

т. е. $\inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\alpha \in S(n)} Q_\alpha = 0$ в булевой алгебре $\mathrm{Clop}(Q)$ или, что эквивалентно, $\inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\alpha \in S(n)}]\alpha, \alpha+1[= 0$ в булевой алгебре $\mathrm{Rop}(A)$.

Допустим, что последнее равенство не имеет места. Тогда согласно лемме 2 найдется такая последовательность $\beta \in A$, что интервал $]\beta, \beta+1[$ содержится в $\sup_{\alpha \in S(n)}]\alpha, \alpha+1[$ для любого $n \in \mathbb{N}$, и в частности для $n = \dim(\beta)+1$. Обозначим множество $\{\gamma \in S(\dim(\beta)+1) :]\beta, \beta+1[\cap]\gamma, \gamma+1[\neq \varnothing\}$ через Γ. Очевидно, что $]\beta, \beta+1[\subset \sup_{\gamma \in \Gamma}]\gamma, \gamma+1[$ и, следовательно, для любой последовательности $\alpha < \beta + 1$ найдется такой элемент $\gamma \in \Gamma$, что $\gamma + 1 \geqslant \alpha$. Однако из леммы 1 следует, что β является осколком каждого элемента Γ, и поэтому для всех $\gamma \in \Gamma$

$$
\begin{aligned}
\gamma + 1 &= (\beta_1, \ldots, \beta_{\dim(\beta)}, \gamma_{\dim(\beta)+1}, \ldots, \gamma_{\dim(\gamma)} + 1, 0, 0, \ldots) \\
&\leqslant (\beta_1, \ldots, \beta_{\dim(\beta)}, \gamma_{\dim(\beta)+1} + 1, 0, 0, \ldots) \\
&\leqslant (\beta_1, \ldots, \beta_{\dim(\beta)}, \sup_{\gamma' \in \Gamma} (\gamma'_{\dim(\beta)+1} + 1), 0, 0, \ldots) \\
&< \beta + 1,
\end{aligned}
$$

в чем легко увидеть искомое противоречие. ▶

Пусть $\mathscr{X}$ — векторное пространство всех ограниченных функций $x : A \to \mathbb{R}$, имеющих счетный носитель $\{\alpha \in A : x(\alpha) \neq 0\}$. Очевидно, $\mathscr{X}$ представляет собой банахово пространство относительно равномерной нормы $\|\cdot\|_\infty$ и K-пространство — относительно поточечного порядка.

Лемма 5. *Для любой функции $x \in \mathscr{X}$, в K-пространстве $C_\infty(Q)$ существует o-сумма* $o\text{-}\sum\limits_{\alpha \in A} \dim(\alpha) x(\alpha) \chi_\alpha$.

◀ Обозначим через S носитель функции $x \in \mathscr{X}$. Привлекая лемму 4, мы имеем $\sum\limits_{\alpha \in A} \dim(\alpha) x^+(\alpha) \chi_\alpha(q) \leqslant \|x\|_\infty f_S(q)$ в каждой точке $q \in Q$, откуда следует существование суммы $o\text{-}\sum\limits_{\alpha \in A} \dim(\alpha) x^+(\alpha) \chi_\alpha$ в $C_\infty(Q)$. Аналогичные рассуждения для функции x^- завершают доказательство леммы. ▶

Приступим к непосредственному определению пространств X и F и оператора T. Банахово пространство X мы определим как замыкание подпространства $\mathscr{X}$, состоящего из всех функций с конечными носителями. В качестве K-пространства F возьмем $C_\infty(Q)$. Наконец, оператор $T : X \to F$ мы определим формулой

$$Tx = o\text{-}\sum_{\alpha \in A} \dim(\alpha) x(\alpha) \chi_\alpha,$$

в которой существование o-суммы гарантировано леммой 5.

Оператор T является счетно ограниченным. Действительно, если нормы всех элементов счетного подмножества $X_0 \subset X$ ограничены сверху числом λ и S — объединение носителей функций из X_0, то в силу леммы 4 мы имеем $|Tx| \leqslant \lambda f_S$ для всех $x \in X_0$. Таким образом, оператор T удовлетворяет условию 1.6.3 (б)(6), т. е. является счетно ограниченным.

Покажем, что оператор T не ограничен. Для каждой последовательности $\alpha \in A$ обозначим характеристическую функцию одноэлементного подмножества $\{\alpha\} \subset A$ через x_α. Если бы множество $\{Tx : x \in X, \|x\|_\infty \leqslant 1\}$ имело верхнюю границу в K-пространстве F, согласно лемме 3 мы имели бы для каждого $n \in \mathbb{N}$ соотношения

$$
\begin{aligned}
\sup\{Tx : x \in X, \|x\|_\infty \leqslant 1\} &\geqslant \sup\{Tx_\alpha : \alpha \in A, \dim(\alpha) \geqslant n\} \\
&\geqslant \sup\{n\chi_\alpha : \alpha \in A, \dim(\alpha) \geqslant n\} \\
&= n \mathbb{1}_F,
\end{aligned}
$$

где $\mathbb{1}_F$ — функция, тождественно равная единице. Таким образом, оператор T не удовлетворяет условию 1.6.3 (а)(5), т. е. не является ограниченным.

1.6.5. Пример. Существуют банахово пространство X, K-пространство F и оператор $T\colon X \to F$, являющийся секвенциально ограниченным, но не счетно ограниченным.

◀ Снабжая векторное пространство c_0 сходящихся к нулю числовых последовательностей равномерной нормой $\|\cdot\|$, мы получаем банахово пространство, которое обозначим символом X. Наделив же пространство c_0 покоординатным порядком, мы получим K-пространство, которое обозначим через F. Рассмотрим тождественное отображение $T\colon c_0 \to c_0$ как оператор из X в F. Для каждого натурального числа $n \in \mathbb{N}$ обозначим через e_n характеристическую функцию подмножества $\{n\} \subset \mathbb{N}$. Оператор T не является счетно ограниченным, так как он переводит ограниченное счетное подмножество $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ банахова пространства X в неограниченное подмножество K-пространства F (см. 1.6.3 (б)(6)).

Покажем, что оператор T является секвенциально ограниченным, воспользовавшись критерием 1.6.3 (в)(3). Рассмотрим произвольную последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов X, сходящуюся к нулю по норме, и определим последовательность x формулой $x(m) = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n(m)|$ $(m \in \mathbb{N})$. Достаточно показать, что $x(m) \to 0$ при $m \to \infty$. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Пусть $\bar{n} \in \mathbb{N}$ такое число, что $\|x_n\| \leqslant \varepsilon$ для всех $n > \bar{n}$, а $\overline{m} \in \mathbb{N}$ такое, что $(|x_1| \vee |x_2| \vee \dots \vee |x_{\bar{n}}|)(m) \leqslant \varepsilon$ для всех $m > \overline{m}$. Тогда $x(m) \leqslant \varepsilon$ для всех $m > \overline{m}$. ▶

1.6.6. Пример. Существуют банахово пространство X, расширенное K-пространство F и оператор $T\colon X \to F$, являющийся полуограниченным, но не секвенциально ограниченным.

◀ Обозначим через Δ множество всевозможных конечных последовательностей нулей и единиц: $\Delta := \{(\delta(1),\dots,\delta(n)) : n \in \mathbb{N},\ \delta(i) \in \{0,1\}\}$. Перенумеруем элементы множества Δ, перечислив сначала все последовательности длины 1, затем длины 2 и т. д.:

$$
\begin{aligned}
&\delta_1 := (0),\ \ \delta_2 := (1);\\
&\delta_3 := (0,0),\ \ \delta_4 := (0,1),\ \ \delta_5 := (1,0),\ \ \delta_6 := (1,1);\\
&\dots\\
&\delta_{2^n-1} := (0,0,\dots,0),\ \ \delta_{2^n} := (0,0,\dots,1),\ \ \dots,\ \ \delta_{2^{n+1}-2} := (1,1,\dots,1);\\
&\dots
\end{aligned}
$$

Для каждого элемента $\delta = (\delta(1),\dots,\delta(n)) \in \Delta$ обозначим через I_δ отрезок вещественной прямой

$$
\left[2^{-1}\delta(1) + 2^{-2}\delta(2) + \dots + 2^{-n}\delta(n),\ 2^{-1}\delta(1) + 2^{-2}\delta(2) + \dots + 2^{-n}\delta(n) + 2^{-n}\right].
$$

Для того чтобы облегчить понимание последней формулы, заметим, что

$$
I_{\delta_1} = I_1^1,\ \ I_{\delta_2} = I_2^1,\ \ I_{\delta_3} = I_1^2,\ \ I_{\delta_4} = I_2^2,\ \ I_{\delta_5} = I_3^2,\ \ I_{\delta_6} = I_4^2,\ \ \dots,
$$

где I_m^n — отрезки, рассмотренные в 1.6.2.

Обозначим через X банахово пространство $\ell^1(\Delta)$ суммируемых функций $x\colon \Delta \to \mathbb{R}$ с нормой $\|x\| = \sum\limits_{\delta\in\Delta}|x(\delta)|$ и положим F равным K-пространству $M([0,1])$ классов вещественных измеримых по Лебегу функций на отрезке $[0,1]$. Для каждого элемента $\delta \in \Delta$ обозначим через f_δ характеристическую функцию отрезка I_δ, а через $\mathbf{f}_\delta$ — класс эквивалентности из $M([0,1])$, содержащий функцию f_δ. Определим оператор $T\colon X \to F$ формулой

$$
Tx = o\text{-}\sum_{\delta\in\Delta} 2^{\dim\delta} x(\delta)\mathbf{f}_\delta,
$$

где $\dim\delta$ — длина последовательности δ. Последняя o-сумма существует, так как соответствующая поточечная сумма $\sum\limits_{\delta\in\Delta} 2^{\dim\delta}x(\delta)f_\delta$, очевидно, измерима, а интеграл ее модуля равен

$$\sum_{\delta\in\Delta} 2^{\dim\delta}|x(\delta)|\mu(I_\delta) = \sum_{\delta\in\Delta}|x(\delta)| = \|x\|$$

и, следовательно, конечен. Таким образом, $\int|Tx| = \|x\|$, откуда непосредственно вытекает полуограниченность оператора T.

Покажем, что построенный оператор T не является секвенциально ограниченным. Для каждого элемента $\delta\in\Delta$ обозначим через e_δ характеристическую функцию одноэлементного подмножества $\{\delta\}\subset\Delta$. Тогда последовательность $(2^{-\dim\delta_n}e_{\delta_n})_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к нулю по норме, в то время как ее образ $(\mathbf{f}_{\delta_n})_{n\in\mathbb{N}}$ относительно оператора T, очевидно, не является r-сходящейся к нулю последовательностью. ▶

1.6.7. Пусть E и F — векторные решетки. Оператор $T\colon E\to F$ называют *положительным*, если $Te\geqslant 0$ для всех положительных $e\in E$, и *регулярным*, если существуют такие положительные операторы $T_1,T_2\colon E\to F$, что $T = T_1 - T_2$.

Пусть $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ — РНП над векторными решетками E и F соответственно. Говорят, что положительный оператор $S\colon E\to F$ является *мажорантой* оператора $T\colon\mathscr{U}\to\mathscr{V}$, если $|Tu|\leqslant S|u|$ для всех $u\in\mathscr{U}$. Оператор, имеющий мажоранту, называется *мажорируемым*. Совокупность всех мажорируемых операторов из $\mathscr{U}$ в $\mathscr{V}$ обозначается символом $M(\mathscr{U},\mathscr{V})$. Очевидно, $M(\mathscr{U},\mathscr{V})$ представляет собой векторное подпространство пространства всех линейных операторов из $\mathscr{U}$ в $\mathscr{V}$.

Предложение. *Пусть E и F — векторные решетки, а $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ — РНП.*

(1) Оператор $T\colon E\to F$ регулярен тогда и только тогда, когда он мажорируем.

(2) Если оператор $T\colon\mathscr{U}\to\mathscr{V}$ мажорируем, то он ограничен.

(3) Если F — K-пространство и оператор $T\colon E\to F$ ограничен, то он мажорируем (= регулярен).

◀ Утверждения (1) и (2) очевидны. Доказательство (3) имеется в [16, VII.1.27; 11, теорема VIII.2.2]. ▶

Замечание. Ограниченный оператор может не быть мажорируемым. Действительно, снабжая векторное пространство ℓ^∞ ограниченных числовых последовательностей покоординатным порядком, мы получим K-пространство (а значит, ПБК), которое обозначим через $\mathscr{U}$. Наделив же ℓ^∞ равномерной нормой, мы получим банахово пространство (а значит, ПБК), которое обозначим символом $\mathscr{V}$. Тогда тождественное отображение ℓ^∞ на себя как оператор из $\mathscr{U}$ в $\mathscr{V}$ будет ограниченным, но не мажорируемым.

1.6.8. Снабдим векторное пространство $M(E,F)$ порядком, положив $S\leqslant T$ тогда и только тогда, когда $Se\leqslant Te$ для всех положительных $e\in E$ (т. е. когда разность $T-S$ является положительным оператором).

Теорема Рисса — Канторовича. *Пусть E — векторная решетка, а F — K-пространство.*

(1) Пространство $M(E,F)$ является векторной решеткой. Для любых операторов $S,T\in M(E,F)$ и любого положительного элемента $e\in E$ имеют место

следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
(S \vee T)e &= \sup\{Sx + Ty \,:\, x, y \geqslant 0,\ x + y = e\},\\
(S \wedge T)e &= \inf\{Sx + Ty \,:\, x, y \geqslant 0,\ x + y = e\},\\
T^+e &= \sup\{Tx \,:\, 0 \leqslant x \leqslant e\},\\
T^-e &= -\inf\{Tx \,:\, 0 \leqslant x \leqslant e\},\\
|T|e &= \sup\{|Tx| \,:\, |x| \leqslant e\} = \sup\{Tx \,:\, |x| \leqslant e\}.
\end{aligned}
$$

(2) *Векторная решетка $M(E,F)$ является K-пространством. Для любого порядково ограниченного подмножества $\mathscr{T} \subset M(E,F)$ и любого положительного элемента $e \in E$ имеют место следующие соотношения*:

$$
\begin{aligned}
(\sup \mathscr{T})e &= \sup\{T_1e_1 + \dots + T_ne_n \,:\, T_i \in \mathscr{T},\ e_i \geqslant 0,\ e_1 + \dots + e_n = e\},\\
(\inf \mathscr{T})e &= \inf\{T_1e_1 + \dots + T_ne_n \,:\, T_i \in \mathscr{T},\ e_i \geqslant 0,\ e_1 + \dots + e_n = e\}.
\end{aligned}
$$

Впервые в приведенной формулировке теорема была доказана Л. В. Канторовичем в 1936 г. (см. [14]). Идейной предпосылкой этого результата явилась работа Ф. Рисса [54], в которой был рассмотрен случай функционалов на $C([0,1])$. Доказательство теоремы Рисса — Канторовича можно найти в [16, VII.1.23] или в [11, теорема VIII.2.1].

Замечание. Формулы, приведенные в формулировке теоремы Рисса — Канторовича, позволяют вычислять значения соответствующих операторов в любой точке их области определения. Действительно, каждый линейный оператор $T\colon E \to F$ однозначно определяется своими значениями на положительных элементах E: для всех $e \in E$ имеет место равенство $T(e) = T(e^+) - T(e^-)$.

1.6.9. Теорема [23]. *Пусть $\mathscr{U}$ — РНП над E, а $\mathscr{V}$ — РНП над F.*

(1) *Каждый мажорируемый оператор $T\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ имеет наименьшую мажоранту (относительно порядка в $M(E,F)$), обозначаемую символом $|T|$.*

(2) *Если $\mathscr{V}$ — ПБК, то отображение $|\cdot| \,:\, T \mapsto |T|$ представляет собой разложимую $M(E,F)$-значную норму на $M(\mathscr{U},\mathscr{V})$, в паре с которой $M(\mathscr{U},\mathscr{V})$ является ПБК.*

Имея в виду то обстоятельство, что каждая векторная решетка представляет собой РНП над самой собой, последний результат можно рассматривать как обобщение теоремы Рисса — Канторовича. Модуль оператора $T \in M(E,F)$, очевидно, совпадает с наименьшей мажорантой T, как оператора из РНП $(E, |\cdot|)$ в ПБК $(F, |\cdot|)$.

1.6.10. Теорема [23]. *Рассмотрим ПБК $\mathscr{U}$ над E, РНП $\mathscr{V}$ над F и линейный оператор $T\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$. Для каждого положительного элемента $e \in E$ положим*

$$
\begin{aligned}
T_{\leqslant}(e) &:= \{|Tu_1| + \dots + |Tu_n| \,:\, u_i \in \mathscr{U},\ |u_1| + \dots + |u_n| \leqslant e\},\\
T_{=}(e) &:= \{|Tu_1| + \dots + |Tu_n| \,:\, u_i \in \mathscr{U},\ |u_1| + \dots + |u_n| = e\},\\
T_{\perp}(e) &:= \{|Tu_1| + \dots + |Tu_n| \,:\, u_i \in \mathscr{U} \text{ попарно дизъюнктны},\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad |u_1| + \dots + |u_n| \leqslant e\}.
\end{aligned}
$$

Оператор T мажорируем тогда и только тогда, когда для любого положительного элемента $e \in E$ порядково ограничено одно (а тогда и каждое) из множеств $T_{\leqslant}(e)$, $T_{=}(e)$ или $T_{\perp}(e)$. В этом случае $|T|e = \sup T_{\leqslant}(e) = \sup T_{=}(e) = \sup T_{\perp}(e)$ для всех $e \geqslant 0$.

Надо сказать, что равенство $|T|e = \sup T_{\perp}(e)$ было формально получено в предположении мажорируемости оператора T (см. [23, предложение 4.2]). Тем не менее приведенное в [23] доказательство не использует это предположение и тем самым устанавливает критерий мажорируемости в сформулированном выше виде.

§ 1.7. Банаховы расслоения

В статье рассматриваются банаховы расслоения двух видов — непрерывные и измеримые. Оба понятия имеют некоторый общий круг вопросов, связанный со слоями и сечениями (послойная плотность, поточечная норма, операции над сечениями, сходимость последовательности сечений и т. д.), который и является содержанием этого небольшого параграфа. Надо сказать, что в связи с введением нового понятия измеримого банахова расслоения автор был вынужден пойти на некоторое изменение принятой терминологии: до сих пор словосочетание «банахово расслоение» обозначало то, чему в данной статье соответствует термин «непрерывное банахово расслоение». Поскольку банахово расслоение в новом смысле является непрерывным банаховым расслоением над дискретным топологическим пространством, во избежание недоразумений мы будем иногда говорить «дискретное банахово расслоение» вместо «банахово расслоение».

1.7.1. Пусть Q — непустое множество. (*Дискретным*) *банаховым расслоением над* Q называется всякое отображение $\mathscr{X}$, определенное на Q и ставящее в соответствие каждой точке $q \in Q$ некоторое банахово пространство $\mathscr{X}(q)$. Значение $\mathscr{X}(q)$ банахова расслоения называется его *слоем* в точке $q \in Q$. Норма элемента x в слое $\mathscr{X}(q)$ будет обозначаться символом $\|x\|_{\mathscr{X}(q)}$ или просто $\|x\|$, если ясно, о каком слое идет речь.

1.7.2. Пусть $\mathscr{X}$ — банахово расслоение над Q. Функция u, определенная на подмножестве $D \subset Q$, называется *сечением расслоения* $\mathscr{X}$ *над* D, если $u(q) \in \mathscr{X}(q)$ для всех $q \in D$ (обозначаем $u \in S(D, \mathscr{X})$). Отметим, что вместо термина «сечение» в теории банаховых расслоений иногда употребляют его синонимы: «селектор» или «векторное поле». Элементы $S(Q, \mathscr{X})$ называются *глобальными сечениями*. Если на множестве Q задана топология, то сечения над котощими подмножествами Q носят название *почти глобальных*. Если же Q является пространством с мерой, то почти глобальными естественно было бы называть сечения, определенные почти всюду в Q. Однако во избежание двусмысленности мы не будем употреблять этот термин в случае пространства с мерой. Вместо этого будет использоваться обозначение $S_{\sim}(Q, \mathscr{X})$ для совокупности сечений расслоения $\mathscr{X}$, определенных почти всюду.

Множество сечений $\mathscr{U} \subset S(Q, \mathscr{X})$ называется *послойно плотным* в $\mathscr{X}$, если совокупность $\{u(q) : u \in \mathscr{U}\}$ всюду плотна в $\mathscr{X}(q)$ для любой точки $q \in Q$. Иногда оказывается удобным иметь понятие послойной плотности в несколько обобщенном виде: множество $\mathscr{U}$, состоящее из сечений расслоения $\mathscr{X}$ над различными подмножествами Q, называется *послойно плотным в* $\mathscr{X}$ *на* $D \subset Q$, если совокупность $\{u(q) : u \in \mathscr{U},\ q \in \operatorname{dom} u\}$ всюду плотна в $\mathscr{X}(q)$ для любой точки $q \in D$.

1.7.3. Множество $S(D, \mathscr{X})$ всех сечений над $D \subset Q$ естественным образом наделяется структурой векторного пространства: $(\lambda u + \mu v)(q) = \lambda u(q) + \mu v(q)$ для $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $u, v \in S(D, \mathscr{X})$, $q \in D$. Пространство $S(D, \mathscr{X})$ может также рассматриваться как модуль над кольцом $S(D)$ всех функций из D в $\mathbb{R}$: для всех $e \in S(D)$ и $u \in S(D, \mathscr{X})$ сечение $eu \in S(D, \mathscr{X})$ определяется формулой $(eu)(q) = e(q)u(q)$. Операции векторного пространства и модуля определяются также для пар функций, имеющих разные области определения: если $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $u \in S(A, \mathscr{X})$, $v \in S(B, \mathscr{X})$ и $e \in S(C)$, то $\lambda u + \mu v := \lambda(u|_{A\cap B}) + \mu(v|_{A\cap B})$ и $eu := e|_{A\cap C}\, u|_{A\cap C}$.

Для $u \in S(D, \mathscr{X})$ и $A \subset Q$ символом $\langle A\rangle u$ обозначается сечение над D, действующее по правилу: $(\langle A\rangle u)(q) = u(q)$ при $q \in D \cap A$ и $(\langle A\rangle u)(q) = 0(q)$ при $q \in D\backslash A$, где $0(q)$ — нуль в банаховом пространстве $\mathscr{X}(q)$. Формулы вида $u(q) = 0(q)$ или $u(q) \neq 0(q)$ мы будем записывать короче: $u(q) = 0$, $u(q) \neq 0$.

Если на множестве Q задана топология, то для каждого сечения $u \in S(D, \mathscr{X})$ определяется его *носитель* $\operatorname{supp} u := \operatorname{cl}\{q \in D : u(q) \neq 0\}$, где cl — операция замыкания в топологическом пространстве Q.

1.7.4. Если X и Y — банаховы пространства, то множество всех линейных непрерывных (= ограниченных) операторов из X в Y обозначается через $B(X,Y)$. Символ X' используется для обозначения сопряженного к X пространства $B(X,\mathbb{R})$. Запись $\langle x|x'\rangle$ обозначает значение функционала $x' \in X'$ на элементе $x \in X$.

Предположим, что $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — банаховы расслоения над Q. Пусть функция w ставит в соответствие каждой точке q некоторого подмножества $D \subset Q$ элемент $w(q) \in B(\mathscr{X}(q), \mathscr{Y}(q))$, что в дальнейшем будет символически записываться следующим образом: $w : q \in D \mapsto w(q) \in B(\mathscr{X}(q), \mathscr{Y}(q))$. Тогда для любого сечения $u \in S(A, \mathscr{X})$ над $A \subset Q$ символом $w \otimes u$ мы будем обозначать сечение над $A \cap D$ расслоения $\mathscr{Y}$, определяемое соотношением $(w \otimes u)(q) = w(q)u(q)$, $q \in A \cap D$. В случае, когда $\mathscr{Y}(q) = \mathbb{R}$ для всех $q \in Q$, вместо $w \otimes u$ используется запись $\langle u(\cdot)|w(\cdot)\rangle$. Если Q — экстремально несвязный компакт, функция $\langle u(\cdot)|w(\cdot)\rangle$ непрерывна, а ее область определения $A \cap D$ всюду плотна в Q, то продолжение $\langle u(\cdot)|w(\cdot)\rangle$ до элемента $C_\infty(Q)$ будет обозначаться через $\langle u|w\rangle$ (см. 1.1.2).

Если $\mathscr{X}$ — банахово расслоение над P, то для любой функции $s\colon Q \to P$ композиция $\mathscr{X} \circ s$ представляет собой банахово расслоение над Q. Кроме того, если u — сечение расслоения $\mathscr{X}$ над $D \subset P$, то $u \circ s$ — сечение $\mathscr{X} \circ s$ над $s^{-1}[D]$. Для произвольного множества $\mathscr{U}$ сечений $\mathscr{X}$ символом $\mathscr{U} \circ s$ мы обозначаем совокупность сечений $\{u \circ s : u \in \mathscr{U}\}$ расслоения $\mathscr{X} \circ s$.

Пусть $\mathscr{X}$ — банахово расслоение над P и s — функция, определенная на подмножестве Q и действующая в P. Расслоение $\mathscr{X} \circ s$, дополненное нулевыми слоями в точках $Q \setminus \operatorname{dom} s$, мы будем обозначать символом $\mathscr{X} \bullet s$. Точнее говоря, слои банахова расслоения $\mathscr{X} \bullet s$ над Q определяются формулой

$$(\mathscr{X} \bullet s)(q) := \begin{cases} \mathscr{X}(s(q)), & \text{если } q \in \operatorname{dom} s, \\ \{0\}, & \text{если } q \in Q \setminus \operatorname{dom} s. \end{cases}$$

Если u — сечение расслоения $\mathscr{X}$ над $D \subset P$, то символом $u \bullet s$ мы будем обозначать сечение

$$(u \bullet s)(q) := \begin{cases} u(s(q)), & \text{если } q \in s^{-1}[D], \\ 0, & \text{если } q \in Q \setminus \operatorname{dom} s \end{cases}$$

расслоения $\mathscr{X} \bullet s$ над $s^{-1}[D] \cup (Q \setminus \operatorname{dom} s)$. Для произвольного множества $\mathscr{U}$ сечений $\mathscr{X}$ символом $\mathscr{U} \bullet s$ мы обозначаем совокупность сечений $\{u \bullet s : u \in \mathscr{U}\}$ расслоения $\mathscr{X} \bullet s$. Безусловно, для обеспечения корректности при использовании обозначений типа $u \bullet s$ следует всегда иметь в виду некоторое фиксированное множество Q, объемлющее $\operatorname{dom} s$.

1.7.5. Для каждого сечения $u \in S(D, \mathscr{X})$ рассматривается его *поточечная норма* $|||u|||\colon q \in D \mapsto \|u(q)\|$. Сечения $u \in S(A, \mathscr{X})$ и $v \in S(B, \mathscr{X})$ называются *дизъюнктными*, если $\|u(q)\| \wedge \|v(q)\| = 0$ для всех $q \in A \cap B$.

Говорят, что последовательность сечений $u_n \in S(D_n, \mathscr{X})$ *поточечно сходится к* $u \in S(D, \mathscr{X})$ *на множестве* $A \subset Q$, если $A \subset \operatorname{dom} u \cap \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{dom} u_n$ и последовательность функций $(|||u_n|_A - u|_A|||)_{n\in\mathbb{N}}$ поточечно сходится к нулю. Если последовательность сечений $u_n \in S(D, \mathscr{X})$ поточечно сходится к $u \in S(D, \mathscr{X})$ на D, то сечение u называют *поточечным пределом* последовательности (u_n). Подмножество $\mathscr{U} \subset S(D, \mathscr{X})$ называется *поточечно замкнутым*, если оно содержит все поточечные пределы последовательностей своих элементов.

1.7.6. *Равномерной нормой* $\|u\|_\infty$ сечения $u \in S(D, \mathscr{X})$ называется (конечное или бесконечное) число $\sup_{q\in D}\|u(q)\|$. Сечение u называют *ограниченным* (*на* $U \subset D$), если $\|u\|_\infty < \infty$ (соответственно $\|u|_U\|_\infty < \infty$). Множество всех ограниченных сечений $u \in S(D, \mathscr{X})$ обозначается через $\ell^\infty(D, \mathscr{X})$. Несомненно, $\ell^\infty(D, \mathscr{X})$ является векторным подпространством $S(D, \mathscr{X})$, а равномерная норма на $\ell^\infty(D, \mathscr{X})$ превращает это векторное пространство в банахово.

Совершенно аналогично своим поточечным аналогам вводятся понятия *равномерной сходимости*, *равномерного предела* и *равномерной замкнутости* (ср. 1.7.5).

В случае, когда Q является топологическим пространством, естественным образом вводятся такие понятия, как *локальная ограниченность* сечения, *локально равномерная сходимость* последовательности сечений и т. п. Говорят, что множество сечений $\mathscr{U} \subset S(Q, \mathscr{X})$ *равностепенно локально ограничено*, если для любой точки Q найдется ее окрестность, на которой ограничены все сечения из $\mathscr{U}$.

Глава 2. Непрерывные банаховы расслоения

Непрерывное банахово расслоение (НБР) над топологическим пространством Q является формальным эквивалентом интуитивного представления о семействе банаховых пространств $(X_q)_{q \in Q}$, непрерывно изменяющихся от точки к точке пространства Q. Изобретение банаховых расслоений принято связывать с именем Дж. фон Неймана, который в 1937–1938 гг. высказал некоторые идеи, касающиеся переменных банаховых пространств. Соответствующие формальные описания возникли приблизительно в 1950 г. в работах Р. Годемана, И. Капланского, И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка. Сегодня теория непрерывных банаховых расслоений представляет собой весьма обширную область исследований. Адекватное представление о современном состоянии этой теории можно получить, обратившись к литературным обзорам и ссылкам, имеющимся в [31]. Монография [38] содержит подробные обсуждения большинства необходимых нам понятий, связанных с НБР.

В данной главе приведены определения и элементарные свойства всех основных объектов теории НБР. Речь идет о непрерывных структурах в банаховых расслоениях и способах их введения; о непрерывных сечениях, их свойствах и операциях над ними; о гомоморфизмах категории НБР и их эквивалентных описаниях. Почти весь материал этой главы так или иначе известен. Некоторые новые факты появляются только в параграфах 2.4 и (в большей степени) 2.5.

§ 2.1. Основные понятия

В статье избран подход к определению непрерывности сечений, основанный на понятии непрерывной структуры. Такой выбор обусловлен простотой возникающих при этом объектов, легкостью их конструирования и удобством применения к теории РНП. Другой — топологический — подход в аксиоматической форме не приведен, однако указан механизм использования его очевидных преимуществ.

2.1.1. Пусть Q — топологическое пространство. Множество $\mathscr{C} \subset S(Q, \mathscr{X})$ глобальных сечений банахова расслоения $\mathscr{X}$ над Q называется *непрерывной структурой в* $\mathscr{X}$, если выполнены следующие условия:

(а) множество $\mathscr{C}$ является векторным подпространством $S(Q, \mathscr{X})$;

(б) поточечная норма $|\!|\!|c|\!|\!| : Q \to \mathbb{R}$ любого элемента $c \in \mathscr{C}$ непрерывна;

(в) множество $\mathscr{C}$ послойно плотно в $\mathscr{X}$.

Если $\mathscr{C}$ — непрерывная структура в $\mathscr{X}$, то пара $(\mathscr{X}, \mathscr{C})$ называется *непрерывным банаховым расслоением* (НБР) *над* Q. При этом вместо $(\mathscr{X}, \mathscr{C})$ обычно будем писать просто $\mathscr{X}$, а непрерывную структуру $\mathscr{C}$ обозначать символом $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$.

2.1.2. Пусть $(\mathscr{X}, \mathscr{C})$ — НБР над топологическим пространством Q. Сечение $u \in S(D, \mathscr{X})$ над $D \subset Q$ называется *$\mathscr{C}$-непрерывным в точке* $q \in D$, если функция $|\!|\!|u - c|\!|\!| : D \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке q для любого элемента $c \in \mathscr{C}$. Сечение $u \in S(D, \mathscr{X})$, $\mathscr{C}$-непрерывное в каждой точке $q \in Q$, называется *$\mathscr{C}$-непрерывным* (обозначаем $u \in C(D, \mathscr{X}|\mathscr{C})$). В частности, сечение $u \in S(Q, \mathscr{X})$

принадлежит $C(Q, \mathscr{X}|\mathscr{C})$ в том и только том случае, если $|||u - c||| \in C(Q)$ для всех $c \in \mathscr{C}$.

В дальнейшем непрерывная структура $\mathscr{C}$, как правило, не будет фигурировать в явном виде. В связи с этим $\mathscr{C}$-непрерывные (в точке) сечения мы будем называть просто *непрерывными* (*в точке*) и употреблять обозначение $C(D, \mathscr{X})$ вместо $C(D, \mathscr{X}|\mathscr{C})$ (ср. 2.1.9). Совокупность всех непрерывных ограниченных сечений над D обозначается символом $C^b(D, \mathscr{X})$.

2.1.3. Приведенный в 2.1.2 способ определения непрерывности сечений был впервые предложен, по-видимому, в 1949 г. Р. Годеманом (см. развитие этого метода в [39]). В современной литературе о банаховых расслоениях используется также другой подход, при котором непрерывность сечений возникает как чисто топологическое понятие. Изложение обоих упомянутых методов, а также обоснование их эквивалентности можно найти в монографии [38]. Не останавливаясь подробно на втором подходе, мы лишь поясним связь непрерывности относительно непрерывной структуры с топологической непрерывностью.

2.1.4. Пусть $\mathscr{X}$ — НБР над Q. Символом $Q \otimes \mathscr{X}$ обозначается множество пар $\bigcup\limits_{q \in Q} (\{q\} \times \mathscr{X}(q))$, а символом $(Q \otimes \mathscr{X})^\times$ — подмножество $(Q \otimes \mathscr{X})^2$, состоящее из элементов вида $((q, x), (q, y))$. Для произвольного сечения $u \in S(D, \mathscr{X})$ над $D \subset Q$ вводится функция $Q \otimes u \colon D \to Q \otimes \mathscr{X}$, действующая по правилу $(Q \otimes u)(q) = (q, u(q))$.

Пусть $U \subset Q$, $u \in S(Q, \mathscr{X})$, $\varepsilon > 0$. *Трубкой* радиуса ε над U вокруг u называется множество $U(u, \varepsilon) = \{(q, x) \in Q \otimes \mathscr{X} : q \in U,\ \|x - u(q)\| < \varepsilon\}$.

Лемма. *Для любого* НБР $(\mathscr{X}, \mathscr{C})$ *над* Q *множество трубок* $U(c, \varepsilon)$, *определяемых открытыми подмножествами* $U \subset Q$, *сечениями* $c \in \mathscr{C}$ *и радиусами* $\varepsilon > 0$, *является базой некоторой открытой топологии на* $Q \otimes \mathscr{X}$.

◀ Доказательство имеется в [38, 5.3]. ▶

В дальнейшем для любого НБР $\mathscr{X}$ над Q множество $Q \otimes \mathscr{X}$ будет по умолчанию снабжаться топологией трубок, описанной в лемме.

2.1.5. *Предложение.* *Для любого* НБР $\mathscr{X}$ *над* Q *следующие отображения непрерывны*:

(а) $\mathrm{pr}_Q \colon Q \otimes \mathscr{X} \to Q, \qquad \mathrm{pr}_Q(q, x) = q;$

(б) $\|\cdot\| \colon Q \otimes \mathscr{X} \to \mathbb{R}, \qquad \|\cdot\|(q, x) = \|x\|;$

(в) $* \colon \mathbb{R} \times (Q \otimes \mathscr{X}) \to Q \otimes \mathscr{X}, \qquad *(\lambda, (q, x)) = (q, \lambda x);$

(г) $+ \colon (Q \otimes \mathscr{X})^\times \to Q \otimes \mathscr{X}, \qquad +((q, x), (q, y)) = (q, x + y).$

◀ Непрерывность отображения pr_Q очевидна. Непрерывность $\|\cdot\|$ может быть доказана следующим образом: если $(q_0, x_0) \in Q \otimes \mathscr{X}$ и $\alpha < \|x_0\| < \beta$, то, выбрав $c \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ с достаточно близким к x_0 значением $c(q_0)$ и взяв окрестность U точки q_0 и число $\varepsilon > 0$ достаточно малыми, можно добиться неравенств $\alpha < \|x\| < \beta$ для всех $(q, x) \in U(c, \varepsilon)$. Непрерывность отображений $*$ и $+$ устанавливается теми же приемами и столь же просто. ▶

2.1.6. *Лемма.* *Если* $\mathscr{X}$ — НБР *над вполне регулярным пространством* Q, *то топологическое пространство* $Q \otimes \mathscr{X}$ *вполне регулярно.*

◀ Пусть G — открытое подмножество $Q \otimes \mathscr{X}$ и предположим, что пара $(q_0, x_0) \in Q \otimes \mathscr{X}$ принадлежит G. Тогда найдутся окрестность U точки q_0, сечение $c \in C_{\mathscr{X}}$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что $(q_0, x_0) \in U(c, \varepsilon) \subset G$. Поскольку пространство Q вполне регулярно, имеется такая функция $\varphi \in C(Q)$, что $\varphi \equiv 0$ вне U и $\varphi(q_0) \neq 0$. Для каждой пары $(q, x) \in Q \otimes \mathscr{X}$ положим $f(q, x) := \varphi(q) \cdot \max\{\varepsilon - \|c(q) - x\|, 0\}$. Тогда в силу непрерывности сечения c и операций $+$ и $\|\cdot\|$ (см. 2.1.5) функция $f \colon Q \otimes \mathscr{X} \to \mathbb{R}$ также непрерывна. Осталось заметить, что $f \equiv 0$ вне G и $f(q_0, x_0) \neq 0$. ▶

2.1.7. Теорема. *Пусть $\mathscr{X}$ — НБР над Q и $D \subset Q$. Для непрерывности сечения $u \in S(D, \mathscr{X})$ в точке $q \in D$ в смысле 2.1.2 необходимо и достаточно, чтобы функция $Q \otimes u\colon D \to Q \otimes \mathscr{X}$ была непрерывна в точке q в топологическом смысле.*

◀ Необходимость непрерывности функции $Q \otimes u$ очевидна. Докажем достаточность этого условия. Предположим, что функция $Q \otimes u\colon D \to Q \otimes \mathscr{X}$ непрерывна в точке q, зафиксируем произвольный элемент $c \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ и докажем непрерывность функции $|||u - c|||\colon D \to \mathbb{R}$ в точке q. Для этого возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и, обозначив $\|u(q) - c(q)\|$ через λ, установим неравенства $\lambda - \varepsilon < \|u(p) - c(p)\| < \lambda + \varepsilon$ для всех p из некоторой окрестности точки q в пространстве D.

Выберем сечение $v \in \mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ так, чтобы $\|u(q) - v(q)\| < \varepsilon/2$. Тогда в силу непрерывности функции $Q \otimes u$ в точке q

$$\|u(p) - v(p)\| < \varepsilon/2 \text{ в окрестности точки } q. \tag{1}$$

Поскольку $\|v(q) - c(q)\| \leqslant \|u(q) - c(q)\| + \|u(q) - v(q)\| < \lambda + \varepsilon/2$, в силу непрерывности функции $|||v - c|||$ мы имеем

$$\|v(p) - c(p)\| < \lambda + \varepsilon/2 \text{ в окрестности точки } q. \tag{2}$$

По тем же соображениям из неравенств

$$\|v(q) - c(q)\| \geqslant \|u(q) - c(q)\| - \|u(q) - v(q)\| > \lambda - \varepsilon/2$$

следует, что

$$\|v(p) - c(p)\| > \lambda - \varepsilon/2 \text{ в окрестности точки } q. \tag{3}$$

Учитывая соотношения (1)–(3), в окрестности точки q мы имеем

$$\begin{aligned} \lambda - \varepsilon = (\lambda - \varepsilon/2) - \varepsilon/2 &< \|v(p) - c(p)\| - \|u(p) - v(p)\| \\ &\leqslant \|u(p) - c(p)\| \\ \leqslant \|v(p) - c(p)\| + \|u(p) - v(p)\| &< (\varepsilon/2 + \lambda) + \varepsilon/2 = \lambda + \varepsilon. \end{aligned}$$ ▶

2.1.8. *Предложение.* *Следующие соотношения между непрерывными структурами $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$ в банаховом расслоении $\mathscr{X}$ над топологическим пространством Q равносильны:*

(1) $C(Q, \mathscr{X}|\mathscr{C}) = C(Q, \mathscr{X}|\mathscr{D})$;
(2) $C(Q, \mathscr{X}|\mathscr{C}) \subset C(Q, \mathscr{X}|\mathscr{D})$;
(3) $\mathscr{C} \subset C(Q, \mathscr{X}|\mathscr{D})$;
(4) *пересечение* $C(Q, \mathscr{X}|\mathscr{C}) \cap C(Q, \mathscr{X}|\mathscr{D})$ *послойно плотно в* $\mathscr{X}$;
(5) *топологии в* $Q \otimes \mathscr{X}$, *соответствующие непрерывным структурам* $\mathscr{C}$ *и* $\mathscr{D}$, *совпадают.*

◀ Импликации (1)⇒(2)⇒(3)⇒(4) очевидны. Условие (1) следует из (5) в силу 2.1.7. Остается лишь пояснить импликацию (4)⇒(5).

Предположим выполненным условие (4). Из соображений симметрии для доказательства (5) достаточно установить, что топология в $Q \otimes \mathscr{X}$, соответствующая структуре $\mathscr{C}$, слабее топологии, соответствующей $\mathscr{D}$. Пусть U — открытое подмножество Q, $c \in \mathscr{C}$, $\varepsilon > 0$ и $(q, x) \in U(c, \varepsilon)$. Нам остается найти открытое подмножество $V \subset Q$, сечение $d \in \mathscr{D}$ и число $\delta > 0$ такие, что $(q, x) \in V(d, \delta) \subset U(c, \varepsilon)$. Это можно осуществить в два этапа. Сначала выберем $u \in C(Q, \mathscr{X}|\mathscr{C}) \cap C(Q, \mathscr{X}|\mathscr{D})$ с достаточно близким к x значением $u(q)$ и возьмем окрестность $U_0 \subset U$ точки q и число $\varepsilon_0 > 0$ достаточно малыми так, чтобы были выполнены включения $(q, x) \in U_0(u, \varepsilon_0) \subset U(c, \varepsilon)$. Затем, выбрав $d \in \mathscr{D}$ с достаточно близким к x значением $d(q)$ и взяв окрестность

$V \subset U_0$ точки q и число $\delta > 0$ достаточно малыми, можно добиться включений $(q,x) \in V(d,\delta) \subset U_0(u,\varepsilon_0)$. ▶

Непрерывные структуры $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$, удовлетворяющие одному из равносильных условий (1)–(5), будем называть *эквивалентными*. Очевидно, что для любой непрерывной структуры $\mathscr{C}$ в банаховом расслоении $\mathscr{X}$ над Q пространство $C(Q,\mathscr{X}|\mathscr{C})$ является наибольшей непрерывной структурой в $\mathscr{X}$, эквивалентной $\mathscr{C}$.

2.1.9. Банаховы расслоения $(\mathscr{X},\mathscr{C})$ и $(\mathscr{X},\mathscr{D})$, имеющие эквивалентные непрерывные структуры $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$, отождествляются в рамках топологического подхода, упомянутого в 2.1.3. Поскольку в дальнейшем непрерывные структуры, как правило, в явном виде фигурировать не будут, такое отождествление уместно и в нашем случае, тем более что оно уже подготовлено соглашением в 2.1.1 о написании $\mathscr{X}$ вместо $(\mathscr{X},\mathscr{C})$. Заметим, что в силу 2.1.8 символ $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ можно мыслить как обозначение произвольного послойно плотного в $\mathscr{X}$ подпространства $C(Q,\mathscr{X})$.

§ 2.2. Примеры

Этот небольшой параграф содержит наиболее часто используемые примеры НБР и операций над ними. Речь идет о постоянных НБР, подрасслоениях, ограничениях НБР и т. п. Завершает параграф лемма 2.2.7, в которой приведен неоднократно используемый в дальнейшем способ конструирования новых НБР.

2.2.1. Простым примером банахова расслоения является постоянное отображение $\mathscr{X} = Q\times\{X\}$, ставящее в соответствие каждой точке топологического пространства Q одно и то же банахово пространство X. Если в качестве непрерывной структуры $\mathscr{C}$ взять совокупность постоянных функций $c\colon Q \to X$, то непрерывными сечениями НБР $(\mathscr{X},\mathscr{C})$, называемого *постоянным*, окажутся в точности непрерывные функции $u\colon Q \to X$. Заметим, что совокупность $C(Q,X)$ всех непрерывных функций $u\colon Q \to X$ также является непрерывной структурой в постоянном расслоении $Q \times \{X\}$, причем эквивалентной структуре $\mathscr{C}$ постоянных функций (см. 2.1.8).

2.2.2. Рассмотрим НБР $\mathscr{X}$ над Q. НБР $\mathscr{X}_0$ над Q называется (*непрерывным*) *подрасслоением* $\mathscr{X}$, если $\mathscr{X}_0(q)$ является банаховым подпространством $\mathscr{X}(q)$ для любой точки $q \in Q$ и, кроме того, $C(Q,\mathscr{X}_0) = C(Q,\mathscr{X}) \cap S(Q,\mathscr{X}_0)$.

Пусть теперь $\mathscr{X}_0$ — (дискретное) банахово расслоение, каждый слой $\mathscr{X}_0(q)$ которого является банаховым подпространством соответствующего слоя $\mathscr{X}(q)$. Если пересечение $C(Q,\mathscr{X}) \cap S(Q,\mathscr{X}_0)$ послойно плотно в $\mathscr{X}_0$, то оно образует непрерывную структуру на $\mathscr{X}_0$, в паре с которой $\mathscr{X}_0$ становится непрерывным подрасслоением $\mathscr{X}$. Будем говорить, что непрерывная структура $\mathscr{X}_0$ *индуцирована из* $\mathscr{X}$. Двойственным образом всякое векторное подпространство $\mathscr{U} \subset C(Q,\mathscr{X})$ *индуцирует подрасслоение* $\mathscr{X}_0$, непрерывной структурой которого оно является: $\mathscr{X}_0(q) = \mathrm{cl}\{u(q) : u \in \mathscr{U}\}$ $(q \in Q)$.

2.2.3. *Предложение.* *Пусть $\mathscr{X}_0$ и $\mathscr{X}$ — НБР над Q, причем для любой точки $q \in Q$ слой $\mathscr{X}_0(q)$ является банаховым подпространством $\mathscr{X}(q)$. Тогда $\mathscr{X}_0$ — подрасслоение $\mathscr{X}$ в том и только том случае, если $Q \otimes \mathscr{X}_0$ — топологическое подпространство $Q \otimes \mathscr{X}$.*

◀ Следует из 2.1.7. ▶

2.2.4. Пусть $\mathscr{X}$ — НБР над Q, а $\mathscr{X}_0$ — (дискретное) банахово расслоение, каждый слой $\mathscr{X}_0(q)$ которого является банаховым подпространством соответствующего слоя $\mathscr{X}(q)$. Обозначим через C_0 совокупность всех сечений $u \in C(Q,\mathscr{X})$, для которых множество $\{q \in Q : u(q) \in \mathscr{X}_0(q)\}$ является котощим в Q. Очевидно, C_0 является векторным подпространством $C(Q,\mathscr{X})$. Символом $\mathscr{X} \wedge \mathscr{X}_0$ мы будем обозначать подрасслоение $\mathscr{X}$, индуцированное пространством C_0 (см. 2.2.2). Заметим, что в общем случае нельзя гарантировать ни включение $(\mathscr{X} \wedge \mathscr{X}_0)(q) \subset \mathscr{X}_0(q)$, ни включение $\mathscr{X}_0(q) \subset (\mathscr{X} \wedge \mathscr{X}_0)(q)$.

2.2.5. Пусть $\mathscr{X}$ — НБР над Q, $D \subset Q$. Если $\mathscr{C}$ — непрерывная структура $\mathscr{X}$, то совокупность $\{c|_D : c \in \mathscr{C}\}$ представляет собой непрерывную структуру в (дискретном) банаховом расслоении $\mathscr{X}|_D$. Полученное таким образом НБР над D называется *ограничением* НБР $\mathscr{X}$ *на* D и обозначается $\mathscr{X}|_D$. Очевидно, $C(A, \mathscr{X}|_D) = C(A, \mathscr{X})$ для любого подмножества $A \subset D$.

2.2.6. Пусть P и Q — топологические пространства и $\mathscr{X}$ — НБР над P. Если s — непрерывное отображение Q в P, то расслоение $\mathscr{X} \circ s$ мы будем по умолчанию рассматривать как НБР над Q, снабжая его непрерывной структурой $\mathscr{C}_{\mathscr{X}} \circ s$ (см. 1.7.4). Если же s — функция, определенная на открыто-замкнутом подмножестве Q и действующая в P, то расслоение $\mathscr{X} \bullet s$ будет рассматриваться как НБР над Q с непрерывной структурой $\mathscr{C}_{\mathscr{X}} \bullet s$.

Предложение. *Пусть $\mathscr{X}$ — НБР над P и s — непрерывное отображение топологического пространства Q в P. Тогда если u — непрерывное сечение $\mathscr{X}$ над $D \subset P$, то $u \circ s$ — непрерывное сечение $\mathscr{X} \circ s$ над $s^{-1}[D]$. В частности, $C(P, \mathscr{X}) \circ s \subset C(Q, \mathscr{X} \circ s)$.*

◀ С очевидностью вытекает из 2.1.7. ▶

Замечание. Включение $C(P, \mathscr{X}) \circ s \subset C(Q, \mathscr{X} \circ s)$ может быть строгим. Например, если отображение s постоянно, т. е. $s\colon Q \to \{p\}$ для некоторой точки $p \in P$, то множество $C(P, \mathscr{X}) \circ s$ представляет собой совокупность всех постоянных (а не всех непрерывных) функций из Q в $\mathscr{X}(p)$.

2.2.7. Пусть Q — топологическое пространство. Мы будем говорить, что мультинормированное пространство $(\mathscr{U}, (\|\cdot\|_q)_{q \in Q})$ *порождает* НБР $\mathscr{X}$ над Q, если существует такой линейный мономорфизм $i\colon \mathscr{U} \to C(Q, \mathscr{X})$, что множество $i[\mathscr{U}]$ послойно плотно в $\mathscr{X}$ и $\|i(u)(q)\| = \|u\|_q$ для всех $u \in \mathscr{U}$ и $q \in Q$. Мономорфизм i в этом случае будет называться *каноническим вложением* $\mathscr{U}$ *в* $C(Q, \mathscr{X})$. Ниже (см. 2.4.13) будет установлено, что такое расслоение $\mathscr{X}$ в определенном смысле единственно.

Лемма. *Мультинормированное пространство $(\mathscr{U}, (\|\cdot\|_q)_{q \in Q})$ порождает некоторое НБР над Q тогда и только тогда, когда функция $q \mapsto \|u\|_q$ непрерывна для каждого элемента $u \in \mathscr{U}$.*

◀ В доказательстве нуждается лишь достаточность предлагаемого условия. Зафиксируем произвольную точку $q \in Q$ и положим $\mathscr{U}_q := \{u \in \mathscr{U} : \|u\|_q = 0\}$. Тогда фактор-пространство $\mathscr{U}/\mathscr{U}_q$, снабженное фактор-полунормой $\|\cdot\|_q/\mathscr{U}_q$, является нормированным пространством. Обозначим его пополнение через $\mathscr{X}(q)$, и пусть $i(u)(q)$ — образ элемента $u \in \mathscr{U}$ при каноническом эпиморфизме $\mathscr{U} \to \mathscr{U}/\mathscr{U}_q$. Тогда, рассматривая $i[\mathscr{U}]$ как непрерывную структуру в банаховом расслоении $\mathscr{X}$, мы получаем искомые НБР $\mathscr{X}$ и мономорфизм i. ▶

§ 2.3. Непрерывные сечения

В этом параграфе формулируются признаки непрерывности сечений НБР, выясняется непрерывность различных операций над сечениями, а также обсуждается вопрос о существовании непрерывного сечения, проходящего через фиксированную точку фиксированного слоя НБР.

2.3.1. ***Предложение.*** *Пусть $\mathscr{X}$ — НБР над Q, $q \in D \subset Q$, $u, v \in S(D, \mathscr{X})$, $e\colon D \to \mathbb{R}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

(1) *Если сечение u непрерывно в точке q, то его поточечная норма $|\!|\!|u|\!|\!|$ непрерывна в точке q.*

(2) *Если функция e и сечение u непрерывны в точке q, то произведение eu непрерывно в точке q.*

(3) *Если сечения u и v непрерывны в точке q, то сумма $\lambda u + \mu v$ непрерывна в точке q.*

◀ Непосредственное следствие 2.1.7 и 2.1.5. ▶

2.3.2. Предложение. *Пусть множество $\mathscr{V} \subset C(Q, \mathscr{X})$ послойно плотно в НБР $\mathscr{X}$ над Q. Сечение $u \in S(D, \mathscr{X})$ над $D \subset Q$ непрерывно в точке $q \in D$ тогда и только тогда, когда для любого элемента $v \in \mathscr{V}$ функция $|||u-v|||: D \to \mathbb{R}$ полунепрерывна сверху в точке q.*

◀ Необходимость полунепрерывности сверху функции $|||u - v|||$ следует из 2.3.1. Поясним достаточность этого условия. Если трубка $U(c, \varepsilon)$ является окрестностью точки $(q, u(q))$ в $Q \otimes \mathscr{X}$, то можно выбрать сечение $v \in \mathscr{V}$ с достаточно близким к $u(q)$ значением в точке q и, воспользовавшись полунепрерывностью сверху функции $|||u - v|||$ в точке q и непрерывностью функции $|||v - c|||$, добиться выполнения неравенства $|||u - c||| < \varepsilon$ в некоторой подокрестности $U_0 \subset U$ точки q. Последнее неравенство означает включение $(p, u(p)) \in U(c, \varepsilon)$ для всех $p \in U_0$, которое, в свою очередь, доказывает непрерывность сечения u в точке q (см. 2.1.7). ▶

2.3.3. Замечание. Из доказательства 2.3.2 видно, что требование послойной плотности множества $\mathscr{V}$ в расслоении $\mathscr{X}$ может быть ослаблено до условия $u(q) \in \mathrm{cl}\{v(q) : v \in \mathscr{V}\}$.

2.3.4. Предложение. *Пусть $\mathscr{X}$ — НБР над Q и u — его сечение над $D \subset Q$. Предположим, что существует сечение $v \in C(Q, \mathscr{X})$, принимающее значение $v(q) = u(q)$ в точке $q \in D$. Тогда сечение u непрерывно в точке q в том и только том случае, если функция $|||u - v|||: D \to \mathbb{R}$ полунепрерывна сверху в точке q.*

◀ Непосредственно следует из 2.3.2 и 2.3.3. ▶

2.3.5. Следующее утверждение уточняет область применимости критерия непрерывности, сформулированного в 2.3.4.

Теорема (M. J. Dupré). *Если $\mathscr{X}$ — НБР над вполне регулярным пространством Q, то для любого $x \in \mathscr{X}(q)$ найдется сечение $v \in C^b(Q, \mathscr{X})$ такое, что $v(q) = x$.*

◀ Доказательство имеется в [38, 2.9, 2.10]. ▶

2.3.6. Предложение. *Для всякого НБР $\mathscr{X}$ над Q множество $C^b(Q, \mathscr{X})$ представляет собой замкнутое векторное подпространство $\ell^\infty(Q, \mathscr{X})$. В частности, $C^b(Q, \mathscr{X})$ — банахово пространство (в смысле равномерной нормы). Более того, если последовательность сечений u_n сходится к $u \in S(D, \mathscr{X})$ равномерно на множестве $D \subset Q$* (см. 1.7.6), *то непрерывность всех сечений u_n в фиксированной точке $q \in D$ влечет непрерывность в этой точке сечения u.*

◀ Из 2.3.1 следует, что множество $C^b(Q, \mathscr{X})$ является векторным подпространством $\ell^\infty(Q, \mathscr{X})$. Для доказательство непрерывности равномерного предела u последовательности (u_n) проще всего воспользоваться равномерной сходимостью $|||u_n - c|||$ к $|||u - c|||$ для любого сечения $c \in C(Q, \mathscr{X})$ (ср. [38, 1.9–1.12]). ▶

2.3.7. Рассмотрим НБР $\mathscr{X}$ над Q. Будем говорить, что сечение $u \in S(D, \mathscr{X})$ над $D \subset Q$ *имеет предел* $x \in \mathscr{X}(q)$ в предельной точке q множества D, если $\lim\limits_{p \to q}(p, u(p)) = (q, x)$ в $Q \otimes \mathscr{X}$. При этом будем писать $\lim\limits_{p \to q} u(p) = x$. Очевидно, если сечение $u \in S(D, \mathscr{X})$ непрерывно в предельной точке $q \in D$, то $\lim\limits_{p \to q} u(p) = u(q)$. Мы переносим это соотношение на изолированные точки $q \in D$, полагая $\lim\limits_{p \to q} u(p) := u(q)$ в случае непрерывного сечения u. Таким образом, предел непрерывного сечения может быть рассмотрен в любой точке замыкания области определения этого сечения.

2.3.8. Предложение. *Пусть $\mathscr{X}$ — НБР над Q, u — его сечение над $D \subset Q$ и q — предельная точка множества D. Предположим, что подмножество $\mathscr{V} \subset C(Q, \mathscr{X})$ послойно плотно в $\mathscr{X}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $\lim\limits_{p\to q} u(p) = x$;

(2) $\lim\limits_{p\to q}\|u(p) - v(p)\| = \|x - v(q)\|$ *для всех* $v \in \mathscr{V}$;

(3) *если* $v \in \mathscr{V}$, $\varepsilon > 0$ *и* $\|x - v(q)\| < \varepsilon$, *то* $\|u(p) - v(p)\| < \varepsilon$ *для всех* $p \in D\backslash\{q\}$ *в некоторой окрестности точки* q;

(4) $\lim\limits_{p\to q}\|u(p) - v(p)\| = 0$ *для некоторого (а тогда и любого) сечения* $v \in C(Q, \mathscr{X})$, *принимающего значение* $v(q) = x$ *в точке* q *(коль скоро такое сечение существует).*

◀ Эквивалентность каждого из условий (2)–(4) соотношению (1) с легкостью вытекает из 2.1.2, 2.3.2 и 2.3.4, если учесть, что равенство $\lim\limits_{p\to q} u(p) = x$ означает непрерывность в точке q сечения u, доопределенного или переопределенного в этой точке значением x. ▶

2.3.9. Лемма. *Если $\mathscr{X}$ — НБР над Q, $u \in C(Q, \mathscr{X})$ и $q \in Q$, то найдется такая функция $e \in C(Q)$, что $0 \leqslant e \leqslant 1$, $e(q) = 1$ и $|\!|\!|eu|\!|\!| \leqslant \|u(q)\|$.*

◀ Искомую функцию e можно определить следующим образом: $e(p) := 1$ при $\|u(p)\| \leqslant \|u(q)\|$ и $e(p) := \|u(q)\|/\|u(p)\|$ при $\|u(p)\| > \|u(q)\|$. ▶

2.3.10. Следствие. *Если $\mathscr{X}$ — НБР над Q и $q \in Q$, то*

$$\{u(q) : u \in C(Q, \mathscr{X})\} = \{u(q) : u \in C^b(Q, \mathscr{X})\}.$$

◀ Следует из 2.3.9 и 2.3.1. ▶

2.3.11. Следствие. *Если $\mathscr{X}$ — НБР над вполне регулярным пространством Q и $q \in Q$, то $\{x \in \mathscr{X}(q) : \|x\| \leqslant 1\} = \{u(q) : u \in C(Q, \mathscr{X}),\ |\!|\!|u|\!|\!| \leqslant 1\}$.*

◀ Следует из 2.3.5, 2.3.9 и 2.3.10. ▶

§ 2.4. Гомоморфизмы

Понятие гомоморфизма НБР имеет не только теоретико-категорное значение. С интересующей нас точки зрения, гомоморфизм НБР — это, прежде всего, одно из элементарных аналитических представлений определенного класса линейных операторов, действующих в пространствах непрерывных сечений. Именно это соображение сформировало стиль изложения материала в данном параграфе. Начав с классического определения гомоморфизма, не оперирующего понятием сечения, мы затем стремимся описать свойства гомоморфизмов исключительно в терминах их действий на непрерывных сечениях.

2.4.1. Предположим, что $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — НБР над топологическим пространством Q, $D \subset Q$ и $H : q \in D \mapsto H(q) \in B(\mathscr{X}(q), \mathscr{Y}(q))$. Символом $Q \otimes H$ обозначается отображение $D \otimes \mathscr{X}$ в $D \otimes \mathscr{Y}$, действующее по правилу $(Q \otimes H)(q, x) = (q, H(q)x)$. Отображение H называется *ограниченным* (*локально ограниченным*), если таковой является его поточечная норма $|\!|\!|H|\!|\!| : q \in D \mapsto \|H(q)\|$.

2.4.2. Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — НБР над Q. Функция $H : q \in Q \mapsto H(q) \in B(\mathscr{X}(q), \mathscr{Y}(q))$ называется *гомоморфизмом категории* НБР *над* Q или Q-*гомоморфизмом из* $\mathscr{X}$ *в* $\mathscr{Y}$, если $Q \otimes H \in C(Q \otimes \mathscr{X}, Q \otimes \mathscr{Y})$. Множество всех Q-гомоморфизмов из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$ обозначается символом $\mathrm{Hom}_Q(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. Если $D \subset Q$, то для множества $\mathrm{Hom}_D(\mathscr{X}|_D, \mathscr{Y}|_D)$ используется более короткое обозначение: $\mathrm{Hom}_D(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. Элементы $\mathrm{Hom}_D(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ могут быть названы *гомоморфизмами из* $\mathscr{X}$ *в* $\mathscr{Y}$ *над* D.

Пусть $\overline{\mathscr{X}}$ и $\overline{\mathscr{Y}}$ — НБР над Q, $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — их подрасслоения. Будем говорить, что *гомоморфизм* $\overline{H} \in \mathrm{Hom}_Q(\overline{\mathscr{X}}, \overline{\mathscr{Y}})$ *продолжает гомоморфизм* $H \in \mathrm{Hom}_Q(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, если оператор $\overline{H}(q)\colon \overline{\mathscr{X}}(q) \to \overline{\mathscr{Y}}(q)$ является продолжением оператора $H(q)\colon \mathscr{X}(q) \to \mathscr{Y}(q)$ для всех $q \in Q$.

Предположим теперь, что $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — НБР над P и Q соответственно. Если $\sigma \in C(Q,P)$ и $H \in \mathrm{Hom}_Q(\mathscr{X} \circ \sigma, \mathscr{Y})$, то пара (σ, H) называется *гомоморфизмом* (*категории* НБР) *из* $\mathscr{X}$ *в* $\mathscr{Y}$. Множество всех гомоморфизмов из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$ будем обозначать символом $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$.

Пусть $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ и $\mathscr{Z}$ — НБР над P, Q и R соответственно. Если $(\sigma, G) \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ и $(\tau, H) \in \mathrm{Hom}(\mathscr{Y}, \mathscr{Z})$, то *композицией* $(\tau, H) \circ (\sigma, G)$ называется гомоморфизм $(\rho, F) \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Z})$, определенный следующими соотношениями:

$$\rho = \tau \circ \sigma, \quad F(r) = H(r) \circ G(\tau(r)) \quad (r \in R).$$

Как легко видеть, введенные понятия превращают класс всех НБР в категорию. Для любого топологического пространства Q условимся категорию НБР над Q и их Q-гомоморфизмов считать подкатегорией категории всех НБР, отождествляя Q-гомоморфизм H с гомоморфизмом (id_Q, H). В связи с этим мы считаем, что гомоморфизм, действующий в расслоениях над одним и тем же пространством Q, по умолчанию является Q-гомоморфизмом.

2.4.3. Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — НБР над пространствами P и Q соответственно. Гомоморфизм $(\sigma, H) \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ будет называться *изометрическим вложением* $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$, если отображение σ является гомеоморфизмом Q на P, а оператор $H(q)$ изометрически вкладывает $\mathscr{X}(\sigma(q))$ в $\mathscr{Y}(q)$ в каждой точке $q \in Q$. Если, кроме того, все операторы $H(q)$ сюръективны, то вложение H будет называться *изометрией* $\mathscr{X}$ на $\mathscr{Y}$. В этом случае отображение $\tau \otimes (H \circ \tau)\colon (p, x) \mapsto (\tau(p), H(\tau(p))x)$, где $\tau = \sigma^{-1}$, является гомеоморфизмом $P \otimes \mathscr{X}$ на $Q \otimes \mathscr{Y}$.

Если расслоения $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ определены над одним и тем же пространством Q, то в соответствии с 2.4.2 предполагается, что изометрическое вложение $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$ по умолчанию является Q-гомоморфизмом и таким образом представляет собой отображение $H \in \mathrm{Hom}_Q(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, сопоставляющее каждой точке $q \in Q$ изометрическое вложение $H(q)\colon \mathscr{X}(q) \to \mathscr{Y}(q)$. Если, кроме того, H — изометрия, то отображение $Q \otimes H$ является гомеоморфизмом $Q \otimes \mathscr{X}$ на $Q \otimes \mathscr{Y}$. Во избежание недоразумения в конкретной ситуации изометрическое вложение, являющаяся Q-гомоморфизмом, может быть названо Q-*изометрическим*, а изометрия — Q-*изометрией*. НБР, между которыми имеется изометрия (Q-изометрия), называются *изометричными* (Q-*изометричными*).

Следующее утверждение вытекает непосредственно из определений: если H — изометрическое вложение $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$, то в $\mathscr{Y}$ существует такое (единственное) подрасслоение $\mathscr{Y}_0$, что H является изометрией $\mathscr{X}$ на $\mathscr{Y}_0$.

2.4.4. Теорема. *Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — НБР над Q. Отображение $H : q \in Q \mapsto H(q) \in B(\mathscr{X}(q), \mathscr{Y}(q))$ является гомоморфизмом из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:*

(а) *отображение H локально ограничено;*
(б) *$H \otimes u \in C(Q, \mathscr{Y})$ для всех $u \in C(Q, \mathscr{X})$.*

◄ Предположим, что $H \in \mathrm{Hom}_Q(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, и установим (а) (условие (б) очевидно ввиду 2.1.7). Для каждого натурального n обозначим множество $\{p \in Q : \|H(p)\| > n\}$ через U_n. Допустим, что функция $|||H|||$ не ограничена в любой окрестности некоторой точки $q \in Q$. Это означает, что q принадлежит замыканию U_n для всех $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\mathscr{N}(q)$ фильтр окрестностей точки q. Для любых $V \in \mathscr{N}(q)$ и $n \in \mathbb{N}$ выберем произвольным образом элемент $q_n^V \in V \cap U_n$. Поскольку $\|H(q_n^V)\| > n$, найдется такой элемент $x_n^V \in \mathscr{X}(q_n^V)$, что $\|x_n^V\| \leqslant 1/n$ и $\|H(q_n^V)x_n^V\| > 1$. Рассматривая на множестве $\mathscr{N}(q) \times \mathbb{N}$ порядок, при котором $(V_1, n_1) \leqslant (V_2, n_2)$ в случае $V_1 \supset V_2$ и $n_1 \leqslant n_2$, мы получаем сеть $\left((q_n^V, x_n^V)\right)_{(V,n)\in\mathscr{N}(q)\times\mathbb{N}}$ элементов $Q\otimes\mathscr{X}$, сходящуюся к $(q,0)$. Однако сеть $H(q_n^V)x_n^V$, очевидно, не сходится к $H(q)0=0$, что противоречит непрерывности $Q\otimes H$.

Предположим теперь выполненными условия (а) и (б). Для проверки включения $H\in\mathrm{Hom}_Q(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ достаточно показать открытость в $Q\otimes\mathscr{X}$ множества $(Q\otimes H)^{-1}[V(v,\delta)]$ для любого числа $\delta>0$, сечения $v\in C(Q,\mathscr{Y})$ и открытого подмножества $V\subset Q$. Зафиксируем произвольные такие δ, v и V и, предположив, что $(q,x)\in(Q\otimes H)^{-1}[V(v,\delta)]$, займемся поиском числа $\varepsilon>0$, сечения $u\in C(Q,\mathscr{X})$ и открытого подмножества $U\subset Q$, удовлетворяющих включениям

$$(q,x)\in U(u,\varepsilon)\subset(Q\otimes H)^{-1}[V(v,\delta)]. \tag{4}$$

Выберем δ_0 так, чтобы $\|v(q)-H(q)x\|<\delta_0<\delta$. В силу условия (а) найдется открытая окрестность $V_0\subset V$ точки q, на которой функция $|||H|||$ ограничена сверху некоторым числом b. Положим $\varepsilon=(\delta-\delta_0)/(2b)$ и выберем сечение $u\in C(Q,\mathscr{X})$ так, чтобы $\|u(q)-x\|<\varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned}\|v(q)-H(q)u(q)\| &\leqslant \|v(q)-H(q)x\|+\|H(q)x-H(q)u(q)\|\\ &< \delta_0+b\|x-u(q)\|\\ &< \delta_0+b\varepsilon.\end{aligned}$$

Ввиду условия (б) функция $|||v-H\otimes u|||$ непрерывна, и тем самым найдется такая открытая окрестность $U\subset V_0$ точки q, что $\|v(p)-H(p)u(p)\|<\delta_0+b\varepsilon$ для всех $p\in U$. Тогда если $p\in U$, $x\in\mathscr{X}(p)$ и $\|u(p)-x\|<\varepsilon$, то

$$\begin{aligned}\|v(p)-H(p)x\| &\leqslant \|v(p)-H(p)u(p)\|+\|H(p)u(p)-H(p)x\|\\ &< \delta_0+b\varepsilon+b\|u(p)-x\|\\ &< \delta_0+b\varepsilon+b\varepsilon\\ &= \delta,\end{aligned}$$

что и обеспечивает (4). ▶

2.4.5. Теорема. *Если в условии теоремы 2.4.4 дополнительно потребовать $\mathscr{X}(q)\neq 0$ для всех $q\in Q$, то локальная ограниченность отображения H, требуемая в п.* (а) *теоремы 2.4.4, эквивалентна следующему его свойству:* (а′) *существует послойно плотное в $\mathscr{X}$ равномерно замкнутое векторное подпространство $\mathscr{U}\subset C^b(Q,\mathscr{X})$ такое, что множество сечений $\{H\otimes u : u\in\mathscr{U}\}$ равностепенно локально ограничено* (см. 1.7.6).

◀ Для обоснования необходимости условия (а′) достаточно положить $\mathscr{U}$ равным $C^b(Q,\mathscr{X})$.

Предположим, что отображение $H\colon q\in Q\mapsto H(q)\in B(\mathscr{X}(q),\mathscr{Y}(q))$ и подпространство $\mathscr{U}\subset C^b(Q,\mathscr{X})$ удовлетворяют условию (а′). Для доказательства 2.4.4 (а) зафиксируем произвольную точку $q_0\in Q$ и предположим, что U — открытая окрестность q_0, на которой ограничены сечения $H\otimes u$ для всех $u\in\mathscr{U}$. Для каждой точки $q\in U$ определим линейный оператор $T_q\colon\mathscr{U}\to\mathscr{Y}(q)$ по правилу $T_q u=H(q)u(q)$. Снабжая векторное пространство $\mathscr{U}$ равномерной нормой (см. 1.7.6), мы видим, что $\|T_q\|\leqslant\|H(q)\|$ и, кроме того,

$$\sup_{q\in U}\|T_q u\|=\sup_{q\in U}\|(H\otimes u)(q)\|<\infty$$

для всех $u\in C(Q,\mathscr{X})$. Согласно 2.3.6 нормированное пространство $\mathscr{U}$ является банаховым. Поэтому $\sup_{q\in U}\|T_q\|<\infty$ в силу принципа равномерной ограниченности. Для каждой точки $q\in U$ обозначим число $\sup\{\|u(q)\| : u\in\mathscr{U},\ |||u|||\leqslant 1\}$ через $e(q)$. Ввиду послойной плотности $\mathscr{U}$ в $\mathscr{X}$ мы имеем

$$\begin{aligned}\|T_q\| &= \sup\{\|H(q)u(q)\| : u\in\mathscr{U},\ |||u|||\leqslant 1\}\\ &= \sup\{\|H(q)x\| : x\in\mathscr{X}(p),\ \|x\|\leqslant e(q)\}\\ &= e(q)\cdot\|H(q)\|.\end{aligned}$$

Послойная плотность $\mathscr{U}$ и невырожденность слоя $\mathscr{X}(q)$ дают нам также неравенство $e(q) > 0$ для всех $q \in U$, и, таким образом, $\|H(q)\| = \|T_q\|/e(q)$. Поскольку функция e полунепрерывна снизу, функция $1/e$ полунепрерывна сверху, а значит, локально ограничена. В силу этого функция $1/e$ ограничена на некоторой окрестности $U_0 \subset U$ точки q_0, а тогда на этой же окрестности ограничено и отображение H. ▶

2.4.6. Следующий пример показывает, что требование невырожденности слоев $\mathscr{X}$ в теореме 2.4.5 не может быть опущено.

Пример. Обозначим одноточечную компактификацию $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ дискретного топологического пространства $\mathbb{N}$ через Q и рассмотрим непрерывное банахово подрасслоение $\mathscr{X}$ постоянного расслоения $Q \times \{\mathbb{R}\}$, определяемое соотношениями $\mathscr{X}(n) = \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$, $\mathscr{X}(\infty) = 0$. Пусть отображение $H\colon q \in Q \mapsto H(q) \in B(\mathscr{X}(q), \mathscr{X}(q))$ действует по правилу $H(n)x = nx$ $(x \in \mathbb{R})$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\mathscr{U}$ одномерное пространство $\{\lambda u_0 : \lambda \in \mathbb{R}\}$ сечений расслоения $\mathscr{X}$, где сечение u_0 над Q принимает значение $u_0(n) = 1/n^2$ в точке $n \in \mathbb{N}$. Тогда множество $\mathscr{U}$ представляет собой послойно плотное в $\mathscr{X}$ равномерно замкнутое подпространство $C^b(Q, \mathscr{X})$ и, кроме того, $H \otimes u \in C^b(Q, \mathscr{X})$ для всех $u \in \mathscr{U}$. Однако H не является гомоморфизмом из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{X}$.

Приведенный пример можно легко модифицировать для случая, когда Q является компактификацией $\mathbb{N}$ по Стоуну — Чеху. Таким образом, условие невырожденности слоев в 2.4.5 является существенным даже в ситуации экстремально несвязного компакта.

2.4.7. Топологическое пространство называется *псевдокомпактным*, если всякая определенная и непрерывная на нем вещественная функция ограничена (см. [55, 17.7.7]). *Локально псевдокомпактным* называется топологическое пространство каждая точка которого имеет псевдокомпактную окрестность.

Теорема. *Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — НБР над локально псевдокомпактным топологическим пространством Q. Отображение $H\colon q \in Q \mapsto H(q) \in B(\mathscr{X}(q), \mathscr{Y}(q))$ является гомоморфизмом из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$ тогда и только тогда, когда $H \otimes u \in C(Q, \mathscr{Y})$ для всех $u \in C(Q, \mathscr{X})$.*

◀ В силу теоремы 2.4.4 достаточно, предположив непрерывность сечений $H \otimes u$ для всех $u \in C(Q, \mathscr{X})$, доказать локальную ограниченность H.

Для каждой точки $q \in Q$ определим линейный оператор $T_q\colon C^b(Q, \mathscr{X}) \to \mathscr{Y}(q)$ по правилу $T_q u = H(q)u(q)$. Снабжая пространство $C^b(Q, \mathscr{X})$ равномерной нормой и рассматривая произвольное псевдокомпактное подмножество $U \subset Q$, мы, как и в 2.4.5, заключаем, что $\sup_{q \in U} \|T_q\| < \infty$. Остается заметить, что на основании 2.3.11

$$\begin{aligned}\|H(q)\| &= \sup\{\|H(q)x\| \in \mathscr{X}(q) \ : \ \|x\| \leqslant 1\}\\ &= \sup\{\|H(q)u(q)\| \ : \ u \in C(Q, \mathscr{X}),\ \|u\|_\infty \leqslant 1\}\\ &= \|T_q\|. \ \blacktriangleright\end{aligned}$$

2.4.8. Сопоставляя теоремы 2.4.4 и 2.4.7, мы видим, что в случае локально псевдокомпактного пространства Q условие (а) в формулировке теоремы 2.4.4 вытекает из (б). Предлагаемый ниже пример обосновывает существенность предположения о локальной псевдокомпактности в 2.4.7.

Мы построим экстремально несвязный компакт $\overline{Q}$, множество $Q \subset \overline{Q}$, содержащее открытое всюду плотное подмножество $\overline{Q}$, банахово пространство X и отображение $H\colon Q \to X'$ так, что $H \otimes u \in C(Q)$ для всех $u \in C(Q, X)$, но функция H не является локально ограниченной. Предлагаемая конструкция безусловно имеет более простые аналоги при менее ограничительных требованиях.

Пусть Ω — произвольное несчетное множество, $\mathscr{P}_\sigma(\Omega)$ — совокупность всех его счетных подмножеств. Наделив $\Omega \times \mathbb{N}$ дискретной топологией, положим $\overline{Q}$ равным компактификации $\beta(\Omega \times \mathbb{N})$ пространства $\Omega \times \mathbb{N}$ по Стоуну — Чеху. Естественным образом отождествляя замыкание в $\overline{Q}$ множества $\Omega \times \{n\}$ с произведением $(\beta\Omega) \times \{n\}$, будем считать, что $(\beta\Omega) \times \mathbb{N} \subset \bar{Q}$. Обозначим через Q_0 пересечение направленного вниз семейства непустых замкнутых множеств $\overline{Q} \setminus \mathrm{cl}(\Sigma \times \mathbb{N})$, $\Sigma \in \mathscr{P}_\sigma(\Omega)$, и положим Q равным объединению $(\Omega \times \mathbb{N}) \cup Q_0$. Заметим, что в силу компактности $\overline{Q}$ множество Q_0 непусто.

Обозначим через X снабженное равномерной нормой банахово пространство $c_0(\Omega)$ всех функций из $C(\beta\Omega)$, зануляющихся вне Ω. (Вместо $c_0(\Omega)$ в качестве X можно взять любое из пространств $\ell^p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$.) Отображение $H : Q \to X'$ определим следующим образом: $H(\omega, n)x := n \cdot x(\omega)$ при $(\omega, n) \in \Omega \times \mathbb{N}$ и $H(q) := 0$ при $q \in Q_0$. Очевидно, функция H является неограниченной на любой окрестности каждой точки, лежащей в (непустом) множестве $Q_0 \setminus (\beta\Omega \times \mathbb{N})$. Докажем однако, что $H \otimes u \in C(Q)$ для всех $u \in C(Q, X)$.

Рассмотрим произвольный элемент $u \in C(Q, X)$. Благодаря дискретности топологии на $\Omega \times \mathbb{N}$ достаточно установить равенство $H \otimes u = 0$ в некоторой окрестности множества Q_0. Обозначим $\Omega \cup \bigcap\limits_{\Sigma \in \mathscr{P}_\sigma(\Omega)} \beta\Omega \setminus \mathrm{cl}\,\Sigma$ через $\overline{\Omega}$. Очевидно, что $\overline{\Omega} \times \mathbb{N} \subset Q$. Зафиксируем произвольное число $n \in \mathbb{N}$. Из непрерывности на $\overline{\Omega}$ функций $\omega \mapsto u(\omega, n)$ и $\omega \mapsto u(\omega_0, n)(\omega)$, $\omega_0 \in \bar{\Omega}$, и из неравенства $|u(\omega_1, n)(\omega_1) - u(\omega_2, n)(\omega_2)| \leqslant \|u(\omega_1, n) - u(\omega_2, n)\| + |u(\omega_2, n)(\omega_1) - u(\omega_2, n)(\omega_2)|$ вытекает непрерывность функции $f_n : \omega \mapsto u(\omega, n)(\omega)$ на $\overline{\Omega}$. Поскольку отображение u принимает свои значения в пространстве X, мы имеем $f_n(\omega) = 0$ при $\omega \in \overline{\Omega} \setminus \Omega$.

Докажем, что функция f_n равна нулю на $\overline{\Omega}$ вне замыкания $\mathrm{cl}\,\Sigma_n$ некоторого счетного подмножества $\Sigma_n \subset \Omega$. Поскольку $f_n = 0$ на $\overline{\Omega} \setminus \Omega$, нам достаточно показать счетность множества $\{\omega \in \Omega : f_n(\omega) \neq 0\}$. Предположим, что последнее множество не является счетным и выделим в нем трансфинитную последовательность $(\omega_\alpha)_{\alpha < \aleph_1}$ попарно различных элементов, занумерованную посредством первого несчетного ординала $\aleph_1$. Поскольку $f_n(\omega_\alpha) \neq 0$ для всех $\alpha < \aleph_1$, а ординал $\aleph_1$ не имеет счетного конфинального подмножества, последовательность $(f_n(\omega_\alpha))_{\alpha < \aleph_1}$ не может сходиться к нулю. Это означает существование числа $\varepsilon > 0$ и конфинального подмножества $A \subset \aleph_1$ таких, что $|f_n(\omega_\alpha)| > \varepsilon$ для всех $\alpha \in A$. Из несчетности множества $\{\omega_\alpha : \alpha \in A\}$ и компактности $\beta\Omega$ следует непустота пересечения $\Omega_0 := \bigcap\limits_{\Sigma \in \mathscr{P}_\sigma(\Omega)} (\mathrm{cl}\{\omega_\alpha : \alpha \in A\} \setminus \mathrm{cl}\,\Sigma)$. Ясно, что $|f_n| \geqslant \varepsilon$ на Ω_0. С другой стороны, Ω_0 содержится в множестве $\overline{\Omega} \setminus \Omega$, на котором функция f_n равна нулю. Полученное противоречие доказывает существование искомого множества Σ_n.

Так как объединение $\Sigma := \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$ счетно, множество $U := Q \setminus \mathrm{cl}(\Sigma \times \mathbb{N})$ является окрестностью Q_0 в Q. Осталось заметить, что $(H \otimes u)(\omega, n) = n \cdot u(\omega, n)(\omega) = 0$ при $(\omega, n) \in (\Omega \times \mathbb{N}) \cap U$, а значит, $H \otimes u = 0$ на U.

2.4.9. Теорема. *Условие* (б) *в формулировке теоремы* 2.4.4 *может быть ослаблено до следующего:*

(б$'$) *существует послойно плотное в* $\mathscr{X}$ *подмножество* $\mathscr{V} \subset C(Q, \mathscr{X})$ *такое, что* $H \otimes v \in C(Q, \mathscr{Y})$ *для всех* $v \in \mathscr{V}$.

◀ Для обоснования необходимости условия (б$'$) достаточно положить $\mathscr{V} := C(Q, \mathscr{X})$.

Установим свойство 2.4.4 (б) отображения H, исходя из его ослабленного варианта (б$'$) и условия 2.4.4 (а). Согласно 2.3.2 для этого достаточно, зафиксировав произвольные сечения $u \in C(Q, \mathscr{X})$ и $w \in C(Q, \mathscr{Y})$, показать полунепрерывность сверху функции $|||H \otimes u - w|||$ в каждой точке $q \in Q$. Пусть число λ таково, что $\|H(q)u(q) - w(q)\| < \lambda$. Тогда, воспользовавшись ограниченностью H в окрестности q и непрерывностью функций $|||u - v|||$ и $|||H \otimes v - w|||$ для всех $v \in \mathscr{V}$, можно выбрать сечение v с настолько близким к $u(q)$ значением $v(q)$, что неравенство $\|H(p)u(p) - w(p)\| < \lambda$ будет соблюдено для всех элементов p некоторой окрестности точки q. ▶

2.4.10. Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — НБР над Q. Как утверждает теорема 2.4.5, свойство (a′) отображения $H\colon q \in Q \mapsto H(q) \in B(\mathscr{X}(q), \mathscr{Y}(q))$ оказывается эквивалентным более сильному, на первый взгляд, условию 2.4.4 (a). Предлагаемое же в 2.4.9 условие (б′) действительно слабее аналогичного требования 2.4.4 (б). В самом деле, согласно 2.4.7 в случае локально псевдокомпактного пространства Q из условия 2.4.4 (б) вытекает 2.4.4 (a). Однако, как показывает следующий пример, условие 2.4.9 (б′) не обеспечивает 2.4.4 (a), даже если Q — экстремально несвязный компакт, а НБР $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ постоянны.

Пусть Q — компактификация дискретного топологического пространства $\mathbb{N}$ по Стоуну — Чеху, c_0 — банахово пространство сходящихся к нулю последовательностей (снабженное равномерной нормой), s_{fin} — пространство финитных (= устанавливающихся на нуле) последовательностей. Положим $\mathscr{X} := Q \times \{c_0\}$, $\mathscr{Y} := Q \times \{\mathbb{R}\}$ и определим отображение $H\colon Q \to c_0'$ следующим образом: $H(n)x = n \cdot x(n)$ при $n \in \mathbb{N}$ и $H(q) = 0$ при $q \in Q \backslash \mathbb{N}$. Если теперь обозначить через $\mathscr{V}$ совокупность всех постоянных функций $v\colon Q \to s_{\mathrm{fin}}$, то $H \otimes v \in C(Q)$ при $v \in \mathscr{V}$, однако отображение H, очевидно, не является локально ограниченным.

2.4.11. Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — НБР над Q. Обозначим через $\mathscr{L}$ банахово расслоение над Q со слоями $B(\mathscr{X}(q), \mathscr{Y}(q))$ в точках $q \in Q$. Из 2.4.4 следует, что множество $\mathrm{Hom}_Q(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ всех Q-гомоморфизмов из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$ и множество $\mathrm{Hom}_Q^b(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ всех ограниченных Q-гомоморфизмов из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$ являются векторными подпространствами $S(Q, \mathscr{L})$.

Предложение. *Множество* $\mathrm{Hom}_Q^b(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ *представляет собой замкнутое векторное подпространство* $\ell^\infty(Q, \mathscr{L})$. *В частности,* $\mathrm{Hom}_Q^b(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ *— банахово пространство (в смысле равномерной нормы).*

◀ В силу 2.3.10 множество $C^b(Q, \mathscr{X})$ послойно плотно в $\mathscr{X}$. Поэтому согласно 2.4.9 для того чтобы доказать, что равномерный предел $H \in \ell^\infty(Q, \mathscr{L})$ последовательности гомоморфизмов $H_n \in \mathrm{Hom}_Q(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ является гомоморфизмом, достаточно установить непрерывность сечения $H \otimes u$ для каждого $u \in C^b(Q, \mathscr{X})$. Последнее с очевидностью следует из 2.3.6 ввиду равномерной сходимости сечений $H_n \otimes u \in C^b(Q, \mathscr{Y})$ к $H \otimes u$. ▶

2.4.12. Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — НБР над Q, $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ — векторные подпространства $C(Q, \mathscr{X})$ и $C(Q, \mathscr{Y})$ соответственно. Линейный оператор $i\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ называется $C(Q)$-*изометрическим вложением*, если $|||i(u)||| = |||u|||$ для всех $u \in \mathscr{U}$ (ср. 1.4.2). Сюръективное $C(Q)$-изометрическое вложение называется $C(Q)$-*изометрией*. Пространства $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ называют $C(Q)$-*изометричными*, если существует $C(Q)$-изометрия $\mathscr{U}$ на $\mathscr{V}$.

Теорема. *Следующие свойства* НБР $\mathscr{X}$ *и* $\mathscr{Y}$ *над* Q *эквивалентны:*

(1) НБР $\mathscr{X}$ *и* $\mathscr{Y}$ *являются* Q-*изометричными;*
(2) *пространства* $C(Q, \mathscr{X})$ *и* $C(Q, \mathscr{Y})$ *являются* $C(Q)$-*изометричными;*
(3) *пространства* $C(Q, \mathscr{X})$ *и* $C(Q, \mathscr{Y})$ *имеют* $C(Q)$-*изометричные послойно плотные подпространства.*

◀ Импликации (1)⇒(2)⇒(3) очевидны. Покажем, что (3)⇒(1). Пусть i является $C(Q)$-изометрией $\mathscr{U}$ на $\mathscr{V}$, где $\mathscr{U} \subset C(Q, \mathscr{X})$ и $\mathscr{V} \subset C(Q, \mathscr{Y})$ — послойно плотные подпространства. Введем обозначения $\mathscr{X}_0(q) := \{u(q) : u \in \mathscr{U}\}$ и $\mathscr{Y}_0(q) := \{v(q) : v \in \mathscr{V}\}$ и определим линейную изометрию $H_0(q)$ пространства

$\mathscr{X}_0(q)$ на $\mathscr{Y}_0(q)$ так, что $H_0(q)u(q) = i(u)(q)$ для всех $u \in \mathscr{U}$. Ввиду плотности подпространств $\mathscr{X}_0(q) \subset \mathscr{X}(q)$ и $\mathscr{Y}_0(q) \subset \mathscr{Y}(q)$ оператор $H_0(q)$ продолжается до изометрии $H(q)\colon \mathscr{X}(q) \to \mathscr{Y}(q)$. Из теорем 2.4.4 и 2.4.9 следует, что построенное отображение H осуществляет изометрию $\mathscr{X}$ на $\mathscr{Y}$. ▶

2.4.13. *Следствие.* *Непрерывное банахово расслоение, порожденное данным мультинормированным пространством* (см. 2.2.7), *единственно с точностью до изометрии.*

§ 2.5. Банаховы расслоения над экстремально несвязными компактами

В этом параграфе собраны основные сведения о НБР над экстремально несвязными компактами. Главной особенностью таких НБР является возможность продолжить любое непрерывное сечение на некоторую наибольшую область определения. Возникающее в этой связи понятие расширенного сечения в дальнейшем играет ключевую роль. В частности, именно из таких сечений составляются реализационные пространства для РНП. Данный параграф включает также и некоторые факты, представляющие самостоятельный интерес. Например, теорема 2.5.7 предлагает различные топологические описания аппроксимирующих множеств сечений. Теорема 2.5.9 демонстрирует, насколько упрощается формулировка теоремы Стоуна — Вейерштрасса в случае, когда база НБР является экстремально несвязным компактом.

На протяжении всего параграфа Q — непустой экстремально несвязный компакт, $\mathscr{X}$ — НБР над Q.

2.5.1. Пусть u — непрерывное сечение $\mathscr{X}$ над всюду плотным подмножеством $D \subset Q$. Обозначим через $\overline{D}$ совокупность всех точек Q, в которых сечение u имеет предел (см. 2.3.7, 2.3.8), и положим $\bar{u}(q) = \lim\limits_{p\to q} u(p)$ для всех $q \in \overline{D}$.

Лемма. (1) *Функция $\bar{u}$ представляет собой непрерывное сечение $\mathscr{X}$ над $\overline{D}$.*

(2) *Множество $\overline{D}$ является котощим в Q.*

◀ (1) Поскольку топологическое пространство $Q \otimes \mathscr{X}$ является вполне регулярным (см. 2.1.6), мы можем ввести в рассмотрение какую-либо его компактификацию $\overline{Q \otimes \mathscr{X}}$. Непрерывная функция $Q \otimes u\colon D \to Q \otimes \mathscr{X}$ имеет (единственное) непрерывное продолжение $\overline{Q \otimes u}\colon Q \to \overline{Q \otimes \mathscr{X}}$. Несложно убедиться в том, что $\{q \in Q : \overline{Q \otimes u}(q) \in Q \otimes \mathscr{X}\} = \overline{D}$ и $\overline{Q \otimes u}(q) = (q, \bar{u}(q))$ для всех $q \in \overline{D}$. Для обоснования непрерывности сечения $\bar{u}$ осталось сослаться на теорему 2.1.7.

(2) Для каждой точки $q \in D$ и числа $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим какое-либо сечение $u_q \in C(Q, \mathscr{X})$, принимающее значение $u_q(q) = u(q)$ в точке q, и обозначим через U_q^n открыто-замкнутую окрестность q, на которой $\operatorname{ext}(|\!|\!|u - u_q|\!|\!|) \leqslant 1/n$. Поскольку объединение $\bigcup\limits_{q\in Q} U_q^n$ содержит всюду плотное подмножество D, в булевой алгебре $\operatorname{Clop}(Q)$ выполнено соотношение $\sup_{q\in Q} U_q^n = Q$. В силу принципа исчерпывания (см. 1.2.1) существует такое разбиение единицы $\left(V_q^n\right)_{q\in Q}$ в $\operatorname{Clop}(Q)$, что $V_q^n \subset U_q^n$ для всех $q \in Q$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ перемешивание $u_n = \bigcup\limits_{q\in Q} u_q|_{V_q^n}$ представляет собой непрерывное сечение над открытым всюду плотным множеством $G_n = \bigcup\limits_{q\in Q} V_q^n$. Очевидно, $|\!|\!|u - u_n|\!|\!| \leqslant 1/n$ на всюду плотном пересечении $D \cap G_n$ и тем самым $\operatorname{ext}(|\!|\!|u - u_n|\!|\!|) \leqslant 1/n$ на Q. Последнее соотношение обеспечивает фундаментальность последовательности $(u_n(q))_{n\in\mathbb{N}}$ для каждого элемента q котощего множества $G = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$. Полагая $v(q) := \lim\limits_{n\to\infty} u_n(q)$ для всех $q \in G$, мы получаем сечение v, которое, будучи равномерным пределом

последовательности $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ на G, является непрерывным (см. 2.3.6). Осталось заметить, что $\lim\limits_{p\to q} u(p) = v(q)$ при $q \in G$ и тем самым $G \subset \overline{D}$. ▶

2.5.2. Следствие. *Определенное в 2.5.1 сечение $\bar{u}$ является наибольшим непрерывным продолжением u, т. е. область определения любого непрерывного продолжения u содержится в $\overline{D}$ и, более того, $\bar{u}$ является продолжением любого непрерывного продолжения u.*

Сечение $\bar{u}$ мы будем называть ***максимальным расширением*** u (в расслоении $\mathscr{X}$) и обозначать символом $\operatorname{ext}(u)$ или, более подробно, $\operatorname{ext}_{\mathscr{X}}(u)$ (ср. 1.1.1). Непрерывное сечение u над всюду плотным подмножеством $D \subset Q$ будет называться ***расширенным***, если $\operatorname{ext}(u) = u$. Символ $C_\infty(Q, \mathscr{X})$ обозначает множество всех расширенных сечений $\mathscr{X}$. Из 2.5.1 следует, что все расширенные сечения являются почти глобальными. Совокупность всех ограниченных расширенных сечений $\mathscr{X}$ обозначается через $C_\infty^b(Q, \mathscr{X})$.

На множестве $C_\infty(Q, \mathscr{X})$ введем структуру РНП над $C_\infty(Q)$ следующим образом. Если $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и $u, v \in C_\infty(Q, \mathscr{X})$, то линейная комбинация $\lambda u + \mu v$ определяется как $\operatorname{ext}(\lambda u|_D + \mu v|_D)$, где $D = \operatorname{dom} u \cap \operatorname{dom} v$. (Напомним, что пересечение котощих множеств является котощим и, в частности, всюду плотным в бэровском пространстве Q.) В качестве нормы $|u|$ сечения $u \in C_\infty(Q, \mathscr{X})$ возьмем продолжение $\operatorname{ext}(|\!|\!|u|\!|\!|) \in C_\infty(Q)$ непрерывной функции $|\!|\!|u|\!|\!|$. Обозначение $|u|$ для функции $\operatorname{ext}(|\!|\!|u|\!|\!|)$ используется также и в том случае, когда непрерывное сечение u определено на произвольном всюду плотном подмножестве Q. Пространство $C_\infty(Q, \mathscr{X})$ представляет собой модуль над $C_\infty(Q)$, где $eu = \operatorname{ext}(e|_{\operatorname{dom} u} \cdot u|_{\operatorname{dom} e})$ для $e \in C_\infty(Q)$ и $u \in C_\infty(Q, \mathscr{X})$.

2.5.3. Теорема. *Пространство $C_\infty(Q, \mathscr{X})$ является (расширенным) ПБК над $C_\infty(Q)$.*

◀ Разложимость РНП $C_\infty(Q, \mathscr{X})$ очевидна. На основании теоремы 1.4.3 для доказательства o-полноты $C_\infty(Q, \mathscr{X})$ достаточно установить его d- и r-полноту.

Пусть $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство попарно дизъюнктных элементов $C_\infty(Q, \mathscr{X})$. Дизъюнктность сечений u_ξ означает в нашей ситуации дизъюнктность их (открыто-замкнутых) носителей $Q_\xi = \operatorname{supp} u_\xi$. Обозначим символом $\overline{\Xi}$ расширение $\Xi \cup \{\infty\}$ множества Ξ не содержащимся в нем элементом ∞ и пополним семейства (u_ξ) и (Q_ξ) соответственно нулевым сечением u_∞ и множеством $Q_\infty = Q \setminus \operatorname{cl} \bigcup\limits_{\xi\in\Xi} Q_\xi$. Для каждого $\xi \in \overline{\Xi}$ положим $D_\xi := Q_\xi \cap \operatorname{dom} u_\xi$. Семейство $(Q_\xi)_{\xi\in\overline{\Xi}}$ представляет собой разбиение единицы в булевой алгебре $\operatorname{Clop}(Q)$. Поэтому согласно 1.1.10 объединение $\bigcup\limits_{\xi\in\overline{\Xi}} D_\xi$ является котощим и, в частности, всюду плотным подмножеством Q. Обозначив через u максимальное расширение (непрерывного) сечения $\bigcup\limits_{\xi\in\overline{\Xi}} u_\xi|_{D_\xi}$, нетрудно убедиться в том, что $u = o\text{-}\sum\limits_{\xi\in\Xi} u_\xi$.

Пусть последовательность $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов $C_\infty(Q, \mathscr{X})$ r-фундаментальна с регулятором $e \in C_\infty(Q)$. Тогда последовательность $(u_n(q))_{n\in\mathbb{N}}$ фундаментальна для каждого элемента q котощего множества $D = \operatorname{dom} e \cap \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{dom} u_n$. Обозначим через u_0 поточечный предел последовательности (u_n) на D. Ввиду r-фундаментальности (u_n) и локальной ограниченности e, последовательность (u_n) стремится к u_0 локально равномерно на D, и, таким образом, сечение u_0 непрерывно (см. 2.3.6). Обозначив через u максимальное расширение u_0, нетрудно убедиться в том, что $u = r\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ с регулятором e. ▶

2.5.4. Если E — идеал в $C_\infty(Q)$, то множество $E(\mathscr{X}) := \{u \in C_\infty(Q, \mathscr{X}) : |u| \in E\}$, снабженное операциями, индуцированными из $C_\infty(Q, \mathscr{X})$, очевидно, представляет собой ПБК над E. Ниже (см. 3.4.2, 3.4.4) мы увидим, что пространство $E(\mathscr{X})$ является в определенном смысле общим видом ПБК.

Если $\mathscr{U} \subset E(\mathscr{X})$, то множество $\mathrm{cl} \bigcup\limits_{u \in \mathscr{U}} \operatorname{supp} u$ называется *носителем* $\mathscr{U}$ и обозначается символом $\operatorname{supp} \mathscr{U}$ (ср. 1.3.7). Очевидно, что $\langle \operatorname{supp} \mathscr{U} \rangle = \langle \mathscr{U} \rangle$, т. е. оператор $u \mapsto \operatorname{ext}(\chi_{\operatorname{supp} \mathscr{U}}\, u)$ является порядковым проектором на компоненту, порожденную множеством $\mathscr{U}$. В частности, $\langle \operatorname{supp} u \rangle = \langle u \rangle$ для любого сечения $u \in E(\mathscr{X})$.

Заметим, что пространство глобальных непрерывных сечений $C(Q, \mathscr{X})$, будучи РНП над $C(Q)$, вообще говоря, не является ПБК (см., например, 5.1.3) и тем самым не совпадает с идеальным пространством $E(\mathscr{X})$, где $E = C(Q)$.

2.5.5. Предложение. *Пусть u и v — непрерывные сечения $\mathscr{X}$ над всюду плотными подмножествами Q. Следующие утверждения равносильны:*

(1) $\operatorname{ext}(u) = \operatorname{ext}(v)$;

(2) $\lim\limits_{p \to q} u(p) = v(q)$ *для всех* $q \in \operatorname{dom} v$;

(3) *объединение* $u \cup v$ *является непрерывным сечением над* $\operatorname{dom} u \cup \operatorname{dom} v$ *(в частности,* $u \equiv v$ *на* $\operatorname{dom} u \cap \operatorname{dom} v$*).*

2.5.6. Введем отношение *эквивалентности* $\sim$ на множестве $C_d(Q, \mathscr{X})$ всех непрерывных сечений $\mathscr{X}$ над всюду плотными подмножествами Q, положив $u \sim v$ в том и только том случае, если выполнено одно из равносильных условий (1)–(3), перечисленных в предложении 2.5.5.

Ясно, что если пересечение областей определения сечений u и v всюду плотно в Q (например, когда эти сечения почти глобальны), то эквивалентность $u \sim v$ равносильна совпадению u и v на $\operatorname{dom} u \cap \operatorname{dom} v$. Заметим однако, что пересечение двух всюду плотных подмножеств экстремально несвязного компакта не всегда является всюду плотным и может оказаться пустым, даже если одно из множеств котощее. Действительно, пусть Q — экстремально несвязный компакт ультрафильтров в полной булевой алгебре всех регулярных открытых подмножеств $[0, 1]$. Обозначим через D совокупность всех ультрафильтров из Q, расширяющих фильтры регулярных открытых окрестностей рациональных чисел. Тогда из 1.2.10 следует, что D является тощим всюду плотным подмножеством Q.

Очевидно, снижение оператора ext осуществляет взаимно однозначное соответствие между элементами фактор-множества $C_d(Q, \mathscr{X})/{\sim}$ и пространства $C_\infty(Q, \mathscr{X})$. С помощью такого соответствия множество $C_d(Q, \mathscr{X})/{\sim}$ можно естественным образом наделить структурой ПБК над $C_\infty(Q)$ (см. 2.5.2, 2.5.3).

Как следует из 2.5.1, в каждом классе эквивалентности из $C_d(Q, \mathscr{X})/{\sim}$ имеются почти глобальные представители. Поскольку работать с ними значительно проще, чем с сечениями над произвольными всюду плотными подмножествами Q, в рамках теории РНП обычно ограничиваются рассмотрением лишь почти глобальных сечений (см., например, [12, 23]). Заметим, что построение пространства расширенных сечений $C_\infty(Q, \mathscr{X})$ фактически заключается в выделении в каждом классе эквивалентности из $C_d(Q, \mathscr{X})/{\sim}$ по каноническому представителю с наибольшей областью определения.

2.5.7. Для произвольного подмножества $\mathscr{U} \subset C_\infty(Q, \mathscr{X})$ и точки $q_0 \in Q$ обозначим совокупность $\{u(q_0) : u \in \mathscr{U},\ q_0 \in \operatorname{dom} u\}$ через $\mathscr{U}(q_0)$. Кроме того, введем обозначение $Q \otimes \mathscr{U}$ для множества $\{(q, u(q)) : u \in \mathscr{U},\ q \in \operatorname{dom} u\} = \cup\mathscr{U}$.

Теорема. *Следующие свойства множества $\mathscr{U} \subset C_\infty(Q, \mathscr{X})$ эквивалентны:*

(1) *множество $Q \otimes \mathscr{U}$ всюду плотно в $Q \otimes \mathscr{X}$;*

(2) *всякое сечение $v \in C(Q, \mathscr{X})$ принимает значения $v(q) \in \mathrm{cl}\, \mathscr{U}(q)$ на всюду плотном подмножестве Q;*

(3) *всякое сечение $v \in C_\infty(Q, \mathscr{X})$ принимает значения $v(q) \in \mathrm{cl}\, \mathscr{U}(q)$ на котощем подмножестве Q;*

(4) *$\mathscr{U}$ является аппроксимирующим подмножеством $C_\infty(Q, \mathscr{X})$.*

◀ Установим цепочку импликаций (1)⇒(4)⇒(3)⇒(2)⇒(1), в которой лишь звенья (1)⇒(4)⇒(3) требуют доказательства.

(1)⇒(4). Согласно 1.5.2 нам предстоит установить равенство

$$\inf_{u \in \mathscr{U}} |v - u| = 0$$

в K-пространстве $C_\infty(Q)$ для любого элемента $v \in C_\infty(Q, \mathscr{X})$. Если последнее равенство не имеет места, найдутся непустое открытое подмножество $U \subset Q$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что $|v - u| > \varepsilon$ на U для всех $u \in \mathscr{U}$. Возьмем произвольное сечение $c \in C(Q, \mathscr{X})$ со значением $c(q) = v(q)$ в некоторой точке $q \in U \cap \operatorname{dom} v$. Тогда если $U_0 \subset U$ — окрестность q, на которой $|c - v| < \varepsilon/2$, то $|c - u| > \varepsilon/2$ на U_0 для всех $u \in \mathscr{U}$, что противоречит условию (1).

(4)⇒(3). В силу предложения 1.5.4 для любого $v \in C_\infty(Q, \mathscr{X})$ найдется сеть (u_α) элементов $d_{\mathrm{fin}}\mathscr{U}$, o-сходящаяся к v. Осталось заметить, что согласно теореме 1.3.5 имеет место сходимость $u_\alpha(q) \to v(q)$ для всех элементов q некоторого котощего подмножества Q. ▶

2.5.8. Теорема. *Следующие свойства подрасслоения $\mathscr{X}$ НБР $\overline{\mathscr{X}}$ над Q эквивалентны:*

(1) *множество $Q \otimes \mathscr{X}$ всюду плотно в $Q \otimes \overline{\mathscr{X}}$;*

(2) *всякое сечение $u \in C(Q, \overline{\mathscr{X}})$ принимает значения $u(q) \in \mathscr{X}(q)$ на всюду плотном подмножестве Q;*

(3) *всякое сечение $u \in C_\infty(Q, \overline{\mathscr{X}})$ принимает значения $u(q) \in \mathscr{X}(q)$ на котощем подмножестве Q;*

(4) *множество $C(Q, \mathscr{X})$ o-плотно в $C(Q, \overline{\mathscr{X}})$;*

(5) *всякое подмножество $C_\infty(Q, \mathscr{X})$, послойно плотное в $\mathscr{X}$ на всюду плотном подмножестве Q, является аппроксимирующим в $C_\infty(Q, \overline{\mathscr{X}})$.*

◀ Непосредственно следует из теоремы 2.5.7 и предложения 1.5.4. ▶

Подрасслоение $\mathscr{X}$, обладающее одним из перечисленных свойств (1)–(5), будет называться *всюду плотным в* $\overline{\mathscr{X}}$.

2.5.9. Следующее утверждение представляет собой вариант теоремы Стоуна — Вейерштрасса для НБР над экстремально несвязным компактом (ср. [38, § 4]).

Теорема. *Пусть векторное подпространство $\mathscr{U} \subset C(Q, \mathscr{X})$ послойно плотно в $\mathscr{X}$ и содержит осколки $\langle U \rangle u$ всех своих элементов $u \in \mathscr{U}$, соответствующие открыто-замкнутым подмножествам $U \subset Q$. Тогда $\mathscr{U}$ равномерно плотно в $C(Q, \mathscr{X})$.*

◀ Предположим, что подпространство $\mathscr{U} \subset C(Q, \mathscr{X})$ удовлетворяет условиям теоремы. Зафиксируем сечение $v \in C(Q, \mathscr{X})$ и для произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдем элемент $u \in \mathscr{U}$, удовлетворяющий неравенству $\|u - v\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Для каждой точки $q \in Q$ подберем сечение $u_q \in \mathscr{U}$ так, чтобы $\|u_q(q) - v(q)\| < \varepsilon$. Кроме того, обозначим символом U_q какую-либо открыто-замкнутую окрестность q, на которой $|u_q - v| < \varepsilon$. Из открытого покрытия $(U_q)_{q \in Q}$ компакта Q выберем конечное подпокрытие $(U_{q_1}, \ldots, U_{q_n})$. Согласно принципу исчерпывания (см. 1.2.1) имеется такое разбиение $(V_1, \ldots, V_n)$ компакта Q на открыто-замкнутые подмножества, что $V_i \subset U_{q_i}$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Ясно, что сечение $u = \sum_{i=1}^{n} \langle V_i \rangle u_{q_i}$ искомое. ▶

2.5.10. Лемма. *Для любого НБР $\mathscr{X}$ над всюду плотным подмножеством $D \subset Q$ существует единственное с точностью до изометрии НБР $\beta\mathscr{X}$ над Q такое, что $\mathscr{X} = \beta\mathscr{X}|_D$ и всякое ограниченное сечение $u \in C(D, \mathscr{X})$ продолжается до $\bar{u} \in C(Q, \beta\mathscr{X})$.*

◀ Обозначим векторное пространство $C^b(D,\mathscr{X})$ через $\mathscr{U}$ и снабдим его мультинормой $(\|\cdot\|_q)_{q\in Q}$, положив $\|u\|_q = \mathrm{ext}(|\!|\!|u|\!|\!|)(q)$ для всех $u\in\mathscr{U}$ и $q\in Q$. Пусть $\beta\mathscr{X}$ — НБР над Q, порожденное мультинормированным пространством $\mathscr{U}$ и $i\colon \mathscr{U}\to C(Q,\beta\mathscr{X})$ — соответствующее каноническое вложение (см. 2.2.7). Свойства пространства $\mathscr{U}$ обеспечивают равенство $i[\mathscr{U}] = C(Q,\beta\mathscr{X})$ (см. 2.3.6, 2.5.9). Для каждой точки $q\in D$ можно определить линейную изометрию $H(q)$ между слоями $\mathscr{X}(q)$ и $\beta\mathscr{X}(q)$, удовлетворяющую равенству $H(q)u(q) = i(u)(q)$ для всех $u\in\mathscr{U}$. Из 2.4.9 следует, что H представляет собой изометрию $\mathscr{X}$ на $\beta\mathscr{X}|_D$. «Заменив» слои $\beta\mathscr{X}$ над D так, чтобы изоморфизмы $H(q)$ превратились в тождественные операторы, мы получим искомое НБР. Его единственность вытекает из 2.4.12. ▶

Фигурирующее в формулировке последнего утверждения НБР $\beta\mathscr{X}$ будет называться *продолжением по Стоуну — Чеху* расслоения $\mathscr{X}$ (на пространство Q).

2.5.11. Лемма. *Предположим, что сеть (u_α) в $C_\infty(Q,\mathscr{X})$ о-сходится к сечению $u\in C_\infty(Q,\mathscr{X})$. Тогда найдется такая сеть (e_α) в $C(Q)$, что $0\leqslant e_\alpha\leqslant 1$, $|e_\alpha u_\alpha|\leqslant |u|$ и сеть $(e_\alpha u_\alpha)$ о-сходится к u.*

◀ Для каждого элемента $e\in C_\infty(Q)$ существует единственная функция $\frac{1}{e}\in C_\infty(Q)$, удовлетворяющая условиям $e(q)\frac{1}{e}(q) = 1$ при $e(q)\neq 0$ и $\frac{1}{e}(q) = 0$ при $q\notin \operatorname{supp} e$. Нетрудно убедиться в том, что функции $e_\alpha = |u|\frac{1}{|u_\alpha|}\wedge 1$ образуют искомую сеть. ▶

2.5.12. Лемма. *Предположим, что $\mathscr{X}(q)\neq 0$ для всех $q\in Q$. Тогда для каждой точки $q\in Q$ и любого элемента $x\in\mathscr{X}(q)$ существует такое сечение $u\in C(Q,\mathscr{X})$, что $u(q) = x$ и $|\!|\!|u|\!|\!|\equiv\|x\|$.*

◀ Можно считать, что $x\neq 0$. Пусть сечение $v_0\in C(Q,\mathscr{X})$ принимает значение $v_0(q) = x$ в точке q. Обозначим через Q_0 какую-либо открыто-замкнутую окрестность q, на которой сечение v_0 всюду отлично от нуля, и положим $Q_1 := Q\backslash Q_0$.

Для каждой точки $p\in Q_1$ подберем сечение $u_p\in C(Q,\mathscr{X})$ так, чтобы $u_p(p)\neq 0$. Сопоставим каждому элементу $p\in Q_1$ его открыто-замкнутую окрестность $U_p\subset Q_1$, на которой сечение u_p всюду отлично от нуля. Пусть $(U_{p_1},\dots,U_{p_n})$ — конечное покрытие компакта Q_1, составленное из элементов открытого покрытия $(U_p)_{p\in Q_1}$. Согласно принципу исчерпывания (см. 1.2.1) существует такое разбиение $(V_1,\dots,V_n)$ компакта Q_1 на открыто-замкнутые подмножества, что $V_i\subset U_{p_i}$ для всех $i=1,\dots,n$. Тогда сумма $v_1 = \sum\limits_{i=1}^{n}\langle V_i\rangle u_{p_i}$ отлична от нуля всюду на Q_1.

Таким образом, сечение $v = \langle Q_0\rangle v_0 + \langle Q_1\rangle v_1$ всюду отлично от нуля и принимает значение $v(q) = x$ в точке q. Ясно, что произведение $u = \frac{\|x\|}{|\!|\!|v|\!|\!|}v$ является искомым сечением (см. 2.3.1). ▶

Глава 3. Просторные банаховы расслоения

Довольно существенным техническим препятствием в работе с расширенными сечениями НБР зачастую оказывается несовпадение областей определения расширенного сечения u и его нормы $|u|$. Понятие просторного НБР, в частности, было призвано устранить это неудобство. В процессе дальнейшего изучения просторные НБР обнаружили другие свои преимущества. Так, только после предположения просторности НБР $\mathscr{X}$ появляется возможность ввести в рассмотрение НБР $B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, непрерывными сечениями которого являются гомоморфизмы из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$. То же относится и к понятию сопряженного НБР $\mathscr{X}'$. Наконец, требование просторности позволяет добавить утверждение о единственности реализационного НБР в теорему о представлении РНП в виде пространства сечений.

§ 3.1. Основные понятия

В этом параграфе вводится и обсуждается понятие просторного банахова расслоения, а также исследуются элементарные свойства просторных оболочек НБР. В частности, изучается вопрос о продолжении гомоморфизма на просторные оболочки соответствующих расслоений.

Как и раньше, на протяжении всего параграфа Q — непустой экстремально несвязный компакт, $\mathscr{X}$ — НБР над Q.

3.1.1. ***Теорема.*** *Следующие свойства* НБР $\mathscr{X}$ *над экстремально несвязным компактом* Q *эквивалентны:*

(1) *каждое непрерывное ограниченное сечение* $\mathscr{X}$ *над всюду плотным подмножеством* Q *продолжается до глобального непрерывного сечения;*
(2) $\operatorname{dom} u = \operatorname{dom}|u|$ *для любого расширенного непрерывного сечения* u;
(3) РНП $C(Q,\mathscr{X})$ *является* ПБК *над* $C(Q)$.

◀ Импликация (2)⇒(1) очевидна. Остается доказать, что (1)⇒(3)⇒(2).

Предположим, что расслоение $\mathscr{X}$ удовлетворяет условию (1) и зафиксируем произвольную o-фундаментальную сеть (u_α) элементов $C(Q,\mathscr{X})$. Согласно 2.5.3 сеть (u_α) имеет o-предел u в ПБК $C_\infty(Q,\mathscr{X})$. Фундаментальность (u_α) в смысле o-сходимости в $C(Q)$ обеспечивает ограниченность сечения u и o-сходимость $|u_\alpha - u| \to 0$ в $C(Q)$. Для обоснования утверждения (3) осталось заметить, что сечение u является глобальным в силу (1).

Предположим выполненным условие (3) и докажем (2). Пусть u — произвольный элемент $C_\infty(Q,\mathscr{X})$. Ввиду локальной ограниченности сечения u, мы не нарушим общности, предположив, что оно является ограниченным. Согласно 2.3.5 для каждого элемента $q \in \operatorname{dom} u$ существует сечение $v \in C(Q,\mathscr{X})$, принимающее значение $v(q) = u(q)$ в точке q. Учитывая плотность множества $\operatorname{dom} u$ в Q, мы приходим к выводу, что $\inf\{|u-v| : v \in C(Q,\mathscr{X})\} = 0$ в K-пространстве $C(Q)$. Воспользуемся 1.5.1 и выделим в $C(Q,\mathscr{X})$ такую сеть $(v_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$, что $|u - v_\alpha| \downarrow 0$. С учетом условия (3) последнее соотношение дает включение $u \in C(Q,\mathscr{X})$, т. е. $\operatorname{dom} u = \operatorname{dom}|u| = Q$. ▶

Непрерывное банахово расслоение, обладающее одним из эквивалентных свойств (1)–(3), перечисленных в формулировке теоремы, будем называть ***просторным непрерывным банаховым расслоением.*** Переформулировав условие (1), можно сказать, что расслоение $\mathscr{X}$ просторно тогда и только тогда, когда оно является продолжением по Стоуну — Чеху (см. 2.5.10) любого своего сужения $\mathscr{X}|_D$ на всюду плотное подмножество $D \subset Q$.

3.1.2. Из следующего утверждения видно, что условие (1) в формулировке теоремы 3.1.1 может быть «ослаблено».

Предложение. *Для просторности* НБР $\mathscr{X}$ *над* Q *необходимо и достаточно, чтобы каждое непрерывное ограниченное сечение* $\mathscr{X}$ *над открытым всюду плотным подмножеством* Q *продолжалось до глобального непрерывного сечения.*

◀ В предположении «слабого» варианта условия (1) доказательство порядковой полноты РНП $C_\infty(Q,\mathscr{X})$ в 2.5.3 дословно переносится на случай РНП $C(Q,\mathscr{X})$ благодаря тому, что возникающие там множества D_ξ и D оказываются открытыми. ▶

3.1.3. Следствие. *НБР $\mathscr{X}$ над Q является просторным тогда и только тогда, когда $C^b_\infty(Q, \mathscr{X}) = C(Q, \mathscr{X})$.*

3.1.4. Следствие. *Пусть НБР $\mathscr{X}$ над Q просторно. Тогда для любого сечения $u \in C_\infty(Q, \mathscr{X})$ найдется последовательность $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ попарно дизъюнктных элементов $C(Q, \mathscr{X})$ такая, что $u = o\text{-}\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.*

◀ Вытекает из 1.3.3 и 3.1.3. ▶

3.1.5. *Просторной оболочкой* НБР $\mathscr{X}$ называется всякое просторное НБР $\overline{\mathscr{X}}$, содержащее $\mathscr{X}$ в качестве всюду плотного подрасслоения.

Теорема. *Всякое НБР над экстремально несвязным компактом имеет единственную с точностью до изометрии просторную оболочку.*

◀ Пусть $\mathscr{X}$ — НБР над Q. Снабдим векторное пространство $C^b_\infty(Q, \mathscr{X})$ мультинормой $(\|\cdot\|_q)_{q\in Q}$, положив $\|u\|_q := |u|(q)$ для всех $u \in C^b_\infty(Q, \mathscr{X})$ и $q \in Q$. Согласно 2.2.7 полученное таким образом мультинормированное пространство порождает некоторое НБР над Q, которое мы обозначим через $\overline{\mathscr{X}}$. Пусть $i\colon C^b_\infty(Q, \mathscr{X}) \to C(Q, \overline{\mathscr{X}})$ — соответствующее каноническое вложение. В каждой точке $q \in Q$ можно определить изометрическое вложение $H(q)\colon \mathscr{X}(q) \to \overline{\mathscr{X}}(q)$, удовлетворяющее равенству $H(q)u(q) = i(u)(q)$ для всех $u \in C(Q, \mathscr{X})$. Из 2.4.4 следует, что H представляет собой гомоморфизм $\mathscr{X}$ в $\overline{\mathscr{X}}$ и тем самым осуществляет изометрию $\mathscr{X}$ на банахово подрасслоение $\overline{\mathscr{X}}$. Согласно 2.5.8 это подрасслоение является плотным в $\overline{\mathscr{X}}$.

Единственность просторной оболочки НБР с точностью до изометрии вытекает из 2.4.12. ▶

3.1.6. Предложение. *Пусть $\mathscr{X}$ — подрасслоение просторного НБР $\mathscr{Y}$ над Q.*

(1) *Для просторности $\mathscr{X}$ необходимо и достаточно, чтобы множество $Q\otimes\mathscr{X}$ было замкнуто в $Q \otimes \mathscr{Y}$.*

(2) *Просторной оболочкой $\mathscr{X}$ является послойно наименьшее просторное подрасслоение $\overline{\mathscr{X}}$ расслоения $\mathscr{Y}$, послойно содержащее $\mathscr{X}$. При этом $Q \otimes \overline{\mathscr{X}}$ совпадает с замыканием множества $Q \otimes \mathscr{X}$ в $Q \otimes \mathscr{Y}$.*

◀ (1) Предположим, что расслоение $\mathscr{X}$ просторно, зафиксируем произвольный элемент (q, x) замыкания $Q\otimes\mathscr{X}$ и установим включение $(q, x) \in Q\otimes\mathscr{X}$. Пусть сечение $v \in C(Q, \mathscr{Y})$ принимает значение $v(q) = x$ в точке q (см. 2.3.5). Обозначим через e точную нижнюю границу множества $\{|u - v| : u \in C(Q, \mathscr{X})\}$ в K-пространстве $C(Q)$. Из принадлежности (q, x) замыканию $Q \otimes \mathscr{X}$ следует, что $e(q) = 0$. В силу 1.5.1 найдется такая ограниченная сеть $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ элементов $C(Q, \mathscr{X})$, что $|u_\alpha - v| \downarrow e$. Согласно 1.3.3 для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует семейство $(\pi^n_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ попарно дизъюнктных порядковых проекторов в $C(Q)$, обеспечивающее неравенство $\pi^n_\alpha \big||u_\alpha - v| - e\big| \leqslant 1/n$ для всех $\alpha \in \mathrm{A}$. Порядковая полнота РНП $C(Q, \mathscr{X})$ позволяет ввести в рассмотрение сумму $w_n := o\text{-}\sum\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} \pi^n_\alpha u_\alpha \in C(Q, \mathscr{X})$. Тогда $\big||w_n - v| - e\big| \leqslant 1/n$ и, в частности, $\|w_n(q) - v(q)\| \to e(q) = 0$. Принадлежность $w_n(q)$ замкнутому подпространству $\mathscr{X}(q) \subset \mathscr{Y}(q)$ дает требуемое включение $x \in \mathscr{X}(q)$.

Просторность $\mathscr{X}$ легко выводится из замкнутости множества $Q\otimes\mathscr{X}$ с привлечением 2.1.7.

(2) Обозначим через $\overline{\mathscr{X}}$ подрасслоение $\mathscr{Y}$, индуцированное множеством тех сечений $u \in C(Q, \mathscr{Y})$, которые принимают значения $u(q) \in \mathscr{X}(q)$ на всюду плотном подмножестве Q (см. 2.2.2). Очевидно, множество $Q \otimes \mathscr{X}$ всюду плотно в $Q \otimes \overline{\mathscr{X}}$. С учетом (1) достаточно показать просторность расслоения $\overline{\mathscr{X}}$. Планируя воспользоваться 3.1.3, зафиксируем произвольное сечение $u \in C^b_\infty(Q, \overline{\mathscr{X}})$

и обозначим через $\bar{u} \in C(Q, \mathscr{Y})$ его максимальное расширение. Согласно 2.5.8 сечение $\bar{u}$, как и u, принимает значения $\bar{u}(q) \in \mathscr{X}(q)$ на всюду плотном подмножестве Q. Это означает, что $\bar{u} \in C(Q, \overline{\mathscr{X}})$ и, в частности, $u = \bar{u}$. ▶

Расслоение $\overline{\mathscr{X}}$, фигурирующее в п. (2) последнего предложения, будет называться *замыканием подрасслоения* $\mathscr{X}$.

3.1.7. Лемма. *Если каждый слой $\mathscr{X}(q)$ расслоения $\mathscr{X}$ является гильбертовым пространством, то каждый слой $\overline{\mathscr{X}}(q)$ просторной оболочки $\mathscr{X}$ также гильбертово пространство.*

◀ Зафиксируем произвольные сечения $u, v \in C(Q, \overline{\mathscr{X}})$. Если точка $q \in Q$ такова, что $u(q), v(q) \in \mathscr{X}(q)$, то

$$\|u(q) + v(q)\|^2 + \|u(q) - v(q)\|^2 = 2\|u(q)\|^2 + 2\|v(q)\|^2$$

благодаря гильбертовости пространства $\mathscr{X}(q)$. Из 2.5.8 следует, что такие точки q образуют котощее подмножество Q. Поэтому

$$|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2.$$

Привлекая теперь 2.3.5 и теорему фон Неймана — Йордана, получаем требуемое. ▶

3.1.8. Теорема. *Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — НБР над Q, $\overline{\mathscr{X}}$ и $\overline{\mathscr{Y}}$ — их просторные оболочки и D — котощее подмножество Q. Тогда любой гомоморфизм $H \in \mathrm{Hom}_D(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ единственным образом продолжается до гомоморфизма $\overline{H} \in \mathrm{Hom}_D(\overline{\mathscr{X}}, \overline{\mathscr{Y}})$. При этом поточечные нормы $|||H|||$ и $|||\overline{H}|||$ совпадают на некотором котощем подмножестве Q.*

◀ Зафиксируем произвольный гомоморфизм $H \in \mathrm{Hom}_D(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ и для любых $q \in D$ и $\bar{x} \in \overline{\mathscr{X}}(q)$ определим $\overline{H}(q)\bar{x} \in \overline{\mathscr{Y}}(q)$. Для этого выберем сечение $\bar{u} \in C(Q, \overline{\mathscr{X}})$ так, чтобы $\bar{u}(q) = \bar{x}$ (см. 2.3.5), и обозначим через u ограничение сечения $\bar{u}$ на котощее подмножество $\{p \in Q : \bar{u} \in \mathscr{X}(p)\}$ (см. 2.5.8). Ясно, что сечение $H \otimes u$ расслоения $\mathscr{Y}$ является непрерывным и почти глобальным. Пусть $\overline{H \otimes u} \in C_\infty(Q, \overline{\mathscr{Y}})$ — максимальное расширение сечения $H \otimes u$ в расслоении $\overline{\mathscr{Y}}$. Поскольку согласно 2.4.4 поточечная норма $|||H|||$ локально ограничена, функция $|||H \otimes u|||$ ограничена на (котощем подмножестве) некоторой окрестности точки q и, следовательно, $q \in \mathrm{dom}\, \overline{H \otimes u}$ (см. 3.1.1 (2)). Полагаем $\overline{H}(q)\bar{x} := \overline{H \otimes u}(q)$. Несложная проверка показывает, что значение $\overline{H \otimes u}(q)$ не зависит от выбора сечения $\bar{u} \in C(Q, \overline{\mathscr{X}})$, удовлетворяющего условию $\bar{u}(q) = \bar{x}$, и, таким образом, корректно определен искомый гомоморфизм $\overline{H}$. Единственность $\overline{H}$ вытекает из равенства $\overline{H}(q)(\mathrm{ext}_{\overline{\mathscr{X}}}(u)(q)) = \mathrm{ext}_{\overline{\mathscr{Y}}}(H \otimes u)(q)$ для всех $u \in C^b_\infty(Q, \mathscr{X})$ и $q \in Q$.

Установим теперь связь между поточечными нормами $|||H|||$ и $|||\overline{H}|||$. Согласно 2.3.11 для любой точки $q \in D$ выполнены следующие соотношения:

$$|||H|||(q) = \sup\{|H \otimes u|(q) \ : \ u \in C(Q, \mathscr{X}),\ |u| \leqslant 1\},$$
$$|||\overline{H}|||(q) = \sup\{|H \otimes u|(q) \ : \ u \in C_\infty(Q, \mathscr{X}),\ |u| \leqslant 1\}.$$

Поэтому, учитывая теорему 1.3.5, для доказательства совпадения функций $|||H|||$ и $|||\overline{H}|||$ на котощем подмножестве Q достаточно получить равенство

$$\sup\{|H \otimes u| \ : \ u \in C(Q, \mathscr{X}),\ |u| \leqslant 1\}$$
$$= \sup\{|H \otimes u| \ : \ u \in C_\infty(Q, \mathscr{X}),\ |u| \leqslant 1\},$$

в котором точные верхние границы вычисляются в K-пространстве $C_\infty(Q)$. Обоснование требуется лишь для неравенства $\geqslant$. В силу 2.3.5 имеет место соотношение $Q \otimes C(Q, \mathscr{X}) = Q \otimes \mathscr{X}$, из которого согласно 2.5.7 следует, что множество $C(Q, \mathscr{X})$ o-плотно в $C_\infty(Q, \mathscr{X})$. Из 2.5.11 вытекает, что для любого сечения $u \in C_\infty(Q, \mathscr{X})$, $|u| \leqslant 1$, найдется o-сходящаяся к u сеть $(u_\alpha)_{\alpha\in A}$ элементов $C(Q, \mathscr{X})$, удовлетворяющих неравенству $|u_\alpha| \leqslant 1$. Тогда соотношение $|H \otimes u_\alpha - H \otimes u| \leqslant |||\overline{H}||| |u_\alpha - u|$, выполненное на $D \cap \operatorname{dom} u$, влечет o-сходимость $|H \otimes u_\alpha|$ к $|H \otimes u|$, из которой следует неравенство $|H \otimes u| \leqslant \sup_{\alpha\in A} |H \otimes u_\alpha|$, завершающее доказательство. ▶

3.1.9. Как показывает следующий пример, в условиях 3.1.8 функции $|||\overline{H}|||$ и $|||H|||$ могут не совпадать на всем множестве D.

Обозначим символом Q компактификацию дискретного пространства $\mathbb{N}$ по Стоуну — Чеху и положим $\mathscr{X} = Q \times \{c_0\}$ и $\mathscr{Y} = Q \times \{\mathbb{R}\}$ (c_0 — банахово пространство сходящихся к нулю последовательностей). Отождествляя последовательность из c_0 с ее продолжением до непрерывной функции на Q, определим отображение $H : Q \to c_0'$ по правилу $H(q)x = x(q)$. Из неравенства $|x(q) - y(p)| \leqslant \|x - y\| + |y(p) - y(q)|$, выполненного для всех $x, y \in c_0$ и $p, q \in Q$, следует, что $H \in \mathrm{Hom}_Q(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. Пусть $\overline{\mathscr{X}}$ — просторная оболочка $\mathscr{X}$ и $\overline{H} \in \mathrm{Hom}_Q(\overline{\mathscr{X}}, \mathscr{Y})$ — продолжение H. Покажем, что, в отличие от поточечной нормы $|||H|||$, которая является индикатором подмножества $\mathbb{N} \subset Q$, функция $|||\overline{H}|||$ отлична от нуля на всем пространстве Q (в действительности $|||\overline{H}||| \equiv 1$). Рассмотрим сечение $u \in C(\mathbb{N}, \mathscr{X})$, удовлетворяющее неравенствам $\|u(n)\| \leqslant 1$ и $\|H(n)u(n)\| \geqslant 1/2$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\bar{u} \in C(Q, \overline{\mathscr{X}})$ максимальное расширение сечения u в расслоении $\overline{\mathscr{X}}$. Тогда функция $|||\overline{H} \otimes \bar{u}|||$ является непрерывным продолжением $|||H \otimes u|||$ и, следовательно, $|||\overline{H} \otimes \bar{u}||| \geqslant 1/2$ на всем Q.

3.1.10. ***Следствие.*** *Изометрия H между* НБР *$\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ над Q продолжается до изометрии $\overline{H}$ между их просторными оболочками $\overline{\mathscr{X}}$ и $\overline{\mathscr{Y}}$.*

3.1.11. Пусть $\mathscr{X}$ — просторное НБР над Q, а $\mathscr{X}_0$ — (дискретное) банахово расслоение, каждый слой $\mathscr{X}_0(q)$ которого является банаховым подпространством соответствующего слоя $\mathscr{X}(q)$. В следующей лемме сформулированы некоторые свойства НБР $\mathscr{X} \wedge \mathscr{X}_0$ (см. 2.2.4).

Лемма. (1) *Расслоение $\mathscr{X} \wedge \mathscr{X}_0$ просторно.*

(2) *Пусть S_0 — совокупность всех сечений u расслоения $\mathscr{X}$, для которых множество $\{q \in \operatorname{dom} u : u(q) \in \mathscr{X}_0(q)\}$ является котощим в Q. Тогда $C(Q, \mathscr{X} \wedge \mathscr{X}_0) = C(Q, \mathscr{X}) \cap S_0$ и $C_\infty(Q, \mathscr{X} \wedge \mathscr{X}_0) = C_\infty(Q, \mathscr{X}) \cap S_0$.*

◀ (1) Следует из (2) и 3.1.3.

(2) Равенство $C(Q, \mathscr{X} \wedge \mathscr{X}_0) = C(Q, \mathscr{X}) \cap S_0$ вытекает из 2.5.9 и благодаря просторности $\mathscr{X}$ обеспечивает включение $C_\infty(Q, \mathscr{X} \wedge \mathscr{X}_0) \supset C_\infty(Q, \mathscr{X}) \cap S_0$. Для обоснования обратного включения $\subset$ предположим, что $u \in C_\infty(Q, \mathscr{X} \wedge \mathscr{X}_0)$. Принадлежность сечения u множеству S_0 следует из 2.2.4 и 2.5.7((1)$\Rightarrow$(4)). Принадлежность $u \in C_\infty(Q, \mathscr{X})$ выводится теперь из установленного выше включения $\supset$ переходом к $\operatorname{ext}_{\mathscr{X}}(u)$. ▶

§ 3.2. Расслоение пространств операторов

Этот параграф посвящен исследованию основных свойств НБР $B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, непрерывными сечениями которого являются всевозможные гомоморфизмы из НБР $\mathscr{X}$ в НБР $\mathscr{Y}$. Большое внимание уделяется описанию непрерывных сечений расслоения $B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. Здесь же выясняется, в каких случаях это НБР просторно и как выглядит его просторная оболочка.

На протяжении всего параграфа Q — непустой экстремально несвязный компакт, $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — НБР над Q.

3.2.1. ***Лемма.*** *Пусть D — всюду плотное подмножество Q и отображение $H : q \in D \mapsto H(q) \in B(\mathscr{X}(q), \mathscr{Y}(q))$ таково, что $H \otimes u \in C(D, \mathscr{Y})$ для всех $u \in C(Q, \mathscr{X})$. Предположим, что расслоение $\mathscr{X}$ просторно. Тогда поточечная норма $|||H|||$ непрерывна.*

◀ Пусть выполнены все условия леммы. В силу 2.3.11 имеет место равенство $|||H|||(q) = \sup\{|H \otimes u|(q) : u \in C(Q, \mathscr{X}),\ |u| \leqslant 1\}$ для всех $q \in D$, откуда следует, что функция $|||H|||$ полунепрерывна снизу. Для доказательства полунепрерывности сверху поточечной нормы $|||H|||$ в произвольной точке $q \in D$ предположим, что $|||H|||(q) < \lambda$, и установим неравенство $|||H|||(p) < \lambda$ для всех элементов p некоторой окрестности точки q в множестве D.

Допустим противное. Тогда, выбрав число λ_0 так, чтобы $|||H|||(q) < \lambda_0 < \lambda$, и положив $V = \{p \in D : |||H|||(p) > \lambda_0\}$, мы приходим к выводу, что $q \in \operatorname{cl} V$. Для любого элемента $p \in V$ подберем сечение $u_p \in C(Q, \mathscr{X})$ так, чтобы $|u_p| \leqslant 1$ и $|H \otimes u_p|(p) > \lambda_0$. В силу непрерывности функции $|H \otimes u_p|$ для каждой точки $p \in V$ найдется такая ее открыто-замкнутая окрестность $V_p \subset Q$, что $|H \otimes u_p| > \lambda_0$ на $V_p \cap D$. Несложно проверить, что $\operatorname{cl} \bigcup\limits_{p \in V} V_p = \operatorname{cl} V$. Из принципа исчерпывания (см. 1.2.1) следует существование семейства $(U_p)_{p \in V}$ попарно не пересекающихся открыто-замкнутых подмножеств Q, удовлетворяющих условиям $U_p \subset V_p$ $(p \in V)$ и $\operatorname{cl} \bigcup\limits_{p \in V} U_p = \operatorname{cl} V$. Благодаря просторности $\mathscr{X}$ непрерывное ограниченное сечение $\bigcup\limits_{p \in V} u_p|_{U_p} \cup 0|_{Q \setminus \operatorname{cl} V}$ расслоения $\mathscr{X}$ над всюду плотным в Q множеством $\bigcup\limits_{p \in V} U_p \cup (Q \setminus \operatorname{cl} V)$ можно продолжить до глобального сечения $u \in C(Q, \mathscr{X})$. Очевидно, что $|u| \leqslant 1$. Из совпадения сечений u и u_p на U_p следует, что $|H \otimes u| \geqslant \lambda_0$ на $\operatorname{cl} V$. Последнее противоречит неравенству $|||H|||(q) < \lambda_0$. ▶

3.2.2. *Следствие.* *Если расслоение $\mathscr{X}$ просторно, то любой гомоморфизм $H \in \mathrm{Hom}_Q(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ имеет непрерывную поточечную норму $|||H|||$.*

Из 3.1.9 видно, что условие просторности $\mathscr{X}$ в формулировке следствия является существенным. Более того, в 3.3.8 будет показано, что просторность расслоения $\mathscr{X}$ по-существу оказывается необходимым условием для непрерывности поточечных норм гомоморфизмов из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$.

3.2.3. *Теорема.* *Предположим, что расслоение $\mathscr{X}$ просторно. Тогда существует (и единственно) такое НБР $B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ над Q, что слой $B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})(q)$ в каждой точке $q \in Q$ является банаховым подпространством $B(\mathscr{X}(q), \mathscr{Y}(q))$ и $C(Q, B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})) = \mathrm{Hom}_Q(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$.*

◀ Рассмотрим дискретное банахово расслоение над Q, слой которого в каждой точке $q \in Q$ равен замыканию подпространства $\{H(q) : H \in \mathrm{Hom}_Q(\mathscr{X}, \mathscr{Y})\}$ в $B(\mathscr{X}(q), \mathscr{Y}(q))$. В силу 3.2.2 пространство $\mathrm{Hom}_Q(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ является непрерывной структурой в этом расслоении и, таким образом, превращает его в искомое НБР $B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. Равенство $C(Q, B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})) = \mathrm{Hom}_Q(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ следует из 2.5.9 и 2.4.11. ▶

3.2.4. Следующий пример показывает, что включение

$$B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})(q) \subset B(\mathscr{X}(q), \mathscr{Y}(q))$$

может быть строгим.

Пусть Q — компактификация дискретного пространства $\mathbb{N}$ по Стоуну — Чеху, $\mathscr{X}$ — просторная оболочка постоянного НБР $Q \times \{X\}$ с нерефлексивным слоем X и $\mathscr{Y} = Q \times \{\mathbb{R}\}$. Покажем, что $B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})(q) \neq B(\mathscr{X}(q), \mathscr{Y}(q))$ в каждой точке $q \in Q \setminus \mathbb{N}$. Действительно, пространство $\mathscr{X}(q)$ нерефлексивно, так как содержит нерефлексивное подпространство X. По теореме Джеймса существует функционал $x' \in \mathscr{X}(q)' = B(\mathscr{X}(q), \mathscr{Y}(q))$, не достигающий своей нормы на замкнутом единичном шаре $B_{\mathscr{X}(q)}$. Допустим, имеется сечение $H \in C(Q, B(\mathscr{X}, \mathscr{Y}))$, принимающее значение $H(q) = x'$ в точке q. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ подберем элемент $u(n) \in X$ так, чтобы $\|u(n)\| \leqslant 1$ и $\|H(n)u(n)\| > \|H(n)\| - 1/n$.

Обозначим через $\bar{u} \in C(Q, \mathscr{X})$ продолжение построенного таким образом сечения $u \in C(\mathbb{N}, \mathscr{X})$. Ясно, что

$$|x'(\bar{u}(q))| = |H(q)\bar{u}(q)| = \lim_{n\to q}|H(n)u(n)| = \|H(n)\| = \|x'\|.$$

Полученное противоречие доказывает, что $x' \notin B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})(q)$ (см. 2.3.5).

Заметим, что подходящей заменой пространства Q можно добиться соотношений $B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})(q) \neq B(\mathscr{X}(q), \mathscr{Y}(q))$ во всех точках $q \in Q$ одновременно (ср. 3.3.5).

3.2.5. Предложение. *Отображение $((q,x),(q,T)) \mapsto (q,Tx)$, действующее из подмножества $(Q \otimes \mathscr{X}) \times (Q \otimes B(\mathscr{X}, \mathscr{Y}))$ в $Q \otimes \mathscr{Y}$, непрерывно.*

◀ Зафиксируем элементы $\bar{q} \in Q$, $\bar{x} \in \mathscr{X}(\bar{q})$ и $\overline{T} \in B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})(\bar{q})$. Предположим, что пара $(\bar{q}, \overline{T}\bar{x})$ принадлежит открытой трубке $V(v,\gamma) \subset Q \otimes \mathscr{Y}$ (см. 2.1.4). Выберем сечения $u \in C(Q, \mathscr{X})$ и $H \in C(Q, B(\mathscr{X}, \mathscr{Y}))$ так, чтобы $u(\bar{q}) = \bar{x}$ и $H(\bar{q}) = \overline{T}$. Тогда, воспользовавшись неравенством

$$\begin{aligned}\|v(q) - Tx\| \leqslant \|v(q) - H(q)u(q)\| + \|H\|_\infty\|u(q) - x\| \\ + \|H(q) - T\|\big(\|u(q) - x\| + \|u\|_\infty\big),\end{aligned}$$

выполненным для всех $q \in Q$, $x \in \mathscr{X}(q)$ и $T \in B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})(q)$, можно так подобрать окрестности $U(u,\alpha) \subset Q \otimes \mathscr{X}$ и $W(H,\beta) \subset Q \otimes B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ пар $(\bar{q}, \bar{x})$ и $(\bar{q}, \overline{T})$ соответственно, чтобы $(q, Tx) \in V(v,\gamma)$ для всех $(q,x) \in U(u,\alpha)$ и $(q,T) \in W(H,\beta)$. ▶

3.2.6. Теорема. *Пусть расслоение $\mathscr{X}$ просторно. Следующие свойства сечения $H \in S(D, B(\mathscr{X}, \mathscr{Y}))$ над всюду плотным подмножеством $D \subset Q$ эквивалентны:*

(1) $H \in C(D, B(\mathscr{X}, \mathscr{Y}))$;
(2) $H \in \mathrm{Hom}_D(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$;
(3) $H \otimes u \in C(D, \mathscr{Y})$ *для всех* $u \in C(Q, \mathscr{X})$.

◀ Условие (2) следует из (1) в силу 3.2.5. Импликация (2)⇒(3) очевидна (см. 2.4.4). Покажем, что (3)⇒(1). Если сечение H удовлетворяет условию (3) и $G \in C(Q, B(\mathscr{X}, \mathscr{Y}))$, то $(H - G) \otimes u \in C(D, \mathscr{Y})$ для всех $u \in C(Q, \mathscr{X})$. Тогда $|H - G| \in C(D)$ в силу 3.2.1. ▶

Заметим, что в случае, когда подмножество $D \subset Q$ является котощим, последний результат может быть значительно усилен (см. 3.2.13).

3.2.7. Предложение. *Предположим, что в условиях теоремы* 3.2.6 *выполнено одно из следующих двух условий:*

(a) *множество D открыто,*
(б) *расслоение $\mathscr{Y}$ просторно.*

Тогда теорема 3.2.6 *останется верной, если в ее формулировке заменить требование $H \in S(D, B(\mathscr{X}, \mathscr{Y}))$ более слабым условием $H : q \in D \mapsto H(q) \in B(\mathscr{X}(q), \mathscr{Y}(q))$.*

◀ Как видно из доказательства теоремы 3.2.6, достаточно доказать импликацию 3.2.6 (3)⇒3.2.6 (1). Пусть выполнено условие (3).

Предположим сначала, что множество D открыто (условие (a)). Тогда каждая точка $q \in D$ имеет окрестность $U \subset D$, открыто-замкнутую в Q. Из 2.4.7 следует, что $\langle U \rangle H \in \mathrm{Hom}_Q(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, в силу чего $H(q) \in B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})(q)$ и, таким образом, H является сечением расслоения $B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. Для доказательства (1) теперь можно сослаться на теорему 3.2.6.

Предположим на этот раз, что расслоение $\mathscr{Y}$ просторно (условие (б)). Поскольку функция $|||H|||$ локально ограничена в силу 3.2.1, мы не нарушим общности при доказательстве (1), если будем считать ее ограниченной. Свойство (1) отображения H будет установлено, если мы построим продолжающее его сечение $\overline{H} \in C(Q, B(\mathscr{X}, \mathscr{Y}))$. Для любых $q \in Q$ и $x \in \mathscr{X}(q)$ положим $\overline{H}(q) := \mathrm{ext}(H \otimes u)(q)$, где сечение $u \in C(Q, \mathscr{X})$ таково, что $u(q) = x$. Это определение корректно, так как значение сечения $\mathrm{ext}(H \otimes u)$ в точке q определено (в силу ограниченности $|||H|||$ и просторности $\mathscr{Y}$) и не зависит от выбора u (что легко проверить опять же благодаря ограниченности функции $|||H|||$). Очевидно, $\overline{H}$ — искомое сечение. ▶

Замечания. 1. Ниже (см. 3.2.13) показано, что условие (а), накладываемое на множество D в формулировке последнего предложения, является избыточным. Достаточно потребовать, чтобы подмножество $D \subset Q$ было котощим.

2. Автору не известно, является ли требование (б) просторности расслоения $\mathscr{Y}$ существенным в формулировке последнего предложения.

3.2.8. Лемма. *Предположим, что расслоение $\mathscr{X}$ просторно, и пусть $q \in Q$. Тогда из $\mathscr{X}(q) \neq 0$ и $\mathscr{Y}(q) \neq 0$ следует $B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})(q) \neq 0$.*

◀ Предположим, что $\mathscr{X}(q) \neq 0$ и $\mathscr{Y}(q) \neq 0$. Пусть сечения $u_0 \in C(Q, \mathscr{X})$ и $v_0 \in C(Q, \mathscr{Y})$ таковы, что $u_0(q) \neq 0$ и $v_0(q) \neq 0$. По теореме Хана — Банаха — Канторовича [20, 1.4.14(1)] существует такой линейный оператор $T\colon C(Q, \mathscr{X}) \to C(Q)$, что $|Tu| \leqslant |u|$ для всех $u \in C(Q, \mathscr{X})$ и $|Tu_0| = |u_0|$. Для каждой точки $p \in Q$ определим оператор $H(p) \in B(\mathscr{X}(p), \mathscr{Y}(p))$, положив $H(p)x = (Tu)(p) \cdot v_0(p)$ для каждого $x \in \mathscr{X}(p)$, где сечение $u \in C(Q, \mathscr{X})$ удовлетворяет условию $u(p) = x$. Свойства оператора T, очевидно, обеспечивают корректность определения $H(p)$. Из построения отображения H следует, что $H \otimes u = Tu \cdot v_0 \in C(Q, \mathscr{Y})$ для всех $u \in C(Q, \mathscr{X})$. В силу 2.4.7 последнее означает, что $H \in C(Q, B(\mathscr{X}, \mathscr{Y}))$. Осталось заметить, что $\|H(q)u(q)\| = \|u_0(q)\| \cdot \|v_0(q)\| \neq 0$. ▶

3.2.9. Теорема. *Предположим, что $\mathscr{X}$ — просторное расслоение.*

(1) Если расслоение $\mathscr{Y}$ просторно, то $B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ просторно.

(2) Если $\mathscr{X}(q) \neq 0$ для всех $q \in Q$ и расслоение $B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ просторно, то $\mathscr{Y}$ просторно.

◀ (1) Предположим, что расслоение $\mathscr{Y}$ просторно, и пусть H — ограниченное непрерывное сечение $B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ над всюду плотным подмножеством компакта Q. Тогда, повторяя идею доказательства предложения 3.2.7, можно определить продолжение $\overline{H}\colon q \in Q \mapsto \overline{H}(q) \in B(\mathscr{X}(q), \mathscr{Y}(q))$ отображения H, удовлетворяющее равенству $\overline{H}(q)u(q) = \mathrm{ext}(H \otimes u)(q)$ для всех $u \in C(Q, \mathscr{X})$ и $q \in Q$.

(2) Предположим теперь, что расслоение $B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ просторно и все слои $\mathscr{X}$ невырожденные. Пусть v — ограниченное сечение $\mathscr{Y}$ над открытым всюду плотным подмножеством $D \subset Q$. Из 3.1.2 следует, что для доказательства просторности $\mathscr{Y}$ достаточно продолжить сечение v до глобального.

Обозначим через $\mathscr{R}$ постоянное банахово расслоение $Q \times \{\mathbb{R}\}$. В силу 2.5.12 и 3.2.8 существует сечение $w \in C(Q, B(\mathscr{X}, \mathscr{R}))$ с поточечной нормой $|||w||| \equiv 1$. В каждой точке $q \in D$ определим оператор $H(q) \in B(\mathscr{X}(q), \mathscr{Y}(q))$, положив $H(q)x := (w(q)x) \cdot v(q)$ для всех $x \in \mathscr{X}(q)$. Очевидно, что $H \otimes u \in C(D, \mathscr{Y})$ при $u \in C(D, \mathscr{X})$. Из предложения 3.2.7 следует, что $H \in C(D, B(\mathscr{X}, \mathscr{Y}))$. Благодаря ограниченности функции $|||H||| = |||v|||$ и просторности расслоения $B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ сечение H продолжается до глобального $\overline{H} \in C(Q, B(\mathscr{X}, \mathscr{Y}))$.

Пусть $\overline{\mathscr{Y}}$ — просторная оболочка расслоения $\mathscr{Y}$. Рассмотрим продолжение $\bar{v} \in C(Q, \overline{\mathscr{Y}})$ сечения v и в каждой точке $q \in Q$ определим оператор $\overline{\overline{H}}(q) \in B(\mathscr{X}(q), \overline{\mathscr{Y}}(q))$, положив $\overline{\overline{H}}(q)x := (w(q)x) \cdot \bar{v}(q)$ для всех $x \in \mathscr{X}(q)$. Ясно, что $\overline{\overline{H}} \in C(Q, B(\mathscr{X}, \overline{\mathscr{Y}}))$. Таким образом, мы имеем два непрерывных глобальных сечения $\overline{H}$ и $\overline{\overline{H}}$ расслоения $B(\mathscr{X}, \overline{\mathscr{Y}})$, совпадение которых на всюду плотном подмножестве $D \subset Q$ приводит к равенству $\overline{H} = \overline{\overline{H}}$. Отсюда следует, что

$\overline{\overline{H}}$ — сечение $B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, а значит, $\bar{v}$ — сечение $\mathscr{Y}$, поскольку $w(q) \neq 0$ для всех $q \in Q$. ▶

3.2.10. Лемма. *Пусть $\overline{\mathscr{X}}$ и $\overline{\mathscr{Y}}$ — просторные оболочки НБР $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$, D — котощее подмножество Q и $\mathscr{U} \subset C(D,\mathscr{X})$ послойно плотно в $\mathscr{X}$ на D. Предположим, что отображение $H: q \in D \mapsto H(q) \in B(\mathscr{X}(q),\mathscr{Y}(q))$ переводит любой элемент $u \in \mathscr{U}$ в непрерывное сечение $H \otimes u \in C(D,\mathscr{Y})$. Тогда существует единственное сечение $\overline{H} \in C_\infty(Q, B(\overline{\mathscr{X}},\overline{\mathscr{Y}}))$ такое, что оператор $\overline{H}(q)$ продолжает $H(q)$ для всех $q \in D \cap \operatorname{dom}\overline{H}$. При этом $|||H||| \leqslant |||\overline{H}|||$ на D и функции $|||H|||$ и $|||\overline{H}|||$ совпадают на некотором котощем подмножестве Q.*

◀ Обозначим символом $\mathscr{U}_1$ совокупность всевозможных осколков $\langle A\rangle u$ элементов $u \in \mathscr{U}$, соответствующих открыто-замкнутым подмножествам $A \subset Q$, на которых $|||u||| \leqslant 1$. Из послойной плотности $\mathscr{U}$ в $\mathscr{X}$ на множестве D следует, что $\sup_{u\in\mathscr{U}_1}|H\otimes u|(q) = \|H(q)\| < \infty$ для всех $q \in D$. Поскольку D является котощим подмножеством Q, согласно теореме 1.3.5 множество $\{|H\otimes u| : u \in \mathscr{U}_1\}$ имеет в K-пространстве $C_\infty(Q)$ точную верхнюю границу, которую мы обозначим через h. Очевидно, что $|||H||| \leqslant h$ на D, и поэтому функция $|||H|||\big|_{D_0}$ локально ограничена на (котощем) множестве $D_0 := D \cap \operatorname{dom} h$. Из 2.4.9 следует, что $H|_{D_0} \in \operatorname{Hom}_{D_0}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$.

Пусть $\overline{H}_0 \in \operatorname{Hom}_{D_0}(\overline{\mathscr{X}},\overline{\mathscr{Y}})$ — продолжение гомоморфизма $H|_{D_0}$ (см. 3.1.8). Тогда $\overline{H}_0 \in C(D_0, B(\overline{\mathscr{X}},\overline{\mathscr{Y}}))$ в силу предложения 3.2.7. Обозначим через $\overline{H}$ максимальное расширение сечения $\overline{H}_0$, $\overline{H} \in C_\infty(Q, B(\overline{\mathscr{X}},\overline{\mathscr{Y}}))$. Согласно 3.1.8 функции $|||H|||$ и $|||\overline{H}|||$ совпадают на котощем подмножестве Q, что дает нам равенство $|\overline{H}| = h$. Благодаря просторности расслоения $B(\overline{\mathscr{X}},\overline{\mathscr{Y}})$ (см. 3.2.9) мы получаем соотношения $\operatorname{dom}\overline{H} = \operatorname{dom} h$ и $D_0 = D \cap \operatorname{dom}\overline{H}$. Таким образом, сечение $\overline{H}$ является искомым. Единственность $\overline{H}$ обеспечивается совпадением сечений $\overline{H}\otimes\bar{u}$ и $H\otimes\bar{u}$ на котощем подмножестве Q для каждого $\bar{u} \in C(Q,\overline{\mathscr{X}})$. ▶

Замечание. Пример 2.4.6 показывает, что условия последней леммы не гарантируют включения множества D в $\operatorname{dom}\overline{H}$.

3.2.11. Следствие. *Пусть расслоение $\mathscr{X}$ просторно и $\overline{\mathscr{Y}}$ — просторная оболочка $\mathscr{Y}$. Тогда $B(\mathscr{X},\overline{\mathscr{Y}})$ — просторная оболочка расслоения $B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$.*

◀ Вытекает из 3.2.10 и 3.2.9. ▶

3.2.12. Лемма. *Предположим, что расслоение $\mathscr{X}$ просторно. Для любого сечения $H \in C_\infty(Q, B(\mathscr{X},\mathscr{Y}))$ и числа $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент $u \in C(Q,\mathscr{X})$, что $|u| \leqslant 1$ и $|H\otimes u| \geqslant |H| - \varepsilon$.*

◀ Для каждого элемента $q \in D := \operatorname{dom}|H|$ подберем сечение $u_q \in C(Q,\mathscr{X})$ и открыто-замкнутую окрестность $U_q \subset Q$ точки q так, чтобы на U_q были выполнены неравенства $|u_q| \leqslant 1$ и $|H\otimes u_q| \geqslant |H| - \varepsilon$. Затем, воспользовавшись принципом исчерпывания (см. 1.2.1), найдем такое семейство $(V_q)_{q\in D}$ попарно не пересекающихся открыто-замкнутых подмножеств Q, что $V_q \subset U_q$ для всех $q \in D$ и $\operatorname{cl}\bigcup\limits_{q\in D} V_q = Q$. Очевидно, сечение $u = o\text{-}\sum\limits_{q\in D}\langle V_q\rangle u_q$ является искомым. ▶

3.2.13. Теорема. *Предположим, что расслоение $\mathscr{X}$ просторно, D — котощее подмножество Q и $\mathscr{U} \subset C(D,\mathscr{X})$ послойно плотно в $\mathscr{X}$ на D. Предположим, что отображение $H: q \in D \mapsto H(q) \in B(\mathscr{X}(q),\mathscr{Y}(q))$ переводит любой элемент $u \in \mathscr{U}$ в непрерывное сечение $H\otimes u \in C(D,\mathscr{Y})$. Тогда $H \in C(D, B(\mathscr{X},\mathscr{Y}))$.*

◀ Пусть $\overline{\mathscr{Y}}$ — просторная оболочка $\mathscr{Y}$ и $\overline{H} \in C_\infty(Q, B(\mathscr{X},\overline{\mathscr{Y}}))$ — сечение, существование которого утверждается в лемме 3.2.10. Ясно, что $H = \overline{H}$ на $D \cap \operatorname{dom}\overline{H}$. Остается показать, что $D \subset \operatorname{dom}\overline{H}$. Предположим, вопреки доказываемому, что существует точка $q \in D\setminus\operatorname{dom}\overline{H}$. Согласно 3.2.12 имеется такое сечение $\bar{u} \in C(Q, \mathscr{X})$, что $|\overline{H} \otimes \bar{u}| \geqslant |\overline{H}| - 1$. Благодаря послойной плотности $\mathscr{U}$ в $\mathscr{X}$ на D, существует элемент $u \in \mathscr{U}$ такой, что $\|u(q) - \bar{u}(q)\| < 1/2$. Тогда $|u - \bar{u}| \leqslant 1/2$ в окрестности q, и поэтому

$$\|H(q)u(q)\| = |H \otimes u|(q) = |\overline{H} \otimes u|(q)$$
$$\geqslant (|\overline{H} \otimes u| - |\overline{H}||u - \bar{u}|)(q) \geqslant (\tfrac{1}{2}|\overline{H}| - 1)(q) = \infty.$$

Полученное противоречие завершает доказательство. ▶

§ 3.3. Сопряженное банахово расслоение

Основное внимание при изучении сопряженного к $\mathscr{X}$ расслоения $\mathscr{X}'$ уделяется двойственности между сечениями $\mathscr{X}$ и $\mathscr{X}'$. Кроме того, в данном параграфе исследуется вопрос о совпадении пространств $\mathscr{X}'(q)$ и $\mathscr{X}(q)'$, а также устанавливается вложение НБР во второе сопряженное.

На протяжении всего параграфа $\mathscr{X}$ — просторное НБР над непустым экстремально несвязным компактом Q.

3.3.1. Обозначим через $\mathscr{R}$ (просторное) постоянное НБР $Q \times \{\mathbb{R}\}$. Расслоение $B(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ будет называться *сопряженным к* $\mathscr{X}$ и обозначаться символом $\mathscr{X}'$. Ниже перечислены основные свойства сопряженного расслоения, вытекающие из предшествующих результатов.

Теорема. *Пусть $\mathscr{X}$ — просторное* НБР *над экстремально несвязным компактом Q.*

(1) *Расслоение $\mathscr{X}'$ просторно.*

(2) *В каждой точке $q \in Q$ слой $\mathscr{X}'(q)$ является банаховым подпространством $\mathscr{X}(q)'$. Включение $\mathscr{X}'(q) \subset \mathscr{X}(q)'$ может быть строгим.*

(3) *Для каждой точки $q \in Q$ неравенство $\mathscr{X}(q) \neq 0$ влечет $\mathscr{X}'(q) \neq 0$.* (Ниже в 3.3.4 получено более сильное утверждение.)

(4) *Пусть D — всюду плотное подмножество Q. Каждое из приведенных ниже утверждений* (а)–(в) *(а если множество D котощее, то и* (г)*) эквивалентно принадлежности отображения $u' \colon q \in D \mapsto u'(q) \in \mathscr{X}(q)'$ пространству $C(D, \mathscr{X}')$:*

(а) $u' \in \mathrm{Hom}_D(\mathscr{X}, \mathscr{R})$;

(б) $\langle u(\cdot)|u'(\cdot)\rangle \in C(D)$ *для всех* $u \in C(Q, \mathscr{X})$;

(в) *функция $|\!|\!|u'|\!|\!|$ локально ограничена и $\langle u(\cdot)|u'(\cdot)\rangle \in C(D)$ для всех элементов u некоторого (произвольного) подмножества $C(D, \mathscr{X})$, послойно плотного в $\mathscr{X}$ на D;*

(г) *$\langle u(\cdot)|u'(\cdot)\rangle \in C(D)$ для всех элементов u некоторого послойно плотного в $\mathscr{X}$ подмножества $C(Q, \mathscr{X})$.*

◀ (1): 3.2.9; (2): 3.2.4; (3): 3.2.8; (4)(а),(б): 3.2.7; (4)(в): 2.4.9; (4)(г): 3.2.13. ▶

3.3.2. ***Лемма.*** *С каждым элементом $u' \in C(Q, \mathscr{X}')$ свяжем линейный оператор $|u'\rangle : C_\infty(Q, \mathscr{X}) \to C_\infty(Q)$, действующий по правилу $|u'\rangle(u) = \langle u|u'\rangle$* (см. 1.7.4). *Тогда отображение $u' \mapsto |u'\rangle$ осуществляет биекцию множества $\{u' \in C(Q, \mathscr{X}') : |u'| \leqslant 1\}$ на субдифференциал $\partial|\cdot|$ решеточной нормы пространства $C_\infty(Q, \mathscr{X})$.*

◀ Рассмотрим произвольный линейный оператор $T \colon C_\infty(Q, \mathscr{X}) \to C_\infty(Q)$, удовлетворяющий неравенству $|Tu| \leqslant |u|$ для всех $u \in C_\infty(Q, \mathscr{X})$. Для всех $q \in Q$ и $x \in \mathscr{X}(q)$ положим $u'(q)x := (Tu)(q)$, где $u \in C_\infty(Q, \mathscr{X})$ — произвольное сечение, принимающее значение $u(q) = x$ в точке q. Свойства оператора T, очевидно, обеспечивают корректность определения искомого сечения $u' \in C(Q, \mathscr{X}')$. ▶

3.3.3. Теорема. *Определенная в 1.7.4 форма $\langle\cdot|\cdot\rangle$ приводит пространства $C_\infty(Q,\mathscr{X})$ и $C_\infty(Q,\mathscr{X}')$ в $C_\infty(Q)$-значную двойственность* (см. [18, 1.1.1]), *которая обладает следующими свойствами.*

(1) *Для всякого сечения $u \in C_\infty(Q,\mathscr{X})$ в K-пространстве $C_\infty(Q)$ имеет место соотношение $|u| = \max\{\langle u|u'\rangle : u' \in C(Q,\mathscr{X}'),\ |u'| \leqslant 1\}$.*

(2) *Пусть $u' \in C_\infty(Q,\mathscr{X}')$.*

(а) *В K-пространстве $C_\infty(Q)$ имеет место соотношение*

$$|u'| = \sup\{\langle u|u'\rangle\ :\ u \in C(Q,\mathscr{X}),\ |u| \leqslant 1\}.$$

(б) *Для любой точки $q \in Q$ выполнено равенство*

$$|u'|(q) = \sup\{\langle u|u'\rangle(q)\ :\ u \in C(Q,\mathscr{X}),\ |u| \leqslant 1\}.$$

(в) *Если точка $q \in Q$ не является σ-изолированной, то*

$$|u'|(q) = \max\{\langle u|u'\rangle(q)\ :\ u \in C(Q,\mathscr{X}),\ |u| \leqslant 1\}.$$

◀ Утверждение (1) следует непосредственно из 3.3.2 и теоремы Хана — Банаха — Канторовича [20, 1.4.14(1)]. Равенство (2)(а) обеспечивается соотношением (2)(б), которое, в свою очередь, вытекает из 3.2.12. Остается доказать (2)(в).

Зафиксируем произвольное сечение $u' \in C_\infty(Q,\mathscr{X}')$. В силу 3.2.12 имеется такая последовательность сечений $u_n \in C(Q,\mathscr{X})$, что $|u_n| \leqslant 1$ и $\langle u_n|u'\rangle \geqslant |u'| - 1/n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если точка $q \in Q$ не является σ-изолированной, то существует счетное семейство $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ попарно не пересекающихся открыто-замкнутых подмножеств Q, объединение $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ которого всюду плотно в Q и не содержит точки q (см. 1.1.8). Очевидно, сечение $u := o\text{-}\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \langle U_n\rangle u_n \in C(Q,\mathscr{X})$ удовлетворяет неравенству $|u| \leqslant 1$ и, кроме того, $\langle u|u'\rangle \geqslant |u'| - 1/n$ на U_n. Для доказательства равенства $\langle u|u'\rangle(q) = |u'|(q)$ остается заметить, что любая окрестность точки q пересекается с бесконечным числом членов последовательности $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ▶

3.3.4. Следствие. (1) *Для любой точки $q \in Q$ пространство $\mathscr{X}'(q)$ нормирует $\mathscr{X}(q)$. Более того, $\|x\| = \max\{\langle x|x'\rangle : x' \in \mathscr{X}'(q),\ \|x'\| \leqslant 1\}$ для всех $x \in \mathscr{X}(q)$.*

(2) *Тот факт, что $\mathscr{X}(q)$ нормирует $\mathscr{X}'(q)$, очевиден в силу включения $\mathscr{X}'(q) \subset \mathscr{X}(q)'$. Однако если точка $q \in Q$ не является σ-изолированной, то между $\mathscr{X}(q)$ и $\mathscr{X}'(q)$ имеется более сильная связь: $\|x'\| = \max\{\langle x|x'\rangle : x \in \mathscr{X}(q),\ \|x\| \leqslant 1\}$ для всех $x' \in \mathscr{X}'(q)$.*

3.3.5. Теорема. *Зафиксируем произвольную точку $q \in Q$.*

(1) *Если банахово пространство $\mathscr{X}(q)$ рефлексивно, то $\mathscr{X}'(q) = \mathscr{X}(q)'$.*

(2) *Если точка q не является σ-изолированной и $\mathscr{X}'(q) = \mathscr{X}(q)'$, то пространство $\mathscr{X}(q)$ рефлексивно.*

◀ (1) Предположим, что пространство $\mathscr{X}(q)$ рефлексивно. Если $\mathscr{X}'(q)$ является собственным (замкнутым) подпространством $\mathscr{X}(q)'$, то по теореме отделимости (в топологической форме) существует ненулевой функционал $x \in \mathscr{X}(q)'' = \mathscr{X}(q)$ такой, что $\langle x|x'\rangle = 0$ для всех $x' \in \mathscr{X}'(q)$. Это противоречит 3.3.4(1).

(2) Предположим, что точка q не является σ-изолированной и $\mathscr{X}'(q) = \mathscr{X}(q)'$. Тогда из 3.3.4(2) следует, что любой функционал $x' \in \mathscr{X}(q)'$ принимает значение $\sup_{x\in B}\langle x|x'\rangle$ в одной из точек единичного шара B пространства $\mathscr{X}(q)$. По теореме Джеймса это означает рефлексивность $\mathscr{X}(q)$. ▶

Последнее утверждение позволяет заключить, что равенство $\mathscr{X}'(q) = \mathscr{X}(q)'$ для конкретных $\mathscr{X}$ и q может как быть, так и не быть выполненным. Например, пусть X — банахово пространство, а $\mathscr{X}$ — просторная оболочка постоянного НБР $Q \times \{X\}$. Если пространство X гильбертово, то в силу 3.1.7 для любой точки $q \in Q$ имеет место равенство $\mathscr{X}'(q) = \mathscr{X}(q)'$. Если же X — нерефлексивное банахово пространство, то $\mathscr{X}'(q) \neq \mathscr{X}(q)'$ в каждой не σ-изолированной точке $q \in Q$.

3.3.6. *Лемма.* *Зафиксируем произвольную точку $q \in Q$ и рассмотрим каноническое вложение $x \mapsto x''$ пространства $\mathscr{X}(q)$ в $\mathscr{X}(q)''$. Тогда отображение $x \mapsto x''|_{\mathscr{X}'(q)}$ осуществляет изометрическое вложение $\mathscr{X}(q)$ в $\mathscr{X}''(q)$, где $\mathscr{X}''$ — сопряженное расслоение к $\mathscr{X}'$.*

◀ Покажем, что $x''|_{\mathscr{X}'(q)} \in \mathscr{X}''(q)$ для произвольного элемента $x \in \mathscr{X}(q)$. Пусть сечение $u \in C(Q, \mathscr{X})$ принимает значение $u(q) = x$ в точке q. Для всех $p \in Q$ определим функционал $u''(p) \in \mathscr{X}'(p)'$ по формуле $u''(p) := u(p)''|_{\mathscr{X}'(p)}$. Тогда для каждого сечения $v \in C(Q, \mathscr{X}')$ функция $\langle v(\cdot)|u''(\cdot)\rangle = \langle u(\cdot)|v(\cdot)\rangle$ непрерывна, что согласно 3.3.1 (4) означает включение $u'' \in C(Q, \mathscr{X}'')$. В частности, $x''|_{\mathscr{X}'(q)} = u''(q) \in \mathscr{X}''(q)$.

Изометричность вложения $x \mapsto x''|_{\mathscr{X}'(q)}$ вытекает непосредственно из следствия 3.3.4 (1). ▶

3.3.7. Принимая приведенное в 3.3.6 вложение слоев $\mathscr{X}$ в соответствующие слои $\mathscr{X}''$ за тождественное отображение, в дальнейшем мы будем считать, что $\mathscr{X}(q) \subset \mathscr{X}''(q)$ в каждой точке $q \in Q$.

Теорема. НБР $\mathscr{X}$ *является подрасслоением* $\mathscr{X}''$. *В частности, это означает, что*

(1) *для непрерывности сечения $u \in S(D, \mathscr{X})$ над всюду плотным подмножеством $D \subset Q$ необходимо и достаточно, чтобы функция $\langle u(\cdot)|u'(\cdot)\rangle$ была непрерывна для каждого $u' \in C(Q, \mathscr{X}')$;*

(2) $C_\infty(Q, \mathscr{X}) = \{u \in C_\infty(Q, \mathscr{X}'') : u(q) \in \mathscr{X}(q)$ *для всех* $q \in \operatorname{dom} u\}$.

◀ Включение $C(Q, \mathscr{X}) \subset C(Q, \mathscr{X}'')$ очевидно. Предположим, что глобальное сечение u расслоения $\mathscr{X}$ принадлежит $C(Q, \mathscr{X}'')$. Тогда для произвольного $c \in C(Q, \mathscr{X})$ мы имеем $u - c \in C(Q, \mathscr{X}'')$ и, следовательно, $|||u - c||| \in C(Q)$. Последнее означает, что $u \in C(Q, \mathscr{X})$. ▶

3.3.8. Сформулированное ниже утверждение дополняет следствие 3.2.2.

Предложение. *Следующие свойства просторного* НБР $\overline{\mathscr{X}}$ *над Q эквивалентны:*

(1) *если $\mathscr{X}$ — всюду плотное подрасслоение $\overline{\mathscr{X}}$, $\mathscr{Y}$ —* НБР *над Q, $\mathscr{Y}(q) \neq 0$ для всех $q \in Q$ и поточечная норма $|||H|||$ любого гомоморфизма $H \in \operatorname{Hom}_Q(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ непрерывна, то $\mathscr{X} = \overline{\mathscr{X}}$;*

(2) *для любой точки $q \in Q$ и любого собственного банахова подпространства $X \subset \overline{\mathscr{X}}(q)$ существует такой функционал $x' \in \overline{\mathscr{X}}'(q)$, что $\|x'|_X\| < \|x'\|$.*

◀ (1)⇒(2). Допустим, что $\overline{\mathscr{X}}$ удовлетворяет условию (1), X — собственное банахово подпространство слоя $\overline{\mathscr{X}}(q_0)$ в некоторой точке $q_0 \in Q$ и $\|x'|_X\| = \|x'\|$ для всех $x' \in \overline{\mathscr{X}}'(q_0)$. Заметим, что в этом случае $\overline{\mathscr{X}}'(q_0) \neq \overline{\mathscr{X}}(q_0)'$, и поэтому точка q_0 не является изолированной. Положим $\mathscr{X}(q_0) := X$ и $\mathscr{X}(q) := \overline{\mathscr{X}}(q)$ при $q \neq q_0$. Ясно, что банахово расслоение $\mathscr{X}$, снабженное индуцированной из $\overline{\mathscr{X}}$ непрерывной структурой (см. 2.2.2), является всюду плотным подрасслоением $\overline{\mathscr{X}}$ (см. 2.5.8). Положим $\mathscr{Y} := Q \times \{\mathbb{R}\}$ и рассмотрим произвольный гомоморфизм $H \in \operatorname{Hom}_Q(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. Для достижения искомого противоречия достаточно показать непрерывность поточечной нормы $|||H|||$. Из 3.1.8 следует, что H продолжается до гомоморфизма $\overline{H} \in \mathrm{Hom}_Q(\overline{\mathscr{X}}, \mathscr{Y})$, норма $|||\overline{H}|||$ которого непрерывна в силу 3.2.2. Осталось заметить, что $|||H||| = |||\overline{H}|||$, поскольку $H(q) = \overline{H}(q)$ при $q \neq q_0$ и, кроме того, $\|H(q_0)\| = \|\overline{H}(q_0)|x\| = \|\overline{H}(q_0)\|$.

(2)$\Rightarrow$(1). Допустим, что $\overline{\mathscr{X}}$ удовлетворяет условию (2), $\mathscr{X}$ — всюду плотное подрасслоение $\overline{\mathscr{X}}$, слои $\mathscr{Y}$ не вырождены и $|||H||| \in C(Q)$ для всех $H \in \mathrm{Hom}_Q(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, но тем не менее $\mathscr{X}(q_0) \neq \overline{\mathscr{X}}(q_0)$ в некоторой точке $q_0 \in Q$. В силу 2.3.5 и условия (2) существует такое сечение $\bar{u}' \in C(Q, \overline{\mathscr{X}}')$, что

$$\|\bar{u}'(q_0)|_{\mathscr{X}(q_0)}\| < \|\bar{u}'(q_0)\|.$$

Положим $u'(q) := \bar{u}'(q)|_{\mathscr{X}(q)}$ для всех $q \in Q$. Очевидно, $u' \in \mathrm{Hom}_Q(\mathscr{X}, Q \times \{\mathbb{R}\})$. Из 3.1.8 следует, что поточечные нормы $|||u'|||$ и $|||\bar{u}'|||$ совпадают на некотором котощем подмножестве Q. Поэтому непрерывность функции $|||\bar{u}'|||$ и ее несовпадение с $|||u'|||$ на всем компакте Q говорят о том, что функция $|||u'|||$ не является непрерывной.

Согласно лемме 2.5.12 существует сечение $v \in C(Q, \mathscr{Y})$ с поточечной нормой $|||v||| \equiv 1$. В каждой точке $q \in Q$ определим оператор $H(q) \in B(\mathscr{X}(q), \mathscr{Y}(q))$, положив $H(q)x := \langle x|u'(q)\rangle \cdot v(q)$ для всех $x \in \mathscr{X}(q)$. Из 2.3.1 и 2.4.4 следует, что $H \in \mathrm{Hom}_Q(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, и поэтому функция $|||u'||| = |||H|||$ непрерывна. Полученное противоречие завершает доказательство. ▶

Замечание. (а) Просторное НБР $\overline{\mathscr{X}}$ обладает свойством (2), если, например, $\overline{\mathscr{X}}'(q) = \overline{\mathscr{X}}(q)'$ в каждой точке $q \in Q$. Равенство $\overline{\mathscr{X}}'(q) = \overline{\mathscr{X}}(q)'$, в свою очередь, имеет место в том случае, когда пространство $\overline{\mathscr{X}}(q)$ рефлексивно или точка q изолирована (см. 3.3.5).

(б) Автору не известны примеры просторных НБР $\overline{\mathscr{X}}$, которые бы не обладали свойством (2).

§ 3.4. Реализация пространств Банаха — Канторовича

В этом небольшом параграфе вскрывается основополагающая роль банаховых расслоений (главным образом, просторных) в вопросах аналитического представления РНП. Выясняется (см. 3.4.2–3.4.4), что всякое o-полное РНП изометрично фундаменту пространства расширенных непрерывных сечений некоторого однозначно определяемого просторного НБР. Все основные факты об НБР и их сечениях следует оценивать с учетом этих реализационных теорем. Например, с формальной точки зрения теорема 2.5.7 говорит о свойствах некоторого множества сечений. В действительности же она предлагает конкретные аналитические характеризации аппроксимирующего подмножества произвольного РНП.

На протяжении данного параграфа предполагается, что Q — непустой экстремально несвязный компакт.

3.4.1. *Предложение.* *Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — просторные* НБР *над Q, E — фундамент K-пространства $C_\infty(Q)$.* РНП *$E(\mathscr{X})$ и $E(\mathscr{Y})$ изометричны тогда и только тогда, когда расслоения $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ изометричны.*

◀ Предположим, что расслоения $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ изометричны. Тогда согласно теореме 2.4.12 изометричны РНП $C(Q, \mathscr{X})$ и $C(Q, \mathscr{Y})$. В силу 2.5.7 РНП $C(Q, \mathscr{X})$ r-плотно в $C_\infty(Q, \mathscr{X})$. Тогда из 1.5.4 следует, что $C(Q, \mathscr{X}) \cap E(\mathscr{X})$ o-плотно в $E(\mathscr{X})$. Аналогично устанавливается, что $C(Q, \mathscr{Y}) \cap E(\mathscr{Y})$ o-плотно в $E(\mathscr{Y})$. Для доказательства изометричности РНП $E(\mathscr{X})$ и $E(\mathscr{Y})$ остается воспользоваться их o-полнотой (см. 2.5.4).

Пусть теперь РНП $E(\mathscr{X})$ и $E(\mathscr{Y})$ изометричны. Тогда изометричны РНП $E_0(\mathscr{X})$ и $E_0(\mathscr{Y})$, где $E_0 = E \cap C(Q)$. Благодаря просторности расслоений $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ имеют место включения $E_0(\mathscr{X}) \subset C(Q, \mathscr{X})$ и $E_0(\mathscr{Y}) \subset C(Q, \mathscr{Y})$. Обозначим через $\mathscr{X}_0$ и $\mathscr{Y}_0$ подрасслоения $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$, индуцированные пространствами

$E_0(\mathscr{X})$ и $E_0(\mathscr{Y})$ соответственно (см. 2.2.2). Очевидно, РНП $E_0(\mathscr{X})$ и $E_0(\mathscr{Y})$ послойно плотны (в $\mathscr{X}_0$ и $\mathscr{Y}_0$ соответственно) и изометричны. Из 2.4.12 следует, что расслоения $\mathscr{X}_0$ и $\mathscr{Y}_0$ изометричны. Поскольку K-пространство E является фундаментом $C_\infty(Q)$, расслоение $\mathscr{X}$ представляет собой просторную оболочку $\mathscr{X}_0$, а $\mathscr{Y}$ — просторную оболочку $\mathscr{Y}_0$ (более того, $\mathscr{X} \equiv \mathscr{X}_0$ и $\mathscr{Y} \equiv \mathscr{Y}_0$ на открытом всюду плотном подмножестве Q). Доказательство завершает ссылка на 3.1.10. ▶

3.4.2. Следующий результат является развитием реализационной теоремы Кусраева — Стрижевского [23, 5.5].

Теорема. *Для любого* ПБК $\mathscr{U}$ *над фундаментом* $E \subset C_\infty(Q)$ *существует единственное с точностью до изометрии просторное* НБР $\mathscr{X}$ *над* Q *такое, что* РНП $\mathscr{U}$ *и* $E(\mathscr{X})$ *изометричны.*

◀ Пусть ПБК $\mathscr{U}$ и K-пространство E удовлетворяют условиям теоремы. Обозначим фундамент $\{u \in \mathscr{U} : |u| \in C(Q)\}$ пространства $\mathscr{U}$ через $\mathscr{U}_0$. Снабдим векторное пространство $\mathscr{U}_0$ мультинормой $(\|\cdot\|_q)_{q\in Q}$, положив $\|u\|_q := |u|(q)$ для всех $u \in \mathscr{U}_0$. Пусть $\mathscr{X}_0$ — НБР над Q, порожденное построенным мультинормированным пространством, и $i\colon \mathscr{U}_0 \to C(Q, \mathscr{X}_0)$ — соответствующее каноническое вложение (см. 2.2.7). Мы докажем, что просторная оболочка $\mathscr{X}$ расслоения $\mathscr{X}_0$ является искомым НБР.

Легко убедиться в том, что для произвольного элемента $u \in \mathscr{U}$ существует семейство $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ попарно дизъюнктных порядковых проекторов в E, удовлетворяющих условиям $u = o\text{-}\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \pi_n u$ и $\pi_n u \in \mathscr{U}_0$ ($n \in \mathbb{N}$). Попарная дизъюнктность сечений $i(\pi_n u) \in C(Q, \mathscr{X})$, неравенство $|i(\pi_n u)| \leqslant |u|$ и порядковая полнота РНП $E(\mathscr{X})$ позволяют ввести в рассмотрение сумму $j(u) := o\text{-}\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} i(\pi_n u) \in E(\mathscr{X})$, которая, очевидно, не зависит от выбора семейства $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Покажем, что отображение j осуществляет изометрию $\mathscr{U}$ на $E(\mathscr{X})$.

В доказательстве нуждается лишь сюръективность отображения j. Из послойной плотности множества $i[\mathscr{U}_0]$ в $\mathscr{X}_0$ следует плотность $Q \otimes j[\mathscr{U}]$ в $Q \otimes \mathscr{X}$. Согласно 2.5.7 множество $j[\mathscr{U}]$ o-плотно в $C_\infty(Q, \mathscr{X})$, а тогда в силу предложения 1.5.4 $j[\mathscr{U}]$ o-плотно в $E(\mathscr{X})$. Остается воспользоваться o-полнотой $\mathscr{U}$.

Единственность расслоения $\mathscr{X}$, удовлетворяющего условиям теоремы, следует из 3.4.1. ▶

3.4.3. ***Следствие.*** *Для любого* ПБК $\mathscr{U}$ *над* E *и для любого изоморфизма* K*-пространства* E *на фундамент* $F \subset C_\infty(Q)$ *существуют (единственное с точностью до изометрии) просторное* НБР $\mathscr{X}$ *над* Q *и изометрия* $\mathscr{U}$ *на* $F(\mathscr{X})$, *ассоциированная с данным изоморфизмом* E *на* F.

3.4.4. ***Следствие.*** *Для любого* ПБК $\mathscr{U}$ *существуют экстремально несвязный компакт* Q, *фундамент* $F \subset C_\infty(Q)$ *и просторное* НБР $\mathscr{X}$ *над* Q *такие, что* РНП $\mathscr{U}$ *и* $F(\mathscr{X})$ *изометричны.*

Пространство $F(\mathscr{X})$ (а точнее, изометрия $\mathscr{U}$ на $F(\mathscr{X})$) будет называться (*непрерывной*) *реализацией* ПБК $\mathscr{U}$, а $\mathscr{X}$ — *реализационным* НБР для $\mathscr{U}$. Можно показать, что реализационное расслоение для данного ПБК единственно с точностью до изометрии.

Заметим, что предложенная реализация ПБК идейно близка аналогичному представлению $C(Q)$-выпуклых модулей (см., например, [38, § 7]) и, как видно из [23], может быть получена на основе этого представления.

3.4.5. ***Следствие.*** (1) *В любом расширенном* K*-пространстве* E *с фиксированной порядковой единицей* 1_E *можно определить произведение так, что* E *превратится в коммутативную упорядоченную алгебру, в которой* 1_E *является единицей умножения.*

(2) *Всякое* ПБК $\mathscr{U}$ *над расширенным* K*-пространством* E *с фиксированной порядковой единицей* $\mathbb{1}_E$ *можно наделить структурой модуля над* E *таким образом, что* $\mathbb{1}_E u = u$ *и* $|eu| = |e||u|$ *для всех* $e \in E$ *и* $u \in \mathscr{U}$.

Ниже (см. 6.2.17) мы покажем, что соотношение $|eu| = |e||u|$ определяет структуру модуля на $\mathscr{U}$ единственным образом.

Пусть $\mathscr{U}$ — произвольное ПБК над фундаментом E расширенного K-пространства $\mathscr{E}$. Будем говорить, что в $\mathscr{U}$ *определено произведение* элементов $e \in \mathscr{E}$ и $u \in \mathscr{U}$ (и писать $eu \in \mathscr{U}$), если произведение eu, вычисленное в максимальном расширении $\mathscr{U}$, принадлежит $\mathscr{U}$. Очевидно, последнее выполнено тогда и только тогда, когда $|e||u| \in E$.

Модульная структура ПБК часто используется при поиске элементов, удовлетворяющих определенным условиям на норму. Вот один из типичных примеров.

Лемма. *Пусть* $\mathscr{U}$ — ПБК *над* E. *Для любых* $u \in \mathscr{U}$ *и* $e \in E^+$ *существует такой элемент* $u_e \in \mathscr{U}$, *что* $|u_e| = e$ *и* $|u - u_e| = \big||u| - e\big|$.

◀ Зафиксируем порядковую единицу $\mathbb{1}$ в максимальном расширении $\overline{E}$ K-пространства E, снабдим $\overline{E}$ соответствующим умножением и введем в максимальном расширении $\overline{\mathscr{U}}$ ПБК $\mathscr{U}$ структуру модуля над $\overline{E}$. Благодаря предложению 1.4.3 существует такой элемент $\bar{u} \in \overline{\mathscr{U}}$, что $|\bar{u}| = \mathbb{1}$ и $u = |u|\bar{u}$. Очевидно, элемент $u_e := e\bar{u}$ является искомым. ▶

3.4.6. Предложение. *Если* НБР $\mathscr{X}$ *над* Q *является реализационным расслоением для* ПБК $\mathscr{U}$, *то* РНП $C_\infty(Q, \mathscr{X})$ *изометрично максимальному расширению* $\mathscr{U}$.

3.4.7. Предложение. *Рассмотрим просторное* НБР $\mathscr{X}$ *над* Q *и произвольный фундамент* $E \subset C_\infty(Q)$.

(1) *Для всякого просторного подрасслоения* $\mathscr{X}_0$ *расслоения* $\mathscr{X}$ *пространство* $E(\mathscr{X}_0)$ *представляет собой о-полное решеточно нормированное подпространство* $E(\mathscr{X})$.

(2) *Для любого о-полного решеточно нормированного подпространства* $\mathscr{U} \subset E(\mathscr{X})$ *существует единственное просторное подрасслоение* $\mathscr{X}_0$ *расслоения* $\mathscr{X}$ *такое, что* $\mathscr{U} = E(\mathscr{X}_0)$.

◀ В пояснении нуждается лишь утверждение (2). Рассмотрим произвольное o-полное решеточно нормированное подпространство $\mathscr{U} \subset E(\mathscr{X})$ и обозначим через $\mathscr{X}_0$ замыкание (см. 3.1.6) подрасслоения НБР $\mathscr{X}$, индуцированного пространством $\mathscr{U} \cap C(Q, \mathscr{X})$ (см. 2.2.2). Включение $\mathscr{U} \subset E(\mathscr{X}_0)$ очевидно. Совпадение $\mathscr{U}$ с $E(\mathscr{X}_0)$ следует из 2.5.7, 1.5.4 и o-полноты $\mathscr{U}$ (ср. с доказательством сюръективности j в 3.4.2). ▶

Замечание. Последнее предложение уместно сравнить с теоремой о реализации $C(Q)$-подмодулей пространства $C(Q, \mathscr{X})$ (см. [38, 8.6]).

3.4.8. Теорема. *Пусть* $\mathscr{X}$ — *просторное* НБР *над* Q. *Предположим, что фундаменты* E *и* F *расширенного* K*-пространства* $C_\infty(Q)$ *образуют дуализирующую пару* (см. 1.4.4). *Тогда* РНП $E^*(\mathscr{X}')$ *изометрично* $E(\mathscr{X})^*$, *где изометрия осуществляется сопоставлением сечению* $u' \in E^*(\mathscr{X}')$ *оператора* $|u'\rangle : u \mapsto \langle u|u'\rangle$ *из* $E(\mathscr{X})$ *в* F. *В частности, если* $\mathscr{X}$ — *реализационное расслоение для* ПБК $\mathscr{U}$, *то* $\mathscr{X}'$ — *реализационное расслоение для сопряженного* ПБК $\mathscr{U}^*$.

◀ Следует из 3.3.2 и равенства $E(\mathscr{X})^* = \cup\{e^*\partial|\cdot| : 0 \leqslant e^* \in E^*\}$. ▶

3.4.9. Предложение. *Пусть* $\mathscr{X}$ — НБР *над* Q. *Просторная оболочка* $\overline{\mathscr{X}}$ *расслоения* $\mathscr{X}$ *является реализационным* НБР *для пространства* $C_\infty(Q, \mathscr{X})$. *Для любого идеала* $E \subset C_\infty(Q)$ *оператор* ext (см. 2.5.1) *осуществляет изометрию* ПБК $E(\mathscr{X})$ *на* $E(\overline{\mathscr{X}})$.

◀ Следует из теоремы 2.5.8. ▶

Глава 4. Измеримые банаховы расслоения

Пусть $\mathscr{X}$ — непрерывное банахово расслоение над локально компактным пространством Ω с мерой Радона. Сечение $u \in S(\Omega, \mathscr{X})$ называется измеримым, если для каждого компакта $K \subset \Omega$ существует последовательность непрерывных сечений $u_n \in C(\Omega, \mathscr{X})$, сходящаяся к u почти всюду на K. Такой подход к определению измеримости сечений до сих пор являлся если не единственным, то, во всяком случае, господствующим в литературе о банаховых расслоениях. Однако в нашей ситуации оказался уместным несколько иной подход. В этой главе измеримые сечения определяются как пределы почти всюду (на подмножествах конечной меры) последовательностей элементов некоторого аксиоматически выделенного множества сечений, названного измеримой структурой. Такой способ введения измеримых сечений аналогичен конструкции Даниэля и является формально более общим по сравнению с традиционным топологическим подходом. Надо сказать, что идея измеримой структуры была высказана Н. Динкулеану еще в 1966 г., однако с тех пор так, по-видимому, и не была подвергнута достаточно детальному рассмотрению.

В этой главе устанавливаются элементарные свойства измеримых сечений, полученных посредством измеримой структуры, вводится и исследуется понятие лифтинга в фактор-пространстве измеримых сечений, а также формулируются результаты использования теории просторных банаховых расслоений в исследовании измеримых расслоений. На протяжении всей главы Ω — пространство с ненулевой мерой (см. 1.1.11).

§ 4.1. Основные понятия

В данном параграфе вводится понятие измеримого банахова расслоения (ИБР) как банахова расслоения, снабженного так называемой измеримой структурой — своего рода измеримым аналогом непрерывной структуры (ср. 2.1.1). Дано определение и указано несколько критериев измеримости сечения ИБР. В рамках исследования концепции измеримой структуры вводятся и уточняются понятия эквивалентных и адекватных структур, а также описывается наибольшая из адекватных измеримых структур, совпадающая с множеством всех измеримых сечений данного ИБР (см. 4.1.12). В этом же параграфе собраны сведения общего характера об измеримых сечениях и операциях над ними. Изучение элементарных свойств ИБР завершается рассмотрением пространства классов эквивалентности измеримых сечений, которое в большинстве случаев оказывается o-полным РНП (см. 4.1.14).

4.1.1. Пусть $\mathscr{X}$ — банахово расслоение над Ω (см. 1.7.1). Множество сечений $\mathscr{C} \subset S_{\sim}(\Omega, \mathscr{X})$ назовем *измеримой структурой в* $\mathscr{X}$, если оно удовлетворяет следующим условиям:

(а) $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \in \mathscr{C}$ для всех $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ и $c_1, c_2 \in \mathscr{C}$;
(б) поточечная норма $|\!|\!|c|\!|\!|: \Omega \to \mathbb{R}$ любого элемента $c \in \mathscr{C}$ измерима;
(в) множество $\mathscr{C}$ послойно плотно в $\mathscr{X}$.

Если $\mathscr{C}$ — измеримая структура в $\mathscr{X}$, то пару $(\mathscr{X}, \mathscr{C})$ мы называем *измеримым банаховым расслоением над* Ω. При этом вместо $(\mathscr{X}, \mathscr{C})$ обычно будем писать просто $\mathscr{X}$, а измеримую структуру $\mathscr{C}$ обозначать символом $\mathscr{C}_{\mathscr{X}}$ (ср. 2.1.1). Множество $\mathscr{C} \subset S_{\sim}(\Omega, \mathscr{X})$, удовлетворяющее условию (а), будем называть *линейным*.

4.1.2. Пусть $(\mathscr{X}, \mathscr{C})$ — ИБР над Ω. Сечение $s \in S_{\sim}(\Omega, \mathscr{X})$ назовем *$\mathscr{C}$-ступенчатым* (или просто *ступенчатым*, если ясно, о какой измеримой структуре идет речь), если $s = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle A_i \rangle c_i$ для некоторых $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{B}(\Omega)$ и $c_1, \ldots, c_n \in \mathscr{C}$. Сечение $u \in S_{\sim}(\Omega, \mathscr{X})$ называется *$\mathscr{C}$-измеримым* (или просто *измеримым*), если для всякого $K \in \mathscr{B}_{\mathrm{fin}}(\Omega)$ найдется такая последовательность $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathscr{C}$-ступенчатых сечений, что $s_n(\omega) \to u(\omega)$ почти для всех $\omega \in K$. Множество всех $\mathscr{C}$-измеримых сечений $\mathscr{X}$ обозначается символом $\mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X}|\mathscr{C})$ или, короче, $\mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})$.

4.1.3. *Предложение.* *Пусть $\mathscr{X}$ — ИБР над Ω, $u, v \in S_\sim(\Omega, \mathscr{X})$, $e\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

(1) *Если сечение u измеримо, то функция $|||u|||$ измерима.*
(2) *Если функция e и сечение u измеримы, то произведение eu измеримо.*
(3) *Если сечения u и v измеримы, то сумма $\lambda u + \mu v$ измерима.*

4.1.4. *Предложение.* *Если $\mathscr{X}$ — ИБР над σ-конечным пространством с мерой Ω, то измеримость сечения $u \in S_\sim(\Omega, \mathscr{X})$ эквивалентна наличию такой последовательности $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ступенчатых сечений, что $s_n(\omega) \to u(\omega)$ почти для всех $\omega \in \Omega$.*

4.1.5. Для всякого подмножества $\mathscr{V} \subset \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})$ сечений ИБР $\mathscr{X}$ над Ω будем обозначать символом $d_{\mathrm{fin}}\mathscr{V}$ совокупность всевозможных сумм $\sum\limits_{i=1}^{n}\langle A_i\rangle v_i$, где $v_i \in \mathscr{V}$ и измеримые подмножества $A_i \subset \Omega$ попарно не пересекаются.

Лемма. *Пусть $\mathscr{X}$ — ИБР над Ω, $\mathscr{V}$ — счетное подмножество $\mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})$, $u \in S_\sim(\Omega, \mathscr{X})$. Предположим, что для каждого $v \in \mathscr{V}$ функция $|||u - v|||$ измерима и $\inf_{v\in\mathscr{V}}\|u(\omega) - v(\omega)\| = 0$ почти для всех $\omega \in \Omega$. Тогда найдется последовательность элементов $d_{\mathrm{fin}}\mathscr{V}$, сходящаяся к u почти всюду.*

◄ Пусть множество $\mathscr{V} = \{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ и сечение $u \in S_\sim(\Omega, \mathscr{X})$ удовлетворяют условиям леммы. Построим последовательность $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset d_{\mathrm{fin}}\mathscr{V}$ по индукции, положив $w_1 := v_1$ и $w_{n+1} := \langle A_n\rangle w_n + \langle\Omega\backslash A_n\rangle v_{n+1}$, где $A_n = \{\omega \in \Omega : \|w_n(\omega) - u(\omega)\| < \|v_{n+1}(\omega) - u(\omega)\|\}$. Тогда последовательность функций $|||w_n - u|||$ поточечно убывает и $|||w_n - u||| \leqslant |||v_n - u|||$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, что $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — искомая последовательность. ►

4.1.6. *Предложение.* *Пусть $\mathscr{X}$ — ИБР над Ω. Если для каждого $K \in \mathscr{B}_{\mathrm{fin}}(\Omega)$ имеется счетная сеть измеримых сечений $\mathscr{X}$, сходящаяся к $u \in S_\sim(\Omega, \mathscr{X})$ почти всюду на K, то сечение u измеримо.*

◄ Зафиксируем $K \in \mathscr{B}_{\mathrm{fin}}(\Omega)$ и допустим, что счетная сеть $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ элементов $\mathscr{U}$ сходится к u почти всюду на K. Для каждого элемента $\alpha \in \mathrm{A}$ существует последовательность $(s_n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ ступенчатых сечений, сходящаяся к u_α почти всюду на K. Несложно проверить, что функции $\langle K\rangle|||s_n^\alpha - u|||$ измеримы для любых $\alpha \in \mathrm{A}$ и $n \in \mathbb{N}$ и, кроме того, $\inf_{\alpha\in\mathrm{A},n\in\mathbb{N}}\|s_n^\alpha(\omega) - u(\omega)\| = 0$ почти для всех $\omega \in K$. Теперь измеримость сечения u следует из 4.1.5 и произвольности множества $K \in \mathscr{B}_{\mathrm{fin}}(\Omega)$. ►

4.1.7. *Предложение.* *Пусть $\mathscr{X}$ — ИБР над Ω и $(A_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство элементов $\mathscr{B}(\Omega)$, аппроксимирующее Ω. Если осколки $\langle A_\xi\rangle u$ сечения $u \in S_\sim(\Omega, \mathscr{X})$ измеримы для всех $\xi \in \Xi$, то сечение u измеримо.*

◄ Предположим, что семейство $(A_\xi)_{\xi\in\Xi}$ и сечение u удовлетворяют условиям доказываемого утверждения. Достаточно зафиксировать произвольный элемент $K \in \mathscr{B}_{\mathrm{fin}}(\Omega)$ и показать измеримость осколка $\langle K\rangle u$. Согласно 1.1.14 имеется такая последовательность $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Xi$, что

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{\xi_n} \cap K \sim K.$$

Остается воспользоваться измеримостью осколков $\langle A_{\xi_n} \cap K\rangle u$ и предложением 4.1.6. ►

4.1.8. Пусть $(\mathscr{X}, \mathscr{C})$ — ИБР над Ω. Обозначим символом $\mathrm{St}(\Omega, \mathscr{X})$ совокупность всевозможных сечений $\mathscr{X}$, представимых в виде $\sum_{\xi\in\Xi} \langle A_\xi\rangle c_\xi$, где $(c_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство элементов $\mathscr{C}$, а $(A_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство попарно не пересекающихся измеримых множеств, аппроксимирующее Ω. Совокупность всех элементов множества $\mathrm{St}(\Omega, \mathscr{X})$, представимых в виде счетных сумм $\sum_{n\in\mathbb{N}} \langle A_n\rangle c_n$, обозначим через $\mathrm{St}_\sigma(\Omega, \mathscr{X})$. Заметим, что из 4.1.7 следует включение $\mathrm{St}(\Omega, \mathscr{X}) \subset \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})$.

Предложение. (1) *Сечение $u \in S_\sim(\Omega, \mathscr{X})$ измеримо тогда и только тогда, когда для любого $K \in \mathscr{B}_{\mathrm{fin}}(\Omega)$ имеется последовательность $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{St}_\sigma(\Omega, \mathscr{X})$, равномерно сходящаяся к u на некотором множестве $K_0 \sim K$.*

(2) *Если пространство с мерой Ω обладает свойством прямой суммы, то для измеримости сечения $u \in S_\sim(\Omega, \mathscr{X})$ необходимо и достаточно, чтобы имелась последовательность $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{St}(\Omega, \mathscr{X})$, равномерно сходящаяся к u на некотором множестве $\Omega_0 \sim \Omega$.*

◀ Благодаря 4.1.6 в доказательстве нуждается лишь необходимость предлагаемых условий измеримости.

(1) Предположим, что $u \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})$, и зафиксируем произвольные множество $K \in \mathscr{B}_{\mathrm{fin}}(\Omega)$ и число $n \in \mathbb{N}$. По определению измеримости 4.1.2 существует последовательность ступенчатых сечений $(s^n_m)_{m\in\mathbb{N}}$, сходящаяся к u почти всюду на K. Тогда

$$o\text{-}\lim_{m\to\infty} \big(|\!|\!| s^n_m - u |\!|\!| |_K\big)^\sim = 0$$

в K-пространстве $M(K)$ (см. 1.3.10). Согласно 1.3.3 имеется такое разбиение единицы $(\pi^n_m)_{m\in\mathbb{N}}$ в булевой алгебре порядковых проекторов $\mathrm{Pr}(M(K))$, что $\pi^n_m\big(|\!|\!| s^n_m - u |\!|\!| |_K\big)^\sim \leqslant 1/n$ при всех $m \in \mathbb{N}$. Можно выбрать последовательность $(A^n_m)_{m\in\mathbb{N}}$ попарно не пересекающихся измеримых подмножеств K так, чтобы $\langle (A^n_m)^\sim \rangle = \pi^n_m$ при всех $m \in \mathbb{N}$ (см. 1.3.11). Очевидно, что следующая последовательность элементов $\mathrm{St}_\sigma(\Omega, \mathscr{X})$ является искомой:

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} \langle A^n_m\rangle s^n_m \quad (n \in \mathbb{N}).$$

(2) Свойство прямой суммы позволяет зафиксировать семейство $(K_\xi)_{\xi\in\Xi}$ попарно не пересекающихся измеримых множеств конечной меры, аппроксимирующее Ω. Если $u \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})$, то в силу доказанного утверждения (1) для каждого $\xi \in \Xi$ имеется последовательность $(s^\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов $\mathrm{St}_\sigma(\Omega, \mathscr{X})$, удовлетворяющих неравенству $|\!|\!| u - s^\xi_n |\!|\!| \leqslant 1/n$ почти всюду на K_ξ. Используя 1.2.12, легко убедиться в том, что последовательность сечений $\sum_{\xi\in\Xi} \langle K_\xi\rangle s^\xi_n \in \mathrm{St}(\Omega, \mathscr{X})$ $(n \in \mathbb{N})$ является искомой. ▶

4.1.9. ***Лемма.*** *Пусть $\mathscr{X}$ — ИБР над Ω, $\mathscr{V} \subset \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})$ и $u \in S_\sim(\Omega, \mathscr{X})$. Предположим, что функции $|\!|\!| u - v |\!|\!|$ измеримы для всех $v \in \mathscr{V}$ и, кроме того, $\inf_{v\in\mathscr{V}} |\!|\!| u - v |\!|\!|^\sim = 0$ в K_σ-пространстве $M(\Omega)$. Тогда сечение u измеримо и для всякого $K \in \mathscr{B}_{\mathrm{fin}}(\Omega)$ найдется последовательность элементов $d_{\mathrm{fin}}\mathscr{V}$, сходящаяся к u почти всюду на K.*

◀ Предположим, что $\mathscr{X}$, $\mathscr{V}$ и u удовлетворяют всем условиям доказываемого утверждения. Для обоснования измеримости сечения u достаточно зафиксировать произвольный элемент $K \in \mathscr{B}_{\mathrm{fin}}(\Omega)$ и показать, что осколок $\langle K\rangle u$ измерим. Поскольку в K-пространстве счетного типа $M(K)$ выполнено соотношение $\inf_{v\in\mathscr{V}}(|\!|\!| u - v |\!|\!| |_K)^\sim = 0$, найдется такое счетное подмножество $\{v_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathscr{V}$, что $\inf_{n\in\mathbb{N}}(|\!|\!| u - v_n |\!|\!| |_K)^\sim = 0$ (см. [11, VI.2.2]). Остается воспользоваться 4.1.5 и 4.1.6. ▶

4.1.10. Следствие. *Пусть $(\mathscr{X}, \mathscr{C})$ — ИБР над Ω. Для измеримости сечения $u \in S_\sim(\Omega, \mathscr{X})$ необходимо и достаточно, чтобы функции $|||u - c|||$ были измеримы для всех $c \in \mathscr{C}$, и $\inf_{c\in\mathscr{C}} |||u - c|||^\sim = 0$ в K_σ-пространстве $M(\Omega)$.*

Замечание. Из сформулированного критерия измеримости сечений следует принципиальная возможность полностью развить теорию ИБР, не используя меру как таковую. Для этого необходим лишь σ-полный идеал пренебрежимых множеств, который может быть введен «аксиоматически», без привлечения меры.

4.1.11. Пусть $\mathscr{X}$ — ИБР над Ω. Подмножество $\mathscr{V} \subset \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})$ назовем *аппроксимирующим*, если для любого $u \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})$ в K_σ-пространстве $M(\Omega)$ выполнено $\inf_{v\in\mathscr{V}} |||u - v|||^\sim = 0$ (ср. 1.5.2).

Предложение. *Следующие соотношения между измеримыми структурами $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$ в банаховом расслоении $\mathscr{X}$ над Ω равносильны:*

(1) $\mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X}|\mathscr{C}) = \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X}|\mathscr{D})$;
(2) $\mathscr{C} \subset \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X}|\mathscr{D})$ *и* $\mathscr{D} \subset \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X}|\mathscr{C})$;
(3) $\mathscr{C}$ *— аппроксимирующее подмножество* $\mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X}|\mathscr{D})$;
(4) $\mathscr{D}$ *— аппроксимирующее подмножество* $\mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X}|\mathscr{C})$;
(5) *функции $|||c-d|||$ измеримы для всех $c \in \mathscr{C}$ и $d \in \mathscr{D}$, и в K_σ-пространстве $M(\Omega)$ имеют место соотношения $\inf_{d\in\mathscr{D}} |||c - d|||^\sim = 0$ для каждого $c \in \mathscr{C}$ и $\inf_{c\in\mathscr{C}} |||c - d|||^\sim = 0$ для каждого $d \in \mathscr{D}$.*

◄ Достаточно воспользоваться 4.1.6 и 4.1.10. ►

Измеримые структуры $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$, удовлетворяющие одному из равносильных условий (1)–(5), будем называть *эквивалентными*. Если $\mathscr{X}$ — ИБР, то всякая измеримая структура, эквивалентная его исходной структуре $\mathscr{C}_\mathscr{X}$, будет называться *адекватной*. Таким образом, подмножество $\mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})$ является адекватной измеримой структурой в $\mathscr{X}$ тогда и только тогда, когда оно линейно, послойно плотно в $\mathscr{X}$ и является аппроксимирующим в $\mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})$.

Поскольку в дальнейшем измеримые структуры, как правило, в явном виде фигурировать не будут, мы условимся отождествлять ИБР $(\mathscr{X}, \mathscr{C})$ и $(\mathscr{X}, \mathscr{D})$, имеющие эквивалентные измеримые структуры. Такое отождествление уже подготовлено соглашением о написании $\mathscr{X}$ вместо $(\mathscr{X}, \mathscr{C})$ (ср. 2.1.9).

4.1.12. Теорема. *Пусть измеримая структура $\mathscr{U}$ в банаховом расслоении $\mathscr{X}$ над Ω содержит осколки всех своих элементов, т. е. $\langle A\rangle u \in \mathscr{U}$ для любых $A \in \mathscr{B}(\Omega)$ и $u \in \mathscr{U}$. Тогда перечисленные ниже свойства множества $\mathscr{U}$ эквивалентны.*

(1) $\mathscr{U} = \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X}|\mathscr{C})$ *для некоторой измеримой структуры $\mathscr{C}$ в $\mathscr{X}$.*
(2) *Если сечение $u \in S_\sim(\Omega, \mathscr{X})$ таково, что для всякого $K \in \mathscr{B}_{\mathrm{fin}}(\Omega)$ имеется последовательность элементов $\mathscr{U}$, сходящаяся к u почти всюду на K, то $u \in \mathscr{U}$.*
(3) *Множество $\mathscr{U}$ удовлетворяет следующим трем условиям:*
   (а) *если $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность попарно дизъюнктных элементов $\mathscr{U}$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \in \mathscr{U}$;*
   (б) *если последовательность элементов $\mathscr{U}$ сходится к сечению $u \in S_\sim(\Omega, \mathscr{X})$ равномерно на некотором множестве $A \sim \Omega$, то $u \in \mathscr{U}$;*
   (в) *если сечение $u \in S_\sim(\Omega, \mathscr{X})$ таково, что $\langle K\rangle u \in \mathscr{U}$ для любого $K \in \mathscr{B}_{\mathrm{fin}}(\Omega)$, то $u \in \mathscr{U}$.*

◄ Установим цепочку импликаций (1)⇒(2)⇒(3)⇒(2)⇒(1). В ней лишь фрагмент (3)⇒(2) нуждается в доказательстве: звенья (2)⇒(3) и (2)⇒(1) очевидны, а импликация (1)⇒(2) является прямым следствием 4.1.6.

Предположив выполненными условия (3)(а)–(3)(в), рассмотрим произвольное сечение $u \in S_{\sim}(\Omega, \mathscr{X})$, зафиксируем множество $K \in \mathscr{B}_{\mathrm{fin}}(\Omega)$ и допустим, что последовательность $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов $\mathscr{U}$ сходится к u почти всюду на K. Для произвольных $n, m \in \mathbb{N}$ обозначим через A^n_m совокупность $\{\omega \in K : \|u_n(\omega) - u(\omega)\| < 1/m\}$. Легко убедиться в том, что множества A^n_m измеримы и $A_m := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A^n_m \sim K$. Так как множество $\mathscr{B}(K) := \{A \in \mathscr{B}(\Omega) : A \subset K\}$, упорядоченное отношением включения, представляет собой σ-полную булеву алгебру, согласно принципу исчерпывания (см. 1.2.1) для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеется последовательность $\left(B^n_m\right)_{n\in\mathbb{N}}$ попарно дизъюнктных элементов $\mathscr{B}(K)$ такая, что $B^n_m \subset A^n_m$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B^n_m = A_m$. Положив $v_m := \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \langle B^n_m \rangle u_n$, в силу (3)(а) мы заключаем, что $v_m \in \mathscr{U}$. Учитывая (3)(б) и (3)(в), для обоснования включения $u \in \mathscr{U}$ остается заметить, что последовательность $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ сходится к u равномерно на пересечении $\bigcap\limits_{m\in\mathbb{N}} A_m \sim K$. ▶

Замечание. Отождествление ИБР, имеющих эквивалентные измеримые структуры, и исключение символа измеримой структуры из обозначения ИБР (см. 4.1.1, 4.1.2) — это приемы, работающие в том же направлении, что и последняя теорема. Действительно, можно считать, что теорема 4.1.12 предлагает подход к определению измеримости, исключающий измеримую структуру как понятие, — подход, заключающийся в явном указании множества всех измеримых сечений.

4.1.13. Предположим, что $\mathscr{X}$ — ИБР над Ω. На множестве $\mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})$ рассмотрим отношение эквивалентности $\sim$, обозначающее совпадение почти всюду: $u \sim v$ равносильно равенству $u(\omega) = v(\omega)$ почти для всех $\omega \in \Omega$. Класс эквивалентности, содержащий элемент $u \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})$ будем обозначать через $u^{\sim}$. Фактор-множество $\mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})/{\sim}$ естественным образом превращается в векторное пространство: мы полагаем $\lambda u^{\sim} + \mu v^{\sim} = (\lambda u + \mu v)^{\sim}$ при $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и $u, v \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})$. Кроме того, для каждого элемента $u^{\sim} \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})/{\sim}$ можно определить его (векторную) норму $|u^{\sim}| := |||u|||^{\sim} \in M(\Omega)$ (см. 1.1.12). Ясно, что пара $(\mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})/{\sim}, |\cdot|)$ представляет собой РНП над $M(\Omega)$, которое мы будем обозначать символом $M(\Omega, \mathscr{X})$. Заметим, что пространство $M(\Omega, \mathscr{X})$ естественным образом наделяется структурой модуля над кольцом $M(\Omega)$: следует положить $e^{\sim} u^{\sim} := (eu)^{\sim}$ для всех $e \in \mathscr{M}(\Omega)$ и $u \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})$.

Носителем класса $\mathbf{u} \in M(\Omega, \mathscr{X})$ называется класс $\{\omega \in \Omega : u(\omega) \neq 0\}^{\sim} \in B(\Omega)$, определяемый произвольным представителем $u \in \mathbf{u}$. Очевидно, дизъюнктность элементов РНП $M(\Omega, \mathscr{X})$ равносильна дизъюнктности их носителей в булевой алгебре $B(\Omega)$. Если $\mathbf{u} \in M(\Omega, \mathscr{X})$ и $\mathbf{A} \in B(\Omega)$, то значением $\langle \mathbf{A} \rangle \mathbf{u}$ порядкового проектора $\langle \mathbf{A} \rangle$ (см. 1.3.11) на классе $\mathbf{u}$ является класс $(\langle A \rangle u)^{\sim}$, где $A \in \mathbf{A}$ и $u \in \mathbf{u}$.

4.1.14. *Теорема.* *Если пространство с ненулевой мерой Ω обладает свойством прямой суммы, а $\mathscr{X}$ — ИБР над Ω, то $M(\Omega, \mathscr{X})$ является ПБК над $M(\Omega)$.*

◀ Разложимость РНП $M(\Omega, \mathscr{X})$ очевидна. В силу теоремы 1.4.3 для доказательства o-полноты $M(\Omega, \mathscr{X})$ достаточно установить его d- и r-полноту.

Пусть $(u^{\sim}_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство элементов $M(\Omega, \mathscr{X})$, имеющих попарно дизъюнктные носители $\mathbf{A}_\xi \in B(\Omega)$ (см. 4.1.13). Обозначим через $\overline{\Xi}$ расширение $\Xi \cup \{\infty\}$ множества Ξ не содержащимся в нем элементом ∞ и положим $u_\infty := 0$ и $\mathbf{A}_\infty := (\sup_{\xi\in\Xi} \mathbf{A}_\xi)^{\perp}$. Зафиксируем лифтинг ρ пространства $L^\infty(\Omega)$ (см. 1.1.14) и положим $A_\xi := \rho(\mathbf{A}_\xi)$ для каждого $\xi \in \overline{\Xi}$. В силу 1.2.12 объединение $\bigcup\limits_{\xi\in\overline{\Xi}} A_\xi$ измеримо и отличается от Ω множеством нулевой меры. Несложно убедиться в том, что сечение $\bigcup\limits_{\xi\in\Xi} u_\xi|_{A_\xi}$ измеримо и содержащий его класс эквивалентности представляет собой искомую сумму $o\text{-}\sum\limits_{\xi\in\Xi} u_\xi^\sim \in M(\Omega, \mathscr{X})$.

Рассмотрим теперь r-фундаментальную последовательность $(u_n^\sim)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов $M(\Omega, \mathscr{X})$. В этом случае почти для всех $\omega \in \Omega$ фундаментальна последовательность $(u_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$. Благодаря полноте слоев $\mathscr{X}$ существует сечение $u \in S_\sim(\Omega, \mathscr{X})$, к которому почти всюду сходится последовательность $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ясно, что сечение u измеримо и содержащий его класс эквивалентности представляет собой искомый r-предел последовательности $(u_n^\sim)_{n\in\mathbb{N}}$. ▶

Замечание. Если не требовать, чтобы пространство с мерой Ω обладало свойством прямой суммы, то $M(\Omega, \mathscr{X})$ оказывается счетно (= секвенциально), o-полным РНП над K_σ-пространством $M(\Omega)$ (см. 1.4.3).

4.1.15. Если Ω — пространство с мерой, обладающее свойством прямой суммы, и E — идеал в $M(\Omega)$, то множество $E(\mathscr{X}) := \{\mathbf{u} \in M(\Omega, \mathscr{X}) : |\mathbf{u}| \in E\}$, снабженное операциями, индуцированными из $M(\Omega, \mathscr{X})$, очевидно, представляет собой ПБК над E. Ниже (теорема 4.4.8) мы увидим, что пространство $E(\mathscr{X})$ является в определенном смысле общим видом ПБК над E (ср. 3.4.2). Символом $\mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{X})$ будет обозначаться множество $\{u \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X}) : |||u||| \in \mathscr{L}^\infty(\Omega)\}$, а его элементы будут называться *(существенно) ограниченными измеримыми сечениями* ИБР $\mathscr{X}$. Классы эквивалентности, состоящие из существенно ограниченных сечений, называются *ограниченными классами*, а совокупность всех таких классов обозначается через $L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$. Очевидно, $L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$ совпадает с $E(\mathscr{X})$, где $E = L^\infty(\Omega)$. В частности, $L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$ — ПБК над $L^\infty(\Omega)$.

§ 4.2. Примеры

Немногочисленный список примеров ИБР, приведенный в этом параграфе, включает ИБР с постоянным слоем, измеримое подрасслоение и ограничение ИБР, а также понятие изометричных ИБР.

4.2.1. Пусть X — банахово пространство. Если в качестве измеримой структуры в постоянном банаховом расслоении $\mathscr{X} = \Omega \times \{X\}$ взять совокупность постоянных функций $c\colon \Omega \to X$, то множество $\mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})$ будет состоять в точности из измеримых по Бохнеру X-значных функций, определенных почти всюду в Ω. В этом случае мы будем использовать запись $\mathscr{M}(\Omega, X)$ вместо $\mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})$. Заметим, что совокупность $\mathscr{M}(\Omega, X)$ всех измеримых функций также является непрерывной структурой в постоянном расслоении $\Omega \times \{X\}$, причем эквивалентной структуре постоянных функций (ср. 2.2.1).

4.2.2. Рассмотрим ИБР $\mathscr{X}$ над Ω. ИБР $\mathscr{X}_0$ над Ω называется *(измеримым) подрасслоением* $\mathscr{X}$, если $\mathscr{X}_0(\omega)$ является банаховым подпространством $\mathscr{X}(\omega)$ для любой точки $\omega \in \Omega$ и, кроме того, $\mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X}_0) = \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X}) \cap S_\sim(\Omega, \mathscr{X}_0)$ (ср. 2.2.2). Если $\mathscr{X}_0$ — подрасслоение $\mathscr{X}$, то, отождествляя классы

$$\{u \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X}_0) : u \sim u_0\} \in M(\Omega, \mathscr{X}_0) \quad \text{и} \quad \{u \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X}) : u \sim u_0\} \in M(\Omega, \mathscr{X})$$

для каждого сечения $u_0 \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X}_0)$, мы будем считать, что $M(\Omega, \mathscr{X}_0)$ содержится $M(\Omega, \mathscr{X})$,

Предположим теперь, что каждый слой $\mathscr{X}_0(\omega)$ дискретного банахова расслоения $\mathscr{X}_0$ является банаховым подпространством соответствующего слоя $\mathscr{X}(\omega)$. Если пересечение $\mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X}) \cap S_\sim(\Omega, \mathscr{X}_0)$ послойно плотно в $\mathscr{X}_0$, то оно образует измеримую структуру в $\mathscr{X}_0$, в паре с которой $\mathscr{X}_0$ становится измеримым подрасслоением $\mathscr{X}$. Мы будем говорить, что измеримая структура $\mathscr{X}_0$ *индуцирована* из $\mathscr{X}$. Заметим, что пересечение $\mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X}) \cap S_\sim(\Omega, \mathscr{X}_0)$ всегда послойно плотно в $\mathscr{X}_0$, если одноточечные подмножества Ω измеримы.

Двойственным образом всякое линейное множество $\mathscr{U} \subset \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})$ (см. 4.1.1) *индуцирует подрасслоение* $\mathscr{X}_0$, измеримой структурой которого оно является: $\mathscr{X}_0(\omega) = \operatorname{cl}\{u(\omega) : u \in \mathscr{U}\}$ $(\omega \in \Omega)$.

4.2.3. Предложение. *Пусть $\mathscr{X}$ — подрасслоение ИБР $\overline{\mathscr{X}}$ над Ω, $\mathscr{C}$ и $\overline{\mathscr{C}}$ — адекватные измеримые структуры в $\mathscr{X}$ и $\overline{\mathscr{X}}$ соответственно. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *каждое сечение $\bar{u} \in \mathscr{M}(\Omega, \overline{\mathscr{X}})$ принимает значения $\bar{u}(\omega) \in \mathscr{X}(\omega)$ почти для всех $\omega \in \Omega$;*

(2) $E(\mathscr{X}) = E(\overline{\mathscr{X}})$ *для любого фундамента* $E \subset M(\Omega)$ (равенство следует понимать в смысле отождествления классов сечений $\mathscr{X}$ и $\overline{\mathscr{X}}$ — см. 4.2.2);

(3) $E(\mathscr{X}) = E(\overline{\mathscr{X}})$ *для некоторого фундамента* $E \subset M(\Omega)$;

(4) $\overline{\mathscr{C}}$ *является аппроксимирующим подмножеством* $\mathscr{M}(\Omega, \overline{\mathscr{X}})$;

(5) *в K_σ-пространстве $M(\Omega)$ выполнено $\inf_{c\in\mathscr{C}} |||\bar{c}-c|||^{\sim} = 0$ для всех $\bar{c} \in \overline{\mathscr{C}}$.*

◀ Импликации (1)⇒(2)⇒(3) и (4)⇒(5) очевидны. Если E — фундамент $M(\Omega)$, то множества $\{u \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X}) : |||u|||^{\sim} \in E\}$ и $\{\bar{u} \in \mathscr{M}(\Omega, \overline{\mathscr{X}}) : |||\bar{u}|||^{\sim} \in E\}$ являются адекватными измеримыми структурами в $\mathscr{X}$ и $\overline{\mathscr{X}}$ соответственно. Поэтому (3) влечет (4) согласно 4.1.11. Остается показать, что (5)⇒(1). В силу 4.1.9 из (5) следует, что каждое сечение $\bar{c} \in \overline{\mathscr{C}}$ принимает значения $\bar{c}(\omega) \in \mathscr{X}(\omega)$ почти для всех элементов $\omega \in K$ любого множества $K \in \mathscr{B}_{\mathrm{fin}}(\Omega)$. Тогда этим свойством обладают все сечения $\bar{u} \in \mathscr{M}(\Omega, \overline{\mathscr{X}})$ (см. 4.1.11 (1) и 4.1.2). Утверждение (1) теперь вытекает из 1.2.12. ▶

Подрасслоение $\mathscr{X}$, обладающее одним из эквивалентных свойств (1)–(5), будем называть *всюду плотным подрасслоением* ИБР $\overline{\mathscr{X}}$.

4.2.4. Пусть $\mathscr{X}$ — ИБР над Ω и D — измеримое подмножество Ω. Если $\mathscr{C}$ — измеримая структура $\mathscr{X}$, то совокупность $\{c|_D : c \in \mathscr{C}\}$ представляет собой измеримую структуру в (дискретном) банаховом расслоении $\mathscr{X}|_D$. Полученное таким образом ИБР над D называется *ограничением* ИБР $\mathscr{X}$ *на* D и обозначается символом $\mathscr{X}|_D$. Очевидно, что $\mathscr{M}(D, \mathscr{X}|_D) = \{u|_D : u \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})\}$ (ср. 2.2.5).

4.2.5. Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — ИБР над одним и тем же пространством с мерой Ω. Отображение $H : \omega \in \Omega \mapsto H(\omega) \in B(\mathscr{X}(\omega), \mathscr{Y}(\omega))$ назовем *изометрическим вложением* $\mathscr{X}$ *в* $\mathscr{Y}$, если в каждой точке $\omega \in \Omega$ оператор $H(\omega)$ осуществляет изометрическое вложение $\mathscr{X}(\omega)$ в $\mathscr{Y}(\omega)$ и имеет место равенство $\mathscr{M}(\Omega, \mathscr{Y}) = \{H \otimes u : u \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})\}$. Если, кроме того, все операторы $H(\omega)$ сюръективны, то вложение H называется *изометрией* $\mathscr{X}$ *на* $\mathscr{Y}$. В случае существования такой изометрии H расслоения $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ будут называться *изометричными*. Если для каждого $\mathbf{u} \in M(\Omega, \mathscr{X})$ определить класс $H \otimes \mathbf{u} \in M(\Omega, \mathscr{Y})$ по правилу $H \otimes \mathbf{u} = (H \otimes u)^{\sim}$, где u — произвольный элемент $\mathbf{u}$, то отображение $\mathbf{u} \mapsto H \otimes \mathbf{u}$ будет осуществлять изометрию РНП $M(\Omega, \mathscr{X})$ на $M(\Omega, \mathscr{Y})$.

Предложение. *Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — ИБР над Ω и отображение H сопоставляет каждой точке $\omega \in \Omega$ линейную изометрию $H(\omega)$ слоя $\mathscr{X}(\omega)$ на $\mathscr{Y}(\omega)$. Для того чтобы отображение H было изометрией $\mathscr{X}$ на $\mathscr{Y}$, необходимо и достаточно наличия такого аппроксимирующего подмножества $\mathscr{C} \subset \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})$, что $\{H \otimes c : c \in \mathscr{C}\}$ — аппроксимирующее подмножество $\mathscr{M}(\Omega, \mathscr{Y})$.*

◀ В доказательстве нуждается лишь достаточность предложенного условия. Предположим, что имеется множество $\mathscr{C}$, обладающее сформулированным свойством. Если $u \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})$, то для каждого элемента $c \in \mathscr{C}$ функция $|||H \otimes u - H \otimes c||| = |||u - c|||$ измерима и $\inf_{c\in\mathscr{C}} |||H \otimes u - H \otimes c|||^{\sim} = \inf_{c\in\mathscr{C}} |||u - c|||^{\sim} = 0$ в K_σ-пространстве $M(\Omega)$, откуда в силу 4.1.9 следует измеримость сечения $H \otimes u$. Совершенно аналогично выводится измеримость сечения $u \in S_{\sim}(\Omega, \mathscr{X})$ из измеримости $H \otimes u$. ▶

§ 4.3. Лифтинг в пространствах сечений

В этом параграфе вводится и исследуется понятие лифтинга в фактор-пространстве измеримых сечений ИБР. Измеримые банаховы расслоения с лифтингом в классе всех ИБР занимают, в определенном смысле, то же место, что и просторные непрерывные банаховы расслоения в классе всех НБР. Многочисленные подтверждения тому можно извлечь из § 4.4, здесь же устанавливается явная связь между ИБР с лифтингом и просторными НБР. Теорема 4.3.4 предлагает механизм построения ИБР с лифтингом на основе произвольного просторного НБР над соответствующим экстремально несвязным компактом, а теорема 4.3.5 утверждает, что такой механизм является универсальным.

На протяжении всего параграфа Ω — пространство с ненулевой мерой, обладающее свойством прямой суммы.

4.3.1. Пусть $\mathscr{X}$ — ИБР над Ω. Рассмотрим лифтинг $\rho\colon L^\infty(\Omega) \to \mathscr{L}^\infty(\Omega)$ (см. 1.1.13). Отображение $\rho_{\mathscr{X}} : L^\infty(\Omega, \mathscr{X}) \to \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{X})$ будем называть *лифтингом* $L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$ (*ассоциированным с* ρ), если для любых $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$ и $\mathbf{e} \in L^\infty(\Omega)$ имеют место следующие соотношения:

(а) $\rho_{\mathscr{X}}(\mathbf{u}) \in \mathbf{u}$ и $\operatorname{dom} \rho_{\mathscr{X}}(\mathbf{u}) = \Omega$;
(б) $|||\rho_{\mathscr{X}}(\mathbf{u})||| = \rho(|\mathbf{u}|)$;
(в) $\rho_{\mathscr{X}}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \rho_{\mathscr{X}}(\mathbf{u}) + \rho_{\mathscr{X}}(\mathbf{v})$;
(г) $\rho_{\mathscr{X}}(\mathbf{e}\mathbf{u}) = \rho(\mathbf{e})\rho_{\mathscr{X}}(\mathbf{u})$;
(д) множество $\{\rho_{\mathscr{X}}(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in L^\infty(\Omega, \mathscr{X})\}$ послойно плотно в $\mathscr{X}$.

В случае существования лифтинга $L^\infty(\Omega)$ и ассоциированного с ним лифтинга $L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$ будем говорить, что $\mathscr{X}$ — ИБР *с лифтингом*. При этом если ясно, о каких лифтингах идет речь, то для $\mathbf{e} \in L^\infty(\Omega)$ и $\mathbf{u} \in L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$ вместо $\rho(\mathbf{e})$ и $\rho_{\mathscr{X}}(\mathbf{u})$ будем писать соответственно $\mathbf{e}_\sim$ и $\mathbf{u}_\sim$. Для $e \in \mathscr{L}^\infty(\Omega)$ и $u \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{X})$ записи $\rho(e^\sim)$, $\rho_{\mathscr{X}}(u^\sim)$, $(e^\sim)_\sim$ и $(u^\sim)_\sim$ заменяются символами $\rho(e)$, $\rho_{\mathscr{X}}(u)$, $e_\sim$ и $u_\sim$ соответственно.

4.3.2. Приведем примеры, показывающие, что условие (д) в определении лифтинга 4.3.1 не вытекает из условий (а)–(г).

(1) Рассмотрим постоянное расслоение $\mathscr{X} = [0,1] \times \{\mathbb{R}\}$ над пространством $[0,1]$ с мерой Лебега. В качестве измеримой структуры в $\mathscr{X}$ возьмем совокупность почти всюду равных нулю функций $u\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Тогда, выбрав произвольный лифтинг пространства $L^\infty([0,1])$, мы видим, что отображение, ставящее в соответствие любому классу $\mathbf{u} \in L^\infty([0,1], \mathscr{X})$ тождественно равную нулю функцию $\rho_{\mathscr{X}}(\mathbf{u})$, удовлетворяет условиям 4.3.1 (а)–(г), но не (д).

(2) Условие 4.3.1 (д) скорее является отражением индивидуальных свойств лифтинга $L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$, нежели свойств ИБР $\mathscr{X}$. Точнее говоря, возможно существование двух отображений ρ_1 и ρ_2 из $L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$ в $\mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{X})$, каждое из которых удовлетворяет условиям 4.3.1 (а)–(г), причем первое удовлетворяет также и условию (д), т. е. является лифтингом, а второе — нет. Простой пример можно получить, рассмотрев произвольное ИБР с лифтингом $\mathscr{X}$ над Ω, слой $\mathscr{X}(\bar\omega)$ которого в некоторой пренебрежимой точке $\bar\omega \in \Omega$ (т. е. такой, что $\{\bar\omega\} \sim \varnothing$) изометричен собственному подпространству $X \subset \mathscr{X}(\bar\omega)$. Тогда если ρ_1 — лифтинг пространства $L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$, а T — изометрия $\mathscr{X}(\bar\omega)$ на X, то отображение $\rho_2 : L^\infty(\Omega, \mathscr{X}) \to \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{X})$, действующее по правилу

$$\rho_2(\mathbf{u})(\omega) = \begin{cases} \rho_1(\mathbf{u})(\omega), & \text{если } \omega \neq \omega, \\ T(\rho_1(\mathbf{u})(\omega)), & \text{если } \omega = \omega, \end{cases}$$

удовлетворяет условиям 4.3.1 (а)–(г), но не (д).

Техника просторных банаховых расслоений позволяет значительно усилить пример (2) (см. 4.4.9).

4.3.3. Пусть ρ — лифтинг $L^\infty(\Omega)$, а $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — ИБР с лифтингами над Ω. Расслоения $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ назовем *ρ-изометричными*, если их лифтинги $\rho_{\mathscr{X}}$ и $\rho_{\mathscr{Y}}$ ассоциированы с ρ и существует такая изометрия H расслоения $\mathscr{X}$ на $\mathscr{Y}$, что $\rho_{\mathscr{Y}}(H\otimes \mathbf{u}) = H\otimes\rho_{\mathscr{X}}(\mathbf{u})$ для всех $\mathbf{u}\in L^\infty(\Omega,\mathscr{X})$. Будем говорить, что ИБР $\mathscr{X}$ *неподвижно относительно ρ* или *ρ-неподвижно*, если в любых ρ-неразличимых точках $\omega_1,\omega_2\in\Omega$ (см. 1.1.13) имеют место равенства $\mathscr{X}(\omega_1)=\mathscr{X}(\omega_2)$ и $\mathbf{u}_\sim(\omega_1)=\mathbf{u}_\sim(\omega_2)$ для всех $\mathbf{u}\in L^\infty(\Omega,\mathscr{X})$.

Следующее утверждение позволяет предполагать, не нарушая общности, что каждое рассматриваемое ИБР с лифтингом неподвижно относительно соответствующего «скалярного» лифтинга.

Предложение. *Для всякого* ИБР *над Ω, имеющего лифтинг, ассоциированный с ρ, найдется ρ-изометричное ему ρ-неподвижное* ИБР *с лифтингом.*

◀ Предположим, что ИБР $\mathscr{X}$ удовлетворяет условиям доказываемого утверждения. Зафиксируем произвольную пару ρ-неразличимых точек $\omega_1,\omega_2\in\Omega$. Достаточно построить такую изометрию i слоя $\mathscr{X}(\omega_1)$ на слой $\mathscr{X}(\omega_2)$, что $i(\mathbf{u}_\sim(\omega_1))=\mathbf{u}_\sim(\omega_2)$ для всех $\mathbf{u}\in L^\infty(\Omega,\mathscr{X})$. Действительно, в этом случае слои над неразличимыми точками могут быть «отождествлены» посредством таких изометрий.

Для каждой точки $\omega\in\Omega$ обозначим через $\mathscr{X}_0(\omega)$ подпространство $\{\mathbf{u}_\sim(\omega) : \mathbf{u}\in L^\infty(\Omega,\mathscr{X})\}$ слоя $\mathscr{X}(\omega)$. Пусть классы $\mathbf{u},\mathbf{v}\in L^\infty(\Omega,\mathscr{X})$ таковы, что $\mathbf{u}_\sim(\omega_1)=\mathbf{v}_\sim(\omega_1)$. Тогда $\mathbf{u}_\sim(\omega_2)=\mathbf{v}_\sim(\omega_2)$, поскольку с учетом 1.1.13 мы имеем

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{u}_\sim(\omega_2)-\mathbf{v}_\sim(\omega_2)\| &= |\mathbf{u}-\mathbf{v}|_\sim(\omega_2)\\
= |\mathbf{u}-\mathbf{v}|_\sim(\omega_1) &= \|\mathbf{u}_\sim(\omega_1)-\mathbf{v}_\sim(\omega_1)\| = 0.
\end{aligned}
$$

Это позволяет нам ввести в рассмотрение биекцию $i_0\colon \mathscr{X}_0(\omega_1)\to\mathscr{X}_0(\omega_2)$, действующую по правилу $i_0(\mathbf{u}_\sim(\omega_1))=\mathbf{u}_\sim(\omega_2)$ для каждого класса $\mathbf{u}\in L^\infty(\Omega,\mathscr{X})$. Благодаря плотности подпространств $\mathscr{X}_0(\omega)$ в соответствующих слоях $\mathscr{X}(\omega)$, изометрия i_0 продолжается до искомой изометрии $i\colon\mathscr{X}(\omega_1)\to\mathscr{X}(\omega_2)$. ▶

4.3.4. Предположим, что Q — стоуновский компакт булевой алгебры $B(\Omega)$ (см. 1.2.8) и $\tau\colon\Omega\to Q$ — каноническое погружение Ω в Q, соответствующее лифтингу ρ пространства $L^\infty(\Omega)$ (см. 1.2.13).

Теорема. *Пусть $\mathscr{X}=\mathscr{Y}\circ\tau$, где $\mathscr{Y}$ — просторное* НБР *над Q.*

(1) *Если $\mathscr{C}$ — послойно плотное в $\mathscr{Y}$ векторное подпространство $C(Q,\mathscr{Y})$ (например, если $\mathscr{C}=\mathscr{C}_{\mathscr{Y}}$), то множество $\mathscr{C}\circ\tau$ является измеримой структурой в $\mathscr{X}$. Для любых послойно плотных в $\mathscr{Y}$ подпространств $\mathscr{C},\mathscr{D}\subset C(Q,\mathscr{X})$ измеримые структуры $\mathscr{C}\circ\tau$ и $\mathscr{D}\circ\tau$ эквивалентны.* (В дальнейшем расслоение $\mathscr{X}=\mathscr{Y}\circ\tau$ всегда рассматривается как ИБР относительно измеримой структуры $\mathscr{C}_{\mathscr{Y}}\circ\tau$.)

(2) *Почти всюду определенное сечение u расслоения $\mathscr{X}$ измеримо тогда и только тогда, когда $u\sim v\circ\tau$ для некоторого элемента $v\in C_\infty(Q,\mathscr{Y})$.*

(3) *Для любого класса $\mathbf{u}\in M(\Omega,\mathscr{X})$ существует единственное сечение $\hat{\mathbf{u}}\in C_\infty(Q,\mathscr{Y})$, дающее представление $\mathbf{u}$ в виде $(\hat{\mathbf{u}}\circ\tau)^\sim$.*

(4) *Отображение $\mathbf{u}\mapsto\hat{\mathbf{u}}$ осуществляет изометрию $M(\Omega,\mathscr{X})$ на $C_\infty(Q,\mathscr{Y})$, ассоциированную с изоморфизмом $(\mathbf{e}\mapsto\hat{\mathbf{e}})\colon M(\Omega)\to C_\infty(Q)$* (см. 1.3.13, 1.4.2). *Образом $L^\infty(\Omega,\mathscr{X})$ при этой изометрии является $C(Q,\mathscr{Y})$. Обратная изометрия $C_\infty(Q,\mathscr{Y})$ на $M(\Omega,\mathscr{X})$ действует по правилу $v\mapsto(v\circ\tau)^\sim$ и ассоциирована с изоморфизмом $(e\mapsto(e\circ\tau)^\sim)\colon C_\infty(Q)\to M(\Omega)$.*

(5) *Отображение $\mathbf{u}\mapsto\hat{\mathbf{u}}\circ\tau$ представляет собой лифтинг $L^\infty(\Omega,\mathscr{X})$, ассоциированный с ρ. Снабженное этим лифтингом* ИБР *$\mathscr{X}$ является ρ-неподвижным.*

◀ (1) Если $\mathscr{C}$ — послойно плотное подпространство $C(Q,\mathscr{Y})$ и $c\in\mathscr{C}$, то $|\!|\!|c\circ\tau|\!|\!| = |\!|\!|c|\!|\!|\circ\tau$ — измеримая функция (см. 1.3.13). Остальные свойства множества $\mathscr{C}\circ\tau$, входящие в определение измеримой структуры, очевидны. Эквивалентность измеримых структур $\mathscr{C}\circ\tau$ и $\mathscr{D}\circ\tau$ для любых послойно плотных в $\mathscr{Y}$ подпространств $\mathscr{C},\mathscr{D}\subset C(Q,\mathscr{Y})$ следует из 2.5.7 и 4.1.11.

(2) Прежде всего, заметим, что в силу теоремы 1.2.13 для всякого $v \in C_\infty(Q, \mathscr{Y})$ композиция $v \circ \tau$ определена почти всюду в Ω. Обозначим через $\mathscr{U}$ множество $\{u \in S_\sim(\Omega, \mathscr{X}) : u \sim v \circ \tau$ для некоторого $v \in C_\infty(Q, \mathscr{Y})\}$ и докажем, что $\mathscr{U} = \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})$.

Пусть $v \in C_\infty(Q, \mathscr{Y})$. Согласно 3.1.4 существует такая последовательность $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ попарно дизъюнктных элементов $C(Q, \mathscr{Y})$, что $v = o\text{-}\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$. Очевидно, что $v \circ \tau \sim \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (v_n \circ \tau)$. Таким образом, $\mathscr{U} \subset \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})$. Если $v \in C_\infty(Q, \mathscr{Y})$, $A \in \mathscr{B}(\Omega)$ и $\mathbf{A} = A^\sim$, то

$$\langle A\rangle(v \circ \tau) \sim \langle \mathbf{A}_\sim\rangle(v \circ \tau) = \langle \tau^{-1}[\widehat{\mathbf{A}}]\rangle(v \circ \tau) = (\langle\widehat{\mathbf{A}}\rangle v) \circ \tau,$$

откуда следует, что множество $\mathscr{U}$ содержит осколки всех своих элементов. Согласно 4.1.12 для обоснования обратного включения $\mathscr{U} \supset \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})$ достаточно проверить условия 4.1.12 (4)(а)–(в) для множества $\mathscr{U}$.

(а) Пусть сечения $u_n \sim v_n \circ \tau$ попарно дизъюнктны. Тогда попарно дизъюнктны сечения v_n и, следовательно, имеется $v := o\text{-}\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n \in C_\infty(Q, \mathscr{Y})$. Ясно, что $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n \sim v \circ \tau$.

(б) Предположим, что последовательность сечений $u_n \sim v_n \circ \tau$ сходится к сечению $u \in S_\sim(\Omega, \mathscr{X})$ равномерно на некотором множестве $A \sim \Omega$. Из r-сходимости $|u_n^\sim - u_m^\sim| \to 0$ в $M(\Omega)$ согласно 1.3.13 следует r-сходимость $|v_n - v_m| \to 0$ в $C_\infty(Q)$. Благодаря o-полноте РНП $C_\infty(Q, \mathscr{Y})$, существует r-предел $v \in C_\infty(Q, \mathscr{Y})$ последовательности (v_n). Очевидно, $u \sim v \circ \tau$.

(в) Пусть сечение $u \in S_\sim(\Omega, \mathscr{X})$ таково, что $\langle K\rangle u \in \mathscr{U}$ для любого $K \in \mathscr{B}_{\text{fin}}(\Omega)$. Свойство прямой суммы позволяет разбить множество Ω на подмножества K_ξ $(\xi \in \Xi)$ конечной меры так, что $\sup_{\xi\in\Xi} K_\xi^\sim = \Omega^\sim$ (см. 1.2.12). Для каждого $\xi \in \Xi$ имеется такое сечение $v_\xi \in C_\infty(Q, \mathscr{Y})$, что $\langle K_\xi\rangle u \sim v_\xi \circ \tau$. Поскольку сечения v_ξ попарно дизъюнктны, существует o-сумма $v := o\text{-}\sum\limits_{\xi\in\Xi} v_\xi \in C_\infty(Q, \mathscr{Y})$. Эквивалентность $u \sim v \circ \tau$ вытекает из 1.2.12.

(3) Если сечения $v, w \in C_\infty(Q, \mathscr{Y})$ связаны соотношением $v \circ \tau \sim w \circ \tau$, то $|v - w| \circ \tau = 0$. Тогда из 1.3.13 следует, что $|v - w| = 0$, т. е. $v = w$.

(4), (5) Сформулированные утверждения проверяются элементарно. В пояснении нуждается разве что равенство $\operatorname{dom}(\hat{\mathbf{u}} \circ \tau) = \Omega$ для произвольного $\mathbf{u} \in L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$. Неравенство $|\mathbf{u}| \leqslant \lambda$, выполненное для некоторого числа λ, в силу 1.3.13 влечет неравенство $|\hat{\mathbf{u}}| \leqslant \lambda$. Теперь из 3.1.3 следует, что $\operatorname{dom}\hat{\mathbf{u}} = Q$, а тогда $\operatorname{dom}(\hat{\mathbf{u}} \circ \tau) = \Omega$. ▶

Сечение $\hat{\mathbf{u}} \in C_\infty(Q, \mathscr{Y})$, соответствующее элементу $\mathbf{u} \in M(\Omega, \mathscr{X})$ согласно п. (3), будем называть *стоуновским преобразованием* $\mathbf{u}$ (ср. 1.3.13).

4.3.5. Теорема 4.3.4 описывает способ построения ИБР с лифтингом на основе некоторого просторного НБР над соответствующим стоуновским компактом. Следующий результат показывает, что каждое ИБР с лифтингом может быть получено именно таким способом.

Предположим, что ρ — лифтинг $L^\infty(\Omega)$ и $\tau\colon \Omega \to Q$ — соответствующее каноническое погружение Ω в стоуновский компакт Q булевой алгебры $B(\Omega)$.

Теорема. *Пусть $\mathscr{X}$ — ρ-неподвижное* ИБР *над Ω, имеющее лифтинг, ассоциированный с ρ. Тогда существует единственное с точностью до изометрии просторное* НБР *$\widehat{\mathscr{X}}$ над Q такое, что $\mathscr{X} = \widehat{\mathscr{X}} \circ \tau$ и $\mathbf{u}_\sim = \hat{\mathbf{u}} \circ \tau$ для всех $\mathbf{u} \in L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$, где $\hat{\mathbf{u}}$ — стоуновское преобразование $\mathbf{u}$.*

◀ Неподвижность ИБР $\mathscr{X}$ относительно ρ позволяет нам определить банахово расслоение $\mathscr{Y}$ над $\tau[\Omega]$ формулой $\mathscr{Y}(\tau(\omega)) := \mathscr{X}(\omega)$ и снабдить его непрерывной структурой $\{\mathbf{u}_\sim \circ \tau^{-1} : \mathbf{u} \in L^\infty(\Omega, \mathscr{X})\}$. Тогда продолжение $\widehat{\mathscr{X}}$

расслоения $\mathscr{Y}$ на Q по Стоуну — Чеху (см. 2.5.10) является искомым НБР. Большинство необходимых свойств расслоения $\widehat{\mathscr{X}}$ проверяются элементарно. Мы остановимся лишь на его просторности.

Согласно 2.5.10 для каждого класса $\mathbf{u} \in L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$ ограниченное сечение $\mathbf{u}_\sim \circ \tau \in C(\tau[\Omega], \mathscr{Y})$ продолжается до элемента $C(Q, \widehat{\mathscr{X}})$, который мы обозначим через $\hat{\mathbf{u}}$. Легко убедиться в том, что отображение $\mathbf{u} \mapsto \hat{\mathbf{u}}$ осуществляет изометрическое вложение РНП $L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$ в $C(Q, \widehat{\mathscr{X}})$, ассоциированное с изоморфизмом $(\mathbf{e} \mapsto \hat{\mathbf{e}})\colon L^\infty(\Omega) \to C(Q)$. Из 2.5.7 и 1.5.4 следует, что образ $L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$ при этом вложении o-плотен в $C(Q, \widehat{\mathscr{X}})$. В силу o-полноты $L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$ этот образ совпадает с $C(Q, \widehat{\mathscr{X}})$, и поэтому РНП $C(Q, \widehat{\mathscr{X}})$ тоже o-полно.

Единственность расслоения $\widehat{\mathscr{X}}$ вытекает из 4.3.4 (4) и 3.4.1. ▶

Просторное НБР $\widehat{\mathscr{X}}$, фигурирующее в формулировке последней теоремы, будет называться *стоуновским преобразованием* ИБР *с лифтингом* $\mathscr{X}$. Заметим, что $\widehat{\mathscr{X}}$ является реализационным НБР для $M(\Omega, \mathscr{X})$ (см. 3.4.4).

§ 4.4. Приложения теории просторных банаховых расслоений

Конструктивная связь между ИБР с лифтингом и просторными НБР, устанавливаемая теоремами 4.3.4 и 4.3.5, позволяет перенести буквально все основные факты теории просторных НБР на случай ИБР. Результаты, сформулированные в этом параграфе, получены именно таким переносом. Здесь, в частности, приведен критерий измеримости сечений в терминах лифтинга, описаны аппроксимирующие подмножества в фактор-пространстве измеримых сечений, указан способ вложения определенного класса ИБР в ИБР с лифтингом (аналог просторной оболочки НБР), перечислены основные свойства измеримых расслоений $B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ и $\mathscr{X}'$, а также сформулирован ряд результатов о представлении РНП в виде пространства классов измеримых сечений ИБР с лифтингом.

На протяжении всего параграфа Ω — пространство с ненулевой мерой, обладающее свойством прямой суммы, ρ — лифтинг $L^\infty(\Omega)$ и $\tau\colon \Omega \to Q$ — соответствующее каноническое погружение Ω в стоуновский компакт Q булевой алгебры $B(\Omega)$. Если $\mathscr{X}$ — (ρ-неподвижное) ИБР с лифтингом над Ω и $\widehat{\mathscr{X}}$ — стоуновское преобразование $\mathscr{X}$, то, как обычно, стоуновские преобразования классов $\mathbf{e} \in M(\Omega)$ и $\mathbf{u} \in M(\Omega, \mathscr{X})$ обозначаются соответственно через $\hat{\mathbf{e}} \in C_\infty(Q)$ и $\hat{\mathbf{u}} \in C_\infty(Q, \widehat{\mathscr{X}})$, а их лифтинги — через $\mathbf{e}_\sim$ и $\mathbf{u}_\sim$.

4.4.1. Условие (д) в определении лифтинга 4.3.1 выполняется в более сильной форме:

Предложение. *Если* $\mathscr{X}$ *— ИБР с лифтингом над* Ω, *то для любой точки* $\omega \in \Omega$ *множество* $\{\mathbf{u}_\sim(\omega) : \mathbf{u} \in L^\infty(\Omega, \mathscr{X})\}$ *совпадает с* $\mathscr{X}(\omega)$.

◀ Следует из 4.3.3, 4.3.5 и 2.3.5. ▶

4.4.2. Предложение. *Пусть* $\mathscr{X}$ *— ИБР с лифтингом над* Ω. *Сечение* $u \in S(\Omega, \mathscr{X})$ *измеримо и лежит в образе лифтинга* $L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$ *тогда и только тогда, когда для каждого класса* $\mathbf{v} \in L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$ *функция* $|||u - \mathbf{v}_\sim|||$ *измерима и лежит в образе лифтинга* $L^\infty(\Omega)$.

◀ Необходимость предлагаемого критерия измеримости очевидна, покажем его достаточность. Пусть лифтинг $L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$ ассоциирован с ρ. Согласно 4.3.3 расслоение $\mathscr{X}$ можно считать ρ-неподвижным. Пусть $\widehat{\mathscr{X}}$ — стоуновское преобразование $\mathscr{X}$. Предположим, что функция $|||u - \mathbf{v}_\sim|||$ лежит в образе лифтинга $L^\infty(\Omega)$ для каждого класса $\mathbf{v} \in L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$. Используя 4.4.1 и ρ-неподвижность расслоения $\mathscr{X}$, легко показать, что сечение u принимает одинаковые значения в ρ-неразличимых точках. Это позволяет нам ввести в рассмотрение сечение $v \in S(\tau[\Omega], \widehat{\mathscr{X}})$, определенное формулой $v(\tau(\omega)) := u(\omega)$. Свойства сечения u обеспечивают непрерывность функций $|||v - \hat{\mathbf{v}}|||$ для всех $\mathbf{v} \in L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$, что означает непрерывность сечения v. Очевидная ограниченность u влечет ограниченность v, и благодаря просторности $\widehat{\mathscr{X}}$ сечение v продолжается до $\bar{v} \in C(Q, \widehat{\mathscr{X}})$. Осталось заметить, что $u = \bar{v} \circ \tau$, и сослаться на 4.3.4. ▶

4.4.3. *Предложение.* *Пусть E — фундамент K-пространства $M(\Omega)$, $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — ИБР над Ω с лифтингами (ассоциированными с ρ). ПБК $E(\mathscr{X})$ и $E(\mathscr{Y})$ изометричны тогда и только тогда, когда расслоения $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ изометричны (ρ-изометричны).*

◀ Следует из 4.3.3, 4.3.5 и 3.4.1. ▶

4.4.4. Пусть $\mathscr{X}$ — ИБР с лифтингом над Ω. Для произвольного подмножества $\mathscr{U} \subset L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$ и точки $\omega \in \Omega$ обозначим множество $\{\mathbf{u}_\sim(\omega) : \mathbf{u} \in \mathscr{U}\}$ символом $\mathscr{U}_\sim(\omega)$.

Теорема. *Следующие свойства множества $\mathscr{U} \subset L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$ эквивалентны:*

(1) *всякое сечение $v \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})$ принимает значения $v(\omega) \in \operatorname{cl} \mathscr{U}_\sim(\omega)$ почти для всех $\omega \in \Omega$;*

(2) *для любого класса $\mathbf{v} \in L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$ имеют место включения $\mathbf{v}_\sim(\omega) \in \operatorname{cl} \mathscr{U}_\sim(\omega)$ почти для всех $\omega \in \Omega$;*

(3) *$\mathscr{U}$ является порядково аппроксимирующим подмножеством $M(\Omega, \mathscr{X})$;*

(4) *$\{u \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X}) : u^\sim \in \mathscr{U}\}$ — аппроксимирующее подмножество $\mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})$.*

◀ Импликации (1)$\Rightarrow$(2) и (3)$\Leftrightarrow$(4) очевидны. Докажем, что (2)$\Rightarrow$(3). Предположим, что лифтинг $L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$ ассоциирован с ρ. Согласно 4.3.3 расслоение $\mathscr{X}$ можно считать ρ-неподвижным. Пусть $\widehat{\mathscr{X}}$ — стоуновское преобразование $\mathscr{X}$. Обозначим множество $\{\hat{\mathbf{u}} : \mathbf{u} \in \mathscr{U}\} \subset C(Q, \widehat{\mathscr{X}})$ через $\widehat{\mathscr{U}}$. С учетом 4.3.4 (4) и 2.5.7((2)$\Rightarrow$(4)) чтобы обосновать (3) достаточно показать, что для каждого класса $\mathbf{v} \in L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$ сечение $\hat{\mathbf{v}}$ принимает значения $\hat{\mathbf{v}}(q) \in \operatorname{cl} \widehat{\mathscr{U}}(q)$ на всюду плотном подмножестве Q. Если последнее не выполнено, то $\hat{\mathbf{v}}(q) \notin \operatorname{cl} \widehat{\mathscr{U}}(q)$ для всех элементов q некоторого непустого открыто-замкнутого подмножества $A \subset Q$. Тогда $\mathbf{v}_\sim(\omega) \notin \operatorname{cl} \mathscr{U}_\sim(\omega)$ для всех элементов ω множества $\tau^{-1}[A]$, имеющего ненулевую меру, что противоречит (2). Импликация (3)$\Rightarrow$(1) вытекает из 4.3.5 и 2.5.7((4)$\Rightarrow$(3)). ▶

Замечание. По аналогии с 2.5.7 последнее утверждение можно обобщить на случай произвольного подмножества $\mathscr{U} \subset M(\Omega, \mathscr{X})$. При этом под $\mathscr{U}_\sim(\omega)$ следует понимать совокупность всевозможных значений $(\langle \mathbf{A} \rangle \mathbf{u})_\sim(\omega)$, где $\mathbf{u} \in M(\Omega, \mathscr{X})$ и $\mathbf{A} \in B(\Omega)$ таковы, что $\langle \mathbf{A} \rangle \mathbf{u} \in L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$ (см. 4.1.13).

4.4.5. *Теорема.* *Пусть $\mathscr{X}$ — ИБР над Ω. Предположим, что $\mathscr{C}$ — некоторая адекватная измеримая структура в $\mathscr{X}$, все элементы $c \in \mathscr{C}$ которой удовлетворяют условиям $|||c||| \in \mathscr{L}^\infty(\Omega)$ и $\rho(|||c|||) = |||c|||$. Тогда существует (единственное с точностью до ρ-изометрии) ИБР с лифтингом $\overline{\mathscr{X}}$ над Ω такое, что его лифтинг $\rho_{\overline{\mathscr{X}}}$ ассоциирован с ρ, $\mathscr{X}$ является всюду плотным подрасслоением $\overline{\mathscr{X}}$ и $\rho_{\overline{\mathscr{X}}}(c) = c$ для всех $c \in \mathscr{C}$.*

◀ Предположим, что ИБР $\mathscr{X}$ и его измеримая структура $\mathscr{C}$ удовлетворяют условиям теоремы. Согласно 3.4.3 имеются просторное НБР $\mathscr{Y}$ над Q и изометрия $i \colon M(\Omega, \mathscr{X}) \to C_\infty(Q, \mathscr{Y})$, ассоциированная с изоморфизмом $(\mathbf{e} \mapsto \hat{\mathbf{e}}) : L^\infty(\Omega) \to C(Q)$. Обозначим ИБР с лифтингом $\mathscr{Y} \circ \tau$ через $\overline{\mathscr{X}}$ (см. 4.3.4). Для доказательства теоремы достаточно построить изометрию H ИБР $\mathscr{X}$ на всюду плотное подрасслоение ИБР $\overline{\mathscr{X}}$ такую, что $\rho_{\overline{\mathscr{X}}}(H \otimes c) = H \otimes c$ для всех $c \in \mathscr{C}$.

(В этом случае слои $\overline{\mathscr{X}}$ можно будет «подправить» так, что изометрия H станет тождественным вложением.)

Для каждой точки $\omega \in \Omega$ обозначим всюду плотное подпространство $\{c(\omega) : c \in \mathscr{C}\}$ слоя $\mathscr{X}(\omega)$ через $\mathscr{X}_0(\omega)$ и определим линейный оператор $H_0(\omega)\colon \mathscr{X}_0(\omega) \to \overline{\mathscr{X}}(\omega)$ следующим образом: $H_0(\omega)c(\omega) := i(c^\sim)(\tau(\omega))$, $c \in \mathscr{C}$. Корректность определения оператора $H_0(\omega)$ и его изометричность следуют из соотношений

$$\|i(c^\sim)(\tau(\omega))\| = |i(c^\sim)|(\tau(\omega)) = |c^\sim|^\wedge(\tau(\omega)) = \rho(|c^\sim|)(\omega) = \|c(\omega)\|,$$

выполненных для всех $c \in \mathscr{C}$. Пусть $H(\omega)$ — продолжение $H_0(\omega)$ до изометрического вложения $\mathscr{X}(\omega) \to \overline{\mathscr{X}}(\omega)$. Множество $\{c^\sim : c \in \mathscr{C}\}$ является аппроксимирующим в $M(\Omega, \mathscr{X})$. Следовательно, $\{i(c^\sim) : c \in \mathscr{C}\}$ — аппроксимирующее подмножество $C_\infty(Q, \mathscr{Y})$, а, поскольку $H \otimes c = i(c^\sim) \circ \tau$ для всех $c \in \mathscr{C}$, множество $\{(H \otimes c)^\sim : c \in \mathscr{C}\}$ является аппроксимирующим в $M(\Omega, \overline{\mathscr{X}})$. Из 4.2.5 следует, что отображение H осуществляет изометрию $\mathscr{X}$ на плотное подрасслоение $\overline{\mathscr{X}}$, индуцированное линейным подмножеством $\{H \otimes c : c \in \mathscr{C}\} \subset \mathscr{M}(\Omega, \overline{\mathscr{X}})$ (см. 4.2.2).

Единственность расслоения (с точностью до ρ-изометрии) вытекает из 4.2.3 и 4.4.3. ▶

4.4.6. Теорема. *Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — ИБР над Ω, имеющие лифтинги, ассоциированные с одним и тем же лифтингом $L^\infty(\Omega)$. Тогда существует (и единственно) такое ИБР с лифтингом $B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ над Ω, что*

(а) *в каждой точке $\omega \in \Omega$ слой $B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})(\omega)$ является банаховым подпространством $B(\mathscr{X}(\omega), \mathscr{Y}(\omega))$;*
(б) *если $u \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})$ и $H \in \mathscr{M}(\Omega, B(\mathscr{X}, \mathscr{Y}))$, то $H \otimes u \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{Y})$;*
(в) *$(H \otimes u)_\sim = H_\sim \otimes u_\sim$ для любых $u \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{X})$ и $H \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, B(\mathscr{X}, \mathscr{Y}))$;*
(г) *если ограниченное отображение $H\colon \omega \in \Omega \mapsto H(\omega) \in B(\mathscr{X}(\omega), \mathscr{Y}(\omega))$ таково, что для всякого $u \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{X})$ сечение $H \otimes u$ измеримо и $H \otimes u_\sim = (H \otimes u)_\sim$, то $H \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, B(\mathscr{X}, \mathscr{Y}))$.*

◀ Следует из 4.3.3, 4.3.5 и 3.2.3. ▶

4.4.7. Обозначим через $\mathscr{R}$ постоянное ИБР $\Omega \times \{\mathbb{R}\}$ (с лифтингом). Если $\mathscr{X}$ — ИБР с лифтингом над Ω, то расслоение $B(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ называется *сопряженным* ИБР *к* $\mathscr{X}$ и обозначается символом $\mathscr{X}'$. Ниже перечислены основные свойства сопряженного ИБР, вытекающие благодаря 4.3.5 из аналогичных свойств сопряженного НБР. (Запись $\langle u|u'\rangle$ используется вместо $\langle u(\cdot)|u'(\cdot)\rangle$ — см. 1.7.4.)

Теорема. *Пусть $\mathscr{X}$ — ИБР с лифтингом над Ω.*

(1) *$\mathscr{X}'$ — ИБР с лифтингом.*

(2) *Если $\mathscr{Y}$ — стоуновское преобразование $\mathscr{X}$, то $\mathscr{Y}'$ — стоуновское преобразование $\mathscr{X}'$.*

(3) *В каждой точке $\omega \in \Omega$ слой $\mathscr{X}'(\omega)$ является банаховым подпространством $\mathscr{X}(\omega)'$. Включение $\mathscr{X}'(\omega) \subset \mathscr{X}(\omega)'$ может быть строгим.*

(4) *Если $u \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})$ и $u' \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X}')$, то $\langle u|u'\rangle \in \mathscr{M}(\Omega)$.*

(5) *Для любых $u \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{X})$ и $u' \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{X}')$ выполнено $\langle u|u'\rangle_\sim = \langle u_\sim|u'_\sim\rangle$.*

(6) *Если ограниченное отображение $u\colon \omega \in \Omega \mapsto u'(\omega) \in \mathscr{X}(\omega)'$ таково, что для всякого $u \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{X})$ функция $\langle u|u'\rangle$ измерима и $\langle u_\sim|u'\rangle = \langle u|u'\rangle_\sim$, то $u' \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{X}')$.*

(7) *Для произвольных классов $\mathbf{u} \in M(\Omega, \mathscr{X})$ и $\mathbf{u}' \in M(\Omega, \mathscr{X}')$ обозначим через $\langle \mathbf{u}|\mathbf{u}'\rangle$ класс $\langle u|u'\rangle^\sim \in M(\Omega)$, где $u \in \mathbf{u}$, $u' \in \mathbf{u}'$. Тогда билинейная форма $(\mathbf{u}, \mathbf{u}') \mapsto \langle \mathbf{u}|\mathbf{u}'\rangle$ приводит пространства $M(\Omega, \mathscr{X})$ и $M(\Omega, \mathscr{X}')$ в $M(\Omega)$-значную двойственность.*

(8) *Для каждого* $\mathbf{u} \in M(\Omega, \mathscr{X})$ *выполнено*

$$|\mathbf{u}| = \max\{\langle \mathbf{u}|\mathbf{u}'\rangle : \mathbf{u}' \in L^\infty(\Omega, \mathscr{X}'),\ |u'| \leqslant 1\}.$$

(9) *Для каждого* $\mathbf{u}' \in M(\Omega, \mathscr{X}')$ *выполнено*

$$|\mathbf{u}'| = \sup\{\langle \mathbf{u}|\mathbf{u}'\rangle : \mathbf{u} \in L^\infty(\Omega, \mathscr{X}),\ |u| \leqslant 1\}.$$

(10) *Если* $\mathbf{u}' \in L^\infty(\Omega, \mathscr{X}')$, *то в каждой точке* $\omega \in \Omega$ *имеет место равенство*

$$|\mathbf{u}'|_\sim(\omega) = \sup\{\langle \mathbf{u}|\mathbf{u}'\rangle_\sim(\omega) : \mathbf{u} \in L^\infty(\Omega, \mathscr{X}),\ |\mathbf{u}| \leqslant 1\}.$$

(11) *Для любой точки* $\omega \in \Omega$ *пространство* $\mathscr{X}'(\omega)$ *нормирует* $\mathscr{X}(\omega)$. *Более того,*

$$\|x\| = \max\{\langle x|x'\rangle : x' \in \mathscr{X}'(\omega),\ \|x'\| \leqslant 1\}$$

для всех $x \in \mathscr{X}(\omega)$.

(12) *Если слой* $\mathscr{X}(\omega)$ *в некоторой точке* $\omega \in \Omega$ *рефлексивен, то* $\mathscr{X}'(\omega) = \mathscr{X}(\omega)'$.

(13) *Зафиксируем произвольную точку* $\omega \in \Omega$ *и рассмотрим каноническое вложение* $x \mapsto x''$ *пространства* $\mathscr{X}(\omega)$ *в* $\mathscr{X}(\omega)''$. *Тогда отображение* $x \mapsto x''|_{\mathscr{X}'(\omega)}$ *осуществляет изометрическое вложение* $\mathscr{X}(\omega)$ *в* $\mathscr{X}''(\omega)$, *где* $\mathscr{X}''$ *— сопряженное расслоение к* $\mathscr{X}'$.

(14) *Принимая введенное в* (13) *вложение слоев* $\mathscr{X}$ *в соответствующие слои* $\mathscr{X}''$ *за тождественное отображение, будем считать, что* $\mathscr{X}(\omega) \subset \mathscr{X}''(\omega)$ *в каждой точке* $\omega \in \Omega$. *Тогда* $\mathscr{X}$ *является подрасслоением* $\mathscr{X}''$.

4.4.8. Предлагаемый ниже набор фактов является непосредственным следствием приложения теоремы 4.3.5 к реализационным результатам теории просторных НБР (см. § 2.4).

Теорема. *Пусть* Ω *— пространство с ненулевой мерой, обладающее свойством прямой суммы.*

(1) *Для любого ПБК* $\mathscr{U}$ *над фундаментом* $F \subset M(\Omega)$ *существует единственное с точностью до изометрии ИБР с лифтингом* $\mathscr{X}$ *над* Ω *такое, что РНП* $\mathscr{U}$ *и* $F(\mathscr{X})$ *изометричны.*

(2) *Для любого ПБК* $\mathscr{U}$ *над* E *и для любого изоморфизма* K*-пространства* E *на фундамент* $F \subset M(\Omega)$ *существуют (единственное с точностью до изометрии) ИБР с лифтингом* $\mathscr{X}$ *над* Ω *и изометрия* $\mathscr{U}$ *на* $F(\mathscr{X})$, *ассоциированная с данным изоморфизмом* E *на* F.

(3) *Для любого ПБК* $\mathscr{U}$ *над пространством Канторовича — Пинскера существуют пространство с мерой* Ω, *обладающее свойством прямой суммы, фундамент* $F \subset M(\Omega)$ *и ИБР с лифтингом* $\mathscr{X}$ *над* Ω *такие, что РНП* $\mathscr{U}$ *и* $F(\mathscr{X})$ *изометричны.*

(Пространство $F(\mathscr{X})$ — а точнее, изометрия $\mathscr{U}$ на $F(\mathscr{X})$ — будет называться (*измеримой*) *реализацией* ПБК $\mathscr{U}$, а $\mathscr{X}$ — *реализационным* ИБР для $\mathscr{U}$ (ср. 3.4.4). Можно показать, что реализационное ИБР для данного ПБК единственно с точностью до изометрии.)

(4) *Если ИБР* $\mathscr{X}$ *над* Ω *является реализационным расслоением для ПБК* $\mathscr{U}$, *то РНП* $M(\Omega, \mathscr{X})$ *изометрично максимальному расширению* $\mathscr{U}$.

(5) *Пусть* $\mathscr{X}$ *— ИБР с лифтингом над* Ω. *Предположим, что фундаменты* E *и* F *расширенного* K*-пространства* $M(\Omega)$ *образуют дуализирующую пару (см. 1.4.4). Тогда РНП* $E^*(\mathscr{X}')$ *изометрично* $E(\mathscr{X})^*$, *где изометрия осуществляется сопоставлением классу* $\mathbf{u}' \in E^*(\mathscr{X}')$ *оператора* $|\mathbf{u}'\rangle : \mathbf{u} \mapsto \langle \mathbf{u}|\mathbf{u}'\rangle$ *из* $E(\mathscr{X})$ *в* F. *В частности, если* $\mathscr{X}$ *— реализационное ИБР для ПБК* $\mathscr{U}$, *то* $\mathscr{X}'$ *— реализационное ИБР для сопряженного ПБК* $\mathscr{U}^*$.

4.4.9. В 4.3.2 установлено, что свойство лифтинга (д) (см. 4.3.1) не вытекает из свойств (а)–(г). Применив технику просторных НБР, мы усилим это утверждение и покажем, что условия (а)–(г) совместимы с «послойным» отрицанием (д), причем даже в том случае, когда рассматриваемое ИБР имеет лифтинг.

Предложение. *Для любого безатомного пространства с мерой Ω и лифтинга ρ пространства $L^\infty(\Omega)$ существуют ИБР $\mathscr{X}$ над Ω и два отображения ρ_1 и ρ_2 из $L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$ в $\mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{X})$, каждое из которых удовлетворяет условиям* 4.3.1 (а)–(г), *причем первое обладает также и свойством* (д), *т. е. является лифтингом, а второе таково, что множество $\{\rho_2(\mathbf{u})(\omega) : \mathbf{u} \in L^\infty(\Omega, \mathscr{X})\}$ не является плотным в $\mathscr{X}(\omega)$ ни для одной точки $\omega \in \Omega$.*

◀ Пусть Ω — безатомное пространство с мерой, ρ — лифтинг $L^\infty(\Omega)$ и $\tau : \Omega \to Q$ — соответствующее каноническое погружение Ω в стоуновский компакт Q булевой алгебры $B(\Omega)$. Зафиксируем произвольные (бесконечномерное) гильбертово пространство Z и линейную изометрию $T\colon Z \to Z_0$ на собственное подпространство $Z_0 \subset Z$. Обозначим через X гильбертово пространство $\ell^2(Q, Z)$, снабженное скалярным произведением

$$\langle x, y\rangle = \sum_{q\in Q} \langle x(q), y(q)\rangle \quad (x, y \in X).$$

Для каждой точки $q \in Q$ определим линейный оператор $H(q)\colon X \to X$, положив $(H(q)x)(q) := T(x(q))$ и $(H(q)x)(p) := x(q)$ при $p \neq q$. Очевидно, оператор $H(q)$ изометрично отображает пространство X на его собственное подпространство $\{x \in X : x(q) \in Z_0\}$. Пусть $\mathscr{Y}$ — просторная оболочка постоянного НБР $Q \times \{X\}$. Согласно 3.1.7 все слои $\mathscr{Y}$ являются гильбертовыми пространствами. Используя этот факт, для каждой точки $q \in Q$ изометрию $H(q)$ можно с легкостью продолжить до изометрии $\overline{H}(q)$ пространства $\mathscr{Y}(q)$ на некоторое его собственное подпространство.

Покажем, что всякое сечение $v \in C(Q, \mathscr{Y})$ совпадает с $\overline{H} \otimes v$ на некотором котощем подмножестве Q.

(а) Установим сначала, что для каждого $x \in X$ имеет место равенство $\overline{H}(q)x = x$ для всех элементов q некоторого котощего подмножества Q. Действительно, из определения оператора $H(q)$ видно, что $H(q)x = x$ для всех тех точек $q \in Q$, в которых $x(q) = 0$. Осталось заметить, что множество $\{q \in Q : x(q) \neq 0\}$ счетно, а в силу безатомности алгебры $B(\Omega)$ все счетные подмножества Q являются тощими.

(б) Обозначим символом $\mathscr{C}$ множество всех постоянных функций $c\colon Q \to X$, а символом $d\mathscr{C}$ — циклическую оболочку $\mathscr{C}$ в РНП $C_\infty(Q, \mathscr{Y})$ (см. 1.4.1). Благодаря 1.1.10, из (а) следует, что для каждого элемента $s \in d\mathscr{C}$ сечение $\overline{H} \otimes s$ совпадает с s на котощем подмножестве Q.

(в) Пусть теперь v — произвольный элемент $C(Q, \mathscr{Y})$. Из 2.5.7 вытекает, что $\mathscr{C}$ является аппроксимирующим подмножеством $C_\infty(Q, \mathscr{Y})$. В силу предложения 1.5.7 множество $d\mathscr{C}$ равномерно плотно в $C_\infty(Q, \mathscr{Y})$ и, следовательно, имеется последовательность элементов $d\mathscr{C}$, равномерно (т. е. с регулятором 1) сходящаяся к v. Совпадение сечений v и $\overline{H} \otimes v$ на котощем подмножестве Q теперь вытекает из (б).

Обозначим через $\mathscr{X}$ ИБР $\mathscr{Y} \circ \tau$ с лифтингом $\rho_1 : \mathbf{u} \mapsto \hat{\mathbf{u}} \circ \tau$ (см. 4.3.4). Второе из искомых отображений определим по правилу $\rho_2(\mathbf{u}) := (\overline{H} \otimes \hat{\mathbf{u}}) \circ \tau$, $\mathbf{u} \in L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$. Большинство необходимых свойств ρ_2 проверяется элементарно. В пояснении нуждается лишь включение $\rho_2(\mathbf{u}) \in \mathbf{u}$, для обоснования которого достаточно установить совпадение почти всюду сечений $\rho_1(\mathbf{u})$ и $\rho_2(\mathbf{u})$. Последнее же следует из теоремы 1.2.13 и совпадения сечений $\hat{\mathbf{u}}$ и $\overline{H} \otimes \hat{\mathbf{u}}$ на котощем подмножестве Q. ▶

Глава 5. Пространства вектор-функций

Классическими примерами пространств Банаха — Канторовича являются пространства непрерывных, слабо непрерывных, измеримых и слабо измеримых вектор-функций. Эти пространства достаточно просто устроены, и представление их в виде пространств сечений банаховых расслоений не вносит дополнительной ясности в их структуру. Однако такое представление необходимо для применения к пространствам вектор-функций общих результатов о просторных НБР и ИБР с лифтингом (см. гл. 3 и 4). Данная глава посвящена изучению структуры реализационных расслоений пространств вектор-функций. Здесь же приводятся некоторые приложения полученных результатов к установлению связей между пространствами измеримых и непрерывных вектор-функций, а также к построению различных лифтингов в пространствах измеримых вектор-функций.

Ниже предполагается, что X и Y — банаховы пространства, приведенные в двойственность билинейной формой $\langle\cdot|\cdot\rangle : X \times Y \to \mathbb{R}$, причем Y нормирует X, т. е. $\|x\| = \sup\{\langle x|y\rangle : y \in Y,\ \|y\| \leqslant 1\}$ для всех $x \in X$. Такая связь между пространствами X и Y позволяет считать, что $X \subset Y'$, где $x \in X$ отождествляется с $\langle x| \in Y'$.

§ 5.1. Непрерывные вектор-функции

В этом параграфе построены реализационные НБР X_Q и $(X|Y)_Q$ для РНП непрерывных и Y-слабо непрерывных X-значных функций, определенных в Q, исследован вопрос о просторности НБР с постоянным слоем, а также сформулированы некоторые свойства непрерывных вектор-функций, полученные в результате приложения теории НБР.

На протяжении данного параграфа Q — непустой экстремально несвязный компакт.

5.1.1. Как уже было отмечено в 2.2.1, непрерывными сечениями постоянного НБР $Q \times \{X\}$ являются непрерывные X-значные функции. В связи с этим результаты теории НБР, касающиеся свойств непрерывных сечений, практически без изменений переносятся на случай вектор-функций. Ниже приведены некоторые сведения, полученные с помощью такого переноса.

Пусть $u\colon D \to X$ — непрерывная функция, определенная на всюду плотном подмножестве $D \subset Q$. Обозначим через $\overline{D}$ совокупность всех точек Q, в которых функция u имеет предел, и положим $\bar{u}(q) = \lim\limits_{p\to q} u(p)$ для всех $q \in \overline{D}$. Тогда множество $\overline{D}$ является котощим в Q и функция $\bar{u}\colon \overline{D} \to X$ непрерывна. Таким образом, функция $\bar{u}$ является наибольшим непрерывным продолжением u, т. е. область определения любого непрерывного продолжения u содержится в $\overline{D}$ и, более того, $\bar{u}$ является продолжением любого непрерывного продолжения u. Функция $\bar{u}$ называется *максимальным расширением* u и обозначается символом $\mathrm{ext}(u)$ или, более подробно, $\mathrm{ext}_X(u)$. Непрерывная функция $u\colon D \to X$, определенная на всюду плотном подмножестве $D \subset Q$, называется *расширенной*, если $\mathrm{ext}(u) = u$. Отметим, что все расширенные функции определены на котощих подмножествах Q.

Символом $C_\infty(Q, X)$ обозначается множество всех расширенных X-значных функций. Совокупность всех ограниченных расширенных функций обозначается через $C^b_\infty(Q, X)$. На множестве $C_\infty(Q, X)$ естественным образом вводится структура РНП над $C_\infty(Q)$ и модуля над $C_\infty(Q)$. При этом норма $|u| \in C_\infty(Q)$ элемента $u \in C_\infty(Q, X)$ является непрерывным продолжением поточечной нормы $|||u|||\colon q \in \mathrm{dom}\, u \mapsto \|u(q)\|$.

РНП $C_\infty(Q, X)$ является (расширенным) ПБК над $C_\infty(Q)$. Если E — идеал $C_\infty(Q)$, то множество $E(X) := \{u \in C_\infty(Q, X) : |u| \in E\}$, снабженное операциями, индуцированными из $C_\infty(Q, X)$, очевидно, представляет собой ПБК над E. Заметим, что пространство всюду определенных непрерывных функций $C(Q, X)$, будучи РНП над $C(Q)$, вообще говоря, не является ПБК (см. 5.1.3) и тем самым не совпадает с пространством $E(X)$, где $E = C(Q)$.

5.1.2. Символом X_Q мы будем в дальнейшем обозначать просторную оболочку постоянного НБР $Q \times \{X\}$ (см. 3.1.5). Следующее утверждение является переформулировкой предложения 3.4.9 для расслоения $\mathscr{X} = Q \times \{X\}$.

Лемма. *Расслоение X_Q является реализационным* НБР *для* ПБК $C_\infty(Q, X)$ (см. 3.4.4). *Для любого идеала $E \subset C_\infty(Q)$ оператор* ext_{X_Q} (см. 2.5.1) *осуществляет изометрию* ПБК $E(X)$ *на* $E(X_Q)$.

5.1.3. *Теорема.* *Для просторности постоянного расслоения $Q \times \{X\}$ необходимо и достаточно, чтобы компакт Q был конечен или банахово пространство X было конечномерно.*

◀ Достаточность сформулированного условия просторности НБР $Q \times \{X\}$ очевидна. Для доказательства его необходимости мы предположим бесконечность Q и бесконечномерность X и установим, что в этом случае расслоение $Q \times \{X\}$ не является просторным. Из бесконечности компакта Q следует существование такой последовательности $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ непустых попарно не пересекающихся открыто-замкнутых подмножеств Q, что объединение $D := \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} U_n$ всюду плотно в Q. Из бесконечномерности пространства X следует существование такой последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ элементов X, что $\|x_n\| = 1$ и $\|x_n - x_m\| > 1/2$ для всех $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$. Определим ограниченную функцию $u \in C(D, X)$, положив $u(q) := x_n$ при $q \in U_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Тогда u не имеет непрерывного продолжения на Q. Действительно, предположим, что функция $\bar{u} \in C(Q, X)$ является продолжением u. В силу своей замкнутости образ $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ функции u совпадает с образом $\bar{u}$. Поэтому объединение $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \bar{u}^{-1}(x_n)$ непустых попарно не пересекающихся открытых множеств совпадает с пространством Q, что противоречит компактности последнего. ▶

5.1.4. Напомним, что функция $u\colon D \to X$, определенная на подмножестве $D \subset Q$, является *Y-слабо непрерывной*, если для любого элемента $y \in Y$ вещественная функция $|y\rangle \circ u\colon D \to \mathbb{R}$ непрерывна. Если при этом множество D всюду плотно в Q, то символом $\langle u|y\rangle$ мы будем обозначать максимальное расширение функции $|y\rangle \circ u$ до элемента $C_\infty(Q)$.

Для любой Y-слабо непрерывной функция $u\colon D \to X$, определенной на всюду плотном подмножестве $D \subset Q$, существует наибольшее Y-слабо непрерывное продолжение, т. е. Y-слабо непрерывная функция $\bar{u}\colon \overline{D} \to X$, продолжающая любое Y-слабо непрерывное продолжение u. (Достаточно заметить, что пространство X, снабженное Y-слабой топологией, является вполне регулярным, и сослаться на теорему 1.1.1.) Наибольшее продолжение $\bar{u}$ функции u мы, как обычно, называем *максимальным* (Y*-слабо непрерывным*) *расширением* u и обозначаем символом $\mathrm{ext}(u)$ или, более подробно, $\mathrm{ext}_{X|Y}(u)$.

5.1.5. В отличие от расширенных непрерывных функций (см. 5.1.1), область определения максимального слабо непрерывного расширения может не быть котощей в Q и даже может оказаться тощей.

Предложение. *Существуют экстремально несвязный компакт Q, банахово пространство X, тощее всюду плотное подмножество $D \subset Q$ и X'-слабо непрерывная ограниченная функция $u\colon D \to X$, удовлетворяющая условию* $\mathrm{ext}_{X|X'}(u) = u$.

◀ Роль X в нашем примере будет играть пространство c_0 сходящихся к нулю последовательностей. Обозначим через B замкнутый единичный шар в пространстве ℓ^∞, а через B_0 — его пересечение с c_0. Шары B и B_0 мы будем рассматривать как топологические пространства относительно ℓ^1-слабой топологии. Очевидно, B_0 — всюду плотное подмножество компакта B. Кроме того, B_0 является тощим подмножеством B, поскольку содержится в объединении нигде не плотных множеств $\{x \in B : |x_m| \leqslant 1/2$ при $m \geqslant n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Пусть Q — стоуновский компакт булевой алгебры $\mathrm{Rop}(B)$ и $\alpha\colon Q_B \to B$ — абсолютизация B. Из 1.2.10 (2) следует, что $Q_B = Q$, отображение $\alpha\colon Q \to B$ непрерывно, а множество $D := \alpha^{-1}[B_0]$ является тощим и всюду плотным в Q. Очевидно, сужение α на D является искомой функцией u. ▶

5.1.6. Как следует из 5.1.5, для того чтобы на каком-либо множестве слабо непрерывных функций можно было естественным образом ввести структуру векторного пространства, мы вынуждены накладывать дополнительные ограничения на области определения функций из этого множества. Всякое ограничение такого рода в определенном смысле искусственно. Возможно, более предпочтительным было бы наложение условия на пару (X, Y), при соблюдении которого максимальные Y-слабо непрерывные расширения автоматически имели бы достаточно широкие области определения. Однако в данной работе выбран первый подход, как более общий.

Мы будем называть Y-слабо непрерывную функцию $u\colon D \to X$ *расширенной*, если D — котощее подмножество Q и $\mathrm{ext}_{X|Y}(u) = u$. Множество $C_\infty(Q, X|Y)$ всех расширенных Y-слабо непрерывных X-значных функций естественным образом превращается в векторное пространство, где под линейной комбинацией $\lambda u + \mu v$ понимается максимальное Y-слабо непрерывное расширение поточечной суммы $\lambda u|_{\mathrm{dom}\, v} + \mu v|_{\mathrm{dom}\, u}$. Из теоремы 1.3.5 следует, что для каждой функции $u \in C_\infty(Q, X|Y)$ семейство $\{\langle u|y\rangle : y \in Y,\ \|y\| \leqslant 1\}$ ограничено в K-пространстве $C_\infty(Q)$. Беря в качестве нормы $|u|$ точную верхнюю границу этого семейства, мы превращаем пространство $C_\infty(Q, X|Y)$ в РНП над $C_\infty(Q)$. Заметим, что функция $|||u|||\colon q \in \mathrm{dom}\, u \mapsto \|u(q)\|$ является поточечной точной верхней границей того же семейства. Поэтому $|||u||| \leqslant |u|$ на $\mathrm{dom}\, u$, причем значения отображений $|||u|||$ и $|u|$ совпадают на некотором котощем подмножестве Q (см. теорему 1.3.5). Из следующего примера видно, что $|||u|||$ и $|u|$ могут не совпадать на $\mathrm{dom}\, u$.

Предложение. *Пусть Q — бесконечный экстремально несвязный компакт, а X — бесконечномерное гильбертово пространство. Существуют функция $u \in C_\infty(Q, X|X')$ и точка $q \in \mathrm{dom}\, u$ такие, что $u(q) = 0$, но $|u|(q) = \infty$.*

◀ В силу бесконечности Q имеется последовательность $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ попарно не пересекающихся открыто-замкнутых подмножеств Q, объединение $D := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ которой всюду плотно в Q. Пространство X ввиду своей бесконечномерности содержит некоторую ортонормированную последовательность $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Рассмотрим функцию $u_0\colon D \to X$, тождественно равную $\sqrt{n} e_n$ на U_n $(n \in \mathbb{N})$. Пусть $\overline{X}$ — какая-либо компактификация пространства X, снабженного слабой топологией, а $\bar{u}_0\colon Q \to \overline{X}$ — непрерывное продолжение функции u_0. Ясно, что сужение $u := \bar{u}_0\big|^X$ является элементом $C_\infty(Q, X|X')$. Как известно, нуль 0 пространства X принадлежит слабому замыканию множества $\{\sqrt{n} e_n : n \in \mathbb{N}\}$ (см., например, [26, решение задачи 21]). Поэтому образ функции $\bar{u}_0$, будучи замкнутым подмножеством $\overline{X}$, содержит 0, и, следовательно, $u(q) = 0$ для некоторой точки $q \in \mathrm{dom}\, u$. С другой стороны, $|u|(q) = \infty$, так как $|u| \equiv \sqrt{n}$ на U_n $(n \in \mathbb{N})$ и $q \notin D$. ▶

5.1.7. Введем отношение *эквивалентности* $\sim$ на множестве $C_\sim(Q, X|Y)$ всех Y-слабо непрерывных X-значных функций, определенных на котощих подмножествах Q, положив $u \sim v$ в том и только том случае, если u и v совпадают на $\mathrm{dom}\, u \cap \mathrm{dom}\, v$. Очевидно, снижение оператора $\mathrm{ext}_{X|Y}$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между элементами фактор-множества $C_\sim(Q, X|Y)/\sim$

и пространства $C_\infty(Q,X|Y)$. С помощью такого соответствия множество $C_\sim(Q,X|Y)/\sim$ можно естественным образом наделить структурой РНП над $C_\infty(Q)$ (см. 5.1.6). Рассмотрение расширенных функций, как и в случае сечений банаховых расслоений (ср. 2.5.6), заключается в выделении в каждом классе эквивалентности из $C_\sim(Q,X|Y)/\sim$ по каноническому представителю с наибольшей областью определения.

5.1.8. Пусть $\mathscr{Y}'$ — сопряженное расслоение к просторной оболочке $\mathscr{Y}$ постоянного НБР $Q\times\{Y\}$ (см. 2.2.1, 3.1.5, 3.3.1). Включения $\mathscr{Y}'(q)\subset\mathscr{Y}(q)'$, $Y\subset\mathscr{Y}(q)$ и $X\subset Y'$ позволяют для каждой точки $q\in Q$ рассмотреть банахово подпространство $\mathscr{Y}_0'(q)=\{z\in\mathscr{Y}'(q):z|_Y\in X\}$ слоя $\mathscr{Y}'(q)$. Просторное НБР $\mathscr{Y}'\wedge\mathscr{Y}_0'$ (см. 2.2.4, 3.1.11) будет обозначаться символом $(X|Y)_Q$. Для каждого сечения $u\in C_\infty(Q,(X|Y)_Q)$ обозначим через u_Y функцию $(q\mapsto u(q)|_Y):\operatorname{dom}u\to Y'$. Очевидно, что $u_Y\in C_\sim(Q,Y'|Y)$, причем из 3.1.11 следует, что прообраз $u_Y^{-1}[X]$ является котощим подмножеством Q. Следовательно, сужение $u_Y|^X$ принадлежит $C_\sim(Q,X|Y)$, и мы вправе рассмотреть его максимальное расширение $u_Y^X\in C_\infty(Q,X|Y)$ (см. 5.1.6).

Лемма. *Отображение $u\mapsto u_Y^X$ осуществляет изометрию решеточно нормированного пространства $C_\infty(Q,(X|Y)_Q)$ на $C_\infty(Q,X|Y)$.*

◀ Покажем изометричность линейного отображения $u\mapsto u_Y^X$. Зафиксируем произвольное сечение $u\in C_\infty(Q,(X|Y)_Q)$. Неравенство $|u_Y^X|\leqslant|u|$ очевидно. Поскольку $(X|Y)_Q$ — подрасслоение $\mathscr{Y}'$, согласно 3.3.3 мы имеем

$$|u|=\sup\{\langle v|u\rangle : v\in C(Q,\mathscr{Y}),\ |v|\leqslant 1\}.$$

Зафиксируем произвольное сечение $v\in C(Q,\mathscr{Y})$, $|v|\leqslant 1$, и заметим, что на некотором котощем подмножестве Q выполнены соотношения $u_Y=u_Y^X$, $|u_Y^X|=|||u_Y^X|||$ и $v=v^Y:=v|^Y$, откуда

$$\langle v|u\rangle=\langle v^Y|u\rangle=\langle v^Y|u_Y\rangle=\langle v^Y|u_Y^X\rangle\leqslant|||u_Y^X|||=|u_Y^X|$$

на том же котощем подмножестве Q. Произвольность выбора сечения v обеспечивает недостающее неравенство $|u|\leqslant|u_Y^X|$.

Осталось показать, что отображение $u\mapsto u_Y^X$ сюръективно. Если $w\in C_\infty(Q,X|Y)$, то для каждого сечения $v\in C(Q,\mathscr{Y})$ функция $q\mapsto\langle w(q)|v(q)\rangle$ определена и непрерывна на котощем подмножестве $\operatorname{dom}w\cap v^{-1}[Y]\subset Q$. Обозначим через $\langle w|v\rangle$ ее продолжение до элемента $C_\infty(Q)$. Для любых $q\in\operatorname{dom}|u|$ и $y\in\mathscr{Y}(q)$ положим $u(q)(y):=\langle w|v\rangle(q)$, где сечение $v\in C(Q,\mathscr{Y})$ таково, что $v(q)=y$. Несложная проверка показывает, что предложенные построения корректно определяют сечение $u\in C_\infty(Q,(X|Y)_Q)$, удовлетворяющее соотношению $u_Y^X=w$. ▶

5.1.9. Если E — идеал $C_\infty(Q)$, то множество

$$E(X|Y):=\{u\in C_\infty(Q,X|Y):|u|\in E\},$$

снабженное операциями, индуцированными из $C_\infty(Q,X|Y)$, представляет собой РНП над E.

Следствие. (1) *Пространство $C_\infty(Q,X|Y)$ является* (*расширенным*) ПБК *над $C_\infty(Q)$.*

(2) НБР $(X|Y)_Q$ *является реализационным расслоением для $C_\infty(Q,X|Y)$.*

(3) *Для любого идеала $E\subset C_\infty(Q)$ отображение $u\mapsto u_Y^X$ осуществляет изометрию* ПБК $E((X|Y)_Q)$ на $E(X|Y)$.

5.1.10. Рассмотрим отдельно случай, когда в роли двойственных пространств X и Y выступают соответственно X' и X. Согласно 3.3.1 и 5.1.2 символ $(X_Q)'$ обозначает сопряженное расслоение к просторной оболочке постоянного НБР $Q \times \{X\}$, а символ $(X')_Q$ — просторную оболочку постоянного НБР $Q \times \{X'\}$. В соответствии с 5.1.8 для каждого сечения $u \in C_\infty(Q, (X'|X)_Q)$ через u_X обозначается функция $(q \mapsto u(q)|_X)\colon \operatorname{dom} u \to X'$.

Следствие. *Расслоение $(X'|X)_Q$ совпадает с $(X_Q)'$. Для любого идеала $E \subset C_\infty(Q)$ отображение $u \mapsto \operatorname{ext}_{X'|X}(u_X)$ осуществляет изометрию $E((X_Q)')$ на $E(X'|X)$.*

◀ Вытекает непосредственно из 5.1.8 и 5.1.9. ▶

Таким образом, ПБК $C_\infty(Q, X'|X)$ изометрично $C_\infty(Q, (X_Q)')$. Кроме того, в 5.1.2 установлена изометричность $C_\infty(Q, X')$ и $C_\infty(Q, (X')_Q)$. Поскольку ПБК $C_\infty(Q, X')$ изометрично вкладывается в $C_\infty(Q, X'|X)$, из предложения 3.4.7 следует, что НБР $(X')_Q$ можно рассматривать как банахово подрасслоение $(X_Q)'$. Равенство $(X')_Q = (X_Q)'$ выполнено в случае совпадения пространств $C_\infty(Q, X')$ и $C_\infty(Q, X'|X)$, что имеет место, например, при регулярности булевой алгебры $\operatorname{Clop}(Q)$ и сепарабельности пространства X' (см. [18, 4.1.12 (в)]).

§ 5.2. Измеримые вектор-функции

В этом параграфе исследован вопрос о существовании лифтинга в пространстве измеримых вектор-функций, построено вложение ИБР с постоянным слоем в ИБР с лифтингом, а также сформулированы некоторые свойства измеримых и слабо измеримых вектор-функций, полученные в результате приложения теории ИБР.

Всюду в дальнейшем Ω — пространство с ненулевой мерой (обладающее свойством прямой суммы), ρ — лифтинг $L^\infty(\Omega)$. Как и раньше, X и Y — приведенные в двойственность банаховы пространства, причем Y нормирует X.

5.2.1. Символ $\mathscr{M}(\Omega, X)$ обозначает множество всех измеримых (по Бохнеру) функций, определенных почти всюду в Ω и принимающих значения в пространстве X. Через $M(\Omega, X)$ мы обозначаем совокупность классов эквивалентности элементов $\mathscr{M}(\Omega, X)$ по отношению равенства почти всюду. Символом $\mathscr{L}^\infty(\Omega, X)$ обозначается множество $\{u \in \mathscr{M}(\Omega, X) : |||u||| \in \mathscr{L}^\infty(\Omega)\}$, а его элементы называются *(существенно) ограниченными измеримыми функциями.* Классы эквивалентности, состоящие из существенно ограниченных функций, называются *ограниченными классами*, а совокупность всех таких классов обозначается через $L^\infty(\Omega, X)$.

На множестве $M(\Omega, X)$ естественным образом вводится структура РНП над $M(\Omega)$ и модуля над $M(\Omega)$. При этом норма $|\mathbf{u}|$ класса $\mathbf{u} \in M(\Omega, X)$ включает поточечные нормы $|||u|||$ всех его представителей $u \in \mathbf{u}$. Если E — идеал $M(\Omega)$, то множество $E(X) := \{\mathbf{u} \in M(\Omega, X) : |\mathbf{u}| \in E\}$, снабженное операциями, индуцированными из $M(\Omega, X)$, очевидно, представляет собой РНП над E. Очевидно, $L^\infty(\Omega, X)$ совпадает с $E(X)$, где $E = L^\infty(\Omega)$.

5.2.2. Отображение $\rho_X : L^\infty(\Omega, X) \to \mathscr{L}^\infty(\Omega, X)$ будем называть *лифтингом* $L^\infty(\Omega, X)$ *(ассоциированным с ρ)*, если для любых $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L^\infty(\Omega, X)$ и $\mathbf{e} \in L^\infty(\Omega)$ имеют место следующие соотношения:

(а) $\rho_X(\mathbf{u})\colon \Omega \to X$ и $\rho_X(\mathbf{u}) \in \mathbf{u}$;
(б) $|||\rho_X(\mathbf{u})||| = \rho(|\mathbf{u}|)$;
(в) $\rho_X(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \rho_X(\mathbf{u}) + \rho_X(\mathbf{v})$;
(г) $\rho_X(\mathbf{eu}) = \rho(\mathbf{e})\rho_X(\mathbf{u})$;
(д) $\rho_X(c^\sim) = c$ для всех постоянных функций $c\colon \Omega \to X$.

Как и в случае лифтинга в пространстве сечений (ср. 4.3.1), мы будем употреблять запись $\rho_X(u)$ вместо $\rho_X(u^\sim)$ для $u \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, X)$, $\rho(e)$ вместо $\rho(e^\sim)$ для $e \in \mathscr{L}^\infty(\Omega)$ и $\rho(A)$ вместо $\rho(A^\sim)$ для $A \in \mathscr{B}(\Omega)$.

Теорема. *Для существования лифтинга пространства $L^\infty(\Omega, X)$ необходимо и достаточно, чтобы пространство с мерой Ω было атомным или банахово пространство X было конечномерным.*

◀ Проверка достаточности приведенного критерия не составляет труда, и мы остановимся лишь на обосновании его необходимости. Предположим, что X бесконечномерно и Ω не является атомным. Не нарушая общности, мы можем считать Ω безатомным пространством с конечной ненулевой мерой. Допустим, что, вопреки доказываемому, пространство $L^\infty(\Omega, X)$ имеет лифтинг ρ_X, ассоциированный с ρ.

Из бесконечномерности пространства X следует существование такой последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов X, что $\|x_n\| = 1$ и $\|x_n - x_m\| \geqslant 1/2$ для всех $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$. Благодаря безатомности пространства Ω, существуют точка $\omega_0 \in \Omega$ и последовательность $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ попарно не пересекающихся непустых измеримых подмножеств Ω такие, что $\rho(A_n) = A_n$ и $\omega_0 \notin \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \sim \Omega$. Такую последовательность можно построить индуктивно, разбивая на каждом шаге очередной остаток $\Omega \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ на два подмножества A и B, имеющих равные меры, и выбирая в качестве A_{n+1} то из множеств $\rho(A)$ или $\rho(B)$, которое не содержит точку ω_0.

Определим функцию $u \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, X)$, положив $u(\omega) = x_n$ при $\omega \in A_n$. Из свойства (г) лифтинга ρ_X следует, что функция $\rho_X(u)$ продолжает u. Обозначим значение $\rho_X(u)$ в точке ω_0 через x_0 и покажем, что x_0 принадлежит множеству $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Действительно, если это не так, то для некоторого числа $\varepsilon > 0$ мы будем иметь $\|x_0 - x_n\| \geqslant \varepsilon$ при всех $n \in \mathbb{N}$, что приводит к противоречивым соотношениям

$$0 = |||\rho_X(u) - x_0|||(\omega_0) = |||\rho_X(u - x_0)|||(\omega_0) = \rho(|||u - x_0|||)(\omega_0) \geqslant \varepsilon > 0.$$

Итак, $x_0 = x_n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $|||u - x_n||| \geqslant 1/2$ почти всюду на $\Omega \setminus A_n$, мы имеем $|||\rho_X(u) - x_n||| = \rho(|||u - x_n|||) \geqslant 1/2$ на $\Omega \setminus A_n$. Следовательно, $\omega_0 \in A_n$, и искомое противоречие получено. ▶

5.2.3. Рассмотрим постоянное измеримое банахово расслоение $\Omega \times \{X\}$. Как было отмечено в 4.2.1, совокупность $\mathscr{M}(\Omega, \Omega \times \{X\})$ измеримых сечений этого расслоения совпадает с $\mathscr{M}(\Omega, X)$. Из 4.3.1 следует, что наличие лифтинга в расслоении $\Omega \times \{X\}$ — явление редкое. Однако, как показывает следующая теорема, расслоение $\Omega \times \{X\}$ можно плотно вложить в ИБР с лифтингом.

Теорема. *Существует (единственное с точностью до ρ-изометрии) ИБР с лифтингом $\mathscr{X}$ над Ω такое, что*

(1) *X является банаховым подпространством каждого слоя $\mathscr{X}(\omega)$, $\omega \in \Omega$;*
(2) *каждое сечение $u \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})$ принимает значения $u(\omega) \in X$ почти для всех $\omega \in \Omega$;*
(3) $\mathscr{M}(\Omega, X) = \{u \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X}) : \operatorname{im} u \subset X\} = \{u|^X : u \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})\}$;
(4) *лифтинг $\rho_{\mathscr{X}}$ ассоциирован с ρ;*
(5) *$\rho_{\mathscr{X}}(c^\sim) = c$ для всех постоянных функций $c \colon \Omega \to X$.*

◀ Следует из 4.2.3 и 4.4.5. ▶

ИБР $\mathscr{X}$, о котором идет речь в последней теореме, будет обозначаться символом X_Ω. Ясно, что постоянное ИБР $\Omega \times \{X\}$ является всюду плотным подрасслоением X_Ω в смысле 4.2.3.

5.2.4. *Следствие.* *РНП $M(\Omega, X)$ является (расширенным) ПБК над $M(\Omega)$. Расслоение X_Ω является реализационным ИБР для пространства $M(\Omega, X)$. Если E — идеал $M(\Omega)$, то отображение $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u} \cap \mathscr{M}(\Omega, X)$ осуществляет изометрию ПБК $E(X_\Omega)$ на $E(X)$.*

5.2.5. Функция u, определенная почти всюду в Ω и принимающая значения в пространстве X, называется *Y-слабо измеримой*, если для любого $y \in Y$ вещественная функция $\langle u|y\rangle := |y\rangle \circ u$ измерима. Совокупность всех таких функций u мы будем обозначать символом $\mathscr{M}(\Omega, X|Y)$. Почти всюду определенные X-значные функции u и v называются *Y-слабо эквивалентными*, если для каждого $y \in Y$ функции $\langle u|y\rangle$ и $\langle v|y\rangle$ совпадают почти всюду. Отношение Y-слабой эквивалентности на множестве $\mathscr{M}(\Omega, X|Y)$ мы будет обозначать символом $\simeq$ в отличие от символа $\sim$, обозначающего отношение равенства почти всюду. Фактор-множество $\mathscr{M}(\Omega, X|Y)/\simeq$ обозначается через $M(\Omega, X|Y)$. Напомним, что для фактор-множества $\mathscr{M}(\Omega, X)/\sim$ было введено обозначение $M(\Omega, X)$ (см. 5.2.1). Если $u \in \mathbf{u} \in M(\Omega, X|Y)$ и $y \in Y$, то символ $\langle \mathbf{u}|y\rangle$ обозначает класс $\langle u|y\rangle^\sim \in M(\Omega)$.

Очевидно, что $\mathscr{M}(\Omega, X) \subset \mathscr{M}(\Omega, X|Y)$, причем включение может быть строгим. Существуют примеры слабо эквивалентных функций, не совпадающих почти всюду (см. [35, II.1]). Однако известно, что X'-слабо эквивалентные измеримые по Бохнеру функции равны почти всюду (см. [35, II.2, следствие 7]). Использование лифтинга ρ пространства $L^\infty(\Omega)$ позволяет с легкостью усилить этот результат.

Лемма. *Если функции $u, v \in \mathscr{M}(\Omega, X)$ Y-слабо эквивалентны, то они равны почти всюду.*

◀ Для всякой ступенчатой (т. е. измеримой конечнозначной) функции $s = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i} x_i$ определим ступенчатую функцию $\rho(s) \sim s$ по правилу $\rho(s) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{\rho(A_i)} x_i$. Очевидно, что $\langle \rho(s)|y\rangle = \rho(\langle s|y\rangle)$ для любого $y \in Y$.

Стандартными рассуждениями можно свести доказываемое утверждение к случаю $u \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, X)$, $v \equiv 0$. Рассмотрим такую последовательность $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ступенчатых функций, что $|||s_n - u||| \leqslant 1/n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Из Y-слабой эквивалентности $u \simeq 0$ вытекает, что для каждого элемента $y \in Y$ и числа $n \in \mathbb{N}$ выполнено $|\langle s_n|y\rangle| \leqslant \|y\|/n$ почти всюду, и поэтому $|\langle \rho(s_n)|y\rangle| \leqslant \|y\|/n$ всюду на Ω. Следовательно, $\rho(s_n) \to 0$ на Ω. Остается заметить, что $\rho(s_n) \to u$ почти всюду. ▶

Последнее утверждение позволяет нам для каждой функции $u \in \mathscr{M}(\Omega, X)$ отождествить классы

$$\{v \in \mathscr{M}(\Omega, X) : v \sim u\} \in M(\Omega, X) \quad \text{и} \quad \{v \in \mathscr{M}(\Omega, X|Y) : v \simeq u\} \in M(\Omega, X|Y).$$

В дальнейшем оба эти класса будут обозначаться одним и тем же символом $u^\sim$.

5.2.6. Множество $M(\Omega, X|Y)$ естественным образом превращается в векторное пространство: мы полагаем

$$\lambda u^\sim + \mu v^\sim := (\lambda u|_{\operatorname{dom} v} + \mu v|_{\operatorname{dom} u})^\sim$$

для $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и $u, v \in \mathscr{M}(\Omega, X|Y)$. Очевидно, что $M(\Omega, X)$ — векторное подпространство $M(\Omega, X|Y)$. Из 1.3.10 следует, что для любого класса $\mathbf{u} \in M(\Omega, X|Y)$ множество $\{\langle \mathbf{u}|y\rangle : y \in Y, \|y\| \leqslant 1\}$ порядково ограничено в $M(\Omega)$. Беря в качестве нормы $|\mathbf{u}|$ класса $\mathbf{u} \in M(\Omega, X|Y)$ точную верхнюю границу множества $\{\langle \mathbf{u}|y\rangle : y \in Y, \|y\| \leqslant 1\}$ в $M(\Omega)$, мы превращаем пространство $M(\Omega, X|Y)$ в РНП над $M(\Omega)$. Если E — идеал в $M(\Omega)$, то множество

$$E(X|Y) := \{\mathbf{u} \in M(\Omega, X|Y) : |\mathbf{u}| \in E\},$$

снабженное операциями, индуцированными из $M(\Omega, X|Y)$, очевидно, представляет собой РНП над E. При $E = L^\infty(\Omega)$ пространство $E(X|Y)$ обозначается через $L^\infty(\Omega, X|Y)$, а $\cup L^\infty(\Omega, X|Y)$ — через $\mathscr{L}^\infty(\Omega, X|Y)$. Для $u \in \mathscr{M}(\Omega, X|Y)$ символом $|u|$ мы будем обозначать произвольный элемент класса $|u^\sim|$ (конкретный выбор представителя $|u| \in |u^\sim|$ не будет играть роли при употреблении символа $|u|$).

5.2.7. Если $\mathbf{u} \in M(\Omega, X|Y)$, то для любого класса $\mathbf{K} \in B(\Omega)$ конечной меры существует такая последовательность $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов единичного шара Y, что $\langle\mathbf{K}\rangle|\mathbf{u}| = \sup_{n\in\mathbb{N}}\langle\mathbf{K}\rangle\langle\mathbf{u}|y_n\rangle$. Тем самым если $(\mathbf{K}_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — разбиение единицы в булевой алгебре $B(\Omega)$, состоящее из классов конечной меры, то для любого $\mathbf{u} \in M(\Omega, X|Y)$ существует такое семейство $(y_n^\xi)_{n\in\mathbb{N}}^{\xi\in\Xi}$ элементов единичного шара Y, что

$$|\mathbf{u}| = \sup_{\xi\in\Xi}\sup_{n\in\mathbb{N}}\langle\mathbf{K}_\xi\rangle\langle\mathbf{u}|y_n^\xi\rangle.$$

Из вышесказанного следует, что для любой функции $u \in \mathscr{M}(\Omega, X|Y)$ имеет место неравенство $|u| \leqslant |||u|||$ почти всюду на Ω. Большего сказать о связи функций $|u|$ и $|||u|||$ в общем случае нельзя. Функция $|||u|||$ может быть неизмеримой. Возможна ситуация, при которой $|u| \sim 0$, но $|||u||| \equiv 1$. Таким образом, функция $|u|$ и поточечная граница $\sup\{\langle u|y\rangle : y \in Y,\ \|y\| \leqslant 1\}$, вообще говоря, не связаны друг с другом. Ситуация меняется, если, зафиксировав лифтинг пространства $L^\infty(\Omega)$, заменить в последней формуле $\langle u|y\rangle$ на $\langle u|y\rangle_\sim$ (см. 1.1.13): согласно 1.3.10 для любой функции $u \in \mathscr{M}(\Omega, X|Y)$ почти всюду на Ω выполнено равенство $|u| = \sup\{\langle u|y\rangle_\sim : y \in Y,\ \|y\| \leqslant 1\}$.

5.2.8. Если $v \in \mathscr{M}(\Omega, (X_\Omega)')$, то функция $v_X : \omega \mapsto v(\omega)|_X$ из $\operatorname{dom} v$ в X', очевидно, принадлежит $\mathscr{M}(\Omega, X'|X)$. Для каждого элемента $\mathbf{v} \in M(\Omega, (X_\Omega)')$ обозначим символом $\mathbf{v}_X$ класс из $M(\Omega, X'|X)$, содержащий функции v_X при $v \in \mathbf{v}$.

Лемма. *Отображение $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}_X$ осуществляет изометрию решеточно нормированного пространства $M(\Omega, (X_\Omega)')$ на $M(\Omega, X'|X)$.*

◀ Покажем изометричность линейного отображения $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}_X$. Зафиксируем произвольный класс $\mathbf{v} \in M(\Omega, (X_\Omega)')$. Согласно 4.4.7 мы имеем $|\mathbf{v}| = \sup\{\langle\mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle : \mathbf{u} \in M(\Omega, X_\Omega),\ |\mathbf{u}| \leqslant 1\}$. Неравенство $|\mathbf{v}_X| \leqslant |\mathbf{v}|$ очевидно. Рассмотрим произвольный элемент $\mathbf{u} \in M(\Omega, X_\Omega)$, $|\mathbf{u}| \leqslant 1$, и заметим, что

$$\langle\mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle = \langle\mathbf{u}^X|\mathbf{v}_X\rangle \leqslant |\mathbf{u}^X|\cdot|\mathbf{v}_X| \leqslant |\mathbf{v}_X|,$$

где $\mathbf{u}^X$ — класс из $M(\Omega, X)$, содержащий функции $u|^X$ при $u \in \mathbf{u}$ (см. 5.2.3). Произвольность выбора $\mathbf{u}$ обеспечивает недостающее неравенство $|\mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{v}_X|$.

Осталось пояснить сюръективность отображения $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}_X$. Для каждого элемента $\mathbf{w} \in M(\Omega, X'|X)$ найдется такое разбиение единицы $(\mathbf{K}_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в булевой алгебре $B(\Omega)$, что $\langle\mathbf{K}_\xi\rangle|\mathbf{w}| \in L^\infty(\Omega)$ для всех $\xi \in \Xi$ (см. 1.3.3). Зафиксировав произвольные $\xi \in \Xi$, $\omega \in (\mathbf{K}_\xi)_\sim$ и $x \in X_\Omega(\omega)$, выберем $\mathbf{u} \in L^\infty(\Omega, X_\Omega)$ так, чтобы $\mathbf{u}_\sim(\omega) = x$ (см. 4.4.1) и положим $v(\omega)x := \langle\mathbf{u}|\mathbf{w}\rangle_\sim(\omega)$. Несложная проверка показывает, что предложенные построения корректно определяют сечение $v \in \mathscr{M}(\Omega, (X_\Omega)')$, удовлетворяющее соотношению $(v^\sim)_X = \mathbf{w}$. ▶

Следствие. *РНП $M(\Omega, X'|X)$ является (расширенным) ПБК над $M(\Omega)$. Расслоение $(X_\Omega)'$ является реализационным ИБР для решеточно нормированного пространства $M(\Omega, X'|X)$. Если E — идеал $M(\Omega)$, то отображение $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u}_X$ осуществляет изометрию ПБК $E((X_\Omega)')$ на $E(X'|X)$.*

§ 5.3. Связь между непрерывными и измеримыми вектор-функциями

Результаты, сформулированные в этом параграфе, являются следствиями связей трех видов:

(а) между пространствами непрерывных вектор-функций и НБР (см. § 4.1),
(б) между пространствами измеримых вектор-функций и ИБР (см. § 4.2),
(в) между ИБР и НБР (см. § 3.3).

Перечисленные инструменты применяются здесь, прежде всего, для установления связей между пространствами измеримых и непрерывных вектор-функций разнообразного типа в терминах так называемого стоуновского преобразования. Завершается параграф серией попутно установленных фактов о существовании разного рода лифтингов в пространствах измеримых вектор-функций.

Как и раньше, Ω — пространство с ненулевой мерой (обладающее свойством прямой суммы), ρ — лифтинг $L^{\infty}(\Omega)$, X и Y — приведенные в двойственность банаховы пространства, причем Y нормирует X, что позволяет рассматривать X как банахово подпространство Y'. Кроме того, Q — стоуновский компакт булевой алгебры $B(\Omega)$ и τ — каноническое погружение Ω в Q, соответствующее лифтингу ρ. Полезно иметь в виду, что тощие подмножества Q в данном случае являются нигде не плотными (см. теорему 1.2.13).

В дальнейшем мы считаем, что $C_{\infty}(Q,X) \subset C_{\infty}(Q,X|Y)$, отождествляя функции $v \in C_{\infty}(Q,X)$ и $\mathrm{ext}_{X|Y}(v) \in C_{\infty}(Q,X|Y)$ (см. 5.1.4). Напомним, что похожим способом в 5.2.5 мы вложили $M(\Omega,X)$ в $M(\Omega,X|Y)$.

5.3.1. *Лемма.* НБР X_Q *является стоуновским преобразованием* ИБР X_{Ω}, *т. е. можно считать, что* $X_{\Omega} = X_Q \circ \tau$.

◀ Следует из 4.3.4, 4.3.5 и 5.2.3. ▶

5.3.2. *Теорема.* (1) *Почти всюду в Ω определенная X-значная функция u измерима тогда и только тогда, когда $u \sim v \circ \tau$ для некоторого элемента $v \in C_{\infty}(Q,X)$.*

(2) *Для любого класса $\mathbf{u} \in M(\Omega,X)$ существует единственная функция $\hat{\mathbf{u}} \in C_{\infty}(Q,X)$, дающая представление $\mathbf{u}$ в виде $(\hat{\mathbf{u}} \circ \tau)^{\sim}$.*

(3) *Отображение $\mathbf{u} \mapsto \hat{\mathbf{u}}$ осуществляет изометрию $M(\Omega,X)$ на $C_{\infty}(Q,X)$, ассоциированную с изоморфизмом $(\mathrm{e} \mapsto \hat{\mathrm{e}})\colon M(\Omega) \to C_{\infty}(Q)$* (см. 1.3.13). *Обратная изометрия $C_{\infty}(Q,X)$ на $M(\Omega,X)$ действует по правилу $v \mapsto (v \circ \tau)^{\sim}$ и ассоциирована с изоморфизмом $(e \mapsto (e \circ \tau)^{\sim})\colon C_{\infty}(Q) \to M(\Omega)$.*

◀ Следует из 4.3.4, 5.2.3, 5.2.4 и 5.3.1. Другие доказательства изометричности $M(\Omega,X)$ и $C_{\infty}(Q,X)$ можно найти в [56, теорема 2.9] и в [18, теорема 4.1.15]. ▶

Функция $\hat{\mathbf{u}} \in C_{\infty}(Q,X)$, соответствующая классу $\mathbf{u} \in M(\Omega,X)$ согласно п. (2), будет называться *стоуновским преобразованием* $\mathbf{u}$.

5.3.3. *Лемма.* *Пусть выполнена одна из следующих пар условий:*

(1) *$v \in C_{\infty}(Q,X)$ и подмножество $X_0 \subset X$ замкнуто в топологии нормы,*
(2) *$v \in C_{\infty}(Q,X|Y)$ и $X_0 \subset X$ замкнуто в Y-слабой топологии.*

Образ функции v содержится в X_0 тогда и только тогда, когда в X_0 содержится образ композиции $v \circ \tau$.

◀ Если образ функции v не содержится в X_0, то множество $v^{-1}[X_0]$ не является всюду плотным в Q, и, следовательно, имеется непустое открыто-замкнутое в Q подмножество $U \subset Q \backslash v^{-1}[X_0]$. В таком случае почти всюду на множестве $\tau^{-1}[U]$ ненулевой меры функция $v \circ \tau$ принимает значения, не принадлежащие X_0. ▶

Следствие. *Пусть X_0 — замкнутое подмножество X. Значения $u(\omega)$ функции $u \in \mathscr{M}(\Omega, X)$ принадлежат X_0 почти для всех $\omega \in \Omega$ тогда и только тогда, когда образ стоуновского преобразования класса $u^\sim$ содержится в X_0.*

5.3.4. Обозначим через $\mathscr{L}^c(\Omega, X)$ (соответственно через $\mathscr{L}^c_Y(\Omega, X)$) совокупность всех тех функций $u \in \mathscr{M}(\Omega, X)$, для которых образ $u[A]$ некоторого множества $A \sim \Omega$ является относительно компактным в смысле топологии нормы (соответственно в смысле Y-слабой топологии). Отметим, что

$$\mathscr{L}^c(\Omega, X) \subset \mathscr{L}^c_Y(Q, X) \subset \mathscr{L}^\infty(\Omega, X), \qquad \mathscr{L}^c_X(\Omega, X') = \mathscr{L}^\infty(\Omega, X').$$

Векторное пространство $\{u^\sim : u \in \mathscr{L}^c_Y(\Omega, X)\} \subset L^\infty(\Omega, X)$ мы будем обозначать символом $L^c_Y(\Omega, X)$, а его подпространство $\{u^\sim : u \in \mathscr{L}^c(\Omega, X)\}$ — символом $L^c(\Omega, X)$.

Следствие. *Пусть функция u определена почти всюду в Ω и принимает значения в пространстве X.*

(1) Функция u принадлежит $\mathscr{L}^c(\Omega, X)$ тогда и только тогда, когда $u \sim v \circ \tau$ для некоторого элемента $v \in C(Q, X)$. Стоуновское преобразование $\mathbf{u} \mapsto \hat{\mathbf{u}}$ осуществляет изометрию РНП *$L^c(\Omega, X)$ на $C(Q, X)$, ассоциированную с изоморфизмом $(\mathbf{e} \mapsto \hat{\mathbf{e}}) : M(\Omega) \to C_\infty(Q)$.*

(2) Функция u принадлежит $\mathscr{L}^c_Y(\Omega, X)$ тогда и только тогда, когда $u \sim v \circ \tau$ для некоторого элемента $v \in C_\infty(Q, X) \cap C(Q, X|Y)$. Стоуновское преобразование $\mathbf{u} \mapsto \hat{\mathbf{u}}$ осуществляет изометрию РНП *$L^c_Y(\Omega, X)$ на $C_\infty(Q, X) \cap C(Q, X|Y)$, ассоциированную с изоморфизмом $(\mathbf{e} \mapsto \hat{\mathbf{e}}) : M(\Omega) \to C_\infty(Q)$.*

5.3.5. *Теорема* (F. D. Sentilles). *Пространства $C_\infty(Q, X|X')$ и $C_\infty(Q, X)$ совпадают.*

◀ Из [56, теоремы 2.5 и 2.8] следует равенство $C^b_\infty(U, X|X') = C^b_\infty(U, X)$ для каждого элемента $U \in \mathrm{Clop}(Q)$, прообраз $\tau^{-1}[U]$ которого имеет конечную меру. Свойство прямой суммы, которым обладает Ω, позволяет нам распространить последнее равенство на весь компакт: $C^b_\infty(Q, X|X') = C^b_\infty(Q, X)$. Утверждение теоремы теперь следует из того факта, что для каждой функции $u \in C_\infty(Q, X|X')$ существует разбиение единицы $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ в булевой алгебре $\mathrm{Clop}(Q)$, обеспечивающее включение $\langle U_n \rangle u \in C^b_\infty(Q, X|X')$ при всех $n \in \mathbb{N}$ (см. 1.3.3). ▶

5.3.6. *Следствие.* *Почти всюду в Ω определенная X-значная функция u принадлежит $\mathscr{L}^c_{X'}(\Omega, X)$ тогда и только тогда, когда $u \sim v \circ \tau$ для некоторого элемента $v \in C(Q, X|X')$. Стоуновское преобразование $\mathbf{u} \mapsto \hat{\mathbf{u}}$ осуществляет изометрию* РНП *$L^c_{X'}(\Omega, X)$ на $C(Q, X|X')$, ассоциированную с изоморфизмом $(\mathbf{e} \mapsto \hat{\mathbf{e}}) : M(\Omega) \to C_\infty(Q)$.*

◀ Вытекает из 5.3.4 (2) и 5.3.5. ▶

5.3.7. *Теорема.* (1) *Почти всюду в Ω определенная X'-значная функция X-слабо измерима тогда и только тогда, когда она X-слабо эквивалентна композиции $v \circ \tau$ для некоторого элемента $v \in C_\infty(Q, X'|X)$.*

(2) *Для любого класса $\mathbf{u} \in M(\Omega, X'|X)$ существует единственная функция $\hat{\mathbf{u}} \in C_\infty(Q, X'|X)$, дающая представление $\mathbf{u}$ в виде $(\hat{\mathbf{u}} \circ \tau)^\sim$.*

(3) *Отображение $\mathbf{u} \mapsto \hat{\mathbf{u}}$ осуществляет изометрию* ПБК *$M(\Omega, X'|X)$ на $C_\infty(Q, X'|X)$, ассоциированную с изоморфизмом $(\mathbf{e} \mapsto \hat{\mathbf{e}}) : M(\Omega) \to C_\infty(Q)$. Обратная изометрия $C_\infty(Q, X'|X)$ на $M(\Omega, X'|X)$ действует по правилу $v \mapsto (v \circ \tau)^\sim$ и ассоциирована с изоморфизмом $(e \mapsto (e \circ \tau)^\sim) : C_\infty(Q) \to M(\Omega)$.*

◀ Из 5.2.8, 5.3.1, 4.4.7 (2), 4.3.4 и 5.1.10 следует цепочка изометрий

$$M(\Omega, X'|X) \simeq M(\Omega, (X_\Omega)') \simeq C_\infty(Q, (X_Q)') \simeq C_\infty(Q, X'|X). \quad ▶$$

Функция $\hat{\mathbf{u}} \in C_\infty(Q, X'|X)$, соответствующая классу $\mathbf{u} \in M(\Omega, X'|X)$ согласно п. (2), будет называться ***стоуновским преобразованием*** $\mathbf{u}$. Если класс $\mathbf{u}$

принадлежит пространству $M(\Omega, X')$, то его стоуновские преобразования в смысле 5.3.2 и в смысле 5.3.7 совпадают (с учетом вложений $M(\Omega, X') \subset M(\Omega, X'|X)$ и $C_\infty(Q, X') \subset C_\infty(Q, X'|X)$), что оправдывает использование для них одинаковых терминов и обозначений.

5.3.8. Поскольку $M(\Omega, X|Y) \subset M(\Omega, Y'|Y)$, стоуновское преобразование $\hat{\mathbf{u}} \in C_\infty(Q, Y'|Y)$ может быть определено также для элементов $\mathbf{u} \in M(\Omega, X|Y)$. В частности, если $\mathbf{u} \in M(\Omega, X|X')$, то $\hat{\mathbf{u}} \in C_\infty(Q, X''|X')$. Значение $\hat{\mathbf{u}}(q) \in Y'$ стоуновского преобразования класса $\mathbf{u} \in M(\Omega, X|Y)$ в точке $q \in \operatorname{dom} \hat{\mathbf{u}}$ можно определить следующим образом: $\langle y|\hat{\mathbf{u}}(q)\rangle = \langle \mathbf{u}|y\rangle^\wedge(q)$, $y \in Y$. В таком виде оно возникает в работах [47, 57] для классов $\mathbf{u} \in L^\infty(\Omega, X|X')$.

Как следует из теоремы 5.3.7, стоуновское преобразование осуществляет изометричное вложение РНП $M(\Omega, X|Y)$ в ПБК $C_\infty(Q, Y'|Y)$. Заметим, что образ этого вложения может не совпадать ни с $C_\infty(Q, Y'|Y)$, ни с $C_\infty(Q, X|Y)$.

Теорема [57]. *Класс $\mathbf{u} \in M(\Omega, X|X')$ принадлежит $M(\Omega, X)$ в том и только том случае, если $\hat{\mathbf{u}}^{-1}[X''\backslash X]$ является тощим (= нигде не плотным) подмножеством Q.*

◄ Следует из теорем 5.3.2 и 5.3.5. ►

5.3.9. Функцию $u \in \mathscr{M}(\Omega, X|Y)$ назовем *компактной*, если ее образ относительно компактен в смысле Y-слабой топологии. Символом $\mathscr{L}^c(\Omega, X|Y)$ обозначается совокупность всех элементов $\mathscr{M}(\Omega, X|Y)$, Y-слабо эквивалентных компактным функциям. Отметим, что множество $\mathscr{L}^c(\Omega, X'|X)$ совпадает с $\mathscr{L}^\infty(\Omega, X'|X)$ и представляет собой совокупность всех почти всюду определенных X'-значных функций u, удовлетворяющих условию $\langle u|x\rangle \in \mathscr{L}^\infty(\Omega)$ для каждого $x \in X$. В общем же случае имеет место только включение $\mathscr{L}^c(\Omega, X|Y) \subset \mathscr{L}^\infty(\Omega, X|Y)$. Векторное подпространство $\{u^\sim : u \in \mathscr{L}^c(\Omega, X|Y)\} \subset L^\infty(\Omega, X|Y)$ мы будет обозначать символом $L^c(\Omega, X|Y)$.

Следствие. *Почти всюду в Ω определенная X-значная функция u принадлежит $\mathscr{L}^c(\Omega, X|Y)$ тогда и только тогда, когда она Y-слабо эквивалентна композиции $v \circ \tau$ для некоторого элемента $v \in C(Q, X|Y)$. Стоуновское преобразование $\mathbf{u} \mapsto \hat{\mathbf{u}}$ осуществляет изометрию РНП $L^c(\Omega, X|Y)$ на $C(Q, X|Y)$, ассоциированную с изоморфизмом $(\mathbf{e} \mapsto \hat{\mathbf{e}})\colon M(\Omega) \to C_\infty(Q)$.*

◄ Вытекает из 5.3.7 и 5.3.3. ►

5.3.10. ***Следствие*** [35, III, § 4]. *Пространства $L^c(\Omega, X|X')$ и $L^c_{X'}(\Omega, X)$ совпадают. **Иными словами**, если слабо измеримая функция $u\colon \Omega \to X$ имеет слабо относительно компактный образ, то она слабо эквивалентна некоторой измеримой по Бохнеру функции $v\colon \Omega \to X$, также имеющей слабо относительно компактный образ.*

◄ Вытекает из 5.3.6, 5.3.9 и 5.3.5. ►

5.3.11. Для $u \in \mathbf{u} \in M(\Omega, X|Y)$ и $y \in Y$ функция $|y\rangle \circ u$ обозначается через $\langle u|y\rangle$, а содержащий ее класс $\langle u|y\rangle^\sim$ — через $\langle \mathbf{u}|y\rangle$. Пусть L — векторное подпространство $L^\infty(\Omega, X|Y)$, а Z — банахово подпространство Y'. Отображение $\rho_L\colon L \to \mathscr{L}^\infty(\Omega, Z|Y)$ мы будем называть *$Z|Y$-слабым лифтингом пространства L (ассоциированным с ρ)*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

(а) $\rho_L(\mathbf{u})\colon \Omega \to Z$ для любого $\mathbf{u} \in L$;
(б) $\langle \rho_L(\mathbf{u})|y\rangle = \rho(\langle \mathbf{u}|y\rangle)$ для всех $\mathbf{u} \in L$ и $y \in Y$.

Если $Z|Y$-слабый лифтинг ρ_L удовлетворяет также условиям:

(в) если $u \in \mathbf{u} \in L$, то функции u и $\rho_L(\mathbf{u})$ равны почти всюду;
(г) $|||\rho_L(\mathbf{u})||| = \rho(|\mathbf{u}|)$ для каждого $\mathbf{u} \in L$,

то он будет называться *$Z|Y$-сильным лифтингом пространства L*. Отметим, что любой $Z|Y$-слабый лифтинг ρ_L обладает следующими свойствами:

(1) если $u \in \mathbf{u} \in L$, то функции u и $\rho_L(\mathbf{u})$ Y-слабо эквивалентны;
(2) если $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L$, то $\rho_L(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \rho_L(\mathbf{u}) + \rho_L(\mathbf{v})$;
(3) если $\mathbf{u} \in L$, $\mathbf{e} \in L^\infty(\Omega)$ и $\mathbf{eu} \in L$, то $\rho_L(\mathbf{eu}) = \rho(\mathbf{e})\rho_L(\mathbf{u})$;
(4) если функция $c\colon \Omega \to X$ постоянна и $c^\sim \in L$, то $\rho_L(c^\sim) = c$.

5.3.12. Теорема. *Для любого лифтинга $\rho\colon L^\infty(\Omega) \to \mathscr{L}^\infty(\Omega)$ существуют единственный $X|X'$-сильный лифтинг ρ_X пространства $L^c(\Omega, X)$ и единственный $X|Y$-слабый лифтинг $\rho_{X|Y}$ пространства $L^c(\Omega, X|Y)$, ассоциированные с ρ. При этом для каждого элемента $\mathbf{u} \in L^c(\Omega, X)$ (соответственно $\mathbf{u} \in L^c(\Omega, X|Y)$) функция $\rho_X(\mathbf{u})$ (соответственно $\rho_{X|Y}(\mathbf{u})$) совпадает с $\hat{\mathbf{u}} \circ \tau$, где $\hat{\mathbf{u}}$ — стоуновское преобразование класса $\mathbf{u}$ в смысле 5.3.2 (соответственно в смысле* 5.3.8), *а τ — каноническое погружение Ω в Q, соответствующее лифтингу ρ.*

◀ Вытекает из 5.3.4 и 5.3.9. ▶

5.3.13. Ниже перечислены некоторые результаты, вытекающие из последней теоремы.

Следствие. *Пусть Ω — пространство с ненулевой мерой, обладающее свойством прямой суммы, X и Y — приведенные в двойственность банаховы пространства, причем Y нормирует X.*
(1) *Пространство $L^c(\Omega, X)$ имеет $X|X'$-сильный лифтинг.*
(2) *Пространство $L^c_Y(\Omega, X)$ имеет $X|Y$-слабый лифтинг.*
(3) *Пространство $L^\infty(\Omega, X')$ имеет $X'|X$-слабый лифтинг.*
(4) *Пространство $L^c(\Omega, X|Y)$ имеет $X|Y$-слабый лифтинг.*
(5) *Пространство $L^\infty(\Omega, X|Y)$ имеет $Y'|Y$-слабый лифтинг.*
(6) *Пространство $L^\infty(\Omega, X'|X)$ имеет $X'|X$-слабый лифтинг.*
(7) *Пространство $L^\infty(\Omega, X|X')$ имеет $X''|X'$-слабый лифтинг.*

Приведенный список результатов не является новым и имеет иллюстративный характер. Например, утверждения (3) и (4) можно извлечь из [45, VI, § 4–7].

Глава 6. Операторы, сохраняющие дизъюнктность

Операторы, сохраняющие дизъюнктность, имеют собственную богатую результатами теорию, включающую такие вопросы, как ограниченность, непрерывность, спектральные и геометрические свойства, мультипликативность, компактность и др. Список работ, посвященных исследованию сохраняющих дизъюнктность операторов, настолько велик, что мог бы послужить поводом для отдельного обзора. Оставив без рассмотрения многие весьма интересные направления исследований, мы сосредоточим внимание лишь на поиске аналитического представления. Одним из первых заинтересовался этим вопросом Б. З. Вулих (см. [8–10]). В дальнейшем к этой проблематике подключились Ю. А. Абрамович, Е. Л. Аренсон, А. И. Векслер, А. В. Викстед, А. К. Заанен, А. К. Китовер, А. В. Колдунов, П. Т. Н. Макполин, Д. Р. Харт и многие другие (см., например, [1–3, 27, 44, 49, 60, 61]). Отметим также, что к вопросу об аналитическом представлении операторов, сохраняющих дизъюнктность, относится такое мощное направление, как описание изометрий пространств измеримых вектор-функций (так называемые теоремы Банаха — Стоуна).

В этой главе мы займемся изучением и поиском аналитического представления сохраняющих дизъюнктность операторов, действующих в РНП. Начав с исследования общих свойств таких операторов, мы затем рассмотрим ортоморфизмы, операторы сдвига, операторы взвешенного сдвига и, наконец, вновь вернемся к произвольным операторам для того, чтобы применить к ним накопленный опыт.

§ 6.1. Тень оператора

Нашим основным инструментом исследования операторов, сохраняющих дизъюнктность, является так называемая тень — некоторый кольцевой гомоморфизм булевых алгебр, порожденный действием оператора на компонентах. Оказывается, многие свойства оператора могут быть сформулированы на языке его тени. В частности, к свойствам тени сводятся многие вопросы непрерывности.

6.1.1. Пусть $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ — РНП. Говорят, что оператор $T\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ *сохраняет дизъюнктность*, если из $u_1 \perp u_2$ вытекает $Tu_1 \perp Tu_2$ для любых $u_1, u_2 \in \mathscr{U}$. Несложно убедиться в том, что всякий сохраняющий дизъюнктность положительный оператор, действующий в K-пространствах, является решеточным гомоморфизмом. Как показывает следующее утверждение, тесную связь с решеточными гомоморфизмами имеют любые операторы, сохраняющие дизъюнктность, — не только положительные.

Теорема. *Пусть E — векторная решетка, F — K-пространство и $T\colon E \to F$ — регулярный оператор, сохраняющий дизъюнктность. Положим $\rho := \langle T^+[E^+]\rangle$, где $E^+ = \{e \in E : e \geqslant 0\}$. Тогда операторы $\rho \circ T$ и $-\rho^\perp \circ T$ являются решеточными гомоморфизмами. В частности, $T = (\rho - \rho^\perp)|T|$.*

◀ Непосредственно следует из [29, теорема 3.3]. ▶

В дальнейшем мы не раз воспользуемся последней теоремой, чтобы свести рассмотрение произвольного регулярного оператора, сохраняющего дизъюнктность, к случаю положительного оператора.

6.1.2. *Тенью оператора* $T\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ мы называем отображение $h\colon \mathrm{Pr}(\mathscr{U}) \to \mathrm{Pr}(\mathscr{V})$, определенное формулой $h(\pi) = \sup_{u \in \mathscr{U}} \langle T\pi u\rangle$. Иначе говоря, $h(\pi) = \langle T[\pi\mathscr{U}]\rangle$.

Предложение. *Линейный оператор, действующий в РНП, сохраняет дизъюнктность тогда и только тогда, когда его тень является кольцевым гомоморфизмом.*

◀ В доказательстве нуждается лишь необходимость. Предположим, что линейный оператор $T\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$, действующий в РНП $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$, сохраняет дизъюнктность. Не нарушая общности, мы можем считать, что $(\mathrm{im}\, T)^{\perp\perp} = \mathscr{V}$. Докажем, что тень $h\colon \mathrm{Pr}(\mathscr{U}) \to \mathrm{Pr}(\mathscr{V})$ оператора T является булевым гомоморфизмом. Для этого мы воспользуемся предложением 1.2.4. Пусть (π_1, π_2, π_3) — разбиение единицы в алгебре $\mathrm{Pr}(\mathscr{U})$. Тогда

$$h(\pi_1) \wedge h(\pi_2) = \sup_{u_1 \in \mathscr{U}} \langle T\pi_1 u_1\rangle \wedge \sup_{u_2 \in \mathscr{U}} \langle T\pi_2 u_2\rangle = \sup_{u_1, u_2 \in \mathscr{U}} \langle T\pi_1 u_1\rangle \wedge \langle T\pi_2 u_2\rangle = 0,$$

т. е. $h(\pi_1) \perp h(\pi_2)$. Аналогично устанавливаются соотношения $h(\pi_1) \perp h(\pi_3)$ и $h(\pi_2) \perp h(\pi_3)$. Кроме того,

$$\begin{aligned} h(\pi_1) \vee h(\pi_2) \vee h(\pi_3) &= \sup_{u_1, u_2, u_3 \in \mathscr{U}} \langle T\pi_1 u_1\rangle \vee \langle T\pi_2 u_2\rangle \vee \langle T\pi_3 u_3\rangle \\ &= \sup_{u_1, u_2, u_3 \in \mathscr{U}} \langle T(\pi_1 u_1 + \pi_2 u_2 + \pi_3 u_3)\rangle = \sup_{u \in \mathscr{U}} \langle Tu\rangle = 1, \end{aligned}$$

откуда следует, что $(h(\pi_1), h(\pi_2), h(\pi_3))$ — разбиение единицы в $\mathrm{Pr}(\mathscr{V})$. ▶

6.1.3. *Предложение.* *Рассмотрим РНП $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$, линейный оператор $T\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ и кольцевой гомоморфизм $h\colon \mathrm{Pr}(\mathscr{U}) \to \mathrm{Pr}(\mathscr{V})$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *h мажорирует тень T* (см. 1.2.6);
(2) *$\langle Tu\rangle \leqslant h\langle u\rangle$ для всех $u \in \mathscr{U}$;*
(3) *$T\pi u = h(\pi)Tu$ для всех $u \in \mathscr{U}$ и $\pi \in \mathrm{Pr}(\mathscr{U})$.*

Если, кроме того, $h(1) = \langle \mathrm{im}\, T\rangle$, то каждое из условий (1)–(3) равносильно совпадению тени T с h.

◀ Импликации (3)⇒(1)⇒(2) очевидны. Предположим выполненным условие (2) и установим (3). Зафиксируем произвольные элементы $u \in \mathscr{U}$ и $\pi \in \mathrm{Pr}(\mathscr{U})$. Из (2) вытекает дизъюнктность $T\pi u$ и $T\pi^\perp u$. Следовательно, существует такой проектор $\rho \in \mathrm{Pr}(\mathscr{V})$, что $T\pi u = \rho T u$ и $T\pi^\perp u = \rho^\perp T u$. Для обоснования равенства $\rho T u = h(\pi) T u$ достаточно показать, что $\rho\langle Tu\rangle = h(\pi)\langle Tu\rangle$. Из соотношений $\rho\langle Tu\rangle = \langle T\pi u\rangle \leqslant h(\pi)$ вытекает неравенство $\rho\langle Tu\rangle \leqslant h(\pi)\langle Tu\rangle$. Аналогично устанавливается, что $\rho^\perp\langle Tu\rangle \leqslant h(\pi^\perp)\langle Tu\rangle$. Из последних двух неравенств с очевидностью следует равенство $\rho\langle Tu\rangle = h(\pi)\langle Tu\rangle$.

Условие (1) и равенство $h(1) = \langle \mathrm{im}\, T\rangle$ влекут совпадение тени T с h в силу предложения 1.2.6. ▶

6.1.4. *Предложение.* *Пусть T — мажорируемый оператор, действующий из ПБК в РНП. Тогда тени операторов T и $|T|$ совпадают.*

◀ Пусть оператор T действует из ПБК $\mathscr{U}$ над E в РНП $\mathscr{V}$ над F. Обозначим тень T через h_T, а тень $|T|$ — через $h_{|T|}$. Безусловно, совпадение функций $h_T\colon \mathrm{Pr}(\mathscr{U}) \to \mathrm{Pr}(\mathscr{V})$ и $h_{|T|}\colon \mathrm{Pr}(E) \to \mathrm{Pr}(F)$ понимается с учетом отождествлений $\mathrm{Pr}(\mathscr{U}) = \mathrm{Pr}(E)$ и $\mathrm{Pr}(\mathscr{V}) = \mathrm{Pr}(F)$ (см. 1.4.1). Неравенство $h_T(\pi) \leqslant h_{|T|}(\pi)$ ($\pi \in \mathrm{Pr}(E)$) очевидно. Для установления обратного неравенства достаточно заметить, что из условий

$$e \in E,\quad \pi \in \mathrm{Pr}(E),\quad u_1,\dots,u_n \in \mathscr{U},\quad |u_1| + \dots + |u_n| \leqslant \pi e$$

следует

$$\langle |Tu_1| + \dots + |Tu_n|\rangle = \langle |T\pi u_1| + \dots + |T\pi u_n|\rangle = \langle T\pi u_1\rangle \vee \dots \vee \langle T\pi u_n\rangle \leqslant h_T(\pi),$$

и воспользоваться формулой $|T|\pi e = \sup T_{\leqslant}(\pi e)$ (см. 1.6.10). ▶

Следствие. *Мажорируемый оператор T, действующий из ПБК в РНП, сохраняет дизъюнктность тогда и только тогда, когда его наименьшая мажоранта $|T|$ сохраняет дизъюнктность.*

Таким образом, мажорируемый оператор сохраняет дизъюнктность тогда и только тогда, когда его наименьшая мажоранта является решеточным гомоморфизмом.

6.1.5. Пусть $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ — РНП и $h\colon \mathrm{Pr}(\mathscr{U}) \to \mathrm{Pr}(\mathscr{V})$ — кольцевой гомоморфизм. Следуя общему правилу (см. 1.1.15), мы будем говорить, что отображение $T\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ является *h-о-непрерывным*, если из $h\text{-}\lim\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} u_\alpha = u$ (см. 1.5.12) следует $o\text{-}\lim\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} Tu_\alpha = Tu$ для любой сети $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ элементов $\mathscr{U}$ и любого $u \in \mathscr{U}$.

Теорема. *Пусть E и F — K-пространства. Всякий сохраняющий дизъюнктность регулярный оператор $T\colon E \to F$ является h-о-непрерывным, где h — тень T.*

◀ Поскольку тень $|T|$ совпадает с тенью T (см. предложение 6.1.4), можно считать, что оператор T положителен. Для доказательства h-o-непрерывности T достаточно рассмотреть h-сходящуюся к нулю сеть $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ элементов E и показать, что $o\text{-}\lim\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} Te_\alpha = 0$. Асимптотическая ограниченность сети $(Te_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ следует из асимптотической ограниченности $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ и ограниченности T. Согласно лемме 1.5.10 (2) o-сходимость Te_α к нулю будет установлена, если мы докажем, что $o\text{-}\lim\limits_{\alpha\in\mathrm{A}}\langle Te\rangle\langle Te_\alpha > Te/n\rangle = 0$ для всех $e \in E$ и $n \in \mathbb{N}$. Последнее соотношение можно получить следующим образом:

$$\begin{aligned}\langle Te\rangle\langle Te_\alpha > Te/n\rangle &= \langle Te\rangle\langle (T(e_\alpha - e/n))^+\rangle = \langle Te\rangle\langle T((e_\alpha - e/n)^+)\rangle\\ &\leqslant h(\langle e\rangle)h(\langle (e_\alpha - e/n)^+\rangle) = h(\langle e\rangle\langle e_\alpha > e/n\rangle) \xrightarrow{o} 0.\end{aligned}$$ ▶

Следствие. *Всякий сохраняющий дизъюнктность мажорируемый оператор, действующий из ПБК в РНП, является h-o-непрерывным, где h — его тень.*

◀ Вытекает из предложения 6.1.4 и последней теоремы. ▶

Замечание. Иногда полезно иметь в виду следующий факт, с очевидностью вытекающий из последнего утверждения: если $\mathcal{U}$ — ПБК, $\mathcal{V}$ — РНП и кольцевой гомоморфизм $h\colon \mathrm{Pr}(\mathcal{U}) \to \mathrm{Pr}(\mathcal{V})$ мажорирует тень оператора $T\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, то последний является h-o-непрерывным.

6.1.6. ***Следствие.*** *Следующие свойства сохраняющего дизъюнктность мажорируемого оператора T, действующего из ПБК в РНП, равносильны:*

(1) *оператор T (секвенциально) o-непрерывен;*

(2) *оператор $|T|$ (секвенциально) o-непрерывен;*

(3) *тень T (секвенциально) o-непрерывна.*

Счетная и секвенциальная o-непрерывность оператора T эквивалентны.

◀ Достаточно сопоставить 6.1.4, 1.2.5, 1.5.12 и 6.1.5. ▶

6.1.7. ***Следствие.*** *Рассмотрим ПБК $\mathcal{U}$ и РНП $\mathcal{V}$ и предположим, что тени двух мажорируемых операторов $S, T\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ мажорируются одним и тем же кольцевым гомоморфизмом $h\colon \mathrm{Pr}(\mathcal{U}) \to \mathrm{Pr}(\mathcal{V})$. Если S и T совпадают на некотором h-аппроксимирующем подмножестве $\mathcal{U}$* (см. 1.5.14), *то они совпадают на всем $\mathcal{U}$.*

◀ Вытекает из замечания 6.1.5 и предложений 1.5.16 и 1.5.17. ▶

6.1.8. ***Предложение.*** *Пусть $\mathcal{U}$ — РНП над E, $\mathcal{V}$ — ПБК над F, $\mathcal{U}_0$ — векторное подпространство $\mathcal{U}$, $T_0\colon \mathcal{U}_0 \to \mathcal{V}$ — линейный оператор, $S\colon E \to F$ — положительный оператор, сохраняющий дизъюнктность, и $h\colon \mathrm{Pr}(E) \to \mathrm{Pr}(F)$ — тень S. Обозначим через $h\mathcal{U}_0$ РНП всех элементов $\mathcal{U}$, h-аппроксимируемых множеством $\mathcal{U}_0$* (см. 1.5.14, 1.5.15). *Предположим, что $|T_0u_0| \leqslant S|u_0|$ (соответственно $|T_0u_0| = S|u_0|$) для всех $u_0 \in \mathcal{U}_0$. Тогда существует единственное линейное продолжение $T\colon h\mathcal{U}_0 \to \mathcal{V}$ оператора T_0 такое, что $|Tu| \leqslant S|u|$ (соответственно $|Tu| = S|u|$) для всех $u \in h\mathcal{U}_0$.*

◀ Докажем сначала утверждение о продолжении с сохранением неравенства. Если $\pi \in \mathrm{Pr}(\mathcal{U})$ и $u_0 \in \mathcal{U}_0$ таковы, что $\pi u_0 = 0$, то $h(\pi)T_0u_0 = 0$, так как $h(\pi)|T_0u_0| \leqslant h(\pi)S|u_0| = S\pi|u_0| = 0$. Это обстоятельство обеспечивает корректность следующего определения оператора $\overline{T}_0$:

$$\overline{T}_0\left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i u_i\right) := \sum_{i=1}^{n} h(\pi_i)T_0u_i$$

$$(\pi_i \in \mathrm{Pr}(\mathcal{U}) \text{ попарно дизъюнктны, } u_i \in \mathcal{U}_0),$$

который продолжает T_0 на $d_{\mathrm{fin}}\mathcal{U}_0$ и удовлетворяет неравенству $|\overline{T}_0u| \leqslant S|u|$ для всех $u \in d_{\mathrm{fin}}\mathcal{U}_0$. В силу предложения 1.5.15 для любого элемента $u \in h\mathcal{U}_0$ существует сеть $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ элементов $d_{\mathrm{fin}}\mathcal{U}_0$, h-сходящаяся к u. Из неравенства $|\overline{T}_0u_\alpha - \overline{T}_0u_\beta| \leqslant S|u_\alpha - u_\beta|$ и h-o-непрерывности оператора S (см. 6.1.5) следует o-фундаментальность сети $(\overline{T}_0u_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$. Благодаря o-полноте РНП $\mathcal{V}$ в нем существует o-предел этой сети, который, очевидно, зависит только от u и поэтому может быть обозначен символом Tu. Несложно убедиться в том, что полученный таким образом оператор $T\colon h\mathcal{U}_0 \to \mathcal{V}$ является искомым. Единственность построенного продолжения обеспечивается его h-o-непрерывностью, наследуемой от оператора S.

Предположим теперь, что $|T_0 u_0| = S|u_0|$ для всех $u_0 \in \mathscr{U}_0$. По доказанному выше существует продолжение $T\colon h\mathscr{U}_0 \to \mathscr{V}$ оператора T_0 такое, что $|Tu| \leqslant S|u|$ для всех $u \in h\mathscr{U}_0$. Для любых $u_0 \in \mathscr{U}_0$ и $\pi \in \mathrm{Pr}(\mathscr{U})$ из соотношений

$$S|u_0| = |Tu_0| = |T\pi u_0| + |T\pi^\perp u_0| \leqslant S|\pi u_0| + S|\pi^\perp u_0| = S|u_0|$$

и неравенств $|T\pi u_0| \leqslant S|\pi u_0|$ и $|T\pi^\perp u_0| \leqslant S|\pi^\perp u_0|$ следует, что $|T\pi u_0| = S|\pi u_0|$. Поскольку $u_0 \in \mathscr{U}_0$ и $\pi \in \mathrm{Pr}(\mathscr{U})$ были выбраны произвольно, мы имеем $|Tu| = S|u|$ для всех $u \in d_{\mathrm{fin}}\mathscr{U}_0$. Равенство $|Tu| = S|u|$ для всех $u \in h\mathscr{U}_0$ теперь выводится из доказанного с помощью предложения 1.5.16. ▶

Следствие. *Пусть $\mathscr{U}$ — РНП над E, $\mathscr{V}$ — ПБК над F, $\mathscr{U}_0$ — аппроксимирующее векторное подпространство $\mathscr{U}$, $T_0\colon \mathscr{U}_0 \to \mathscr{V}$ — линейный оператор и $S\colon E \to F$ — о-непрерывный положительный оператор, сохраняющий дизъюнктность. Предположим, что $|T_0 u_0| \leqslant S|u_0|$ (соответственно $|T_0 u_0| = S|u_0|$) для всех $u_0 \in \mathscr{U}_0$. Тогда существует единственное линейное продолжение $T\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ оператора T_0 такое, что $|Tu| \leqslant S|u|$ (соответственно $|Tu| = S|u|$) для всех $u \in \mathscr{U}$.*

6.1.9. Если D — подмножество K-пространства E, то символом $|D|$ обозначается множество $\{|d| : d \in D\}$, а символом $\mathrm{lin}|D|$ — линейная оболочка $|D|$. Наименьший идеал E, содержащий множество D, как обычно, обозначается символом E_D (см. 1.3.1).

Лемма. *Пусть E — K-пространство, D — подмножество E, $\mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$ — произвольные РНП над одним и тем же K-пространством F, а $S\colon E \to \mathscr{V}$ и $T\colon E \to \mathscr{W}$ — мажорируемые операторы. Предположим, что тени S и T мажорируются одним и тем же кольцевым гомоморфизмом $h\colon \mathrm{Pr}(E) \to \mathrm{Pr}(F)$ и обозначим h-замыкание идеала E_D символом hE_D.*

(1) Если $\mathscr{V} = \mathscr{W}$ и операторы S и T совпадают на множестве D, то они совпадают на множестве hE_D.

(2) Если $|Se| = |Te|$ для всех $e \in \mathrm{lin}|D|$, то $|Se| = |Te|$ для всех $e \in hE_D$.

◀ Мы докажем лишь утверждение (1), поскольку утверждение (2) доказывается аналогично и даже проще. Предположим, что операторы S и T удовлетворяют всем условиям леммы и совпадают на множестве D. Совпадение S и T на hE_D мы докажем в несколько этапов.

(а) Пусть $e \in |D|$, т. е. $e = |d|$ для некоторого элемента $d \in D$. Тогда

$$\begin{aligned} Se &= S\langle d^+\rangle d + S\langle d^-\rangle d = h(\langle d^+\rangle)Sd + h(\langle d^-\rangle)Sd \\ &= h(\langle d^+\rangle)Td + h(\langle d^-\rangle)Td = T\langle d^+\rangle d + T\langle d^-\rangle d = Te. \end{aligned}$$

(б) Из (а) следует, что операторы S и T совпадают на множестве $\mathrm{lin}|D|$.

(в) Пусть элемент $e \in E$ является d-ступенчатым, где $d \in \mathrm{lin}|D|$, т. е. $e = \sum_{i=1}^{n} \pi_i \lambda_i d$ для некоторых чисел λ_i и попарно дизъюнктных проекторов $\pi_i \in \mathrm{Pr}(E)$. Тогда в силу (б)

$$Se = \sum_{i=1}^{n} S(\pi_i\lambda_i d) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h(\pi_i)Sd = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h(\pi_i)Td = \sum_{i=1}^{n} T(\pi_i\lambda_i d) = Te.$$

(г) Пусть теперь $e \in E_D$. Тогда $|e| \leqslant d$ для некоторого элемента $d \in \mathrm{lin}|D|$. В силу 1.3.4 существует последовательность $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d-ступенчатых элементов E, r-сходящаяся к e. Согласно (в) операторы S и T совпадают на элементах e_n. Поэтому, воспользовавшись r-непрерывностью S и T, мы приходим к равенству $Se = Te$.

(д) Наконец, если e — произвольный элемент hE_D, то равенство $Se = Te$ вытекает из (г) и h-о-непрерывности S и T. ▶

Следствие. *Пусть $\mathscr{U}$ — ПБК над E, D — некоторое множество положительных элементов E, $\mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$ — произвольные РНП над одним и тем же K-пространством F, а $S\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ и $T\colon \mathscr{U} \to \mathscr{W}$ — мажорируемые операторы. Предположим, что тени S и T мажорируются одним и тем же кольцевым гомоморфизмом $h\colon \mathrm{Pr}(E) \to \mathrm{Pr}(F)$ и обозначим h-замыкание идеала E_D символом hE_D.*

(1) Если $\mathscr{V} = \mathscr{W}$ и операторы S и T совпадают на множестве $\{u \in \mathscr{U} : |u| \in D\}$, то они совпадают на множестве $\{u \in \mathscr{U} : |u| \in hE_D\}$.

(2) Если $|Su| = |Tu|$ для всех $u \in \mathscr{U}$ с нормой $|u| \in \mathrm{lin}D$, то $|Su| = |Tu|$ для всех $u \in \mathscr{U}$ с нормой $|u| \in hE_D$.

◀ Докажем утверждение (1) (утверждение (2) доказывается совершенно аналогично). Предположим, что операторы S и T удовлетворяют всем условиям следствия и совпадают на множестве $\{u \in \mathscr{U} : |u| \in D\}$. Рассмотрим произвольный элемент $u \in \mathscr{U}$ с нормой $|u| \in hE_D$ и установим равенство $Su = Tu$.

Зафиксируем порядковую единицу 1 в максимальном расширении $\overline{E}$ K-пространства E, снабдим $\overline{E}$ соответствующим умножением и введем в максимальном расширении $\overline{\mathscr{U}}$ ПБК $\mathscr{U}$ структуру модуля над $\overline{E}$ (см. следствие 3.4.5). Пусть $\bar{u}$ такой элемент $\overline{\mathscr{U}}$, что $|\bar{u}| = 1$ и $u = |u|\bar{u}$. Рассмотрим операторы $S_u, T_u\colon E \to \mathscr{V}$, действующие по правилам $S_u e = S(e\bar{u})$ и $T_u e = T(e\bar{u})$. Ясно, что тени операторов S_u и T_u мажорируются гомоморфизмом h, а сами операторы совпадают на множестве D. Поэтому в силу утверждения (1) последней леммы операторы S_u и T_u совпадают на hE_D. В частности, $Su = S_u|u| = T_u|u| = Tu$. ▶

6.1.10. Как видно из следующей теоремы, для сохраняющего дизъюнктность оператора, определенного на векторной решетке, все рассмотренные в 1.6.3 четыре типа ограниченности совпадают.

Теорема. *Пусть E — векторная решетка и $\mathscr{V}$ — РНП. Следующие свойства сохраняющего дизъюнктность оператора $T\colon E \to \mathscr{V}$ эквивалентны:*

(1) оператор T ограничен;
(2) оператор T счетно ограничен;
(3) оператор T секвенциально ограничен;
(4) оператор T полуограничен;
(5) если $e_1, e_2 \in E$ и $|e_1| \leqslant |e_2|$, то $|Te_1| \leqslant |Te_2|$.

◀ Импликации (5)⇒(1)⇒(2)⇒(3)⇒(4) очевидны. Доказательство теоремы 2.1 в статье [49], устанавливающее импликацию (4)⇒(5), приведено для случая $\mathscr{V} = E$, однако оно не опирается на это условие и сохраняет силу для оператора со значениями в произвольном РНП. ▶

Доказательство импликации (4)⇒(5) становится особенно простым и прозрачным в том случае, когда существуют порядковые проекторы на главные компоненты решетки E (например, когда E является K_σ-пространством). Действительно, предположим, что оператор T удовлетворяет условию (4), зафиксируем произвольные элементы $e_1, e_2 \in E$, удовлетворяющие неравенству $|e_1| \leqslant |e_2|$, и обозначим множество $\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i\lambda_i|e_2| : \pi_i \in \mathrm{Pr}(E),\ |\lambda_i| \leqslant 1\right\}$ через S. Несложно убедиться в том, что $|Ts| \leqslant |Te_2|$ для всех $s \in S$. Кроме того, в силу 1.3.4 существует последовательность $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов S, r-сходящаяся к e_1 с регулятором $|e_2|$. Теперь условие (4) вместе с соотношениями $|Te_1| \leqslant |Te_1 - Ts_n| + |Te_2|$ $(n \in \mathbb{N})$ дает нужное нам неравенство $|Te_1| \leqslant |Te_2|$.

6.1.11. Аналог теоремы 6.1.10 для операторов, определенных на РНП, не верен. Более того, все четыре типа ограниченности попарно различны для этого класса операторов. Действительно, любое нормированное пространство представляет собой РНП над $\mathbb{R}$ и любой линейный оператор, действующий из нормированного пространства в произвольное РНП, сохраняет дизъюнктность. Следовательно, операторы, рассмотренные в примерах 1.6.4–1.6.6, действуют из ПБК в ПБК и сохраняют дизъюнктность.

6.1.12. Лемма. *Пусть $\mathscr{U}$ — ПБК над E, $\mathscr{V}$ — РНП, $T\colon \mathscr{U} \to V$ — сохраняющий дизъюнктность полуограниченный оператор и e — положительный элемент E. Для каждого элемента $u \in \mathscr{U}$, удовлетворяющего неравенству $|u| \leqslant e$, найдется такой элемент $\bar{u} \in \mathscr{U}$, что $|\bar{u}| = e$ и $|Tu| \leqslant |T\bar{u}|$.*

◀ Пусть $|u| \leqslant e$. Благодаря равенству $\{|u| : u \in \mathscr{U}\} = \{e \in E : e \geqslant 0\}$ мы не нарушим общность, предположив, что $\langle u\rangle = \langle e\rangle$. Очевидно, произведение $(e'/|u|)u$ определено в $\mathscr{U}$ для всех $e' \in E$ (см. следствие 3.4.5), где дробь $e'/|u|$ понимается в смысле замечания 1.3.7. Определим оператор $S\colon E \to \mathscr{V}$ формулой $S(e') = T((e'/|u|)u)$ и положим $\bar{u} := (e/|u|)u$. Легко видеть, что оператор S сохраняет дизъюнктность и полуограничен. Согласно теореме 6.1.10 оператор S удовлетворяет условию 6.1.10 (5). На этом основании мы заключаем, что $|Tu| = S|u| \leqslant Se = |T\bar{u}|$. Осталось заметить, что $|\bar{u}| = e$. ▶

Предложение. *Пусть $\mathscr{U}$ — ПБК над E и $\mathscr{V}$ — РНП. Сохраняющий дизъюнктность оператор $T\colon \mathscr{U} \to V$ мажорируем тогда и только тогда, когда он ограничен. При этом $|T|e = \sup\{|Tu| : u \in \mathscr{U},\ |u| \leqslant e\} = \sup\{|Tu| : u \in \mathscr{U},\ |u| = e\}$ для всех положительных $e \in E$.*

◀ Равенство $|T|e = \sup\{|Tu| : u \in \mathscr{U},\ |u| \leqslant e\}$ для произвольного положительного элемента $e \in E$ без труда выводится из критерия мажорируемости 1.6.10, задействующего множество $T_{\perp}(e)$. Остается привлечь доказанную выше лемму. ▶

Последний результат не дает новой информации об операторах, действующих в векторных решетках, поскольку мажорируемость и ограниченность всегда эквивалентны для операторов, принимающих значения в K-пространстве (см. предложение 1.6.7 (3)). Тем не менее аналог последнего предложения имеет место и в случае векторных решеток:

Теорема [50]. *Пусть E и F — произвольные векторные решетки. Сохраняющий дизъюнктность оператор $T\colon E \to F$ регулярен (= мажорируем) тогда и только тогда, когда он ограничен.*

6.1.13. Как было отмечено в 6.1.11, счетная ограниченность в общем случае оказывается недостаточным условием для ограниченности оператора, сохраняющего дизъюнктность. Было бы интересно выяснить, какие (по возможности, легко проверяемые) дополнительные предположения приводят к ограниченности операторов, ограниченных в более слабом смысле. Оставив этот вопрос открытым, мы лишь сформулируем одно следствие леммы 6.1.12, являющееся робким шагом в указанном направлении.

Предложение. *Пусть $\mathscr{U}$ — ПБК над E и $\mathscr{V}$ — РНП над F. Сохраняющий дизъюнктность оператор $T\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ ограничен тогда и только тогда, когда он полуограничен и для любого положительного элемента $e \in E$ множество $\{|Tu| : u \in \mathscr{U},\ |u| = e\}$ порядково ограничено в F.*

Заметим, что любой полуограниченный сохраняющий дизъюнктность оператор, определенный на векторной решетке, с очевидностью удовлетворяет условиям последнего предложения. На этом основании предложение 6.1.13 можно рассматривать как обобщение теоремы 6.1.10.

6.1.14. Одним из основных результатов об операторах, сохраняющих дизъюнктность, является их представление в виде суммы операторов специального вида, принимающих попарно дизъюнктные значения (см. § 6.4). Здесь мы уделим внимание подобным суммам.

Лемма. *Пусть* $\mathscr{U}$ *и* $\mathscr{V}$ *— РНП и* $S, T\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ *— линейные операторы. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $Su \perp Tu$ *для всех* $u \in \mathscr{U}$;

(2) $Su_1 \perp Tu_2$ *для всех* $u_1, u_2 \in \mathscr{U}$, *т. е.* $\operatorname{im} S \perp \operatorname{im} T$.

◄ В пояснении нуждается лишь импликация (1)⇒(2). Пусть u_1 и u_2 — произвольные элементы $\mathscr{U}$. Из соотношений $Su_1 \perp Tu_1$ и $Su_2 \perp Tu_2$ соответственно следует

$$|Su_1| \wedge |Tu_2| = |Su_1| \wedge |Tu_1 + Tu_2| \leqslant |T(u_1 + u_2)|,$$
$$|Su_1| \wedge |Tu_2| = |Su_1 + Su_2| \wedge |Tu_2| \leqslant |S(u_1 + u_2)|.$$

Осталось заметить, что $S(u_1 + u_2) \perp T(u_1 + u_2)$. ►

Операторы S и T, удовлетворяющие любому из эквивалентных условий (1) или (2), мы будем называть *сильно дизъюнктными*. Пусть $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ — РНП и $(T_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство линейных операторов из $\mathscr{U}$ в $\mathscr{V}$. Будем говорить, что оператор $T\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ *разлагается в сильно дизъюнктную сумму* операторов T_ξ (и писать $T = \bigoplus\limits_{\xi\in\Xi} T_\xi$), если операторы T_ξ попарно сильно дизъюнктны и для любого элемента $u \in \mathscr{U}$ имеет место соотношение $Tu = o\text{-}\sum\limits_{\xi\in\Xi} T_\xi u$.

Допустим, что $T = \bigoplus\limits_{\xi\in\Xi} T_\xi$, и для каждого $\xi \in \Xi$ положим $\rho_\xi := \langle \operatorname{im} T_\xi \rangle$. Согласно лемме проекторы ρ_ξ попарно дизъюнктны, поэтому для всех $\xi \in \Xi$ имеет место равенство $T_\xi = \rho_\xi \circ T$. Из сказанного, в частности, следует, что сильно дизъюнктная сумма $\bigoplus\limits_{\xi\in\Xi} T_\xi$ сохраняет дизъюнктность тогда и только тогда, когда сохраняет дизъюнктность каждое слагаемое T_ξ.

§ 6.2. Ортоморфизмы

Этот параграф посвящен одному из наиболее просто устроенных классов операторов, сохраняющих дизъюнктность, — классу нерасширяющих операторов. Несмотря на всю простоту операторов этого класса, вопрос об их регулярности (= порядковой ограниченности) далеко не тривиален. Известно, что все нерасширяющие операторы, действующие в расширенном K-пространстве, регулярны тогда и только тогда, когда рассматриваемое K-пространство локально одномерно. Однако до сих пор было, по-видимому, неизвестно, существуют ли недискретные локально одномерные K-пространства. В настоящем параграфе дан положительный ответ на этот вопрос. В качестве вспомогательного результата установлено, что локальная одномерность K-пространства равносильна σ-дистрибутивности его базы.

На протяжении всего параграфа G — расширенное K-пространство с фиксированной порядковой единицей 1_G, Q — стоуновский компакт булевой алгебры $\operatorname{Pr}(G)$ (называемой базой G), E и F — фундаменты G, а $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ — РНП над E и F соответственно. В K-пространстве G рассматривается умножение, превращающее его в коммутативную упорядоченную алгебру с единицей 1_G (см. замечание 1.3.7). Напомним, что в силу соглашений, заключенных в 1.3.1 и 1.4.1, мы отождествляем булевы алгебры $\operatorname{Pr}(G)$, $\operatorname{Pr}(E)$, $\operatorname{Pr}(F)$, $\operatorname{Pr}(\mathscr{U})$ и $\operatorname{Pr}(\mathscr{V})$. Разбиения единицы в булевой алгебре мы для краткости будем называть разбиениями алгебры, а подмножества, супремум которых равен единице, — покрытиями алгебры.

6.2.1. Элемент $g \in G^+$ назовем *локально постоянным* относительно $f \in G^+$, если $g = \bigvee\limits_{\xi\in\Xi} \lambda_\xi \pi_\xi f$ для некоторого числового семейства $(\lambda_\xi)_{\xi\in\Xi}$ и семейства

$(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ попарно дизъюнктных порядковых проекторов. Расширенное K-пространство G называется *локально одномерным*, если оно удовлетворяет одному из следующих эквивалентных условий (см. [49, теорема 3.1]):

(1) все элементы G^+ являются локально постоянными относительно некоторой порядковой единицы G;
(2) все элементы G^+ являются локально постоянными относительно любой порядковой единицы G;
(3) для любой функции $g \in C_\infty(Q)$ существует такое разбиение $(U_\xi)_{\xi\in\Xi}$ алгебры $\mathrm{Clop}(Q)$, что функция g постоянна на каждом из множеств U_ξ.

6.2.2. Линейный оператор $T\colon G \to G$ называется *нерасширяющим* или *сохраняющим компоненты*, если для любых $f, g \in G$ из $f \perp g$ следует $Tf \perp g$. Следующая теорема объединяет результаты Ю. А. Абрамовича, А. И. Векслера и А. В. Колдунова [3, теорема 2.1], а также П. Т. Н. Макполина и А. В. Викстеда [49, теорема 3.2].

Теорема. *Пусть G — расширенное K-пространство. Каждый нерасширяющий оператор $T\colon G \to G$ регулярен тогда и только тогда, когда K-пространство G локально одномерно.*

Во избежание недоразумений при чтении статей [3] и [49] следует иметь в виду следующие два обстоятельства. Во-первых, несмотря на то, что в формулировке теоремы 2.1 из [3] фигурирует произвольное недискретное K-пространство, доказательство этой теоремы приведено лишь для K-пространств, не являющихся локально одномерными. Во-вторых, пример недискретного локально одномерного K-пространства, приведенный в [49], содержит ошибку, о чем А. В. Викстед недавно сообщил в статье [30]. Таким образом, вопрос о том, всякое ли локально одномерное K-пространство должно быть дискретным (т. е. иметь атомную базу), по всей видимости, до сих пор оставался открытым.

6.2.3. Понятие локально одномерного K-пространства имеет следующую булевозначную интерпретацию. (За разъяснением основных понятий булевозначного анализа мы отсылаем читателя ко второй части монографии [21].) Пусть B — полная булева алгебра, $\mathscr{R}$ — поле вещественных чисел внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и $\mathbb{R}^\wedge$ — каноническое погружение $\mathbb{R}$ в $\mathbb{V}^{(B)}$.

Теорема. *Равенство $\mathbb{R}^\wedge = \mathscr{R}$ имеет место тогда и только тогда, когда спуск $\mathscr{R}$ является локально одномерным K-пространством.*

◀ Зная общее устройство спуска объектов вида $X^\wedge$, сформулированное утверждение легко вывести из известной теоремы Е. И. Гордона (см. [21, 3.1.1(1), 5.2.1 и 5.2.2]). ▶

Из личных бесед с коллегами автору известно, что среди специалистов в области булевозначного анализа весьма популярна гипотеза об атомности всех булевых алгебр B, обеспечивающих равенство $\mathbb{R}^\wedge = \mathscr{R}$ в $\mathbb{V}^{(B)}$. Таким образом, вопрос о связи между дискретными и локально одномерными K-пространствами имеет довольно широкую область приложений, по крайней мере включающую теорию векторных решеток, теорию положительных операторов и булевозначный анализ.

После некоторого предварительного обсуждения основных понятий мы приведем пример безатомного локально одномерного K-пространства. В силу теоремы 6.2.2 мы тем самым получим безатомное расширенное K-пространство G, для которого все нерасширяющие операторы $T\colon G \to G$ регулярны, а в силу теоремы 6.2.3 мы будем иметь безатомную полную булеву алгебру B, для которой $\mathbb{R}^\wedge = \mathscr{R}$ в $\mathbb{V}^{(B)}$.

6.2.4. Напомним, что σ-полная алгебра B называется *σ-дистрибутивной*, если она удовлетворяет одному из следующих эквивалентных условий (см. [25, 19.1]):

(1) $\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}}\bigvee\limits_{m\in\mathbb{N}} b^n_m = \bigvee\limits_{m\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} b^n_{m(n)}$ для любых $b^n_m \in B$ $(n, m \in \mathbb{N})$;

(2) $\bigvee\limits_{n\in\mathbb{N}}\bigwedge\limits_{m\in\mathbb{N}} b^n_m = \bigwedge\limits_{m\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}\bigvee\limits_{n\in\mathbb{N}} b^n_{m(n)}$ для любых $b^n_m \in B$ $(n, m \in \mathbb{N})$;

(3) для любой последовательности $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов B имеет место равенство $\bigvee\limits_{\varepsilon\in\{1,-1\}^{\mathbb{N}}}\bigwedge\limits_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon(n)b_n = 1$, где $1b_n = b_n$, а $(-1)b_n$ — дополнение b_n.

6.2.5. Пусть B — произвольная булева алгебра. Элемент $b \in B$ называется ***вписанным в покрытие*** C алгебры B, если $b \leqslant c$ для некоторого элемента $c \in C$. Говорят, что ***покрытие*** C_0 ***вписано в покрытие*** C, если каждый элемент C_0 вписан в C. Если $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность покрытий алгебры B и элемент $b \in B$ вписан в каждое из покрытий C_n $(n \in \mathbb{N})$, то мы будем говорить, что элемент b ***вписан в последовательность*** $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Покрытие, все элементы которого вписаны в последовательность $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$, мы также будем называть вписанным в эту последовательность.

Предложение. *Пусть B — σ-полная булева алгебра. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *алгебра B σ-дистрибутивна;*

(2) *в любую последовательность счетных покрытий B можно вписать (возможно, несчетное) покрытие;*

(3) *в любую последовательность конечных покрытий B можно вписать (возможно, бесконечное) покрытие;*

(4) *в любую последовательность двухэлементных разбиений B можно вписать покрытие.*

◀ Доказательство эквивалентности утверждений (1) и (2) можно найти в [25, 19.3]. Утверждение (4) является переформулировкой условия (3) в определении σ-дистрибутивности. Импликации (2)$\Rightarrow$(3)$\Rightarrow$(4) очевидны. ▶

Следствие. *Пусть B — полная булева алгебра. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *алгебра B σ-дистрибутивна;*

(2) *в любую последовательность счетных разбиений B можно вписать (возможно, несчетное) разбиение;*

(3) *в любую последовательность конечных разбиений B можно вписать (возможно, бесконечное) разбиение;*

(4) *в любую последовательность двухэлементных разбиений B можно вписать разбиение.*

◀ Вытекает из последнего предложения в силу принципа исчерпывания (см. 1.2.1). ▶

6.2.6. Функцию $g \in C_\infty(Q)$ назовем *вписанной в покрытие* C булевой алгебры $\mathrm{Clop}(Q)$, если для любых двух точек $q', q'' \in Q$, удовлетворяющих равенству $g(q') = g(q'')$, существует такой элемент $U \in C$, что $q', q'' \in U$. Если $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность покрытий алгебры $\mathrm{Clop}(Q)$ и функция g вписана в каждое из покрытий C_n $(n \in \mathbb{N})$, то мы будем говорить, что функция g *вписана в последовательность* $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Лемма. *В любую последовательность конечных покрытий алгебры* $\mathrm{Clop}(Q)$ *можно вписать функцию из* $C(Q)$.

◀ Пусть $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность конечных покрытий булевой алгебры $\mathrm{Clop}(Q)$. С помощью индукции несложно построить последовательность разбиений $P_m = \{U_1^m, U_2^m, \dots, U_{2^m}^m\}$ алгебры $\mathrm{Clop}(Q)$, обладающую следующими свойствами:

(1) для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется номер $m \in \mathbb{N}$ такой, что разбиение P_m вписано в покрытие C_n;

(2) $U_n^m = U_{2j-1}^{m+1} \vee U_{2j}^{m+1}$ для всех $m \in \mathbb{N}$ и $j \in \{1, 2, \dots, 2^m\}$.

Для каждого номера $m \in \mathbb{N}$ определим двузначную функцию $\chi_m \in C(Q)$ следующим образом:

$$\chi_m := \sum_{i=1}^{2^{m-1}} \chi(U_{2i}^m),$$

где $\chi(U)$ — характеристическая функция подмножества $U \subset Q$. Поскольку ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{3^m}\chi_m$ равномерно сходится, его сумма g принадлежит $C(Q)$. Покажем, что функция g вписана в $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Благодаря свойству (1) последовательности $(P_m)_{m\in\mathbb{N}}$, для этого достаточно установить, что функция g вписана в $(P_m)_{m\in\mathbb{N}}$.

Предположим противное и рассмотрим наименьшее число $m \in \mathbb{N}$, для которого функция g не вписывается в разбиение P_m. В этом случае имеются две точки $q', q'' \in Q$, удовлетворяющие равенству $g(q') = g(q'')$ и принадлежащие различным элементам P_m. Поскольку функция g вписана в разбиение P_{m-1} (при $m > 1$), из свойства (2) последовательности $(P_m)_{m\in\mathbb{N}}$ следует, что точки q' и q'' принадлежат соседним элементам P_m, т. е. элементам вида U_j^m и U_{j+1}^m, где $j \in \{1, \dots, 2^m - 1\}$. Пусть для определенности q' принадлежит элементу с четным нижним индексом, а q'' — с нечетным, т. е. $\chi_m(q') = 1$ и $\chi_m(q'') = 0$. Тогда, учитывая, что $\chi_i(q') = \chi_i(q'')$ для всех $i \in \{1, \dots, m-1\}$, мы имеем

$$g(q') - g(q'') = \frac{1}{3^m} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{3^i}(\chi_i(q') - \chi_i(q'')) \geqslant \frac{1}{3^m} - \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{3^i} = \frac{1}{2\cdot 3^m} > 0,$$

что противоречит равенству $g(q') = g(q'')$. ▶

6.2.7. Теорема. *Расширенное K-пространство локально одномерно тогда и только тогда, когда его база σ-дистрибутивна.*

◀ Пусть G — расширенное K-пространство и Q — стоуновский компакт базы G. Предположим, что K-пространство G локально одномерно, и рассмотрим произвольную последовательность $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конечных разбиений булевой алгебры $\mathrm{Clop}(Q)$. Согласно следствию 6.2.5 для доказательства σ-дистрибутивности базы G достаточно вписать в $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ какое-либо разбиение $\mathrm{Clop}(Q)$. В силу леммы 6.2.6 в последовательность $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ можно вписать функцию $g \in C_\infty(Q)$. Поскольку K-пространство G локально одномерно, существует такое разбиение $(U_\xi)_{\xi\in\Xi}$ алгебры $\mathrm{Clop}(Q)$, что функция g постоянна на каждом из множеств U_ξ. Покажем, что разбиение $(U_\xi)_{\xi\in\Xi}$ вписано в последовательность $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Для этого мы зафиксируем произвольные индексы $\xi \in \Xi$ и $n \in \mathbb{N}$ и установим, что множество U_ξ вписано в разбиение P_n. Можно считать, что $U_\xi \neq \varnothing$. Пусть q_0 — произвольный элемент U_ξ. Конечность разбиения P_n позволяет подобрать такой его элемент U, что $q_0 \in U$. Осталось заметить, что $U_\xi \subset U$. Действительно, если $q \in U_\xi$, то $g(q) = g(q_0)$, а поскольку функция g вписана в P_n, точки q и q_0 принадлежат одному и тому же элементу разбиения P_n, т. е. $q \in U$.

Предположим теперь, что база G σ-дистрибутивна, и рассмотрим произвольную функцию $g \in C_\infty(Q)$. Согласно условию (3) определения локальной одномерности, достаточно построить такое разбиение $(U_\xi)_{\xi\in\Xi}$ алгебры $\mathrm{Clop}(Q)$, что функция g постоянна на каждом из множеств U_ξ. Для любого натурального

n и целого m обозначим через U_m^n внутренность замыкания множества всех точек $q \in Q$, для которых $\frac{m}{n} \leqslant g(q) < \frac{m+1}{n}$, и положим $P_n := \{U_m^n : m \in \mathbb{Z}\}$. В силу следствия 6.2.5 в последовательность $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ счетных разбиений алгебры $\operatorname{Clop}(Q)$ можно вписать некоторое разбиение $(U_\xi)_{\xi\in\Xi}$. Несложно убедиться в том, что построенное разбиение является искомым. ▶

Таким образом, существование безатомного локально одномерного K-пространства сводится к существованию безатомной σ-дистрибутивной полной булевой алгебры.

6.2.8. Булева алгебра B называется *σ-индуктивной*, если любая убывающая последовательность ненулевых элементов B имеет ненулевую нижнюю границу. Подалгебра B_0 булевой алгебры B называется *плотной* или *массивной*, если множество $B_0\backslash\{0\}$ коинициально в $B\backslash\{0\}$ (или, что эквивалентно, множество $B_0\backslash\{1\}$ конфинально в $B\backslash\{1\}$), т. е. для любого ненулевого элемента $b \in B$ существует ненулевой элемент $b_0 \in B_0$ такой, что $b_0 \leqslant b$.

Лемма. *Если σ-полная булева алгебра содержит σ-индуктивную плотную подалгебру, то она σ-дистрибутивна.*

◀ Пусть B — σ-полная булева алгебра и B_0 — ее σ-индуктивная плотная подалгебра. Рассмотрим произвольную последовательность $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ счетных покрытий алгебры B, обозначим через C множество всех элементов B, вписанных в $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$, и предположим, вопреки доказываемому, что C не является покрытием алгебры B. Тогда существует ненулевой элемент $b \in B$, дизъюнктный всем элементам C.

Построим по индукции последовательности $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ следующим образом. Пусть c_1 такой элемент C_1, что $b \wedge c_1 \neq 0$. В силу плотности B_0 имеется элемент $b_1 \in B_0$, удовлетворяющий неравенствам $0 < b_1 \leqslant b \wedge c_1$. Предположим, что элементы b_n и c_n построены. Пусть c_{n+1} такой элемент C_{n+1}, что $b_n \wedge c_{n+1} \neq 0$. В качестве b_{n+1} мы возьмем произвольный элемент B_0, удовлетворяющий неравенствам $0 < b_{n+1} \leqslant b_n \wedge c_{n+1}$.

Итак, мы построили такие последовательности $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, что $b_n \in B_0$, $b_n \leqslant c_n \in C_n$ и $0 < b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant b$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Благодаря σ-индуктивности алгебры B_0 в ней имеется такой ненулевой элемент b_0, что $b_0 \leqslant b_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В силу неравенств $b_0 \leqslant c_n$ элемент b_0 вписан в последовательность $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$, т. е. принадлежит множеству C. С другой стороны, $b_0 \leqslant b$, что противоречит дизъюнктности b всем элементам C. ▶

6.2.9. Как известно, для любой булевой алгебры B существует полная булева алгебра $\overline{B}$, содержащая B как плотную подалгебру (см. 1.2.7). Очевидно, пополнение безатомной алгебры безатомно. Кроме того, в силу леммы 6.2.8 пополнение σ-индуктивной алгебры σ-дистрибутивно. Поэтому для доказательства существования безатомной σ-дистрибутивной полной булевой алгебры достаточно предъявить произвольную безатомную σ-индуктивную булеву алгебру. Примеры таких алгебр, безусловно, известны. Для полноты картины мы приведем здесь одну из наиболее простых конструкций.

Пример. Пусть B — булева алгебра всех подмножеств $\mathbb{N}$, а I — идеал B, состоящий из всех конечных подмножеств $\mathbb{N}$. Тогда фактор-алгебра B/I (см. [25, § 10]) безатомна и σ-индуктивна.

◀ Безатомность алгебры B/I очевидна. Для доказательства σ-индуктивности этой алгебры достаточно рассмотреть произвольную убывающую последовательность $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ бесконечных подмножеств $\mathbb{N}$ и построить такое бесконечное множество $b \subset \mathbb{N}$, что разность $b\backslash b_n$ конечна для всех $n \in \mathbb{N}$. Необходимое множество $b = \{m_n : n \in \mathbb{N}\}$ легко получить с помощью индукции, положив $m_1 := \min b_1$ и $m_{n+1} := \min\{m \in b_{n+1} : m > m_n\}$. ▶

6.2.10. Линейный оператор $T\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ называется *нерасширяющим* или *сохраняющим компоненты*, если он удовлетворяет одному из следующих эквивалентных условий:

(1) $\langle Tu\rangle \leqslant \langle u\rangle$ для всех $u \in \mathscr{U}$;
(2) $T\pi u = \pi Tu$ для любых $u \in \mathscr{U}$ и $\pi \in \mathrm{Pr}(G)$;
(3) из $\pi u = 0$ следует $\pi Tu = 0$ для любых $u \in \mathscr{U}$ и $\pi \in \mathrm{Pr}(G)$;
(4) из $|u| \perp g$ следует $|Tu| \perp g$ для любых $u \in \mathscr{U}$ и $g \in G$;
(5) из $|u| \perp g$ следует $|Tu| \perp g$ для всех $u \in \mathscr{U}$ и всех элементов g некоторого фундамента K-пространства G.

Очевидно, последнее определение обобщает известное понятие нерасширяющего оператора, действующего в векторных решетках (см. 6.2.2 и [2, 3, 49, 60, 61]).

6.2.11. Ограниченные нерасширяющие операторы называются *ортоморфизмами*. Совокупность всех ортоморфизмов из $\mathscr{U}$ в $\mathscr{V}$ обозначается через $\mathrm{Orth}(\mathscr{U},\mathscr{V})$. Вместо $\mathrm{Orth}(\mathscr{U},\mathscr{U})$ пишут $\mathrm{Orth}(\mathscr{U})$.

В связи с теоремой 6.2.2 представляется интересным выяснить, какие дополнительные требования, налагаемые на нерасширяющие операторы, приводят к их ограниченности. Безусловно, нерасширяющие операторы сохраняют дизъюнктность, и тем самым к ним применимы такие критерии ограниченности, как 6.1.10 и 6.1.13. Известно (см. 1.6.4–1.6.6), что полуограниченность, секвенциальная ограниченность и даже счетная ограниченность сохраняющего дизъюнктность оператора еще не обеспечивают его ограниченности. В случае нерасширяющих операторов имеет место иная картина.

Теорема. *Следующие свойства нерасширяющего оператора T, действующего из* ПБК *в* РНП, *эквивалентны*:

(1) *оператор T ограничен*;
(2) *оператор T счетно ограничен*;
(3) *оператор T секвенциально ограничен*;
(4) *оператор T полуограничен.*

◄ Импликации (1)⇒(2)⇒(3)⇒(4) очевидны. Нам остается показать, что (4)⇒(1). Предположим, что РНП $\mathscr{U}$ порядково полно, а оператор $T\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ является нерасширяющим и полуограниченным. Зафиксируем произвольный положительный элемент $e \in G$. Доказательство того факта, что множество $\{|Tu| : |u| \leqslant e\}$ порядково ограничено в F, мы разобьем на два этапа.

(a) Сначала мы покажем, что множество $\{|Tu| : |u| \leqslant e\}$ порядково ограничено в расширенном K-пространстве G. Не нарушая общности, можно считать, что $G = C_\infty(Q)$, где Q — экстремально несвязный компакт (см. теорему 1.3.7). Обозначим через D совокупность тех точек $q \in Q$, для которых $\sup\{|Tu|(q) : |u| \leqslant e\} = \infty$. Допустим, множество $\{|Tu| : |u| \leqslant e\}$ не ограничено в $C_\infty(Q)$. Тогда согласно теореме 1.3.5 (2) открыто-замкнутое множество $U := \operatorname{int}\operatorname{cl} D$ не является пустым. Для каждого натурального числа n и каждой точки $q \in U \cap D$ введем в рассмотрение элемент $u_n^q \in \mathscr{U}$, удовлетворяющий условиям $|u_n^q| \leqslant e$ и $|Tu_n^q|(q) > n$. Обозначим через U_n^q такое открыто-замкнутое подмножество Q, что $q \in U_n^q \subset U$ и $|Tu_n^q|(p) \geqslant n$ для всех $p \in U_n^q$. Ясно, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ в булевой алгебре $\mathrm{Clop}(Q)$ имеет место соотношение $\sup_{q\in U\cap D} U_n^q = U$. В силу принципа исчерпывания (см. 1.2.1) существует такое семейство $(V_n^q)_{q\in U\cap D}$ попарно дизъюнктных элементов $\mathrm{Clop}(Q)$, что $V_n^q \subset U_n^q$ для всех $q \in U \cap D$ и $\sup_{q\in U\cap D} V_n^q = U$. Согласно теореме 1.4.3 существует сумма $o\text{-}\sum\limits_{q\in U\cap D} \langle V_n^q\rangle u_n^q$ в ПБК $\mathscr{U}$, которую мы обозначим через u_n. Для всех $n \in \mathbb{N}$ и $q \in U \cap D$ мы имеем

$$\langle V_n^q\rangle |Tu_n| = \big|T\langle V_n^q\rangle u_n\big| = \big|T\langle V_n^q\rangle u_n^q\big| = \langle V_n^q\rangle \big|Tu_n^q\big| \geqslant n\chi_{V_n^q}.$$

Переходя к супремуму по $q \in U \cap D$, мы получаем $|Tu_n| \geqslant n\chi_U$ для всех $n \in \mathbb{N}$, что с учетом неравенств $|u_n| \leqslant e$ приводит к противоречию с полуограниченностью оператора T.

(б) Обозначим через f точную верхнюю границу множества $\{|Tu| : |u| \leqslant e\}$ в K-пространстве G и покажем, что $f \in F$. Не нарушая общности, можно считать, что $f > 0$ на некотором котощем подмножестве Q. Тогда согласно теореме 1.3.5 (3) множество тех точек $q \in Q$, для которых $0 < \sup\{|Tu|(q) : |u| \leqslant e\} = f(q) < \infty$, является котощим в Q. Для каждой такой точки q рассмотрим элемент $u_q \in \mathscr{U}$, удовлетворяющий условиям $|u_q| \leqslant e$ и $|Tu_q|(q) > f(q)/2$. Повторив идею этапа (а) и «перемешав» должным образом элементы u_q, можно построить такой элемент $u \in \mathscr{U}$, что $|Tu| \geqslant f/2$, откуда непосредственно вытекает включение $f \in F$. ▶

Дополнительные требования, приводящие к ограниченности нерасширяющих операторов, могут налагаться не на сами операторы, а на пространства, в которых они действуют. В данной статье мы не намерены развивать эту идею. Отметим лишь, что ряд результатов в указанном направлении имеется в работах [2, теорема 2; 3, теоремы 3.2 и 3.3; 49, следствия 2.3 и 2.4].

6.2.12. Легко убедиться в том, что $\mathrm{Orth}(E, F)$ представляет собой идеал K-пространства $M(E, F)$ и, следовательно, тоже является K-пространством.

Если элемент $g \in G$ таков, что $g \cdot e \in F$ для всех $e \in E$, то оператор умножения на g, очевидно, является ортоморфизмом из E в F. В большинстве случаев оказывается, что ортоморфизмы являются операторами умножения в том или ином смысле. Многие работы об операторах, сохраняющих дизъюнктность, содержат результаты в этом направлении (см, например, [1–3, 33, 34, 60, 61]). Следующая формулировка в некотором смысле обобщает опыт поиска мультипликативного представления ортоморфизмов, действующих в K-пространствах.

Теорема. *Для любого ортоморфизма $T\colon E \to F$ существует единственный элемент $g_T \in G$ такой, что $Te = g_T \cdot e$ для всех $e \in E$. Сопоставление $T \mapsto g_T$ осуществляет линейный и порядковый изоморфизм K-пространства $\mathrm{Orth}(E, F)$ на идеал $\{g \in G : g \cdot e \in F$ для всех $e \in E\}$ K-пространства G.*

Отождествляя ортоморфизм T с элементом $g_T \in G$, мы будем в дальнейшем считать, что $\mathrm{Orth}(E, F) \subset G$. Очевидно, $\mathrm{Orth}(E)$ содержит 1_G и является подалгеброй G. В частности, $\mathrm{Orth}(E)$ представляет собой f-алгебру (см. [44, 61]). Имея в виду последнюю теорему, ортоморфизмы иногда называют *весовыми операторами* или *операторами веса*.

6.2.13. Предложение. *Пусть РНП $\mathscr{U}$ порядково полно. Линейный оператор $T\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ является ортоморфизмом тогда и только тогда, когда он мажорируем и его наименьшая мажоранта $|T|\colon E \to F$ является ортоморфизмом. В частности, пространство $\mathrm{Orth}(\mathscr{U}, \mathscr{V})$, снабженное мажорантной нормой, представляет собой ПБК над K-пространством $\mathrm{Orth}(E, F)$.*

◀ Непосредственно следует из предложений 6.1.12 и 6.1.4. ▶

6.2.14. Следствие. *Любой ортоморфизм, действующий из ПБК в РНП, o-непрерывен.*

6.2.15. Следствие. *Если два ортоморфизма, действующие из ПБК $\mathscr{U}$ в РНП $\mathscr{V}$, совпадают на некотором порядково аппроксимирующем подмножестве $\mathscr{U}$* (см. 1.5.2), *то они совпадают на всем $\mathscr{U}$.*

◀ Вытекает из 6.2.14 и предложения 1.5.4. ▶

6.2.16. Следствие. *Если два ортоморфизма $S, T \in \mathrm{Orth}(E, \mathscr{V})$ совпадают на некотором подмножестве $E_0 \subset E$, то они совпадают на $E_0^{\perp\perp}$. В частности, если в K-пространстве E имеется порядковая единица 1 и $S(1) = T(1)$, то $S = T$.*

6.2.17. Предложение. *Для любого* ПБК $\mathscr{U}$ *над* E *существует единственная операция* $\operatorname{Orth}(E)\times\mathscr{U} \to \mathscr{U}$, *превращающая* $\mathscr{U}$ *в модуль над* $\operatorname{Orth}(E)$ *такой, что* $|gu| = |g||u|$ *для всех* $g \in \operatorname{Orth}(E)$ *и* $u \in \mathscr{U}$. *При этом* $\mathscr{U}$ *является унитальным модулем, т. е.* $1_G u = u$ *для всех* $u \in \mathscr{U}$. *Для любых* $g \in \operatorname{Orth}(E)$ *и* $u \in \mathscr{U}$ *элемент* gu *совпадает с произведением* g *и* u, *вычисленным в максимальном расширении* $\mathscr{U}$ (см. следствие 3.4.5).

◀ Пусть ПБК $m\mathscr{U}$ над G — максимальное расширение $\mathscr{U}$ (см. 1.4.3). Тогда $\mathscr{U} = \{u \in m\mathscr{U} : |u| \in E\}$. В силу следствия 3.4.5 пространство $m\mathscr{U}$ можно наделить структурой модуля над кольцом G таким образом, что $1_G u = u$ и $|gu| = |g||u|$ для всех $g \in G$ и $u \in m\mathscr{U}$. Для доказательства существования искомой структуры модуля в ПБК $\mathscr{U}$ достаточно заметить, что для всех $g \in \operatorname{Orth}(E)$ и $u \in \mathscr{U}$ выполнено $|g||u| \in E$ и, следовательно, $gu \in \mathscr{U}$.

Приступим к доказательству единственности. Предположим, что помимо введенной выше операции $(g,u) \mapsto gu$ имеется еще одна: $(g,u) \mapsto g * u$, также превращающая $\mathscr{U}$ в модуль над $\operatorname{Orth}(E)$ и удовлетворяющая условию $|g * u| = |g||u|$ для всех $g \in \operatorname{Orth}(E)$ и $u \in \mathscr{U}$. Зафиксируем произвольный элемент $u \in \mathscr{U}$ и рассмотрим отображения $S, T\colon \operatorname{Orth}(E) \to \mathscr{V}$, определенные формулами $S(g) = gu$ и $T(g) = g * u$. Очевидно, S и T являются ортоморфизмами. Заметим, что $T(1_G) = S(1_G)$, т. е. $1_G * u = u$. Действительно,

$$\begin{aligned} |1_G * u - u| &= 1_G \cdot |1_G * u - u| = |1_G * (1_G * u - u)| \\ &= |(1_G \cdot 1_G) * u - 1_G * u| = 0. \end{aligned}$$

Для установления равенства $S = T$ остается привлечь 6.2.16. ▶

То обстоятельство, что всякое ПБК над G можно наделить структурой модуля над G, позволяет определить один простой класс ортоморфизмов. Если ПБК $\mathscr{U}$ над E и ПБК $\mathscr{V}$ над F являются фундаментами одного и того же ПБК над G и $g \in \operatorname{Orth}(E, F)$, то оператор $u \mapsto gu$ является ортоморфизмом из $\mathscr{U}$ в $\mathscr{V}$. Ортоморфизмы такого вида мы будем называть ***скалярными***.

6.2.18. Предложение. *Пусть* РНП $\mathscr{U}$ *порядково полно,* $T \in \operatorname{Orth}(\mathscr{U}, \mathscr{V})$, $g \in G$ *и* $u \in \mathscr{U}$. *Если в* $\mathscr{U}$ *определено произведение* gu (см. следствие 3.4.5), *то в* $\mathscr{V}$ *определено произведение* $gT(u)$ *и имеет место равенство* $T(gu) = gT(u)$. *В частности,* $T \circ g = g \circ T$ *для любого ортоморфизма* $g \in \operatorname{Orth}(E)$.

◀ Зафиксируем произвольный элемент $u \in \mathscr{U}$ и обозначим через G_u фундамент $\{g \in G : gu \in \mathscr{U}\}$ K-пространства G. Пусть $m\mathscr{V}$ — максимальное расширение $\mathscr{V}$. Рассмотрим отображения $L, R\colon G_u \to m\mathscr{V}$, определенные формулами $L(g) = T(gu)$ и $R(g) = gT(u)$. Очевидно, L и R являются ортоморфизмами и $L(1_G) = R(1_G)$. Из 6.2.16 следует, что $L = R$. ▶

6.2.19. В заключение этого параграфа мы приведем один полезный факт, который в дальнейшем будет неоднократно использован.

Теорема [24]. *Пусть* E *— векторная решетка и* F *—* K*-пространство. Положительный оператор* $T\colon E \to F$ *сохраняет дизъюнктность тогда и только тогда, когда для любого оператора* $S\colon E \to F$, *удовлетворяющего неравенствам* $0 \leqslant S \leqslant T$, *найдется ортоморфизм* $g \in \operatorname{Orth}(F)$ *такой, что* $0 \leqslant g \leqslant \mathrm{id}_F$ *и* $S = g \circ T$, где $\mathrm{id}_F\colon F \to F$ *— тождественный оператор.*

Сопоставив последнюю теорему с теоремой 6.1.1, мы получим следующий результат.

Следствие. *Пусть* E *— векторная решетка и* F *—* K*-пространство. Регулярный оператор* $T\colon E \to F$ *сохраняет дизъюнктность тогда и только тогда, когда для любого регулярного оператора* $S\colon E \to F$, *удовлетворяющего неравенству* $|S| \leqslant |T|$, *найдется ортоморфизм* $g \in \operatorname{Orth}(F)$ *такой, что* $|g| \leqslant \mathrm{id}_F$ *и* $S = g \circ T$, где $\mathrm{id}_F\colon F \to F$ *— тождественный оператор.*

§ 6.3. Операторы сдвига

В этом параграфе мы рассматриваем очередной класс операторов, сохраняющих дизъюнктность. Вводимые и изучаемые нами операторы сдвига являются абстрактными аналогами преобразования замены переменной $f \mapsto f \circ s$. С этим классом операторов тесно связано еще одно обсуждаемое здесь понятие — оператор, широкий на некотором множестве. По мере изучения операторов сдвига мы предлагаем их эквивалентные характеризации, описываем максимальную область определения, на которую они могут быть продолжены, и показываем, что понятия оператора сдвига и мультипликативного оператора совпадают. Исследование мультипликативных операторов в K-пространствах восходит к работам Б. З. Вулиха [8] и [10], где, в частности, установлена мультипликативность t-непрерывного оператора сдвига в K-пространствах с единицей. Наша теорема 6.3.10 обобщает последний результат на случай произвольного оператора сдвига в произвольных K-пространствах. Третий из основных объектов этого параграфа — сдвиг оператора, сохраняющего дизъюнктность, — в определенном смысле сосредоточивает в себе мультипликативные свойства исходного оператора. Аналоги этого понятия имеются в статье [44], а также во многих работах об изометриях L^p-пространств.

На протяжении этого параграфа $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$ — расширенные K-пространства. В тех случаях, когда в K-пространствах $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$ фиксированы порядковые единицы $1_{\mathscr{E}}$ и $1_{\mathscr{F}}$, мы по умолчанию вводим умножение, превращающее $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$ в коммутативные упорядоченные алгебры с единицами $1_{\mathscr{E}}$ и $1_{\mathscr{F}}$ соответственно (см. замечание 1.3.7). Идеал K-пространства $\mathscr{E}$, порожденный элементом $d \in \mathscr{E}$, обозначается символом $\mathscr{E}_d$. В частности, $\mathscr{E}_1$ обозначает идеал $\mathscr{E}$, порожденный $1_{\mathscr{E}}$. Отметим, что некоторые вводимые в этом параграфе понятия зависят от конкретного выбора единиц $1_{\mathscr{E}}$ и $1_{\mathscr{F}}$.

6.3.1. Пусть E — K-пространство, D — подмножество E и $\mathscr{V}$ — РНП. Оператор $T\colon E \to \mathscr{V}$ назовем *широким на множестве* D, если $T[D]^{\perp\perp} = T[E]^{\perp\perp}$.

Предложение. *Пусть E — K-пространство, D — подмножество E, $\mathscr{V}$ — РНП, $T\colon E \to \mathscr{V}$ — сохраняющий дизъюнктность ограниченный оператор и $h\colon \mathrm{Pr}(E) \to \mathrm{Pr}(\mathscr{V})$ — его тень. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *оператор T широк на множестве D;*
(2) *оператор T широк на идеале E_D;*
(3) *тень сужения T на E_D совпадает с тенью T;*
(4) *множество $T[E_D]$ о-плотно в $T[E]$;*
(5) *идеал E_D h-аппроксимирует пространство E.*

◀ Импликации (1)⇒(2)⇐(4) очевидны. Поскольку тень T мажорирует тень сужения T на E_D, эквивалентность (2)⇔(3) с очевидностью следует из предложения 1.2.6. Мы покажем, что (1)⇐(2)⇒(5)⇒(4).

(2)⇒(5). Предположив выполненным условие (2), рассмотрим произвольный элемент $e \in E$ и покажем, что $h\text{-}\inf_{\pi\in\Pi} \pi e = e$, где $\Pi = \{\pi \in \mathrm{Pr}(E) : \pi e \in E_D\}$. Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $d \in E_D$ положим $\pi_n^d := \langle |e| \leqslant n|d| \rangle$. Очевидно, $\pi_n^d \in \Pi$. Поскольку

$$|d - \pi_n^d d| = (\pi_n^d)^\perp |d| \leqslant (\pi_n^d)^\perp |e|/n \leqslant |e|/n$$

для всех $n \in \mathbb{N}$, мы имеем $r\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} \pi_n^d d = d$. Используя r-непрерывность оператора T и учитывая равенство $T(\pi_n^d d) = h(\pi_n^d)Td$, мы приходим к соотношению $\sup_{n\in\mathbb{N}} h(\pi_n^d) \geqslant \langle Td \rangle$. Поскольку элемент $d \in E_D$ был выбран произвольно, в силу (2) мы заключаем, что $\sup_{\pi\in\Pi} h(\pi) = h(1)$ и, следовательно, $h\text{-}\inf_{\pi\in\Pi} \pi e = e$.

(5)⇒(4). Рассмотрим произвольный элемент $e \in E$. Из (5) и предложения 1.5.3 следует, что e является h-пределом некоторой сети $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ элементов E_D. В силу следствия 6.1.5 мы имеем $o\text{-}\lim\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} T(e_\alpha) = Te$.

(2)⇒(1). Для любого элемента $e \in E_D$ существуют $d_1, \dots, d_n \in D$ такие, что $|e| \leqslant |d_1| + \dots + |d_n|$. На основании теоремы 6.1.10 мы заключаем, что $\langle Te\rangle \leqslant \langle Td_1\rangle \vee \dots \vee \langle Td_n\rangle$. Остается привлечь условие (2). ▶

Замечание. Как видно из последнего предложения, тот факт, что оператор T широк на множестве D, отражает связь множества D не с оператором T как таковым, а с его областью определения и тенью.

6.3.2. Пусть $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ — РНП и D — подмножество нормирующей решетки пространства $\mathscr{U}$. Мы будем говорить, что оператор $T\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ *широк на множестве* D, если $\{Tu : |u| \in D\}^{\perp\perp} = (\operatorname{im} T)^{\perp\perp}$. Если $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ являются K-пространствами, то последнее определение эквивалентно данному в 6.3.1, что оправдывает сохранение терминологии.

Лемма. *Пусть $\mathscr{U}$ — ПБК над K-пространством E, $\mathscr{V}$ — произвольное РНП и D — некоторое множество положительных элементов E. Сохраняющий дизъюнктность ограниченный оператор $T\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ широк на D тогда и только тогда, когда его наименьшая мажоранта $|T|$ широка на D.*

◀ Доказательство можно легко получить с помощью предложения 6.1.12. Действительно, соотношения

$$\langle |T|e\rangle = \sup_{|u|=e} \langle Tu\rangle \leqslant \sup_{|u|\in D} \langle Tu\rangle = \sup_{d\in D} \sup_{|u|=d} \langle Tu\rangle = \sup_{d\in D} \langle |T|d\rangle,$$

выполненные для любого положительного элемента $e \in E$, доказывают необходимость, а соотношения

$$\langle Tu\rangle \leqslant \langle |T||u|\rangle \leqslant \sup_{d\in D} \langle |T|d\rangle = \sup_{d\in D} \sup_{|u|=d} \langle Tu\rangle = \sup_{|u|\in D} \langle Tu\rangle,$$

имеющие место для каждого элемента $u \in \mathscr{U}$, устанавливают достаточность. ▶

Предложение. *Пусть $\mathscr{U}$ — ПБК над K-пространством E, D — некоторое множество положительных элементов E, $\mathscr{V}$ — произвольное РНП, $T\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ — сохраняющий дизъюнктность ограниченный оператор и $h\colon \mathrm{Pr}(\mathscr{U}) \to \mathrm{Pr}(\mathscr{V})$ — его тень. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *оператор T широк на множестве D;*
(2) *оператор T широк на идеале E_D;*
(3) *тень сужения T на идеал $\{u \in \mathscr{U} : |u| \in E_D\}$ совпадает с тенью T;*
(4) *множество $\{Tu : |u| \in E_D\}$ o-плотно в $\operatorname{im} T$;*
(5) *идеал E_D h-аппроксимирует пространство E.*

◀ Эквивалентность (2)⇔(3) устанавливается так же, как в 6.3.1. Эквивалентность утверждений (1), (2) и (5) вытекает из предложений 6.1.4 и 6.3.1 и последней леммы. Импликация (4)⇒(2) очевидна. Осталось показать, что (5)⇒(4).

Пусть u — произвольный элемент $\mathscr{U}$. Из (5) и предложения 1.5.3 следует, что $|u|$ является h-пределом некоторой сети $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ положительных элементов E_D. В силу леммы 3.4.5 существует такая сеть $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ элементов $\mathscr{U}$, что $|u_\alpha| = e_\alpha$ и $|u - u_\alpha| = \big||u| - e_\alpha\big|$. Тогда $h\text{-}\lim\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} u_\alpha = u$, и в силу следствия 6.1.5 мы имеем $o\text{-}\lim_{\alpha\in\mathrm{A}} Tu_\alpha = Tu$. ▶

6.3.3. Предложение. *Пусть E — идеал $\mathscr{E}$, порожденный положительным элементом $d \in \mathscr{E}$. Для любого кольцевого гомоморфизма $h\colon \mathrm{Pr}(\mathscr{E}) \to \mathrm{Pr}(\mathscr{F})$ следующие множества совпадают:*

(1) *h-замыкание E;*
(2) *h-циклическая оболочка E;*
(3) *счетно h-циклическая оболочка E;*
(4) *множество таких $e \in \mathscr{E}$, что $\inf_{n\in\mathbb{N}} h\langle |e| > nd\rangle = 0$.*

◀ Включения (4)⊂(3)⊂(2)⊂(4) очевидны. Включение (4)⊂(1) легко установить с помощью первого следствия 1.5.15. Остается показать, что (1)⊂(4). Пусть сеть $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ элементов E h-сходится к $e \in \mathscr{E}$. Для каждого $\alpha \in \mathrm{A}$ обозначим через n_α натуральное число, удовлетворяющее неравенству $|e_\alpha| \leqslant n_\alpha d$. Используя соотношения $h\text{-}\inf_{\alpha\in\mathrm{A}}|e - e_\alpha| = 0$ и

$$\begin{aligned} &h\langle |e| > 2n_\alpha d\rangle \leqslant h\langle |e| > 2|e_\alpha|\rangle \\ &= h(\langle e\rangle\langle |e| - |e_\alpha| > |e|/2\rangle) \leqslant h(\langle e\rangle\langle |e - e_\alpha| > |e|/2\rangle), \end{aligned}$$

мы получаем искомое равенство $\inf_{n\in\mathbb{N}} h\langle |e| > nd\rangle = 0$. ▶

Совпадающие множества (1)–(4), описанные в последнем предложении, мы будем обозначать символом hE.

6.3.4. Предложение. *Фиксируем порядковую единицу $1_{\mathscr{E}}$ в K-пространстве $\mathscr{E}$. Тогда множество $h\mathscr{E}_1$ является подалгеброй $\mathscr{E}$.*

◀ Этот факт вытекает из 6.3.3 (имеется в виду равенство $h\mathscr{E}_1 = (4)$ при $d = 1_{\mathscr{E}}$) и следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \inf_{n\in\mathbb{N}} h\langle |ef| > n1_{\mathscr{E}}\rangle &= \inf_{m,n\in\mathbb{N}} h\langle |ef| > mn1_{\mathscr{E}}\rangle \\ &\leqslant \inf_{m,n\in\mathbb{N}} h(\langle |e| > m1_{\mathscr{E}}\rangle \vee \langle |f| > n1_{\mathscr{E}}\rangle) \\ &= \inf_{m,n\in\mathbb{N}} (h\langle |e| > m1_{\mathscr{E}}\rangle \vee h\langle |f| > n1_{\mathscr{E}}\rangle) \\ &= \inf_{m\in\mathbb{N}} h\langle |e| > m1_{\mathscr{E}}\rangle \vee \inf_{n\in\mathbb{N}} h\langle |f| > n1_{\mathscr{E}}\rangle. \end{aligned}$$ ▶

6.3.5. Лемма. *Пусть d — произвольная порядковая единица $\mathscr{E}$. Для любой монотонно убывающей к нулю последовательности $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ проекторов из $\mathrm{Pr}(\mathscr{E})$ найдется такой элемент $e \in \mathscr{E}$, что $\pi_n = \langle |e| > nd\rangle$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

◀ Поскольку K-пространство $\mathscr{E}$ является расширенным, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \pi_n d$ имеет в нем o-сумму, которую мы обозначим через s. Ясно, что $\langle s > nd\rangle = \pi_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и, следовательно, в качестве искомого элемента e можно взять $s + d$. ▶

Следствие. *Пусть $h\colon \mathrm{Pr}(\mathscr{E}) \to \mathrm{Pr}(\mathscr{F})$ — кольцевой гомоморфизм и d — произвольная порядковая единица $\mathscr{E}$. Равенство $h\mathscr{E}_d = \mathscr{E}$ имеет место тогда и только тогда, когда гомоморфизм $h\colon \mathrm{Pr}(\mathscr{E}) \to \mathrm{Pr}(\mathscr{F})$ секвенциально o-непрерывен.*

6.3.6. Пусть $\mathscr{U}$ — РНП над фундаментом E расширенного K-пространства $\mathscr{E}$, d — положительный элемент $\mathscr{E}$ и $\mathscr{V}$ — произвольное РНП. Будем говорить, что оператор $T\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ *широк на элементе* d, если он широк на множестве $\{e \in E : e$ — осколок $d\}$.

Лемма. *Пусть E — фундамент $\mathscr{E}$, d — положительный элемент $\mathscr{E}$, $\mathscr{V}$ — РНП, $T\colon E \to \mathscr{V}$ — сохраняющий дизъюнктность ограниченный оператор и h — его тень. Положим $\Pi := \{\pi \in \mathrm{Pr}(\mathscr{E}) : \pi d \in E\}$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *оператор T широк на элементе d;*
(2) $\sup_{\pi\in\Pi} h(\pi) = h(1)$ *и для всех $\pi \in \Pi$ имеет место равенство $\langle T\pi d\rangle = h(\pi)$;*
(3) $E \subset h\mathscr{E}_d$.

◀ Эквивалентность (1) и (3) содержится в предложении 6.3.1, импликация (2)⇒(1) очевидна. Осталось показать, что (1)⇒(2). Если выполнено условие (1), то для любого проектора $\pi_0 \in \Pi$ мы имеем

$$h(\pi_0) = h(\pi_0)\sup_{e\in E}\langle Te\rangle = h(\pi_0)\sup_{\pi\in\Pi}\langle T\pi d\rangle = \sup_{\pi\in\Pi}\langle T\pi_0\pi d\rangle = \langle T\pi_0 d\rangle. \quad ▶$$

6.3.7. Предложение. *Фиксируем порядковые единицы $1_{\mathscr{E}}$ и $1_{\mathscr{F}}$ в K-пространствах $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$. Для любого кольцевого гомоморфизма $h\colon \mathrm{Pr}(\mathscr{E}) \to \mathrm{Pr}(\mathscr{F})$ существует единственный регулярный оператор $S\colon h\mathscr{E}_1 \to \mathscr{F}$ такой, что тень S равна h и $S(1_{\mathscr{E}}) = h(1)1_{\mathscr{F}}$. При этом оператор S оказывается положительным.*

◀ Ради удобства будем считать, что $h(1) = 1$. Мы разобьем построение оператора S на три этапа.

1. Определим оператор S на множестве ступенчатых элементов $\mathscr{E}$, положив $S\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\pi_i 1_{\mathscr{E}}\Big) := \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i h(\pi_i)1_{\mathscr{F}}$ для произвольных $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ и $\pi_1,\dots,\pi_n \in \mathrm{Pr}(\mathscr{E})$.

2. Продолжим оператор S на $\mathscr{E}_1$. Зафиксируем произвольный элемент $e \in \mathscr{E}_1$ и выберем последовательность $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ступенчатых элементов $\mathscr{E}$, r-сходящуюся к e с регулятором $1_{\mathscr{E}}$. Легко проверить, что последовательность $(Se_n)_{n\in\mathbb{N}}$ будет в этом случае r-фундаментальна (с регулятором $1_{\mathscr{F}}$). Мы полагаем $Se := r\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} Se_n$.

3. Наконец, продолжим S на все множество $h\mathscr{E}_1$. Произвольный элемент $e \in h\mathscr{E}_1$ можно представить в виде перемешивания $o\text{-}\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \pi_n e_n$ элементов $e_n \in \mathscr{E}_1$ посредством h-разбиения $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Мы полагаем $Se := o\text{-}\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} h(\pi_n)Se_n$.

Корректность определения оператора S на каждом этапе проверяется без осложнений. Очевидная положительность оператора S обеспечивает его регулярность. Для доказательства единственности S достаточно заметить, что на этапе 3 последовательность $\Big(\sum\limits_{n=1}^{m} \pi_n e_n\Big)_{m\in\mathbb{N}}$ r-сходится к e с регулятором $o\text{-}\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n\pi_n|e_n| \in h\mathscr{E}_1$. ▶

Оператор S, существование которого утверждает последнее предложение, будет называться *сдвигом на h* и обозначаться символом S_h. Пусть E — фундамент $\mathscr{E}$, а F — фундамент $\mathscr{F}$. Будем говорить, что оператор $S\colon E \to F$ является *оператором сдвига*, если существует такой кольцевой гомоморфизм $h\colon \mathrm{Pr}(\mathscr{E}) \to \mathrm{Pr}(\mathscr{F})$, что $E \subset h\mathscr{E}_1$ и $S = S_h$ на E. Ясно, что в этом случае гомоморфизм h является тенью оператора S. Отметим, что понятия сдвига и оператора сдвига зависят от выбора единиц $1_{\mathscr{E}}$ и $1_{\mathscr{F}}$ в K-пространствах $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$.

6.3.8. Предложение. *Фиксируем порядковые единицы в расширенных K-пространствах $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$. Пусть E — фундамент $\mathscr{E}$, F — фундамент $\mathscr{F}$ и $S,\overline{S}\colon E \to F$ — операторы сдвига. Если $S \leqslant \overline{S}$, то $S = \rho\circ\overline{S}$ для некоторого проектора $\rho \in \mathrm{Pr}(F)$.*

◀ Вытекает из предложений 1.2.6 и 6.3.7. ▶

Пусть $\rho \in \mathrm{Pr}(\mathscr{F})$, $h\colon \mathrm{Pr}(\mathscr{E}) \to \mathrm{Pr}(\mathscr{F})$ — кольцевой гомоморфизм и S — сдвиг на h. Тогда сдвиг на гомоморфизм $\rho \circ h$ будет обозначаться символом ρS. Заметим, что, вообще говоря, $\operatorname{dom} \rho S$ шире $\operatorname{dom} S$, и поэтому оператор ρS отличается от композиции $\rho \circ S$. Впрочем, в силу последнего предложения операторы ρS и $\rho \circ S$ совпадают на $\operatorname{dom} S$, и, стало быть, ρS является продолжением $\rho \circ S$.

6.3.9. Теорема. *Фиксируем порядковые единицы $1_{\mathscr{E}}$ и $1_{\mathscr{F}}$ в K-пространствах $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$. Пусть E — фундамент $\mathscr{E}$, а F — фундамент $\mathscr{F}$. Линейный оператор $S\colon E \to F$ является оператором сдвига тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующим условиям:*

(а) *оператор S сохраняет дизъюнктность;*
(б) *оператор S регулярен;*
(в) *S переводит осколки $1_{\mathscr{E}}$ в осколки $1_{\mathscr{F}}$;*
(г) *S широк на $1_{\mathscr{E}}$.*

◀ Необходимость условий (а)–(в) очевидна, а необходимость (г) следует из 6.3.6. Покажем достаточность. Предположим, что оператор S удовлетворяет условиям (а)–(г), обозначим тень S через h и положим $\Pi := \{\pi \in \mathrm{Pr}(\mathscr{E}) : \pi 1_{\mathscr{E}} \in E\}$. Из леммы 6.3.6 следует равенство $\langle S(\pi 1_{\mathscr{E}})\rangle = h(\pi)$ для каждого $\pi \in \Pi$, что в сочетании с условием (в) дает $S(\pi 1_{\mathscr{E}}) = S_h(\pi 1_{\mathscr{E}})$. Та же лемма обеспечивает включение $E \subset h\mathscr{E}_1$. Теперь на основании леммы 6.1.9 мы заключаем, что $S = S_h$ на E. ▶

Следствие. *Фиксируем порядковые единицы $1_{\mathscr{E}}$ и $1_{\mathscr{F}}$ в K-пространствах $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$. Пусть E — фундамент $\mathscr{E}$, содержащий $1_{\mathscr{E}}$, а F — произвольный фундамент $\mathscr{F}$. Линейный оператор $S\colon E \to F$ является оператором сдвига тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующим условиям:*

(а) *оператор S сохраняет дизъюнктность;*
(б) *оператор S регулярен;*
(в) *$S(1_{\mathscr{E}})$ является осколком $1_{\mathscr{F}}$;*
(г) *$\{S(1_{\mathscr{E}})\}^{\perp\perp} = (\operatorname{im} S)^{\perp\perp}$.*

Замечание. Условия (г) в формулировках теоремы и следствия не могут быть опущены. Действительно, пусть $\mathscr{F} = \mathbb{R}$, $\mathscr{E}$ — пространство всех последовательностей и E — идеал $\mathscr{E}$, порожденный последовательностью $e_0(n) = n$ $(n \in \mathbb{N})$. Обозначим через Q компактификацию дискретного топологического пространства $\mathbb{N}$ по Стоуну — Чеху и зафиксируем произвольную точку $q \in Q \backslash \mathbb{N}$. Естественным образом отождествляя пространства $\mathscr{E}$ и $C_\infty(Q)$, определим оператор $S\colon E \to \mathscr{F}$ формулой $Se = (e/e_0)(q)$. Полагая $1_{\mathscr{E}}(n) = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ и $1_{\mathscr{F}} = 1$, мы видим, что оператор S удовлетворяет условиям (а)–(в) последней леммы, но $S(1_{\mathscr{E}}) = 0$.

Замечание. Из последнего следствия, в частности, видно, что область определения $h\mathscr{E}_1$ сдвига на h является максимально широкой. Точнее говоря, $h\mathscr{E}_1$ объемлет область определения любого регулярного оператора S, действующего из фундамента $\mathscr{E}$ в $\mathscr{F}$, имеющего тень h и удовлетворяющего равенству $S(1_{\mathscr{E}}) = h(1)1_{\mathscr{F}}$.

6.3.10. Фиксируем порядковые единицы $1_{\mathscr{E}}$ и $1_{\mathscr{F}}$ в K-пространствах $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$. Линейный оператор $S\colon E \to \mathscr{F}$, определенный на фундаменте $E \subset \mathscr{E}$, называется *мультипликативным*, если $Se_1Se_2 = S(e_1e_2)$ для любых двух элементов $e_1, e_2 \in E$, произведение которых принадлежит E. Отметим, что мультипликативность оператора зависит от выбора единиц $1_{\mathscr{E}}$ и $1_{\mathscr{F}}$.

Теорема. *Пусть E — фундамент $\mathscr{E}$. Линейный оператор $S\colon E \to \mathscr{F}$ является оператором сдвига тогда и только тогда, когда он мультипликативен.*

◀ В мультипликативности оператора сдвига легко убедиться, проследив все этапы его построения в 6.3.7. Мы покажем, что мультипликативный оператор $S\colon E \to \mathscr{F}$ является оператором сдвига, проверив условия (а)–(г) теоремы 6.3.9.

(а) Дизъюнктность элементов $e_1, e_2 \in E$ равносильна равенству $e_1 e_2 = 0$. То же относится и к элементам $\mathscr{F}$. Следовательно, S сохраняет дизъюнктность.

(б) Мы покажем, что оператор S положителен. Доказательство разобьем на три этапа.

(б$_1$) Если $e \in E$ и $0 \leqslant e \leqslant 1_{\mathscr{E}}$, то $Se \geqslant 0$. Действительно, в этом случае e^3 и $e\sqrt{e}$ принадлежат E в силу неравенств $e^3 \leqslant e$ и $e\sqrt{e} \leqslant e$, и, следовательно, $(Se)^3 = S(e^3) = S\big((e\sqrt{e})^2\big) = S\big(e\sqrt{e}\big)^2 \geqslant 0$.

(б$_2$) Если $e \in E$ и $e \geqslant 1_{\mathscr{E}}$, то $Se \geqslant 0$. Действительно, в этом случае $\sqrt{e} \in E$ в силу неравенства $\sqrt{e} \leqslant e$, и, следовательно, $Se = S\big((\sqrt{e})^2\big) = S\big(\sqrt{e}\big)^2 \geqslant 0$.

(б$_3$) Если $e \in E$ и $e \geqslant 0$, то $Se \geqslant 0$. Действительно, в силу (б$_1$) и (б$_2$)

$$Se = S\langle e \leqslant 1_{\mathscr{E}}\rangle e + S\langle e > 1_{\mathscr{E}}\rangle e \geqslant 0.$$

(в) Тот факт, что элемент $e \in E$ является осколком $1_{\mathscr{E}}$, равносилен равенству $e^2 = e$. То же относится и к осколкам $1_{\mathscr{F}}$. Следовательно, S переводит осколки $1_{\mathscr{E}}$ в осколки $1_{\mathscr{F}}$.

(г) Покажем, что $\{Se : |e| \leqslant 1_{\mathscr{E}}\}^{\perp\perp} = (\mathrm{im}\, S)^{\perp\perp}$. Рассмотрим проектор $\rho \in \Pr(\mathscr{F})$ на компоненту $\{Se : |e| \leqslant 1_{\mathscr{E}}\}^{\perp}$ и определим оператор $T\colon E \to \mathscr{F}$ формулой $Te = \rho Se$. Доказательство будет завершено, если мы установим, что $T = 0$. Очевидно, оператор T мультипликативен и $Te = 0$ при $|e| \leqslant 1_{\mathscr{E}}$. Заметим также, что в силу (б) оператор T положителен. Пусть e — произвольный положительный элемент E. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполнено равенство $T(e/n) = Te_n$, где $e_n = \langle e/n > 1_{\mathscr{E}}\rangle e/n$. Поскольку $\sqrt{e_n} \leqslant e_n \leqslant e/n$, мы имеем включения $\sqrt{e_n}, e_n \in E$ и неравенство $T\sqrt{e_n} \leqslant Te_n$. Следовательно,

$$Te = nTe_n = nT(\sqrt{e_n}^{\,2}) = n(T\sqrt{e_n})^2 \leqslant n(Te_n)^2 = n(Te/n)^2 = (Te)^2/n$$

для всех $n \in \mathbb{N}$, что возможно только в случае $Te = 0$. ▶

6.3.11. Замечание. Имеется ряд результатов, описывающих мультипликативные операторы (= операторы сдвига) как крайние точки тех или иных множеств операторов (см. [36, 37, 53]).

6.3.12. Замечание. Известно (см. [11, теорема VIII.10.1]), что каждый регулярный оператор $T\colon \mathscr{E}_1 \to \mathscr{F}$ имеет интегральное представление

$$Te = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\varphi(\langle e \leqslant \lambda 1_{\mathscr{E}}\rangle) \quad (e \in \mathscr{E}_1),$$

где φ — произвольная порядково ограниченная аддитивная функция из $\Pr(\mathscr{E})$ в $\mathscr{F}$. Несложно убедиться в том, что T является оператором сдвига тогда и только тогда, когда значения функции φ являются осколками $1_{\mathscr{F}}$. При этом тень h оператора T определяется формулой $h(\pi) = \langle \varphi(\pi)\rangle$. Некоторые классы мультипликативных операторов (= операторов сдвига) описаны с точки зрения интегрального представления в работах Б. З. Вулиха [8, 10].

6.3.13. Фиксируем порядковые единицы $1_{\mathscr{E}}$ и $1_{\mathscr{F}}$ в K-пространствах $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$. Пусть $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ — РНП над фундаментами $E \subset \mathscr{E}$ и $F \subset \mathscr{F}$ соответственно, $T\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ — сохраняющий дизъюнктность оператор и $h\colon \Pr(E) \to \Pr(F)$ — его тень. Тогда сдвиг $S_h\colon h\mathscr{E}_1 \to \mathscr{F}$ на h будет называться *сдвигом оператора* T.

Предложение. *Пусть $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ — РНП над фундаментами $E \subset \mathscr{E}$ и $F \subset \mathscr{F}$, причем РНП $\mathscr{U}$ порядково полно. Предположим, что $T\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ — сохраняющий дизъюнктность ограниченный оператор со сдвигом S. Если элементы $e \in \operatorname{dom} S$ и $u \in \mathscr{U}$ таковы, что в $\mathscr{U}$ определено произведение eu, то в $\mathscr{V}$ определено произведение $S(e)T(u)$ и имеет место равенство $T(eu) = S(e)T(u)$. В частности, $T \circ g = S(g) \circ T$ для любого ортоморфизма $g \in \operatorname{Orth}(E) \cap \operatorname{dom} S$.*

◀ Зафиксируем произвольный элемент $u \in \mathscr{U}$ и обозначим через $\mathscr{E}_u$ фундамент $\{e \in \operatorname{dom} S : eu \in \mathscr{U}\}$ K-пространства $\mathscr{E}$. Пусть $m\mathscr{V}$ — максимальное расширение $\mathscr{V}$. Рассмотрим отображения $L, R\colon \mathscr{E}_u \to m\mathscr{V}$, определенные формулами $L(e) = T(eu)$ и $R(e) = S(e)T(u)$. Очевидно, операторы L и R ограничены ($=$ мажорируемы) и сохраняют дизъюнктность, причем их тени мажорируются тенью оператора T. Поскольку $L(1_{\mathscr{E}}) = R(1_{\mathscr{E}})$ и $\mathscr{E}_u \subset \operatorname{dom} S$, из леммы 6.1.9 следует равенство $L = R$. ▶

6.3.14. Фиксируем порядковые единицы $1_{\mathscr{E}}$ и $1_{\mathscr{F}}$ в K-пространствах $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$. Пусть $\mathscr{U}$ — РНП над фундаментом $E \subset \mathscr{E}$, а $\mathscr{V}$ — РНП над фундаментом $F \subset \mathscr{F}$. Оператор $S\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ назовем *оператором сдвига*, если существует такой оператор сдвига $s\colon E \to F$, что $|Su| = s|u|$ для всех $u \in \mathscr{U}$. Очевидно, $s = |S|$, т. е. оператор s является наименьшей мажорантой S (см. 1.6.9).

Замечание. Итак, если $S\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ — оператор сдвига, то он мажорируем и его наименьшая мажоранта $|S| : E \to F$ является оператором сдвига. Обратное, вообще говоря, неверно. Действительно, если $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ — банаховы пространства и норма оператора $S\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ равна единице, то его наименьшая мажоранта $|S|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является тождественным оператором (а значит, оператором сдвига), в то время как сам оператор S будет оператором сдвига лишь в том случае, когда он является изометрическим вложением.

Предложение. *Пусть $\mathscr{U}$ — РНП над фундаментом $E \subset \mathscr{E}$, а $\mathscr{V}$ — РНП над фундаментом $F \subset \mathscr{F}$. Оператор $S\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ является оператором сдвига тогда и только тогда, когда существуют оператор сдвига $s\colon E \to F$ и F-изометрическое вложение $\iota\colon s\mathscr{U} \to \mathscr{V}$ такие, что $S = \iota \circ s_{\mathscr{U}}$, где $s_{\mathscr{U}}\colon \mathscr{U} \to s\mathscr{U}$ — оператор нормативного преобразования $\mathscr{U}$ посредством s* (см. 1.4.7).

◀ В доказательстве нуждается лишь необходимость. Элементарная проверка показывает, что формула

$$\iota\left(\sum_{i=1}^{n} \rho_i s_{\mathscr{U}} u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i S u_i \quad (u_i \in \mathscr{U},\ \rho_i \in \operatorname{Pr}(\mathscr{V}))$$

корректно определяет функцию $\iota\colon s\mathscr{U} \to \mathscr{V}$, представляющую собой искомую изометрию. ▶

6.3.15. Следующее описание операторов сдвига обобщает критерий 6.3.9 на случай РНП.

Теорема. *Фиксируем порядковые единицы $1_{\mathscr{E}}$ и $1_{\mathscr{F}}$ в K-пространствах $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$. Пусть $\mathscr{U}$ — ПБК над фундаментом $E \subset \mathscr{E}$, а $\mathscr{V}$ — РНП над фундаментом $F \subset \mathscr{F}$. Оператор $S\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ является оператором сдвига тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующим условиям:*

(а) *оператор S сохраняет дизъюнктность;*
(б) *оператор S ограничен;*
(в) *если $u \in \mathscr{U}$ и $|u|$ — осколок $1_{\mathscr{E}}$, то $|Su|$ — осколок $1_{\mathscr{F}}$;*
(г) *оператор S широк на $1_{\mathscr{E}}$.*

◀ Необходимость условий (а)–(г) с очевидностью вытекает из теоремы 6.3.9. Предположим, что оператор S удовлетворяет условиям (а)–(г). Обозначим через $|S|$ наименьшую мажоранту S и покажем сначала, что $|S|\colon E \to F$

является оператором сдвига, проверив условия (а)–(г) теоремы 6.3.9. Условие (а) вытекает из следствия 6.1.4, условие (б) обеспечивается положительностью $|S|$, условие (в) следует из предложения 6.1.12, а условие (г) — из леммы 6.3.2. Итак, $|S|$ — оператор сдвига, а поскольку тени S и $|S|$ совпадают (см. предложение 6.1.4), оператор $|S|$ представляет собой сужение сдвига S на E.

Положим $\mathscr{U}_1 := \{u \in \mathscr{U} : |u|$ — осколок $1_{\mathscr{E}}\}$, рассмотрим произвольный элемент $u \in \mathscr{U}_1$ и покажем, что $|Su| = |S||u|$. Для удобства будем считать, что $|u| = 1_{\mathscr{E}}$ и $|S|1_{\mathscr{E}} = 1_{\mathscr{F}}$. Это предположение не нарушает общности, так как $S[\langle u\rangle\mathscr{U}] \subset \langle |S||u|\rangle\mathscr{V}$, и поэтому мы можем рассматривать S как оператор из $\langle u\rangle\mathscr{U}$ в $\langle |S||u|\rangle\mathscr{V}$. Обозначим проектор $\langle Su\rangle^{\perp}$ через ρ. Поскольку $|Su|$ является осколком $1_{\mathscr{F}}$, нам достаточно показать, что $\rho = 0$. Предположим, вопреки доказываемому, что $\rho \neq 0$. Тогда по предложению 6.1.12 найдется такой элемент $u_1 \in \mathscr{U}$, что $|u_1| = 1_{\mathscr{E}}$ и $\rho S u_1 \neq 0$. Положим $e := |u_1 + 3u|$. Равенства $|u| = |u_1| = 1_{\mathscr{E}}$ с очевидностью влекут $2 1_{\mathscr{E}} \leqslant e \leqslant 4 1_{\mathscr{E}}$, а значит, $\frac{1}{4}1_{\mathscr{E}} \leqslant 1/e \leqslant \frac{1}{2}1_{\mathscr{E}}$. Из последнего неравенства следует, что в $\mathscr{U}$ определено произведение $(1/e)(u_1+3u)$, которое мы обозначим символом $\bar{u}$. Используя предложение 6.3.13 и равенство $\rho S u = 0$, мы получаем

$$
\begin{aligned}
\rho|S\bar{u}| &= \rho|S((1/e)(u_1 + 3u))| = \rho|S|(1/e)|S(u_1 + 3u)| \\
&= |S|(1/e)|\rho S u_1 + 3\rho S u| = \rho|S|(1/e)|Su_1| = \langle \rho S u_1\rangle |S|(1/e).
\end{aligned}
$$

Заметим, что $|\bar{u}| = 1_{\mathscr{E}}$ и, следовательно, $|S\bar{u}|$ является осколком $1_{\mathscr{F}}$. Поэтому соотношения

$$
\rho|S\bar{u}| = \langle \rho S u_1\rangle |S|(1/e) \geqslant \langle \rho S u_1\rangle |S|\Big(\frac{1}{4}1_{\mathscr{E}}\Big) = \frac{1}{4}\langle \rho S u_1\rangle 1_{\mathscr{F}},
$$

дают неравенство $\rho|S\bar{u}| \geqslant \langle \rho S u_1\rangle 1_{\mathscr{F}}$, которое противоречит следующим соотношениям:

$$
\langle \rho S u_1\rangle 1_{\mathscr{F}} \leqslant \rho|S\bar{u}| = \langle \rho S u_1\rangle |S|(1/e) \leqslant \langle \rho S u_1\rangle |S|\Big(\frac{1}{2}1_{\mathscr{E}}\Big) = \frac{1}{2}\langle \rho S u_1\rangle 1_{\mathscr{F}}.
$$

Таким образом, мы установили, что $|Su| = |S||u|$ для всех $u \in \mathscr{U}_1$. Обозначим через h тень оператора S, совпадающую, как известно, с тенью $|S|$. Тогда, применив следствие 6.1.9 (2) к операторам $S\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ и $|S|_{\mathscr{U}} : \mathscr{U} \to |S|\mathscr{U}$, мы получим равенство $|Su| = |S||u|$ для всех $u \in \mathscr{U}$ с нормой из $h\mathscr{E}_1$. Осталось заметить, что $\{u \in \mathscr{U} : |u| \in h\mathscr{E}_1\} = \mathscr{U}$, поскольку $E = \mathrm{dom}|S| \subset h\mathscr{E}_1$. ▶

§ 6.4. Операторы взвешенного сдвига

Рассматриваемые в этом параграфе операторы взвешенного сдвига представляют собой композиции $W \circ S \circ w$ двух ортоморфизмов w и W и оператора сдвига S. Представимость сохраняющего дизъюнктность оператора в таком виде связана с существованием ограниченного множества, на котором этот оператор широк. Кроме этого критерия мы предлагаем также некоторые достаточные условия представимости оператора в виде $W \circ S \circ w$. Основным результатом настоящего параграфа является представление произвольного сохраняющего дизъюнктность оператора в виде сильно дизъюнктной суммы операторов взвешенного сдвига. Таким образом, операторы вида $W \circ S \circ w$ играют роль простых элементов, из которых составляются более широкие классы операторов. Этот факт позволит нам в дальнейшем построить одно из аналитических представлений операторов, сохраняющих дизъюнктность.

На протяжении текущего параграфа E и F — фундаменты расширенных K-пространств $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$. В пространствах $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$ фиксируются порядковые единицы $1_{\mathscr{E}}$ и $1_{\mathscr{F}}$ и рассматривается умножение, превращающее их в коммутативные упорядоченные алгебры с единицами $1_{\mathscr{E}}$ и $1_{\mathscr{F}}$ соответственно (см. замечание 1.3.7). Напомним, что ортоморфизмы, действующие в рассматриваемых

K-пространствах, являются операторами умножения и отождествляются с соответствующими множителями (см. 6.2.12). Идеал пространства $\mathscr{E}$, порожденный элементом $1_{\mathscr{E}}$, обозначается символом $\mathscr{E}_1$. Отметим, что некоторые вводимые в этом параграфе понятия существенно зависят от конкретного выбора единиц $1_{\mathscr{E}}$ и $1_{\mathscr{F}}$.

6.4.1. Линейный оператор $T\colon E \to F$ назовем ***оператором взвешенного сдвига***, если существуют фундаменты $E' \subset \mathscr{E}$ и $F' \subset \mathscr{F}$, ортоморфизмы $w\colon E \to E'$ и $W\colon F' \to F$ и оператор сдвига $S\colon E' \to F'$ такие, что $T = W \circ S \circ w$, т. е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F \\ {\scriptstyle w}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle W} \\ E' & \xrightarrow{S} & F' \end{array}$$

коммутативна. Композиция $W \circ S \circ w$ называется ***WSW-представлением*** оператора T, а операторы W, S и w — соответственно ***внешним весом***, ***сдвигом*** и ***внутренним весом*** представления $W \circ S \circ w$.

Заметим, что в силу теоремы 6.1.1, регулярный оператор $T\colon E \to F$ является оператором взвешенного сдвига тогда и только тогда, когда таковым является его модуль $|T|$. Более того, если один из операторов T или $|T|$ имеет WSW-представление, то второй имеет WSW-представление с тем же сдвигом и внутренним весом. Таким образом, обсуждая вопрос о том, является ли тот или иной оператор оператором взвешенного сдвига, мы всегда можем считать рассматриваемый оператор положительным.

С точки зрения данного выше определения свойство отображения быть оператором взвешенного сдвига зависит от выбора единиц $1_{\mathscr{E}}$ и $1_{\mathscr{F}}$. В действительности же этой зависимости нет. В самом деле, пусть оператор T имеет WSW-представление

$$Te = W * S(w * e) \quad (e \in E),$$

где $*$ — умножение, соответствующее единицам $1_{\mathscr{E}}$ и $1_{\mathscr{F}}$. Тогда после замены $1_{\mathscr{E}}$ и $1_{\mathscr{F}}$ на $1'_{\mathscr{E}}$ и $1'_{\mathscr{F}}$ и введения нового умножения $\cdot$ оператор T останется оператором взвешенного сдвига и будет иметь WSW-представление

$$Te = W \cdot S'(w' \cdot e) \quad (e \in E),$$

где

$$S'x = (1'_{\mathscr{F}}/1_{\mathscr{F}}) \cdot S(1_{\mathscr{E}} \cdot x) \quad (x \in (\operatorname{dom} S)/1_{\mathscr{E}})$$

и $w' = w/1_{\mathscr{E}}^2$ (здесь деление и возведение в квадрат также соответствуют новым единицам). Таким образом, понятие оператора взвешенного сдвига $T\colon E \to F$ осмыслено для «чистых» K-пространств E и F — вне зависимости от их вложения в расширенные K-пространства и введения мультипликативной структуры. Из сказанного, в частности, следует, что положительный оператор $T\colon E \to F$ является оператором взвешенного сдвига тогда и только тогда, когда подходящим выбором единиц $1_{\mathscr{E}}$ и $1_{\mathscr{F}}$ его можно превратить в оператор сдвига.

Простейшие примеры показывают, что один и тот же оператор взвешенного сдвига может иметь различные WSW-представления. Тем не менее разнообразие компонент WSW-представления данного оператора T, естественно, ограничивается их связью с оператором T и друг с другом. Два основных аспекта этой взаимосвязи отражены в следующем предложении.

Предложение. *Пусть $T\colon E \to F$ — оператор взвешенного сдвига и $W \circ S \circ w$ — его WSW-представление. Положим $\rho := \langle \operatorname{im} T \rangle$.*

(1) *Обозначим сдвиг оператора T через S_T. Тогда S_T продолжает $\rho \circ S$ и имеет место равенство $W \circ S \circ w = W \circ S_T \circ w$.*

(2) *Отождествим w и W с соответствующими элементами $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$ и положим $W_T := o\text{-}\lim_{\pi \in \Pi} T\pi(1_{\mathscr{E}}/w) \in \mathscr{F}$, где $\Pi = \{\pi \in \operatorname{Pr}(\mathscr{E}) : \pi(1_{\mathscr{E}}/w) \in E\}$. Тогда $\rho W = W_T$ и $W \circ S \circ w = W_T \circ S \circ w$.*

◀ Утверждение (1) легко выводится из 6.3.7 и 6.3.8. Докажем (2). Благодаря очевидному равенству $T \circ \langle w \rangle^{\perp} = 0$, мы не нарушим общности, предположив, что $\langle w \rangle = \langle 1 \rangle$. Тогда

$$o\text{-}\lim_{\pi \in \Pi} T\pi(1_{\mathscr{E}}/w) = o\text{-}\lim_{\pi \in \Pi} WS_T w\pi(1_{\mathscr{E}}/w) = o\text{-}\lim_{\pi \in \Pi} WS_T \pi 1_{\mathscr{E}} = (\sup_{\pi \in \Pi} h(\pi))W,$$

где h — тень T. Поскольку $\rho = h(1)$, достаточно показать, что $\sup_{\pi \in \Pi} h(\pi) = h(1)$. Из $E \subset \operatorname{dom}(S_T \circ w)$ следует $w[E] \subset \operatorname{dom} S_T = h\mathscr{E}_1$, а значит, $E \subset h\mathscr{E}_{1/w}$. Осталось привлечь лемму 6.3.6. ▶

Таким образом, WSW-представление конкретного оператора в значительной степени определяется выбором внутреннего веса. Заметим, что любой оператор взвешенного сдвига имеет WSW-представление с положительным внутренним весом. Действительно, рассмотрим произвольное WSW-представление $W \circ S \circ w$. Отождествляя ортоморфизм w с элементом $\mathscr{E}$ (см. 6.2.12), обозначим проектор $\langle w^+ \rangle \in \Pr(E)$ символом π и положим $\rho := \langle S(\pi 1_{\mathscr{E}}) \rangle$. Тогда

$$\begin{aligned} W \circ S \circ w &= W \circ S \circ (\pi|w| - \pi^{\perp}|w|) \\ &= W \circ (\rho \circ S \circ |w| - \rho^{\perp} \circ S \circ |w|) = (\rho W - \rho^{\perp} W) \circ S \circ |w|. \end{aligned}$$

Замечание. Если $W \circ S \circ w$ — WSW-представление оператора T с положительным внутренним весом w, то операторы T^+, T^- и $|T|$ имеют следующие WSW-представления: $T^+ = W^+ \circ S \circ w$, $T^- = W^- \circ S \circ w$ и $|T| = |W| \circ S \circ w$.

6.4.2. Теорема. *Пусть w — произвольный положительный элемент $\mathscr{E}$. Линейный оператор $T\colon E \to F$ имеет WSW-представление с внутренним весом w тогда и только тогда, когда он сохраняет дизъюнктность, регулярен и широк на элементе $1_{\mathscr{E}}/w$.*

◀ Необходимость вытекает из предложения 6.4.1 (2). Докажем достаточность. Пусть сохраняющий дизъюнктность регулярный оператор $T\colon E \to F$ широк на элементе $1_{\mathscr{E}}/w$. Не нарушая общности, можно считать, что оператор T положителен. Положим $\Pi := \{\pi \in \Pr(\mathscr{E}) : \pi(1_{\mathscr{E}}/w) \in E\}$ и обозначим через W ортоморфизм умножения на $\sup_{\pi \in \Pi} T\pi(1_{\mathscr{E}}/w) \in \mathscr{F}$. Рассмотрим композицию $(1_{\mathscr{F}}/W) \circ T \circ (1_{\mathscr{E}}/w)$ как оператор из $w[E]$ в $\mathscr{F}$ и обозначим ее символом S. Доказав, что S является оператором сдвига, мы тем самым получим искомое WSW-представление $W \circ S \circ w$ для T. В соответствии с теоремой 6.3.9 достаточно показать, что оператор S обладает приведенными в ее формулировке свойствами (а)–(г). Проверка этих свойств не составляет труда. ▶

Подмножество K-пространства E назовем *$\mathscr{E}$-ограниченным*, если оно порядково ограничено в $\mathscr{E}$. Подмножество $\mathscr{U}_0$ РНП над E назовем *$\mathscr{E}$-ограниченным*, если множество $\{|u_0| : u_0 \in \mathscr{U}_0\}$ $\mathscr{E}$-ограничено.

Следствие. *Линейный оператор $T\colon E \to F$ является оператором взвешенного сдвига тогда и только тогда, когда он сохраняет дизъюнктность, регулярен и широк на каком-либо $\mathscr{E}$-ограниченном подмножестве E.*

◀ Если оператор T широк на множестве $D \subset E$ и элемент $e \in \mathscr{E}$ таков, что $|d| \leqslant e$ для всех $d \in D$, то оператор T широк на элементе e и в силу последней теоремы имеет WSW-представление с внутренним весом $1_{\mathscr{E}}/e$. ▶

6.4.3. Предложение. *Пусть регулярные операторы $T, \overline{T}\colon E \to F$ сохраняют дизъюнктность и удовлетворяют неравенству $|T| \leqslant |\overline{T}|$. Тогда T является оператором взвешенного сдвига в том и только том случае, если таковым является $\overline{T}$. Более того, имеют место следующие утверждения.*

(1) *Если $\overline{W} \circ \overline{S} \circ \overline{w}$ — WSW-представление оператора $\overline{T}$, то оператор T имеет WSW-представление вида $W \circ \overline{S} \circ \overline{w}$, где $|W| \leqslant |\overline{W}|$.*

(2) *Если $W \circ S \circ w$ — WSW-представление оператора T, то оператор $\overline{T}$ имеет WSW-представление вида $\overline{W} \circ \overline{S} \circ w$, где $\langle \operatorname{im} T \rangle |W| \leqslant |\overline{W}|$.*

◀ Не нарушая общности, можно считать, что операторы T и $\overline{T}$ положительны.

(1) Обеспечивается следствием 6.2.19.

(2) Допустим, что оператор T имеет WSW-представление $W \circ S \circ w$, и положим $\rho := \langle \operatorname{im} T \rangle$. Согласно теореме 6.4.2 оператор T широк на элементе $1_{\mathscr{E}}/w$. Тогда оператор $\overline{T}$ тем более обладает этим свойством и в силу той же теоремы 6.4.2 имеет WSW-представление $\overline{W} \circ \overline{S} \circ w$. Требуемое соотношение между W и $\overline{W}$ вытекает из предложения 6.4.1. ▶

6.4.4. В связи с утверждениями из 6.4.2 было бы интересно более подробно исследовать те ситуации, в которых оператор $T \colon E \to F$ оказывается широким на том или ином $\mathscr{E}$-ограниченном подмножестве E. Не затрагивая проблемы в целом, мы лишь обсудим несколько частных случаев.

Прежде всего, отметим тривиальное следствие теоремы 6.4.2: если $\{Te\}^{\perp\perp} = (\operatorname{im} T)^{\perp\perp}$ для некоторого элемента $e \in E$, то T является оператором взвешенного сдвига (и допускает WSW-представление с внутренним весом $1_{\mathscr{E}}/e$). В частности, имеет место следующее утверждение.

Предложение. *Если в K-пространстве E существует сильная порядковая единица e, то любой сохраняющий дизъюнктность регулярный оператор $T \colon E \to F$ является оператором взвешенного сдвига и имеет WSW-представление с внутренним весом $1_{\mathscr{E}}/e$.*

Указанные случаи, безусловно, допускают обобщения. Например, поскольку любое множество попарно дизъюнктных элементов E является $\mathscr{E}$-ограниченным, мы имеем следующее утверждение.

Предложение. *Пусть $T \colon E \to F$ — регулярный оператор, сохраняющий дизъюнктность. Если $\{Te_\xi : \xi \in \Xi\}^{\perp\perp} = (\operatorname{im} T)^{\perp\perp}$ для некоторого семейства $(e_\xi)_{\xi \in \Xi}$ попарно дизъюнктных элементов E, то T является оператором взвешенного сдвига.*

Может показаться, что условие, сформулированное в последнем предложении, является и необходимым (см., например, [1, теорема 5]), однако это не так. Действительно, пусть $\mathscr{E} = C_\infty(P)$, где P — экстремально несвязный компакт, содержащий неизолированную точку $p \in P$. Обозначим через E фундамент $\{e \in \mathscr{E} : e(p) = 0\}$ K-пространства $\mathscr{E}$. Рассмотрим множество $Q := P \backslash \{p\}$ и положим $\mathscr{F}$ равным K-пространству всех вещественных функций, определенных на Q. Определим оператор $T \colon E \to \mathscr{F}$ следующим образом: $Te = e|_Q$. Очевидно, оператор T широк на $\mathscr{E}$-ограниченном множестве $\{e \in E : |e| \leqslant 1\}$ (и поэтому является оператором взвешенного сдвига), но упомянутое в формулировке последнего предложения семейство $(e_\xi)_{\xi \in \Xi}$ отсутствует.

Другой класс операторов взвешенного сдвига возникает в результате сопоставления леммы 6.3.6 со следствиями 6.1.6 и 6.3.5.

Теорема. *Всякий секвенциально о-непрерывный сохраняющий дизъюнктность регулярный оператор $T \colon E \to F$ является оператором взвешенного сдвига. Более того, для любой порядковой единицы $w \in \mathscr{E}$ такой оператор T имеет WSW-представление с внутренним весом w.*

6.4.5. Известно, что не всякий сохраняющий дизъюнктность регулярный оператор является оператором взвешенного сдвига. Для полноты картины мы воспроизведем соответствующий пример из [27] — тем более, что, как выяснится ниже, этот пример является в определенном смысле типичным.

Пусть Q — экстремально несвязный компакт без изолированных точек. В этом случае можно подобрать фундамент $E \subset C_\infty(Q)$, семейство $(e_\xi)_{\xi \in \Xi}$ элементов E и семейство $(q_\xi)_{\xi \in \Xi}$ точек Q так, что будут выполнены следующие условия: множество $\{q_\xi : \xi \in \Xi\}$ плотно в Q, $e_\xi(q_\xi) = \infty$ для всех $\xi \in \Xi$ и, кроме того, для каждого элемента $e \in E$ числовое множество $\{(e/e_\xi)(q_\xi) : \xi \in \Xi\}$ ограничено. Тогда оператор $T \colon E \to \ell^\infty(\Xi)$, действующий по правилу $(Te)(\xi) =$

$(e/e_\xi)(q_\xi)$, сохраняет дизъюнктность и регулярен (даже положителен), но не является оператором взвешенного сдвига.

Приведенная конструкция оператора T обладает следующим свойством: если мы обозначим через ρ_ξ оператор умножения на характеристическую функцию $\chi_{\{\xi\}}$, то получим такое разбиение единицы $(\rho_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в алгебре $\mathrm{Pr}(\ell^\infty(\Xi))$, что все осколки вида $\rho_\xi \circ T$ являются операторами взвешенного сдвига. Оказывается, так устроены все регулярные операторы, сохраняющие дизъюнктность.

Теорема. *Пусть $T\colon E \to F$ — регулярный оператор, сохраняющий дизъюнктность. Тогда существует такое разбиение единицы $(\rho_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в алгебре $\mathrm{Pr}(F)$, что для каждого $\xi \in \Xi$ композиция $\rho_\xi \circ T$ является оператором взвешенного сдвига. Более того, проекторы ρ_ξ можно подобрать так, что каждая композиция $\rho_\xi \circ T$ будет иметь WSW-представление с внутренним весом $1_{\mathscr{E}}/e_\xi$, где e_ξ — положительный элемент E. В этом случае оператор T разлагается в сильно дизъюнктную сумму:*

$$T = \bigoplus_{\xi\in\Xi} W \circ \rho_\xi S \circ (1_{\mathscr{E}}/e_\xi),$$

где S — сдвиг оператора T, а $W\colon \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ — ортоморфизм умножения на o-$\sum\limits_{\xi\in\Xi} \rho_\xi T e_\xi$.

◀ Применив принцип исчерпывания (см. 1.2.1) к соотношению

$$\sup_{e\in E^+} \langle Te\rangle = \langle \mathrm{im}\, T\rangle,$$

мы получим дизъюнктное семейство $(\rho_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в алгебре $\mathrm{Pr}(F)$ и семейство $(e_\xi)_{\xi\in\Xi}$ положительных элементов E такие, что $\sup_{\xi\in\Xi} \rho_\xi\langle Te_\xi\rangle = \langle \mathrm{im}\, T\rangle$. Добавив к семейству $(\rho_\xi)_{\xi\in\Xi}$ проектор $\langle \mathrm{im}\, T\rangle^\perp$, а к семейству $(e_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — нулевой элемент, мы превратим $(\rho_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в разбиение единицы и сохраним равенство $\sup_{\xi\in\Xi} \rho_\xi\langle Te_\xi\rangle = \langle \mathrm{im}\, T\rangle$. По теореме 6.4.2 для каждого $\xi \in \Xi$ композиция $\rho_\xi \circ T$ является оператором взвешенного сдвига и имеет WSW-представление с внутренним весом $1_{\mathscr{E}}/e_\xi$. Если S — сдвиг T, то сдвиг оператора $\rho_\xi \circ T$ равен $\rho_\xi S$ (см. 6.3.8), и, используя предложение 6.4.1, мы заключаем, что $\rho_\xi \circ T = \rho_\xi T e_\xi \circ \rho_\xi S \circ (1_{\mathscr{E}}/e_\xi)$. ▶

6.4.6. Пусть $\mathscr{U}$ — ПБК над фундаментом $E \subset \mathscr{E}$, а $\mathscr{V}$ — ПБК над фундаментом $F \subset \mathscr{F}$. Линейный оператор $T\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ назовем *оператором взвешенного сдвига*, если существуют ПБК $\mathscr{U}'$ над фундаментом $E' \subset \mathscr{E}$, ПБК $\mathscr{V}'$ над фундаментом $F' \subset \mathscr{F}$, ортоморфизмы $w\colon \mathscr{U} \to \mathscr{U}'$ и $W\colon \mathscr{V}' \to \mathscr{V}$ и оператор сдвига $S\colon \mathscr{U}' \to \mathscr{V}'$ такие, что $T = W \circ S \circ w$, т. е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{U} & \xrightarrow{\ T\ } & \mathscr{V} \\ {\scriptstyle w}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle W} \\ \mathscr{U}' & \xrightarrow{\ S\ } & \mathscr{V}' \end{array}$$

коммутативна. Как и в случае оператора, действующего в K-пространствах, композиция $W \circ S \circ w$ называется *WSW-представлением* оператора T, а операторы W, S и w — соответственно *внешним весом*, *сдвигом* и *внутренним весом* представления $W \circ S \circ w$. Безусловно, перенос терминологии 6.4.1 на случай операторов, действующих в ПБК, не вполне корректен, поскольку K-пространство является частным случаем ПБК. Поэтому, желая устранить двусмысленность, мы будем иногда называть оператор взвешенного сдвига *скалярным* или *векторным*, имея в виду определения 6.4.1 или 6.4.6 соответственно. По аналогичным соображениям мы будем говорить о скалярных или векторных WSW-представлениях. Векторное WSW-представление $W \circ S \circ w$ оператора $T\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ будет называться *полувекторным*, если w — скалярный ортоморфизм (см. 6.2.17), т. е. $\mathscr{U}$ и $\mathscr{U}'$ являются фундаментами одного и того же ПБК над $\mathscr{E}$ и ортоморфизм w действует по правилу $u \mapsto eu$ для некоторого фиксированного ортоморфизма $e \in \mathrm{Orth}(E, E')$.

Теорема. *Пусть $\mathscr{U}$ — ПБК над фундаментом $E \subset \mathscr{E}$, а $\mathscr{V}$ — ПБК над фундаментом $F \subset \mathscr{F}$. Линейный оператор $T\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ является векторным оператором взвешенного сдвига тогда и только тогда, когда он мажорируем и его наименьшая мажоранта $|T|\colon E \to F$ является скалярным оператором взвешенного сдвига. Более того, имеют место следующие утверждения.*

(1) *Если $\overline{W} \circ \overline{S} \circ \overline{w}$ — векторное WSW-представление оператора T, то $|T|$ имеет скалярное WSW-представление $W \circ |\overline{S}| \circ |\overline{w}|$ такое, что $0 \leqslant W \leqslant |\overline{W}|$.*

(2) *Пусть $W \circ S \circ w$ — скалярное WSW-представление оператора $|T|$ с положительными весами W и w. Тогда T имеет полувекторное WSW-представление $\overline{W} \circ \overline{S} \circ \overline{w}$ такое, что $|\overline{W}| = W$, $|\overline{S}| = S$, а $\overline{w}$ — ортоморфизм умножения на w.*

◀ (1) Следует непосредственно из 6.4.3 (1).

(2) Предположим, что $W \circ S \circ w$ — скалярное WSW-представление оператора $|T|$, где $w\colon E \to E'$, $S\colon E' \to F'$ и $W\colon F' \to F$. Пусть $m\mathscr{U}$ — максимальное расширение $\mathscr{U}$, $\mathscr{U}'$ — идеал $\{u \in m\mathscr{U} : |u| \in E'\}$ ПБК $m\mathscr{U}$, а $\overline{w}\colon \mathscr{U} \to \mathscr{U}'$ — ортоморфизм умножения на w. Обозначим через $\mathscr{V}'$ o-пополнение нормативного преобразования $\mathscr{U}'$ посредством S (см. 1.4.7) и рассмотрим соответствующий оператор нормативного преобразования $\overline{S}\colon \mathscr{U}' \to \mathscr{V}'$. Теперь нам предстоит построить ортоморфизм $\overline{W}\colon \mathscr{V}' \to \mathscr{V}$.

Положим $\mathscr{V}_0' := (\overline{S} \circ \overline{w})[\mathscr{U}]$ и определим линейный оператор $\overline{W}_0\colon \mathscr{V}_0' \to \mathscr{V}$ следующим образом: $\overline{W}_0(\overline{S}\overline{w}u) := Tu$. Такое определение корректно, поскольку из равенства $\overline{S}\overline{w}u_1 = \overline{S}\overline{w}u_2$ следует

$$
\begin{aligned}
|Tu_1 - Tu_2| &\leqslant |T||u_1 - u_1| = WSw|u_1 - u_1| \\
&= WS|\overline{w}u_1 - \overline{w}u_2| = W|\overline{S}\overline{w}u_1 - \overline{S}\overline{w}u_2| = 0.
\end{aligned}
$$

Положим $\rho := \langle \operatorname{im} T \rangle$. Поскольку $\rho \leqslant \langle (\overline{S} \circ \overline{w})[\mathscr{U}] \rangle$ и $\overline{w}[\mathscr{U}] = \{v' \in \mathscr{V}' : |v'| \in w[E]\}$, оператор $\rho \circ \overline{S}$ широк на идеале $w[E] \subset E'$. Следовательно, по предложению 6.3.2((2)⇒(3)) множество $\mathscr{V}_0' = (\rho \circ \overline{S})[\overline{w}[\mathscr{U}]]$ аппроксимирует $(\rho \circ \overline{S})[\mathscr{U}']$. Последнее множество по определению нормативного преобразования $S\mathscr{U}'$ аппроксимирует множество $\rho[S\mathscr{U}']$, которое, в свою очередь, аппроксимирует $\rho[\mathscr{V}']$. Поэтому в силу 1.5.2 множество $\mathscr{V}_0'$ аппроксимирует $\rho[\mathscr{V}']$. Очевидно, $|\overline{W}_0 v_0'| \leqslant W|v_0'|$ для всех $v_0' \in \mathscr{V}_0'$. Согласно следствию 6.1.8 оператор $\overline{W}_0$ имеет (единственное) линейное продолжение $\overline{W}_1\colon \rho[\mathscr{V}'] \to \mathscr{V}$ такое, что $|\overline{W}_1 v'| \leqslant W|v'|$ для всех $v' \in \mathscr{V}'$. Тогда композиция $\overline{W}_1 \circ \rho\colon \mathscr{V}' \to \mathscr{V}$ удовлетворяет неравенству $|\overline{W}_1 \circ \rho| \leqslant W$ и, следовательно, является ортоморфизмом. Таким образом, мы уже построили WSW-представление $(\overline{W}_1 \circ \rho) \circ \overline{S} \circ \overline{w}$ оператора T. Однако, положить $\overline{W} := \overline{W}_1 \circ \rho$ на данном этапе нельзя, поскольку в этом случае не будет обеспечено равенство $|\overline{W}| = W$.

Для всех положительных $e \in E$ мы имеем

$$
\begin{gathered}
|\overline{W}_1 \circ \rho| Swe = \sup\{|\overline{W}_1 \rho v'| : v' \in \mathscr{V}',\ |v'| = Swe\} \\
\geqslant \sup\{\rho|\overline{W}_0 v_0'| : v_0' \in \mathscr{V}_0',\ |v_0'| = Swe\} = \sup\{\rho|\overline{W}_0 \overline{S}\overline{w}u| : u \in \mathscr{U},\ |\overline{S}\overline{w}u| = Swe\} \\
= \sup\{|Tu| : Sw|u| = Swe\} \geqslant \sup\{|Tu| : |u| = e\} = |T|e = WSwe,
\end{gathered}
$$

откуда $|\overline{W}_1 \circ \rho| Swe = WSwe$ с учетом неравенства $|\overline{W}_1 \circ \rho| \leqslant W$. Таким образом, $W \circ S \circ w$ и $|\overline{W}_1 \circ \rho| \circ S \circ w$ — два WSW-представления оператора $|T|$. Поэтому согласно предложению 6.4.1 (2) имеет место равенство $|\overline{W}_1 \circ \rho| = \rho W$. Для обеспечения равенства $|\overline{W}| = W$ нам достаточно определить $\overline{W}$ как сумму ортоморфизма $\overline{W}_1 \circ \rho$ и некоторой «холостой» добавки с нормой $\rho^{\perp} W$. Из предложений 6.2.13 и 1.4.3 следует существование такого ортоморфизма $\overline{W}_2 \in \operatorname{Orth}(\mathscr{U}, \mathscr{V})$, что $|\overline{W}_2| = W$. Мы полагаем $\overline{W} := \overline{W}_1 \circ \rho + \overline{W}_2 \circ \rho^{\perp}$. ▶

Замечания. (1) Неравенство $W \leqslant |\overline{W}|$, фигурирующее в утверждении (1) последней теоремы, может быть строгим. Иными словами, равенство $|T| = |\overline{W}| \circ |\overline{S}| \circ |\overline{w}|$ нельзя гарантировать для любого WSW-представления $T = \overline{W} \circ \overline{S} \circ \overline{w}$. (Простой контрпример можно привести в случае банаховых пространств $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$.) Тем не менее из (2) следует, что любой оператор взвешенного сдвига $T\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ имеет такое WSW-представление $\overline{W} \circ \overline{S} \circ \overline{w}$, что $|T| = |\overline{W}| \circ |\overline{S}| \circ |\overline{w}|$.

(2) Из последней теоремы следует, что каждый векторный оператор взвешенного сдвига имеет полувекторное WSW-представление. Более того, если оператор имеет векторное WSW-представление с внутренним весом w, то он имеет и полувекторное WSW-представление, внутренний вес которого является оператором умножения на $|w|$.

(3) Если рассмотреть каждое из K-пространств E и F как ПБК (над самим собой), то наименьшая мажоранта любого регулярного оператора $T\colon E \to F$ будет совпадать с его модулем $|T|$. Это наблюдение позволяет сделать следующий вывод на основании последней теоремы: отображение $T\colon E \to F$ является векторным оператором взвешенного сдвига тогда и только тогда, когда оно является скалярным оператором взвешенного сдвига. Это обстоятельство обосновывает корректность употребления единого термина «оператор взвешенного сдвига» как для операторов, действующих в K-пространствах, так и для операторов, действующих в ПБК.

6.4.7. Каждое из утверждений, сформулированных в следующей теореме, вытекает из аналогичного «скалярного» утверждения (см. 6.4.1–6.4.4) и теоремы 6.4.6.

Теорема. *Пусть $\mathscr{U}$ — ПБК над фундаментом $E \subset \mathscr{E}$, а $\mathscr{V}$ — ПБК над фундаментом $F \subset \mathscr{F}$.*

(1) *Свойство отображения $T\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ быть оператором взвешенного сдвига не зависит от выбора единиц $1_{\mathscr{E}}$ и $1_{\mathscr{F}}$.*

(2) *Линейный оператор $T\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ является оператором взвешенного сдвига тогда и только тогда, когда он сохраняет дизъюнктность, ограничен и удовлетворяет соотношению $T[\mathscr{U}_0]^{\perp\perp} = T[\mathscr{U}]^{\perp\perp}$ для некоторого $\mathscr{E}$-ограниченного подмножества $\mathscr{U}_0 \subset \mathscr{U}$.*

(3) *Пусть w — произвольный положительный элемент $\mathscr{E}$. Линейный оператор $T\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ имеет WSW-представление с внутренним весом нормы w тогда и только тогда, когда он сохраняет дизъюнктность, ограничен и широк на элементе $1_{\mathscr{E}}/w$.*

(4) *Пусть $T\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ — ограниченный оператор, сохраняющий дизъюнктность. Если $\{Tu\}^{\perp\perp} = (\operatorname{im} T)^{\perp\perp}$ для некоторого элемента $u \in \mathscr{U}$, то T является оператором взвешенного сдвига и допускает WSW-представление с внутренним весом нормы $1_{\mathscr{E}}/|u|$.*

(5) *Если в K-пространстве E существует сильная порядковая единица e, то любой сохраняющий дизъюнктность ограниченный оператор $T\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ является оператором взвешенного сдвига и имеет WSW-представление с внутренним весом нормы $1_{\mathscr{E}}/e$.*

(6) *Каждый секвенциально o-непрерывный сохраняющий дизъюнктность ограниченный оператор $T\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ является оператором взвешенного сдвига. Более того, для любой порядковой единицы $w \in \mathscr{E}$ такой оператор T имеет WSW-представление с внутренним весом нормы w.*

6.4.8. Теорема. *Пусть $\mathscr{U}$ — ПБК над фундаментом $E \subset \mathscr{E}$, $\mathscr{V}$ — ПБК над фундаментом $F \subset \mathscr{F}$, $m\mathscr{U}$ и $m\mathscr{V}$ — максимальные расширения $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ и $T\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ — ограниченный оператор, сохраняющий дизъюнктность. Тогда существует такое разбиение единицы $(\rho_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в алгебре $\mathrm{Pr}(\mathscr{V})$, что для каждого $\xi \in \Xi$ композиция $\rho_\xi \circ T$ является оператором взвешенного сдвига. Проекторы ρ_ξ можно подобрать так, что каждая композиция $\rho_\xi \circ T$ будет иметь WSW-представление с внутренним весом нормы $1_{\mathscr{E}}/e_\xi$, где e_ξ — положительный элемент E.*

Для каждого $\xi \in \Xi$ положим $E_\xi := \{e/e_\xi : e \in E\}$, $\mathscr{U}_\xi := \{u \in m\mathscr{U} : |u| \in E_\xi\}$, где $m\mathscr{U}$ — максимальное расширение $\mathscr{U}$, и обозначим через $w_\xi \colon \mathscr{U} \to \mathscr{U}_\xi$ скалярный ортоморфизм умножения на элемент $1_{\mathscr{E}}/e_\xi$. Тогда существуют ПБК *$\mathscr{V}'$ над $\mathscr{F}$, сильно дизъюнктные операторы сдвига $S_\xi \colon \mathscr{U}_\xi \to \mathscr{V}'$ ($\xi \in \Xi$) и ортоморфизм $W \colon \mathscr{V}' \to m\mathscr{V}$ такие, что операторы T и $|T|$ разлагаются в сильно дизъюнктные суммы*

$$T = \bigoplus_{\xi\in\Xi} W \circ S_\xi \circ w_\xi, \quad |T| = \bigoplus_{\xi\in\Xi} |W| \circ |S_\xi| \circ |w_\xi|.$$

◀ Рассмотрим произвольный сохраняющий дизъюнктность ограниченный оператор $T \colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$. По теореме 6.4.5 существует такое разбиение единицы $(\rho_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в алгебре $\Pr(F)$, что для каждого $\xi \in \Xi$ композиция $\rho_\xi \circ |T|$ является оператором взвешенного сдвига и, более того, имеет WSW-представление с внутренним весом $1_{\mathscr{E}}/e_\xi$, где e_ξ — положительный элемент E. Определим ПБК $\mathscr{U}_\xi$ и ортоморфизмы $w_\xi \colon \mathscr{U} \to \mathscr{U}_\xi$ так, как это сделано в формулировке доказываемой теоремы. По теореме 6.4.6 для каждого $\xi \in \Xi$ существуют ПБК $\mathscr{V}_\xi$ над фундаментом $F_\xi \subset \rho_\xi[\mathscr{F}]$, оператор сдвига $S_\xi \colon \mathscr{U}_\xi \to \mathscr{V}_\xi$ и ортоморфизм $W_\xi \colon \mathscr{V}_\xi \to \rho_\xi[\mathscr{V}]$ такие, что $\rho_\xi \circ T = W_\xi \circ S_\xi \circ w_\xi$ и $\rho_\xi \circ |T| = |W_\xi| \circ |S_\xi| \circ |w_\xi|$. Для завершения доказательства остается лишь построить требуемое ПБК $\mathscr{V}'$ и «склеить» ортоморфизмы W_ξ в один ортоморфизм W.

Положим $\mathscr{V}'_0 := \bigoplus_{\xi\in\Xi} \mathscr{V}_\xi$ (см. 1.4.5) и обозначим через $\mathscr{V}'$ максимальное расширение ПБК $\mathscr{V}'_0$. Естественным образом отождествляя $\mathscr{V}_\xi$ и $\rho_\xi[\mathscr{V}'_0]$, будем рассматривать S_ξ как оператор из $\mathscr{U}_\xi$ в $\mathscr{V}'$. Для каждого элемента $v'_0 = (v_\xi)_{\xi\in\Xi} \in \mathscr{V}'_0$ положим $W_0(v') := o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} W_\xi(v_\xi) \in m\mathscr{V}$. Согласно следствию 6.1.8 ортоморфизм $W_0 \colon \mathscr{V}'_0 \to m\mathscr{V}$ имеет единственное продолжение до ортоморфизма $W \colon \mathscr{V}' \to m\mathscr{V}$. ▶

§ 6.5. Реализация операторов, сохраняющих дизъюнктность

Поиск аналитического представления для операторов, сохраняющих дизъюнктность, — давняя традиция. Изучением этого вопроса так или иначе занимался каждый из тех, кого эти операторы интересовали с абстрактной точки зрения. Представление различных классов операторов в виде операторов замены переменной и умножения имеется в работах [2, 3, 9, 10, 19, 27–29, 60, 61]. Согласно теореме Вулиха — Огасавары (теорема 1.3.7) фундамент K-пространства $C_\infty(Q)$, где Q — экстремально несвязный компакт, представляет собой общий вид K-пространства. Кроме того, согласно следствию 3.4.4 фундаменты решеточно нормированного пространства $C_\infty(Q, \mathscr{X})$, где $\mathscr{X}$ — непрерывное банахово расслоение над Q, исчерпывают все пространства Банаха — Канторовича (ПБК). Эти два факта лежат в основе реализационных методов исследования операторов, действующих в K-пространствах и ПБК. Предлагаемые в этом параграфе аналитические представления операторов конструируются с помощью таких операций, как непрерывная замена переменной, поточечное умножение на вещественную функцию и поточечное применение операторнозначной функции.

На протяжении всего параграфа X и Y — вполне несвязные компакты, а P и Q — экстремально несвязные компакты. Символ 1_M обозначает тождественно равную единице функцию, определенную на множестве M.

6.5.1. Предположим, что для каких-либо «абстрактных» объектов A и B (например, булевых алгебр, K-пространств или ПБК) рассматриваются реализации $i \colon A \to \widehat{A}$ и $j \colon B \to \widehat{B}$ в виде каких-либо «конкретных» объектов $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ (например, алгебр множеств или пространств функций). Тогда *интерпретацией* отображения $f \colon A \to B$ (относительно реализаций i и j) мы будем называть композицию $j \circ f \circ i^{-1} \colon \widehat{A} \to \widehat{B}$.

6.5.2. Символом $C_0(Y,X)$ мы обозначаем совокупность всех непрерывных функций $s\colon Y_0 \to X$, определенных на всевозможных открыто-замкнутых подмножествах $Y_0 \subset Y$.

Предложение. *Отображение $h\colon \mathrm{Clop}(X) \to \mathrm{Clop}(Y)$ является кольцевым гомоморфизмом тогда и только тогда, когда существует функция $s \in C_0(Y,X)$ такая, что $h(U) = s^{-1}[U]$ для всех $U \in \mathrm{Clop}(X)$. Для любого кольцевого гомоморфизма h такая функция s единственна.*

◄ Непосредственно следует из известной теоремы Р. Сикорского (см. [25, § 11], а также [58]). ►

Соотношение $h(U) = s^{-1}[U]$ будет называться *реализацией* кольцевого гомоморфизма h посредством функции s. Заметим, что благодаря теореме Стоуна — Огасавары 1.2.8 последнее предложение описывает устройство кольцевых гомоморфизмов, действующих в произвольных булевых алгебрах.

6.5.3. Следующее предложение показывает, что всякий кольцевой гомоморфизм представляет собой (с точностью до изоморфизма) операцию пересечения с фиксированным множеством.

Предложение. *Пусть $h\colon \mathrm{Clop}(X) \to \mathrm{Clop}(Y)$ — кольцевой гомоморфизм. Тогда существуют замкнутое подмножество $Z \subset X$ и порядковый изоморфизм i булевой алгебры $\mathrm{Clop}(Z)$ на $\mathrm{im}\, h$ такие, что $h(U) = i(U \cap Z)$ для всех $U \in \mathrm{Clop}(X)$.*

◄ Пусть $h(U) = s^{-1}[U]$ — реализация h посредством функции $s \in C_0(Y,X)$. Положим $Z := \mathrm{im}\, s$ и для каждого элемента $W \in \mathrm{Clop}(Z)$ определим множество $i(W) \in \mathrm{Clop}(Y)$ формулой $i(W) := s^{-1}[W]$. Проверка утверждений теоремы не составляет труда. ►

6.5.4. Предложение. *Пусть E и F — фундаменты $C_\infty(Q)$. Отображение $W\colon E \to F$ является ортоморфизмом тогда и только тогда, когда существует функция $w \in C_\infty(Q)$ такая, что $W(e) = we$ для всех $e \in E$. Для любого ортоморфизма W такая функция w единственна.*

◄ Приведенные утверждения являются переформулировкой теоремы 6.2.12 с учетом теоремы Вулиха — Огасавары 1.3.7. ►

Соотношение $W(e) = we$ будет называться *реализацией* ортоморфизма W посредством функции w. Заметим, что благодаря теореме Вулиха — Огасавары 1.3.7 последнее предложение описывает устройство ортоморфизмов, действующих в произвольных K-пространствах.

6.5.5. Для произвольных $s \in C_0(Q,P)$ и $e \in C_\infty(P)$ определим функцию $e \bullet s\colon Q \to \overline{\mathbb{R}}$ следующим образом (ср. 1.7.4):

$$(e \bullet s)(q) := \begin{cases} e(s(q)), & \text{если } q \in \mathrm{dom}\, s, \\ 0, & \text{если } q \in Q \setminus \mathrm{dom}\, s. \end{cases}$$

Безусловно, для обеспечения корректности при использовании обозначения $e \bullet s$ следует всегда иметь в виду некоторое фиксированное множество Q, объемлющее $\mathrm{dom}\, s$. Функция $e \bullet s$, очевидно, непрерывна, но, вообще говоря, не принадлежит $C_\infty(Q)$, поскольку может принимать бесконечные значения на множестве с непустой внутренностью. Совокупность всех функций $e \in C_\infty(P)$, для которых $e \bullet s \in C_\infty(Q)$, обозначается символом $C_s(P)$.

Предложение. *Пусть $h\colon \mathrm{Pr}(C_\infty(P)) \to \mathrm{Pr}(C_\infty(Q))$ — кольцевой гомоморфизм и $hC(P)$ — фундамент $C_\infty(P)$, определенный в 6.3.3. Тогда $hC(P) = C_s(P)$, где $h(U) = s^{-1}[U]$ — реализация h посредством $s \in C_0(Q,P)$ (относительно естественных реализаций $\mathrm{Pr}(C_\infty(P))$ и $\mathrm{Pr}(C_\infty(Q))$, см. 1.3.7).*

◀ Следует из предложений 6.3.3 и 6.5.2. ▶

Непрерывная функция $s\colon Q \to P$ называется *σ-точной*, если $s^{-1}[\mathrm{cl}\, G] = \mathrm{cl}\, s^{-1}[G]$ для любого открытого σ-замкнутого подмножества $G \subset P$. Ниже (см. 6.6.1) это свойство функции рассматривается более детально.

Лемма. *Обозначим образ функции $s \in C_0(Q, P)$ через R.*

(1) Для любой функции $e \in C_s(P)$ пересечение $R \cap \mathrm{dom}\, e$ всюду плотно в R, т. е. $C_s(P) \subset \{e \in C_\infty(P) : e|_R \in \overline{C}_\infty(R)\}$.

(2) Если функция $s|^R$ σ-точна, то $C_s(P) = \{e \in C_\infty(P) : e|_R \in \overline{C}_\infty(R)\}$ и $\overline{C}_\infty(R) = \{e|_R : e \in C_s(P)\}$.

◀ (1) Рассмотрим произвольную функцию $e \in C_s(P)$. Если бы существовало непустое открытое множество $W \subset R$, не пересекающееся с $\mathrm{dom}\, e$, то функция $e \bullet s$ принимала бы бесконечные значения на непустом открытом множестве $s^{-1}[W]$, что противоречит включению $e \bullet s \in C_\infty(Q)$. Следовательно, пересечение $R \cap \mathrm{dom}\, e$ всюду плотно в R.

(2) Пусть функция $e \in C_s(P)$ такова, что пересечение $R \cap \mathrm{dom}\, e$ всюду плотно в R. Тогда, используя тот факт, что функция $s|^R$ σ-точна, а пересечение $R \cap \mathrm{dom}\, e$ является σ-замкнутым открытым подмножеством R, мы получаем

$$\begin{aligned} \mathrm{cl}(e \circ s)^{-1}[\mathbb{R}] &= \mathrm{cl}\, s^{-1}[\mathrm{dom}\, e] = \mathrm{cl}\, s^{-1}[R \cap \mathrm{dom}\, e] \\ &= s^{-1}[\mathrm{cl}(R \cap \mathrm{dom}\, e)] = s^{-1}[R] = \mathrm{dom}\, s, \end{aligned}$$

и первое из равенств установлено. Второе равенство следует из первого благодаря лемме 1.1.5. ▶

Замечание. Требование σ-точности функции $s|^R$ в утверждении (2) леммы является существенным, поскольку в общем случае множество $C_s(P)$ не определяется образом s. Действительно, если p — не σ-изолированная точка P, а $\overline{P} := P \cup \{\infty\}$ — обогащение компакта P новой изолированной точкой ∞, то тождественная функция $s\colon P \to P$ и функция $\bar{s} := s \cup \{(\infty, p)\}\colon \overline{P} \to P$ имеют один и тот же образ, в то время как множества $C_s(P)$ и $C_{\bar{s}}(P)$, очевидно, не совпадают.

6.5.6. Если $E \subset C_\infty(P)$ и $R \subset P$, то множество $\{e|_R : e \in E\}$ обозначается символом $E|_R$.

Лемма. *Обозначим образ функции $s \in C_0(Q, P)$ через R и предположим, что функция $s|^R$ σ-точна. Тогда*

(1) $\overline{C}_\infty(R)$ является векторной подрешеткой $C_\infty(R)$;

(2) если E — идеал K-пространства $C_s(P)$, то $E|_R$ — идеал векторной решетки $\overline{C}_\infty(R)$.

◀ Утверждение (1) непосредственно следует из леммы 6.5.5 (2). Докажем (2). Предположим, что функция $g \in \overline{C}_\infty(R)$ удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant g \leqslant e|_R$ для некоторого положительного элемента $e \in E$. В силу леммы 6.5.5 (2) найдется такая положительная функция $\bar{e} \in C_s(P)$, что $g = \bar{e}|_R$. Тогда $\bar{e} \wedge e \in E$ и $g = (\bar{e} \wedge e)|_R$. ▶

6.5.7. Предложение. *Пусть E — фундамент $C_\infty(P)$, а F — фундамент $C_\infty(Q)$. Отображение $S\colon E \to F$ является оператором сдвига тогда и только тогда, когда существует функция $s \in C_0(Q, P)$ такая, что $Se = e \bullet s$ для всех $e \in E$.*

◀ Достаточность легко установить с помощью теоремы 6.3.9. Покажем необходимость. Пусть $S\colon E \to F$ — оператор сдвига и $h\colon \mathrm{Pr}(E) \to \mathrm{Pr}(F)$ —

его тень. Реализуем алгебры $\Pr(E)$ и $\Pr(F)$ в виде $\mathrm{Clop}(P)$ и $\mathrm{Clop}(Q)$ и рассмотрим реализацию $\hat{h}(U) = s^{-1}[U]$ соответствующей интерпретации $\hat{h}\colon \mathrm{Clop}(P) \to \mathrm{Clop}(Q)$ гомоморфизма h посредством $s \in C_0(Q,P)$. По предложению 6.5.5 имеет место равенство $hC(P) = C_s(P)$. Поскольку операторы $(e \mapsto e \bullet s) : C_s(P) \to C_\infty(Q)$ и $S_h\colon hC(P) \to C_\infty(Q)$ имеют общую тень h и удовлетворяют равенствам $1_P \bullet s = S_h(1_P) = h(1)1_Q$, они совпадают в силу предложения 6.3.7. Поэтому $Se = S_h e = e \bullet s$ для всех $e \in E$. ▶

6.5.8. Функция s, связанная с оператором сдвига S описанным в последнем предложении способом, вообще говоря, не единственна. Действительно, допустим, что компакт P содержит две различные неизолированные точки p_1 и p_2, положим $E := \{e \in C_\infty(P) : e(p_1) = e(p_2) = 0\}$ и рассмотрим функции $s_1, s_2\colon Q \to P$, тождественно равные p_1 и p_2 соответственно. Тогда $e \bullet s_1 = e \bullet s_2 = 0$ для всех $e \in E$.

Следующее предложение уточняет вопрос о единственности реализации оператора сдвига.

Предложение. *Пусть E — фундамент $C_\infty(P)$, F — фундамент $C_\infty(Q)$ и $S\colon E \to F$ — оператор сдвига. Положим $Q_0 := \operatorname{supp}\operatorname{im} S$ (см. 1.3.7).*

(1) *Если функции $s_1, s_2 \in C_0(Q,P)$ удовлетворяют равенствам $Se = e \bullet s_1 = e \bullet s_2$ для всех $e \in E$, то $Q_0 \subset \operatorname{dom} s_1 \cap \operatorname{dom} s_2$ и $s_1 = s_2$ на Q_0.*

(2) *Существует единственная функция $s \in C(Q_0, P)$ такая, что $Se = e \bullet s$ для всех $e \in E$. При этом $h(U) = s^{-1}[U]$ — реализация тени h оператора S.*

◀ (1) Обозначим через D совокупность всех точек P, в которых отличны от нуля какие-либо функции из E. Очевидно, множество $s_1^{-1}[D]$ плотно в Q_0, поэтому нам достаточно установить равенство $s_1 = s_2$ на этом множестве. Возьмем произвольную точку $q \in s_1^{-1}[D]$ и допустим, вопреки доказываемому, что $s_1(q) \neq s_2(q)$. Поскольку $s_1(q) \in D$, существует функция $e \in E$, удовлетворяющая соотношениям $e(s_1(q)) \neq 0$ и $e(s_2(q)) = 0$, что противоречит равенству $e \bullet s_1 = e \bullet s_2$.

(2) Существование функции s следует из предложения 6.5.7, а ее единственность — из утверждения (1). Тот факт, что функция s реализует тень S вытекает из доказательства предложения 6.5.7. ▶

Если функция s удовлетворяет условиям утверждения (2), то соотношение $Se = e \bullet s$ будет называться *реализацией* оператора сдвига S посредством функции s. Заметим, что благодаря теореме Вулиха — Огасавары 1.3.7 предложения 6.5.7 и 6.5.8 описывают устройство операторов сдвига, действующих в произвольных K-пространствах.

6.5.9. Следующее предложение показывает, что всякий оператор сдвига представляет собой (с точностью до изоморфизма) оператор сужения на фиксированное множество.

Предложение. *Пусть E — фундамент $C_\infty(P)$, F — фундамент $C_\infty(Q)$ и $S\colon E \to F$ — оператор сдвига. Тогда существуют замкнутое подмножество $R \subset P$ и отображение $i\colon E|_R \to F$ такие, что*

(1) *$E|_R$ — векторная подрешетка K-пространства $C_\infty(R)$;*

(2) *i — линейный и порядковый изоморфизм $E|_R$ на $\operatorname{im} S$;*

(3) *$Se = i(e|_R)$ для всех $e \in E$.*

◀ Пусть $Se = e \bullet s$ — реализация S посредством функции $s \in C_0(Q,P)$. Положим $R := \operatorname{im} s$ и для каждого элемента $g \in E|_R$ определим функцию $i(g) \in C(Q, \overline{\mathbb{R}})$ формулой $i(g) := g \bullet s$. Проверка утверждений (1)–(3) не составляет труда. ▶

6.5.10. Теорема. *Пусть E — фундамент $C_\infty(P)$, а F — фундамент $C_\infty(Q)$. Отображение $T\colon E \to F$ является оператором взвешенного сдвига тогда и только тогда, когда существуют функции $s \in C_0(Q,P)$, $w \in C_\infty(P)$ и $W \in C_\infty(Q)$ такие, что $we \bullet s \in C_\infty(Q)$ и $Te = W(we \bullet s)$ для всех $e \in E$.*

◀ Непосредственно следует из предложений 6.5.4 и 6.5.7. ▶

6.5.11. Простые примеры показывают, что представление $Te = W(we \bullet s)$ оператора взвешенного сдвига T не единственно. Тем не менее, опуская некоторые детали, можно сказать, что функция s единственна, а W однозначно определяется выбором w. Это наблюдение можно строго сформулировать следующим образом.

Предложение. *Пусть E — фундамент $C_\infty(P)$, F — фундамент $C_\infty(Q)$ и $T\colon E \to F$ — регулярный оператор, сохраняющий дизъюнктность. Положим $Q_0 := \operatorname{supp}\operatorname{im} T$.*

(1) Пусть функции $s_1, s_2 \in C_0(Q,P)$, $w_1, w_2 \in C_\infty(P)$ и $W_1, W_2 \in C_\infty(Q)$ таковы, что $Te = W_1(w_1 e \bullet s_1) = W_2(w_2 e \bullet s_2)$ для всех $e \in E$. Тогда $Q_0 \subset \operatorname{dom} s_1 \cap \operatorname{dom} s_2$ и $s_1 = s_2$ на Q_0. Если, кроме того, $w_1 = w_2$, то $W_1 = W_2$ на Q_0.

(2) Пусть положительная функция $w \in C_\infty(P)$ такова, что оператор T широк на $1/w$ (см. 6.3.6). *Тогда существуют единственные функции $s \in C(Q_0, P)$ и $W \in C_\infty(Q)$ такие, что $W = 0$ вне Q_0 и $Te = W(we \bullet s)$ для всех $e \in E$. При этом $\operatorname{supp} W = s^{-1}[\operatorname{supp} w] = Q_0$, $Se = e \bullet s$ — реализация сдвига S оператора T, а $h(U) = s^{-1}[U]$ — реализация его тени h.*

◀ Утверждение (1) непосредственно следует из предложения 6.4.1 (с учетом 6.5.4 и 6.5.8). Поясним (2). Существование функций s и W вытекает из теорем 6.4.2 и 6.5.10, а их единственность — из утверждения (1). Связь функции s со сдвигом и тенью оператора T следует из предложений 6.4.1 (1) и 6.5.8 (2). ▶

Если s, w и W удовлетворяют условиям утверждения (2), то соотношение $Te = W(we \bullet s)$ будет называться *реализацией* оператора взвешенного сдвига T посредством функций s, w и W. Заметим, что благодаря теореме Вулиха — Огасавары 1.3.7 утверждения 6.5.10 и 6.5.11 описывают устройство операторов взвешенного сдвига, действующих в произвольных K-пространствах.

Замечание. Если $Te = W(we \bullet s)$ — реализация оператора взвешенного сдвига T, то операторы T^+, T^- и $|T|$ имеют следующие реализации: $T^+e = W^+(we \bullet s)$, $T^-e = W^-(we \bullet s)$ и $|T|e = |W|(we \bullet s)$.

6.5.12. Для любых функций $f, g \in C(Q, \overline{\mathbb{R}})$ произведение $fg \in C(Q, \overline{\mathbb{R}})$ определяется по правилу

$$(fg)(q) := \begin{cases} f(q)g(q), & \text{если произведение } f(q)g(q) \text{ осмыслено,} \\ & \text{т. е. не имеет вида } 0 \cdot \pm\infty \text{ или } \pm\infty \cdot 0, \\ 0, & \text{если } f \equiv 0 \text{ или } g \equiv 0 \text{ в окрестности } q \end{cases}$$

на всюду плотном подмножестве Q и затем продолжается на весь компакт Q по непрерывности.

Теорема. *Пусть E — фундамент $C_\infty(P)$, F — фундамент $C_\infty(Q)$ и $T\colon E \to F$ — регулярный оператор, сохраняющий дизъюнктность. Рассмотрим реализацию $h(U) = s^{-1}[U]$ тени h оператора T посредством функции $s \in C_0(Q,P)$. Тогда существуют семейство $(w_\xi)_{\xi\in\Xi}$ положительных функций из $C_\infty(P)$ и семейство $(W_\xi)_{\xi\in\Xi}$ попарно дизъюнктных функций из $C_\infty(Q)$ такие, что $1/w_\xi \in E$ для всех $\xi \in \Xi$ и*

$$Te = o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} W_\xi(w_\xi e \bullet s) \quad (e \in E). \tag{$*$}$$

◀ Приведенное утверждение является переформулировкой теоремы 6.4.5 с учетом предложения 6.5.11 (2). ▶

Заметим, что функции $w_\xi e \bullet s$, участвующие в представлении $(*)$, хотя и являются непрерывными функциями из Q в $\overline{\mathbb{R}}$, не обязаны принадлежать $C_\infty(Q)$, в то время как произведения $W_\xi(w_\xi e \bullet s)$ уже принадлежат $C_\infty(Q)$.

Соотношение $Te = o\text{-}\sum\limits_{\xi\in\Xi} W_\xi(w_\xi e \bullet s)$ мы будем называть *реализацией* оператора T посредством функций s, w_ξ и W_ξ. Заметим, что благодаря теореме Вулиха — Огасавары 1.3.7 последняя теорема описывают устройство регулярных сохраняющих дизъюнктность операторов, действующих в произвольных K-пространствах.

Замечание. Если $Te = o\text{-}\sum\limits_{\xi\in\Xi} W_\xi(w_\xi e \bullet s)$ — реализация оператора T, то операторы T^+, T^- и $|T|$ имеют следующие реализации:

$$T^+e = o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} W_\xi^+(w_\xi e \bullet s),$$

$$T^-e = o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} W_\xi^-(w_\xi e \bullet s),$$

$$|T|e = o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} |W_\xi|(w_\xi e \bullet s).$$

Оставшаяся часть данного параграфа посвящена реализации операторов, действующих в пространствах Банаха — Канторовича.

6.5.13. Если $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — просторные НБР над Q, $u \in C_\infty(Q, \mathscr{X})$ и $w \in C_\infty(Q, B(\mathscr{X}, \mathscr{Y}))$, то сечение $\operatorname{ext}(w \otimes u) \in C_\infty(Q, \mathscr{Y})$ будет обозначаться символом $w \mathbin{\overline{\otimes}} u$.

Предложение. *Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — просторные НБР над Q, а E и F — фундаменты $C_\infty(Q)$. Отображение $W\colon E(\mathscr{X}) \to F(\mathscr{Y})$ является ортоморфизмом тогда и только тогда, когда существует сечение $w \in C_\infty(Q, B(\mathscr{X}, \mathscr{Y}))$ такое, что $Wu = w \mathbin{\overline{\otimes}} u$ для всех $u \in E(\mathscr{X})$. Для любого ортоморфизма W такая функция w единственна. При этом $|W|(e) = |w|e$ для всех $e \in E$.*

◀ Пусть $W\colon E(\mathscr{X}) \to F(\mathscr{Y})$ — ортоморфизм. Рассмотрим реализацию $|W|(e) = ge$ ортоморфизма $|W|\colon E \to F$ посредством функции $g \in C_\infty(Q)$ (см. 6.2.13 и 6.5.4). Обозначим через D (открытое всюду плотное) множество всех точек Q, в которых конечна функция g и отличны от нуля какие-либо функции из E. Кроме того, положим $E_1 := E \cap C(Q)$. Определим отображение $w_0\colon q \in D \mapsto w(q) \in B(\mathscr{X}(q), \mathscr{Y}(q))$ следующим образом: для любых $q \in D$ и $x \in \mathscr{X}(q)$ возьмем сечение $u \in E_1(\mathscr{X})$, удовлетворяющее равенству $u(q) = x$, (такое сечение существует в силу 2.3.11) и положим $w_0(q)x := (Wu)(q)$. Корректность такого определения и ограниченность оператора $w_0(q)$ обеспечиваются соотношениями

$$\|(Wu)(q)\| = |Wu|(q) \leqslant (|W||u|)(q) = (g|u|)(q) = g(q)\|u(q)\|,$$

выполняющимися для всех $q \in D$ и $u \in E_1(\mathscr{X})$. По теореме 3.2.13 мы имеем $w_0 \in C(D, B(\mathscr{X}, \mathscr{Y}))$. Положим $w := \operatorname{ext}(w_0) \in C_\infty(Q, B(\mathscr{X}, \mathscr{Y}))$. Непосредственно из построения сечения w следует, что $Wu = w \mathbin{\overline{\otimes}} u$ для всех $u \in E_1(\mathscr{X})$. Множество $E_1(\mathscr{X})$, будучи фундаментом ПБК $E(\mathscr{X})$, аппроксимирует последнее. Поэтому в силу 6.2.15 ортоморфизмы W и $u \mapsto w \mathbin{\overline{\otimes}} u$ совпадают на всем пространстве $E(\mathscr{X})$.

Покажем единственность w. Пусть сечения $w_1, w_2 \in C_\infty(Q, B(\mathscr{X}, \mathscr{Y}))$ удовлетворяют равенству $w_1 \mathbin{\overline{\otimes}} u = w_2 \mathbin{\overline{\otimes}} u$ для всех $u \in E(\mathscr{X})$. Обозначим через D_0

множество всех точек Q, в которых отличны от нуля какие-либо функции из E, и положим $D := D_0 \cap \operatorname{dom} w_1 \cap \operatorname{dom} w_2$. Пусть $q \in D$ и $x \in \mathscr{X}(q)$. В силу 2.3.11 имеется такое сечение $u \in E(\mathscr{X})$, что $u(q) = x$. Поэтому

$$w_1(q)x = (w_1 \overline{\otimes} u)(q) = (w_2 \overline{\otimes} u)(q) = w_2(q)x.$$

Для обоснования равенства $w_1 = w_2$ осталось заметить, что множество D всюду плотно в Q.

Установим равенство $|W|(e) = |w|e$. Из 2.3.11 следует, что

$$|w| = \sup\{|w \overline{\otimes} u| : u \in C(Q, \mathscr{X}),\ |u| \leqslant 1\}.$$

Поэтому для всех положительных $e \in E$ мы имеем

$$|W|e = \sup_{|u| \leqslant e} |Wu| = \sup_{|u| \leqslant 1} |W(eu)|$$
$$= \sup_{|u| \leqslant 1} |w \overline{\otimes} (eu)| = \sup_{|u| \leqslant 1} |w \overline{\otimes} u|e = |w|e. \quad \blacktriangleright$$

Соотношение $Wu = w \overline{\otimes} u$ будет называться *реализацией* ортоморфизма W посредством сечения w. Заметим, что благодаря следствию 3.4.4 последнее предложение описывает устройство ортоморфизмов, действующих в произвольных ПБК.

6.5.14. Предложение. *Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — произвольные* НБР *над Q, причем $\mathscr{Y}$ просторно. Предположим, что E — фундамент $C_\infty(Q)$, $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ — решеточно нормированные подпространства $E(\mathscr{X})$ и $E(\mathscr{Y})$ соответственно и $\mathscr{U}$ аппроксимирует $E(\mathscr{X})$. Отображение $I\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ является изометрическим вложением тогда и только тогда, когда существует изометрическое вложение i расслоения $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$ такое, что $I(u) = i \overline{\otimes} u$ для всех $u \in \mathscr{U}$.*

◀ В проверке нуждается лишь необходимость. Пусть $I\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ — изометрическое вложение. В силу следствия 6.1.8 существует изометрическое вложение $\bar I\colon C_\infty(Q, \mathscr{X}) \to C_\infty(Q, \mathscr{Y})$, продолжающее I. Обозначим через $\overline{\mathscr{X}}$ просторную оболочку $\mathscr{X}$, реализуем $C_\infty(Q, \mathscr{X})$ в виде $C_\infty(Q, \overline{\mathscr{X}})$ (см. 3.4.9) и рассмотрим реализацию $\hat I(u) = \bar i \overline{\otimes} u$ соответствующей интерпретации $\hat I\colon C_\infty(Q, \overline{\mathscr{X}}) \to C_\infty(Q, \mathscr{Y})$ ортоморфизма $\bar I$ посредством сечения $\bar i \in C_\infty(Q, B(\overline{\mathscr{X}}, \mathscr{Y}))$. Несложно убедиться в том, что $\bar i$ — изометрическое вложение $\overline{\mathscr{X}}$ в $\mathscr{Y}$. Для каждой точки $q \in Q$ положим $i(q) := \bar i(q)|_{\mathscr{X}(q)}$. По определению гомоморфизма (см. 2.4.2) мы имеем $Q \otimes \bar i \in C(Q \otimes \overline{\mathscr{X}}, Q \otimes \mathscr{Y})$. Поэтому $Q \otimes i = (Q \otimes \bar i)|_{Q \otimes \mathscr{X}} \in C(Q \otimes \mathscr{X}, Q \otimes \mathscr{Y})$, т. е. $i \in \operatorname{Hom}_Q(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ и, следовательно, i — изометрическое вложение $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$. Осталось заметить, что $I(u) = \bar I(u) = \bar i \overline{\otimes} u = i \overline{\otimes} u$ для всех $u \in \mathscr{U}$. ▶

Следующий результат уточняет критерий 3.4.1 изометричности РНП.

Следствие. *Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — просторные* НБР *над Q и E — фундамент $C_\infty(Q)$. Отображение $I\colon E(\mathscr{X}) \to E(\mathscr{Y})$ является изометрическим вложением (изометрией) тогда и только тогда, когда существует изометрическое вложение (изометрия) i расслоения $\mathscr{X}$ в (на) $\mathscr{Y}$ такое, что $I(u) = i \overline{\otimes} u$ для всех $u \in E(\mathscr{X})$.*

Благодаря следствию 3.4.4 последнее утверждение описывает устройство изометрических вложений произвольных ПБК.

6.5.15. Лемма. *Пусть $\mathscr{X}$ — просторное* НБР *над P, $s \in C_0(Q, P)$ и $u \in C_\infty(P, \mathscr{X})$. Если $|u| \in C_s(P)$, то $u \bullet s \in C_\infty(Q, \mathscr{X} \bullet s)$.*

◀ Во-первых, область определения сечения $u \bullet s$ совпадает с $\operatorname{dom}(|u| \bullet s)$ и поэтому плотна в Q благодаря включению $|u| \in C_s(P)$. Во-вторых, если сечение $u \bullet s$ имеет предел в точке $q \in Q$, то $q \in \operatorname{dom}|u \bullet s| = \operatorname{dom}(|u| \bullet s) = \operatorname{dom}(u \bullet s)$. ▶

Заметим, что просторность $\mathscr{X}$ не обеспечивает просторности $\mathscr{X} \bullet s$. Действительно, если слой $\mathscr{X}(p)$ бесконечномерен, компакт Q бесконечен, а функция $s\colon Q \to P$ постоянна и равна p, то по теореме 5.1.3 расслоение $\mathscr{X} \bullet s$ непросторно.

6.5.16. Лемма. *Пусть $\mathscr{X}$ — просторное* НБР *над P, E — фундамент $C_\infty(P)$, F — фундамент $C_\infty(Q)$ и $S\colon E \to F$ — оператор сдвига. Обозначим* ПБК *$E(\mathscr{X})$ через $\mathscr{U}$ и рассмотрим оператор нормативного преобразования $S_\mathscr{U}\colon \mathscr{U} \to S\mathscr{U}$* (см. 1.4.7). *Пусть $Se = e \bullet s$ — реализация оператора S посредством функции $s \in C_0(Q,P)$. Тогда существует F-изометрическое вложение $i\colon S\mathscr{U} \to F(\mathscr{X} \bullet s)$ такое, что $iS_\mathscr{U}u = u \bullet s$ для всех $u \in E(\mathscr{X})$.*

◀ Определим оператор $i_0\colon S_\mathscr{U}[\mathscr{U}] \to F(\mathscr{X} \bullet s)$, положив $i_0(S_\mathscr{U}u) := u \bullet s$ для всех $u \in \mathscr{U}$. Корректность такого определения обосновывается равенствами $|u \bullet s| = |u| \bullet s = S|u| = |S_\mathscr{U}u|$ $(u \in \mathscr{U})$, из которых в том числе следует, что $|i_0(v)| = |v|$ для всех $v \in S_\mathscr{U}[\mathscr{U}]$. По следствию 6.1.8 оператор i_0 продолжается до искомого изометрического вложения $i\colon S\mathscr{U} \to F(\mathscr{X} \bullet s)$. ▶

6.5.17. Предложение. *Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — просторные* НБР *над P и Q, а E и F — фундаменты $C_\infty(P)$ и $C_\infty(Q)$ соответственно. Отображение $S\colon E(\mathscr{X}) \to F(\mathscr{Y})$ является оператором сдвига тогда и только тогда, когда существуют функция $s \in C_0(Q,P)$ и изометрическое вложение i расслоения $\mathscr{X} \bullet s$ в $\mathscr{Y}$ такие, что $Su = i \otimes (u \bullet s)$ для всех $u \in E(\mathscr{X})$. В этом случае $|S|e = e \bullet s$ для всех $e \in E$.*

◀ Достаточность легко проверить с помощью теоремы 6.3.15, а необходимость можно установить последовательным применением предложения 6.3.14, леммы 6.5.16 и предложения 6.5.14. ▶

Если в формулировке последнего предложения дополнительно потребовать, чтобы функция s была определена на $\operatorname{supp}\operatorname{im}S$ (см. 2.5.4), то выбор s и i, дающих представление $Su = i \otimes (u \bullet s)$, станет единственным (это легко вывести из предложения 6.5.8). В этом случае соотношение $Su = i \otimes (u \bullet s)$ будет называться *реализацией* оператора сдвига S посредством функции s и вложения i. Заметим, что благодаря следствию 3.4.4 последнее предложение описывает устройство операторов сдвига, действующих в произвольных ПБК.

6.5.18. Теорема. *Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — просторные* НБР *над P и Q, а E и F — фундаменты $C_\infty(P)$ и $C_\infty(Q)$ соответственно. Отображение $T\colon E(\mathscr{X}) \to F(\mathscr{Y})$ является оператором взвешенного сдвига тогда и только тогда, когда существуют положительная функция $w \in C_\infty(P)$, отображение $s \in C_0(Q,P)$ и сечение $W \in C_\infty(Q, B(\overline{\mathscr{X} \bullet s}, \mathscr{Y}))$ (где $\overline{\mathscr{X} \bullet s}$ — просторная оболочка $\mathscr{X} \bullet s$) такие, что $Tu = W \mathbin{\overline{\otimes}} (wu \bullet s)$ для всех $u \in E(\mathscr{X})$ и $|T|e = |W|(we \bullet s)$ для всех $e \in E$. При этом можно считать, что $\operatorname{dom} s = \operatorname{supp}\operatorname{im}T$ и $W = 0$ вне $\operatorname{supp}\operatorname{im}T$.*

◀ Достаточность легко проверить с помощью предложений 6.5.13 и 6.5.17. Покажем необходимость. Если $T\colon E(\mathscr{X}) \to F(\mathscr{Y})$ — оператор взвешенного сдвига, то согласно теореме 6.4.6 существуют ПБК $\mathscr{V}'$ над некоторым фундаментом $F' \subset C_\infty(Q)$, скалярный ортоморфизм $\overline{w}\colon E(\mathscr{X}) \to C_\infty(P, \mathscr{X})$, порожденный положительным ортоморфизмом $w\colon E \to C_\infty(P)$, оператор сдвига $\overline{S}\colon (wE)(\mathscr{X}) \to \mathscr{V}'$ и ортоморфизм $\overline{W}\colon \mathscr{V}' \to F(\mathscr{Y})$ такие, что $T = \overline{W} \circ \overline{S} \circ \overline{w}$ и $|T| = |\overline{W}| \circ |\overline{S}| \circ |\overline{w}|$. Благодаря следствию 3.4.4 мы можем считать, что $\mathscr{V}' = F'(\mathscr{Z})$, где $\mathscr{Z}$ — просторное НБР над Q. Согласно предложению 6.5.17 имеются функция $s \in C_0(Q,P)$ и изометрическое вложение i расслоения $\mathscr{X} \bullet s$ в $\mathscr{Z}$ такие, что $\overline{S}u = i \otimes (u \bullet s)$ для всех $u \in (wE)(\mathscr{X})$. В силу следствия 3.1.10 гомоморфизм i продолжается до изометрического вложения $\bar{i}$ расслоения $\overline{\mathscr{X} \bullet s}$ в $\mathscr{Z}$. Благодаря предложению 6.5.13 ортоморфизм $(v \mapsto \overline{W}(\bar{i} \otimes v))\colon F'(\overline{\mathscr{X} \bullet s}) \to F(\mathscr{Y})$ можно представить в виде $v \mapsto W \mathbin{\overline{\otimes}} v$, где $W \in C_\infty(Q, B(\overline{\mathscr{X} \bullet s}, \mathscr{Y}))$. Несложно убедиться в том, что построенные функции w, s и W являются искомыми. ▶

Если функции w, s и W удовлетворяют условиям, сформулированным в теореме 6.5.18, то соотношение $Tu = W \mathbin{\overline{\otimes}} (wu \bullet s)$ будет называться *реализацией* оператора T посредством s, w и W. Заметим, что благодаря следствию 3.4.4 последняя теорема описывает устройство операторов взвешенного сдвига, действующих в произвольных ПБК.

6.5.19. Пусть $\mathscr{Y}$ — НБР над Q и $(Q_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — дизъюнктное семейство элементов $\mathrm{Clop}(Q)$. Предположим, что для каждого индекса $\xi \in \Xi$ задано сечение $v_\xi \in C(D_\xi, \mathscr{Y})$ над всюду плотным подмножеством $D_\xi \subset Q_\xi$. Положим $D := Q \backslash \mathrm{cl} \bigcup\limits_{\xi\in\Xi} Q_\xi$. Ясно, что объединение $\bigcup\limits_{\xi\in\Xi} D_\xi \cup D$ является всюду плотным подмножеством Q, а определенная на нем функция $\bigcup\limits_{\xi\in\Xi} v_\xi \cup 0|_D$ представляет собой непрерывное сечение $\mathscr{Y}$. Максимальное расширение этого непрерывного сечения мы будем в дальнейшем обозначать символом $\bigoplus\limits_{\xi\in\Xi} v_\xi$.

Теорема. *Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — просторные* НБР *над P и Q, E и F — фундаменты $C_\infty(P)$ и $C_\infty(Q)$ соответственно, $T\colon E(\mathscr{X}) \to F(\mathscr{Y})$ — ограниченный оператор, сохраняющий дизъюнктность, и $h(U) = s^{-1}[U]$ — реализация тени h оператора T посредством функции $s \in C_0(Q, P)$. Тогда существуют семейство $(w_\xi)_{\xi\in\Xi}$ положительных функций из $C_\infty(P)$, дизъюнктное семейство $(Q_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов* $\mathrm{Clop}(Q)$ *и сечение $W \in C_\infty(Q, B(\overline{\mathscr{X} \bullet s}, \mathscr{Y}))$ такие, что $\mathrm{supp}\, W = \mathrm{cl} \bigcup\limits_{\xi\in\Xi} Q_\xi = \mathrm{dom}\, s = \mathrm{supp}\, \mathrm{im} T$, $1/w_\xi \in E$ для всех $\xi \in \Xi$ и*

$$Tu = \bigoplus_{\xi\in\Xi} W \otimes (w_\xi u \bullet s)|_{Q_\xi} \quad (u \in E(\mathscr{X})). \qquad (**)$$

◄ Приведенное утверждение является переформулировкой теоремы 6.4.8 с учетом 6.5.18. ►

Заметим, что функции $w_\xi u \bullet s$, участвующие в представлении $(**)$, хотя и являются непрерывными сечениями расслоения $\mathscr{X} \bullet s$, не обязаны принадлежать $C_\infty(Q, \mathscr{X} \bullet s)$, в то время как сужения $(w_\xi u \bullet s)|_{Q_\xi}$ принадлежат $C_\infty(Q_\xi, \mathscr{X} \bullet s)$.

Соотношение $Tu = \bigoplus\limits_{\xi\in\Xi} W \otimes (w_\xi u \bullet s)|_{Q_\xi}$ будет называться *реализацией* оператора T (посредством s, w_ξ, Q_ξ и W). Отметим, что благодаря следствию 3.4.4 последняя теорема описывает устройство ограниченных сохраняющих дизъюнктность операторов, действующих в произвольных ПБК.

§ 6.6. Интерпретация свойств операторов в терминах их реализаций

Реализационные теоремы § 6.5 предоставляют возможность переформулировать разнообразные свойства ортоморфизмов, операторов сдвига, операторов взвешенного сдвига и произвольных сохраняющих дизъюнктность операторов в терминах свойств тех или иных участников их реализации. В качестве иллюстрации мы рассмотрим такие свойства оператора, как порядковая непрерывность, инъективность и идеальность образа.

На протяжении всего параграфа P и Q — экстремально несвязные компакты.

6.6.1. Лемма. *Пусть X и Y — вполне несвязные компакты и $s\colon X \to Y$ — непрерывная функция.*

(a) *Следующие утверждения равносильны:*

(1) *$s^{-1}[\mathrm{int}\, F] = \mathrm{int}\, s^{-1}[F]$ для любого замкнутого подмножества $F \subset Y$;*

(2) *$s^{-1}[\mathrm{cl}\, G] = \mathrm{cl}\, s^{-1}[G]$ для любого открытого подмножества $G \subset Y$;*

(3) *если F — замкнутое подмножество Y и $\mathrm{int}\, F = \varnothing$, то $\mathrm{int}\, s^{-1}[F] = \varnothing$;*

(4) *если G — открытое подмножество Y и $\mathrm{cl}\, G = Y$, то $\mathrm{cl}\, s^{-1}[G] = X$;*

(5) *прообраз $s^{-1}[D]$ любого тощего подмножества $D \subset Y$ является тощим подмножеством X;*

(6) *прообраз $s^{-1}[D]$ любого котощего подмножества $D \subset Y$ является котощим подмножеством X.*

(б) *Следующие утверждения равносильны*:

(1) $s^{-1}[\operatorname{int} F] = \operatorname{int} s^{-1}[F]$ *для любого замкнутого σ-открытого подмножества $F \subset Y$*;

(2) $s^{-1}[\operatorname{cl} G] = \operatorname{cl} s^{-1}[G]$ *для любого открытого σ-замкнутого подмножества $G \subset Y$*;

(3) *если F — замкнутое σ-открытое подмножество Y и $\operatorname{int} F = \varnothing$, то $\operatorname{int} s^{-1}[F] = \varnothing$*;

(4) *если G — открытое σ-замкнутое подмножество Y и $\operatorname{cl} G = Y$, то $\operatorname{cl} s^{-1}[G] = X$.*

Функцию s, удовлетворяющую любому из условий (а) (соответственно (б)), мы будем называть *точной* (*σ-точной*).

Замечание. Если компакт Y экстремально несвязен, то список (а) можно дополнить следующими эквивалентными утверждениями:

(7) *если U — открыто-замкнутое подмножество X, то $s[U]$ — открыто-замкнутое подмножество Y*;

(8) *если U — открытое подмножество X, то $s[U]$ — открытое подмножество Y.*

Как известно, функция s, удовлетворяющая условию (8), называется *открытой*. Таким образом, если компакт Y экстремально несвязен, то точность непрерывной функции $s\colon X \to Y$ равносильна ее открытости. Автору не известны аналоги утверждений (7) и (8), равносильные σ-точности функции s.

6.6.2. Предложение. *Пусть X и Y — вполне несвязные компакты и $h\colon \operatorname{Clop}(X) \to \operatorname{Clop}(Y)$ — кольцевой гомоморфизм. Рассмотрим реализацию $h(U) = s^{-1}[U]$ гомоморфизма h посредством функции $s \in C_0(Y, X)$. Гомоморфизм h o-непрерывен (секвенциально o-непрерывен) тогда и только тогда, когда функция s точна (σ-точна).*

◄ Доказательство имеется в [25, § 22]. ►

6.6.3. Пусть $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ — РНП над фундаментами K-пространств $C_\infty(P)$ и $C_\infty(Q)$ соответственно. Если $T\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ — оператор, сохраняющий дизъюнктность, и $h(U) = s^{-1}[U]$ — реализация тени h оператора T посредством функции $s \in C_0(Q, P)$, то мы будем говорить, что s — *функция сдвига* оператора T. Оправданием такой терминологии является тот факт, что функция s реализует сдвиг оператора T в смысле 6.5.17.

Теорема. *Пусть E и F — фундаменты $C_\infty(P)$ и $C_\infty(Q)$ соответственно, $\mathscr{U}$ — ПБК над E, $\mathscr{V}$ — РНП над F, $T\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ — ограниченный оператор, сохраняющий дизъюнктность, и $s \in C_0(Q, P)$ — его функция сдвига. Оператор T o-непрерывен (секвенциально o-непрерывен) тогда и только тогда, когда функция s точна (σ-точна).*

◄ Поскольку функция s реализует тень оператора T, доказываемое утверждение следует из 6.6.2 и 6.1.6. ►

6.6.4. Предложение. *Пусть X и Y — вполне несвязные компакты и $h\colon \operatorname{Clop}(X) \to \operatorname{Clop}(Y)$ — кольцевой гомоморфизм. Рассмотрим реализацию $h(U) = s^{-1}[U]$ гомоморфизма h посредством функции $s \in C_0(Y, X)$. Гомоморфизм h инъективен тогда и только тогда, когда функция s сюръективна.*

6.6.5. Теорема. *Пусть E и F — фундаменты $C_\infty(P)$ и $C_\infty(Q)$ соответственно, $T\colon E \to F$ — регулярный оператор, сохраняющий дизъюнктность, и $s \in C_0(Q, P)$ — его функция сдвига. Оператор T инъективен тогда и только тогда, когда функция s сюръективна.*

◀ Необходимость. В силу предложения 6.6.4 достаточно, предположив инъективность оператора T, установить инъективность его тени $h\colon \mathrm{Pr}(E) \to \mathrm{Pr}(F)$. Рассмотрим произвольный проектор $\pi \in \mathrm{Pr}(E)$ и предположим, что $h(\pi) = 0$. Тогда $T\pi e = 0$ для всех $e \in E$. Благодаря инъективности T, последнее означает, что $\pi e = 0$ для всех $e \in E$, т. е. $\pi = 0$.

Достаточность. Пусть $Te = \bigoplus\limits_{\xi\in\Xi} W(w_\xi e \bullet s)|_{Q_\xi}$ — реализация оператора T посредством $s \in C_0(Q,P)$, $w_\xi \in C_\infty(P)$, $Q_\xi \in \mathrm{Clop}(Q)$ и $W \in C_\infty(Q)$, причем функция s сюръективна. Для каждого $\xi \in \Xi$ положим $P_\xi := \operatorname{supp} w_\xi$. Рассмотрим произвольную функцию $e \in E$ и предположим, что $Te = 0$. Тогда $W(w_\xi e \bullet s)|_{Q_\xi} = 0$ для всех $\xi \in \Xi$. Последнее означает, что для каждого $\xi \in \Xi$ выполнено $w_\xi e \bullet s = 0$ на Q_ξ, откуда следует равенство $w_\xi e = 0$ на $s[Q_\xi]$, а значит и равенство $e = 0$ на $s[Q_\xi] \cap P_\xi$. Таким образом, функция e равна нулю на объединении $D := \bigcup\limits_{\xi\in\Xi} s[Q_\xi]\cap P_\xi$. Остается показать, что множество D всюду плотно в P.

Пусть открыто-замкнутое множество U содержится в разности $P\backslash D$. Тогда для всех $e \in E$ и $\xi \in \Xi$ имеет место равенство $w_\xi\langle U\rangle e = 0$ на $U^\perp \cup P_\xi^\perp$. Из включения $s[Q_\xi] \cap P_\xi \subset U^\perp$ следует, что $w_\xi\langle U\rangle e = 0$ на $s[Q_\xi]$. Поэтому $(w_\xi\langle U\rangle e) \bullet s = 0$ на Q_ξ, а значит и $W((w_\xi\langle U\rangle e) \bullet s)|_{Q_\xi} = 0$. Произвольность $\xi \in \Xi$ позволяет нам заключить, что $T\langle U\rangle e = 0$, а произвольность $e \in E$ дает равенство $h\langle U\rangle = 0$. Последнее в силу инъективности h (см. предложение 6.6.4) означает, что $U = \varnothing$. ▶

6.6.6. Замечание. Автору не удалось получить удовлетворительный критерий инъективности оператора, действующего в ПБК. Как показывают элементарные примеры, прямое обобщение последней теоремы на случай операторов в ПБК не имеет места. Реализационное описание инъективности такого оператора должно в том или ином виде затрагивать внешний вес реализации.

6.6.7. ***Предложение.*** *Пусть X и Y — вполне несвязные компакты и $h\colon \mathrm{Clop}(X) \to \mathrm{Clop}(Y)$ — кольцевой гомоморфизм. Рассмотрим реализацию $h(U) = s^{-1}[U]$ гомоморфизма h посредством функции $s \in C_0(Y,X)$. Равенство $\operatorname{im} h = [0, h(1)]$ имеет место тогда и только тогда, когда функция s инъективна.*

6.6.8. ***Лемма.*** *Непрерывная функция $s\colon Q \to P$ инъективна тогда и только тогда, когда оператор $(e \mapsto e \circ s)\colon C(P) \to C(Q)$ сюръективен.*

◀ Если функция s инъективна, то она осуществляет гомеоморфизм Q на $\operatorname{im} s$. В этом случае любую функцию $f \in C(Q)$ можно представить в виде $g \circ s$, где $g \in C(\operatorname{im} s)$. По теореме Титце — Урысона функцию g можно продолжить до функции $e \in C(P)$.

Если точки $q_1, q_2 \in Q$ различны, то найдется открыто-замкнутое множество $V \subset Q$, содержащее ровно одну из них. В случае сюръективности оператора $e \mapsto e \circ s$ характеристическую функцию множества V можно представить в виде $e \circ s$, откуда следует, что $s(q_1) \neq s(q_2)$. ▶

6.6.9. В дальнейшем речь пойдет о реализационной интерпретации идеальности образа оператора. Для пояснения этого свойства мы приведем один результат, установленный в [44, лемма 2.7].

Лемма. *Пусть E и F — векторные решетки и $T\colon E \to F$ — регулярный оператор, сохраняющий дизъюнктность. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $\operatorname{im} T$ — *идеал* F;
(2) $\operatorname{im}|T|$ — *идеал* F;
(3) $|T|[0,e] = [0, |T|e]$ *для всех положительных* $e \in E$.

К списку эквивалентных свойств (1)–(3) оператора T можно добавить следующее: оператор T переводит идеалы E в идеалы F, т. е. для любого идеала $E_0 \subset E$ множество $T[E_0]$ — идеал F.

6.6.10. Предложение. *Пусть E и F — фундаменты $C_\infty(P)$ и $C_\infty(Q)$ соответственно, $T\colon E \to F$ — регулярный оператор, сохраняющий дизъюнктность, и $s \in C_0(Q,P)$ — его функция сдвига. Предположим, что $\langle T\bar{e}\rangle = \langle \operatorname{im} T\rangle$ для некоторого элемента $\bar{e} \in E$. Образ оператора T является идеалом F тогда и только тогда, когда функция s инъективна.*

◀ Благодаря теореме 6.1.1 мы можем считать, что оператор T положителен и $\bar{e} \geqslant 0$. Кроме того, для удобства будем считать, что $\langle \operatorname{im} T\rangle = 1$, т. е. $\operatorname{dom} s = Q$.

Пусть образ T является идеалом. В силу леммы 6.6.8 для доказательства инъективности s достаточно зафиксировать произвольную функцию $\beta \in C(Q)$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, и представить ее в виде $\alpha \circ s$, где $\alpha \in C(P)$. Согласно лемме 6.6.9 из неравенств $0 \leqslant \beta T\bar{e} \leqslant T\bar{e}$ следует существование такого элемента $e \in E$, что $0 \leqslant e \leqslant \bar{e}$ и $Te = \beta T\bar{e}$. Пусть функция $\alpha \in C(P)$ такова, что $e = \alpha\bar{e}$. Тогда с учетом 6.3.13 мы имеем $(\alpha \circ s)T\bar{e} = T(\alpha\bar{e}) = Te = \beta T\bar{e}$, откуда $\alpha \circ s = \beta$ в силу равенства $\langle T\bar{e}\rangle = 1$.

Предположим теперь, что функция s инъективна. Зафиксируем произвольные элементы $e \in E$ и $f \in F$, удовлетворяющие неравенствам $0 \leqslant f \leqslant Te$, и покажем, что $f \in \operatorname{im} T$. Пусть функция $\beta \in C(Q)$ такова, что $f = \beta Te$. В силу сюръективности оператора $(e \mapsto e \circ s)\colon C(P) \to C(Q)$ (см. 6.6.8) существует такая функция $\alpha \in C(P)$, что $\alpha \circ s = \beta$. Тогда $\alpha e \in E$ и с учетом 6.3.13 мы имеем $T(\alpha e) = (\alpha \circ s)Te = \beta Te = f$. ▶

6.6.11. Существование элемента $\bar{e} \in E$, удовлетворяющего соотношению $\langle T\bar{e}\rangle = \langle \operatorname{im} T\rangle$, является существенным условием в формулировке предложения 6.6.10. Без этого требования функция s может быть неинъективной даже в том случае, когда T является сюръективным оператором сдвига. В этом разделе мы приведем соответствующий пример.

Лемма. *Рассмотрим $s \in C_0(Q,P)$ и $f \in C_\infty(Q)$. Пусть имеется такое открытое множество $D \subset P$, что функция s инъективна на $s^{-1}[D]$, а функция f равна нулю вне $s^{-1}[D]$. Тогда $f = e \bullet s$ для некоторой функции $e \in C_\infty(P)$. Для положительной и/или ограниченной функции f можно подобрать соответствующую функцию e с тем же свойством.*

◀ Обозначим образ s через R и определим функцию $g\colon R \to \overline{\mathbb{R}}$ следующим образом:

$$g(p) := \begin{cases} f(s^{-1}(p)), & \text{если } p \in R \cap D, \\ 0, & \text{если } p \in R \backslash D. \end{cases}$$

Зафиксируем произвольную точку $p \in R$ и покажем, что функция g непрерывна в p.

(1) Пусть $p \in R \cap D$. Поскольку множество D открыто, в этом случае имеется такое открыто-замкнутое множество $U \subset P$, что $p \in U \subset D$. Из инъективности s на $s^{-1}[D]$ следует, что сужение $s|^U$ является гомеоморфизмом $s^{-1}[U]$ на $R \cap U$. Поэтому функция $g|_U = f \circ \left(s|^U\right)^{-1}$ непрерывна.

(2) Пусть теперь $p \in R \backslash D$. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$ и покажем, что $|g| < \varepsilon$ в окрестности точки p. Положим $Q_\varepsilon := \{q \in Q : |f(q)| \geqslant \varepsilon\}$. Учитывая, что $f = 0$ вне $s^{-1}[D]$, мы имеем включение $Q_\varepsilon \subset s^{-1}[D]$, а значит, $s[Q_\varepsilon] \subset D$. Поскольку $|f| < \varepsilon$ вне Q_ε, мы заключаем, что $|g| < \varepsilon$ вне $s[Q_\varepsilon]$. Остается заметить, что $R \backslash s[Q_\varepsilon]$ — окрестность точки p в пространстве R.

Итак, функция g непрерывна. Очевидно, что $g \bullet s = f$. Отсюда следует, что $g \in \overline{C}_\infty(R)$ (если $|g| = \infty$ на непустом открытом множестве $W \subset R$, то

$|f| = |g \bullet s| = \infty$ на непустом открытом множестве $s^{-1}[W]$, что противоречит включению $f \in C_\infty(Q)$). Согласно лемме 1.1.5 существует такая функция $e \in C_\infty(P)$, что $e = g$ на R. Очевидно, e — искомая функция. Заметим, что положительность и/или ограниченность функции f влечет соответствующее свойство g, которое, в свою очередь, позволяет подобрать функцию e с нужным свойством. ▶

Пример. Как известно, разность $\beta\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ содержит дискретное множество D мощности континуум (см. [4, гл. IV, задача 52]). Обозначим через $s\colon \beta D \to \beta\mathbb{N}$ непрерывное продолжение тождественного отображения D. Введем также обозначения $\overline{D} := \mathrm{cl}_{\beta\mathbb{N}} D$, $E := \{e \in C(\beta\mathbb{N}) : e = 0$ на $\overline{D}\backslash D\}$, $F := \{f \in C(\beta D) : f = 0$ на $\beta D\backslash D\}$ и положим $Se := e \circ s$ для всех $e \in E$. Тогда $S\colon E \to F$ — сюръективный оператор сдвига, в то время как его функция сдвига s не является инъективной.

◀ Прежде всего, покажем, что s действительно является функцией сдвига оператора S. Для этого нужно установить равенство $\mathrm{supp}\,\mathrm{im}\,S = \beta D$ (см. 6.5.8). Поскольку подмножество $D \subset \beta\mathbb{N}$ дискретно, у каждой точки $q \in D$ имеется такая окрестность $U \subset \beta\mathbb{N}$, что $U \cap D = \{q\}$. Тогда $\chi_U \in E$ и $(S\chi_U)(q) = \chi_U(s(q)) = \chi_U(q) = 1$. Таким образом, $D \subset \mathrm{supp}\,\mathrm{im} S$, откуда следует, что $\mathrm{supp}\,\mathrm{im}\,S = \beta D$.

Покажем теперь, что оператор S сюръективен. Зафиксируем произвольный элемент $f \in F$ и положим $\mathscr{D} := \beta\mathbb{N}\backslash(\overline{D}\backslash D)$. Тогда $\mathscr{D}$ — открытое подмножество $\beta\mathbb{N}$, $s^{-1}[\mathscr{D}] = s^{-1}[D] = D$, функция s инъективна на D, а функция f равна нулю вне D. Поэтому в силу леммы существует такая функция $e \in C(\beta\mathbb{N})$, что $f = e \circ s$. Ясно, что $e \in E$, и поэтому $f \in \mathrm{im} S$.

Осталось заметить, что функция $s\colon \beta D \to \beta\mathbb{N}$ не инъективна, поскольку (см. [4, гл. VI, задача 180])

$$|\beta D| = 2^{2^{|D|}} > 2^{2^{|\mathbb{N}|}} = |\beta\mathbb{N}|,$$

где символ $|X|$ обозначает мощность множества X. ▶

6.6.12. Теорема. *Пусть E и F — фундаменты $C_\infty(P)$ и $C_\infty(Q)$ соответственно, $T\colon E \to F$ — регулярный оператор, сохраняющий дизъюнктность, и $s \in C_0(Q, P)$ — его функция сдвига. Образ оператора T является идеалом F тогда и только тогда, когда для любого элемента $e \in E$ функция s инъективна на множестве $\mathrm{supp}\,Te$. Последнее свойство функции s равносильно ее инъективности на объединении $\cup\{\mathrm{supp}\,Te : e \in E\}$ (представляющем собой открытое всюду плотное подмножество $\mathrm{dom}\,s$).*

◀ Необходимость. Предположим, что образ T является идеалом, и рассмотрим произвольный элемент $e \in E$. Ясно, что композиция $\langle Te\rangle \circ T$ тоже имеет идеальный образ и в силу предложения 6.6.10 ее функция сдвига инъективна. Осталось заметить, что функция сдвига оператора $\langle Te\rangle \circ T$ представляет собой сужение s на $\mathrm{supp}\,Te$.

Достаточность. Теорема 6.1.1 позволяет считать оператор T положительным. Зафиксируем произвольные положительные элементы $e \in E$ и $f \in F$, удовлетворяющие неравенству $f \leqslant Te$, и покажем, что $f \in \mathrm{im} T$. Поскольку функция s инъективна на множестве $\mathrm{supp}\,Te$, в силу предложения 6.6.10 образ композиции $\langle Te\rangle \circ T$ является идеалом F. Согласно лемме 6.6.9 из неравенств $0 \leqslant f \leqslant \langle Te\rangle Te$ следует существование такого элемента $e_0 \in E$, что $0 \leqslant e_0 \leqslant e$ и $\langle Te\rangle Te_0 = f$, откуда вытекает равенство $Te_0 = f$.

Из инъективности функции s на каждом из множеств вида $\mathrm{supp}\,Te$ ($e \in E$) следует инъективность s на объединении $\cup\{\mathrm{supp}\,Te : e \in E\}$, поскольку включения $q_1 \in \mathrm{supp}\,Te_1$ и $q_2 \in \mathrm{supp}\,Te_2$ влекут $q_1, q_2 \in \mathrm{supp}\,T(|e_1| \vee |e_2|)$. ▶

Замечание. В условиях последней теоремы инъективность функции s на объединении $\cup\{\mathrm{Supp}\,Te : e \in E\}$ недостаточна для идеальности образа T (здесь

$\operatorname{Supp} f = \{q \in Q : f(q) \neq 0\}$). Действительно, положим $P = Q = \beta\mathbb{N}$, зафиксируем точку $p \in P\backslash\mathbb{N}$ и, естественным образом отождествляя пространства $C(Q)$ и ℓ^∞, рассмотрим оператор $T\colon C(P) \to C(Q)$, действующий по правилу

$$(Te)(n) = \begin{cases} e(p), & \text{если } n = 1, \\ e(n)/n, & \text{если } n > 1 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

для всех $e \in C(P)$. Образ оператора T не является идеалом, так как, например, $(1,1/2,\dots,1/n,\dots) \in \operatorname{im} T$, но $(1,0,0,\dots) \notin \operatorname{im} T$. Тем не менее функция сдвига s оператора T инъективна на множестве $\cup\{\operatorname{Supp} Te : e \in E\} = \mathbb{N}$, так как $s(1) = p$ и $s(n) = n$ при $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$.

6.6.13. Как известно (см. 6.2.17), всякое ПБК над фундаментом $C_\infty(P)$ является модулем над $C(P)$. Подмножество $\mathscr{U}_0$ такого ПБК называется его *$C(P)$-подмодулем*, если $\alpha u \in \mathscr{U}_0$ для всех $u \in \mathscr{U}_0$ и $\alpha \in C(P)$.

Лемма. *Пусть E и F — фундаменты $C_\infty(P)$ и $C_\infty(Q)$ соответственно, $\mathscr{U}$ — ПБК над E, $\mathscr{V}$ — ПБК над F. Следующие свойства оператора $T\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ эквивалентны:*

(1) *оператор T переводит $C(P)$-подмодули $\mathscr{U}$ в $C(Q)$-подмодули $\mathscr{V}$;*
(2) *для любых $u \in \mathscr{U}$ и $\beta \in C(Q)$ существует такая функция $\alpha \in C(P)$, что $T(\alpha u) = \beta T u$.*

◀ Достаточно заметить, что множество $\{\alpha u : \alpha \in C(P)\}$ представляет собой $C(P)$-подмодуль $\mathscr{U}$. ▶

6.6.14. Предложение. *Пусть E и F — фундаменты $C_\infty(P)$ и $C_\infty(Q)$ соответственно, $\mathscr{U}$ — ПБК над E, $\mathscr{V}$ — ПБК над F, $T\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ — ограниченный оператор, сохраняющий дизъюнктность, и $s \in C_0(Q, P)$ — его функция сдвига. Предположим, что $\langle T\bar{u}\rangle = \langle \operatorname{im} T\rangle$ для некоторого элемента $\bar{u} \in \mathscr{U}$. Оператор T переводит $C(P)$-подмодули $\mathscr{U}$ в $C(Q)$-подмодули $\mathscr{V}$ тогда и только тогда, когда функция s инъективна.*

◀ Для удобства будем считать, что $\langle \operatorname{im} T\rangle = 1$, т. е. $\operatorname{dom} s = Q$. Пусть T переводит $C(P)$-подмодули $\mathscr{U}$ в $C(Q)$-подмодули $\mathscr{V}$. В силу 6.6.8 для доказательства инъективности s достаточно зафиксировать произвольную функцию $\beta \in C(Q)$ и представить ее в виде $\alpha \circ s$, где $\alpha \in C(P)$. Согласно лемме 6.6.13 существует такая функция $\alpha \in C(P)$, что $T(\alpha\bar{u}) = \beta T\bar{u}$. Тогда с учетом 6.3.13 мы имеем $|\alpha \circ s - \beta||T\bar{u}| = |(\alpha \circ s)T\bar{u} - \beta T\bar{u}| = |T(\alpha\bar{u}) - \beta T\bar{u}| = 0$, откуда $\alpha \circ s = \beta$ в силу равенства $\langle T\bar{u}\rangle = 1$.

Предположим теперь, что функция s инъективна. Зафиксируем произвольные элементы $u \in \mathscr{U}$ и $\beta \in C(Q)$. В силу сюръективности оператора $(e \mapsto e \circ s)\colon C(P) \to C(Q)$ (см. 6.6.8) существует такая функция $\alpha \in C(P)$, что $\alpha \circ s = \beta$. Тогда с учетом 6.3.13 мы имеем $T(\alpha u) = (\alpha \circ s)Tu = \beta T u$. Осталось привлечь лемму 6.6.13. ▶

6.6.15. Лемма. *Пусть $\mathscr{U}$ — ПБК над фундаментом $C_\infty(Q)$. Для любых элементов $u, v \in \mathscr{U}$ найдется такая функция $f \in C(Q)$, что $\langle u + fv\rangle = \langle u\rangle \vee \langle v\rangle$.*

◀ В качестве f подойдет любая функция, всюду отличная от $|u|/|v|$. Например, можно положить $f := \langle |u|/|v| \leqslant 2\rangle 3 + \langle |u|/|v| > 2\rangle 1$. Тогда равенство $\langle u + fv\rangle = \langle u\rangle \vee \langle v\rangle$ вытекает из следующих соотношений:

$$\langle u\rangle \vee \langle v\rangle \leqslant \big\langle |u| \neq f|v| \big\rangle \leqslant \langle u + fv\rangle \leqslant \langle u\rangle \vee \langle v\rangle. \quad ▶$$

Теорема. *Пусть E и F — фундаменты $C_\infty(P)$ и $C_\infty(Q)$ соответственно, $\mathscr{U}$ — ПБК над E, $\mathscr{V}$ — ПБК над F, $T\colon \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ — ограниченный оператор, сохраняющий дизъюнктность, и $s \in C_0(Q, P)$ — его функция сдвига. Оператор T переводит $C(P)$-подмодули $\mathscr{U}$ в $C(Q)$-подмодули $\mathscr{V}$ тогда и только тогда, когда для любого элемента $u \in \mathscr{U}$ функция s инъективна на множестве $\operatorname{supp}|Tu|$.*

Последнее свойство функции s равносильно ее инъективности на объединении $\cup\{\mathrm{supp}|Tu| : u \in \mathscr{U}\}$ (представляющем собой открытое всюду плотное подмножество $\mathrm{dom}\, s$).

◀ Необходимость. Предположим, что T переводит $C(P)$-подмодули $\mathscr{U}$ в $C(Q)$-подмодули $\mathscr{V}$, и рассмотрим произвольный элемент $u \in \mathscr{U}$. Ясно, что композиция $\langle Tu\rangle \circ T$ тоже сохраняет подмодули, и в силу предложения 6.6.14 ее функция сдвига инъективна. Осталось заметить, что функция сдвига оператора $\langle Tu\rangle \circ T$ представляет собой сужение s на $\mathrm{supp}|Tu|$.

Достаточность. Зафиксируем произвольные элементы $u \in \mathscr{U}$ и $\beta \in C(Q)$. Поскольку функция s инъективна на множестве $\mathrm{supp}|Tu|$, в силу предложения 6.6.14 композиция $\langle Tu\rangle \circ T$ переводит $C(P)$-подмодули $\mathscr{U}$ в $C(Q)$-подмодули $\mathscr{V}$. Согласно лемме 6.6.13 существует такая функция $\alpha \in C(P)$, что $\langle Tu\rangle T(\alpha u) = \beta Tu$, откуда в силу соотношений $\langle T(\alpha u)\rangle = \langle(\alpha \bullet s)Tu\rangle \leqslant \langle Tu\rangle$ вытекает равенство $T(\alpha u) = \beta Tu$.

Покажем, что из инъективности функции s на каждом из множеств вида $\mathrm{supp}|Tu|$ ($u \in \mathscr{U}$) следует инъективность s на объединении $\cup\{\mathrm{supp}|Tu| : u \in \mathscr{U}\}$. Для этого достаточно зафиксировать произвольные элементы $u_1, u_2 \in \mathscr{U}$ и найти такой элемент $u \in \mathscr{U}$, что $\mathrm{supp}|Tu| = \mathrm{supp}|Tu_1| \cup \mathrm{supp}|Tu_2|$. Согласно лемме имеется функция $\beta \in C(Q)$, удовлетворяющая соотношению

$$\mathrm{supp}|Tu_1 + \beta Tu_2| = \mathrm{supp}|Tu_1| \cup \mathrm{supp}|Tu_2|.$$

Инъективность функции s на $\mathrm{supp}|Tu_2|$ в силу леммы 6.6.8 влечет существование такой функции $\alpha \in C(P)$, что $\alpha \circ s = \beta$ на $\mathrm{supp}|Tu_2|$. Остается заметить, что $T(u_1 + \alpha u_2) = Tu_1 + (\alpha \bullet s)Tu_2 = Tu_1 + \beta Tu_2$. ▶

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамович Ю. А., Аренсон Е. Л., Китовер А. К.* Операторы в банаховых $C(K)$-модулях и их спектральные свойства // Докл. АН СССР. 1988. Т. 301, № 3. С. 525–529.
2. *Абрамович Ю. А., Векслер А. И., Колдунов А. В.* Об операторах, сохраняющих дизъюнктность // Докл. АН СССР. 1979. Т. 248, № 5. С. 1033–1036.
3. *Абрамович Ю. А., Векслер А. И., Колдунов А. В.* Операторы, сохраняющие дизъюнктность, их непрерывность и мультипликативное представление // Линейные операторы и их приложения. Л.: ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1981.
4. *Архангельский А. В., Пономарев В. И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1974.
5. *Бухвалов А. В., Коротков В. Б., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С., Макаров Б. М.* Векторные решетки и интегральные операторы / Под ред. Ю. Г. Решетняка. Новосибирск: Наука, 1992.
6. *Векслер А. И.* О структурной упорядочиваемости алгебр и колец // Докл. АН СССР. 1965. Т. 164, № 2. С. 259–262.
7. *Векслер А. И., Гейлер В. А.* О порядковой и дизъюнктной полноте линейных полуупорядоченных пространств // Сиб. мат. журн. 1972. Т. 13, № 1. С. 43–51.
8. *Вулих Б. З.* О линейных мультипликативных операциях // Докл. АН СССР. 1943. Т. 41, № 4. С. 148–151.
9. *Вулих Б. З.* Аналитическое представление линейных мультипликативных операций // Докл. АН СССР. 1943. Т. 41, № 5. С. 197–201.
10. *Вулих Б. З.* Произведение в линейных полуупорядоченных пространствах и его применение к теории операций. II // Мат. сб. 1948. Т. 22, № 2. С. 267–317.
11. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: Физматгиз, 1961.
12. *Гутман А. Е.* О реализации решеточно нормированных пространств // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 2. С. 41–54.
13. *Йех Т.* Теория множеств и метод форсинга. М.: Мир, 1973.
14. *Канторович Л. В.* К общей теории операций в полуупорядоченных пространствах // Докл. АН СССР. 1936. Т. 1. С. 271–274.
15. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.

16. *Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.

17. *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств. М.: Мир, 1970.

18. *Кусраев А. Г.* Векторная двойственность и ее приложения. Новосибирск: Наука, 1985.

19. *Кусраев А. Г.* Линейные операторы в решеточно нормированных пространствах // Исследования по геометрии «в целом» и математическому анализу / Тр. Ин-та математики / АН СССР. Сиб. отд-ние. Т. 9. Новосибирск: Наука, 1987. С. 84–123.

20. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциальное исчисление. Новосибирск: Наука, 1987.

21. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Нестандартные методы анализа. Новосибирск: Наука, 1990.

22. *Кусраев А. Г., Стрижевский В. З.* О структуре решеточно нормированных пространств. Новосибирск, 1984. (Препринт / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики).

23. *Кусраев А. Г., Стрижевский В. З.* Решеточно нормированные пространства и мажорированные операторы // Исследования по геометрии и математическому анализу / Тр. Ин-та математики / АН СССР. Сиб. отд-ние. Т. 7. Новосибирск: Наука, 1987. С. 132–158.

24. *Кутателадзе С. С.* Опорные множества сублинейных операторов // Докл. АН СССР. 1976. Т. 230, № 5. С. 1029–1032.

25. *Сикорский Р.* Булевы алгебры. М.: Мир, 1969.

26. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. М.: Мир, 1970.

27. *Abramovich Y. A.* Multiplicative representation of disjointness preserving operators // Indag. Math. 1983. V. 45, N 3. P. 265–279.

28. *Abramovich Y. A., Arenson E. L., Kitover A. K.* Banach $C(K)$-modules and operators preserving disjointness. Berkeley, 1991. (Preprint / Math. Sci. Res. Inst.; N 05808–91).

29. *Abramovich Y. A., Arenson E. L., Kitover A. K.* Banach $C(K)$-modules and operators preserving disjointness. Harlow: Longman Sci. Tech., 1992. (Pitman Res. Notes Math. Ser.; 277).

30. *Abramovich Y. A., Wickstead A. W.* The regularity of order bounded operators into $C(K)$. II // Quart. J. Math. Oxford, Ser. 2. 1993. V. 44. P. 257–270.

31. Application of Sheaves / Eds. M. P. Fourman, C. J. Mulvey, D. S. Scott. Berlin: Springer, 1979. (Lecture Notes in Math.; 753).

32. *Banach S.* Théorème sur les ensembles de première catégorie // Fund. Math. 1930. V. 16. P. 395–398.

33. *Bigard A., Keimel K.* Sur les endomorphismes conservant les polaires d'un groupe réticulé archimédien // Bull. Soc. Math. France. 1969. T. 97. P. 381–398.

34. *Conrad P. F., Diem J. E.* The ring of polar preserving endomorphisms of an abelian lattice-ordered group // Illinois J. Math. 1971. V. 15. P. 222–240.

35. *Diestel J., Uhl J. J. Jr.* Vector Measures. Providence: Amer. Math. Soc., 1977.

36. *Ellis A. J.* Extreme positive operators // Quart. J. Math. Oxford, Ser. 2. 1964. V. 15. P. 342–344.

37. *Espelie M. S.* Multiplicative and extreme positive operators // Pacific J. Math. 1973. V. 48. P. 57–66.

38. *Gierz G.* Bundles of Topological Vector Spaces and Their Duality. Berlin: Springer, 1982. (Lecture Notes in Math.; 955).

39. *Godement R.* Sur la théorie des représentations unitaires // Ann. of Math. 1951. V. 50. P. 68–124.

40. *Gutman A. E.* Banach bundles in the theory of lattice-normed spaces. I. Continuous Banach bundles // Siberian Adv. Math. 1993. V. 3, N 3. P. 1–55.

41. *Gutman A. E.* Banach bundles in the theory of lattice-normed spaces. II. Measurable Banach bundles // Siberian Adv. Math. 1993. V. 3, N 4. P. 8–40.

42. *Gutman A. E.* Banach bundles in the theory of lattice-normed spaces. III. Approximating sets and bounded operators // Siberian Adv. Math. 1994. V. 4, N 2. P. 54–75.

43. *Gutman A. E.* Locally one-dimensional K-spaces and σ-distributive Boolean algebras // Siberian Adv. Math. 1995. V. 5, N 2. P. 99–121.

44. *Hart D. R.* Some properties of disjointness preserving operators // Indag. Math. 1985. V. 47, N 2. P. 183–197.

45. *Ionescu Tulcea A., Ionescu Tulcea C.* Topics in the Theory of Lifting. Berlin, etc: Springer, 1969.

46. *Janssen A. J. E. M., van der Steen P.* Integration Theory. Berlin: Springer, 1984. (Lecture Notes in Math.; 1078).
47. *Kuo R. T.* Vector measurable functions via Stonian spaces: Dissertation / Univ. of Missouri. Columbia, 1980.
48. *Maharam D.* On a theorem of von Neumann // Proc. Amer. Math. Soc. 1958. V. 9. P. 987–994.
49. *McPolin P. T. N., Wickstead A. W.* The order boundedness of band preserving operators on uniformly complete vector lattices // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1985. V. 97, N 3. P. 481–487.
50. *Meyer M.* Le stabilisateur d'un espace vectoriel réticulé // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A. 1976. V. 283. P. 249–250.
51. *Ogasawara T.* Theory of vector lattices // J. Sci. Hirosima Univ., Ser. A. 1942. V. 12. P. 37–100; 1944. V. 13. P. 41–161.
52. *Oxtoby J. C.* Measure and Category. New York: Springer, 1971.
53. *Phelps R. R.* Extreme positive operators and homomorphisms // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 108. P. 265–274.
54. *Riesz F.* Sur la decomposition des operations fonctionnelles // Atti Congresso Bologna. 1928. V. 3. P. 143–148.
55. *Semadeni Z.* Banach Spaces of Continuous Functions. Warszawa: Polish Scientific Publ., 1971.
56. *Sentilles F. D.* Stonian differentiation and representation of vector functions and measures // Contemp. Math. 1980. V. 2. P. 241–269.
57. *Sentilles F. D.* Decomposition of weakly measurable functions // Indiana Univ. Math. J. 1983. V. 32, N 3. P. 425–437.
58. *Sikorski R.* On the inducing of homomorphisms by mappings // Fund. Math. 1949. V. 36. P. 7–22.
59. *Stone M. H.* Applications of the theory of Boolean rings to general topology // Trans. Amer. Math. Soc. 1937. V. 41. P. 375–309.
60. *Wickstead A. W.* Representation and duality of multiplication operators on Archimedean Riesz spaces // Compositio Math. 1977. V. 35, N 3. P. 225–238.
61. *Zaanen A. C.* Examples of orthomorphisms // J. Approx. Theory. 1975. V. 13, N 2. P. 192–204.

г. Новосибирск *Статья поступила 4 декабря 1994 г.*