ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1997, том 353, № 5, с. 590–591

МАТЕМАТИКА

УДК 517.98

ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНЫЕ *K*-ПРОСТРАНСТВА

© 1997 г. А. Е. Гутман

Представлено академиком Ю.Г. Решетняком 30.01.95 г.

Поступило 21.03.95 г.

Всюду в сообщении E – произвольное расширенное K-пространство, E^+ – совокупность положительных элементов E, Q – стоуновский компакт базы E и Clop(Q) – булева алгебра всех открыто-замкнутых подмножеств Q. Для произвольной булевой алгебры символы 0 и 1 обозначают ее наименьший и наибольший элементы, называемые соответственно нулем и единицей. Элемент $e \in E^+$ назовем локально-постоянным относительно $f \in E^+$, если $e = \bigvee_{\xi \in \Xi} \lambda_\xi \pi_\xi f$ для некоторого числового семейства $(\lambda_\xi)_{\xi \in \Xi}$ и семейства $(\pi_\xi)_{\xi \in \Xi}$ попарно дизъюнктных порядковых проекторов. Расширенное K-пространство E называется локально-одномерным, если оно удовлетворяет одному из следующих эквивалентных условий:

1) все элементы E^+ являются локально-постоянными относительно некоторой порядковой единицы E,

2) все элементы E^+ являются локально-постоянными относительно любой порядковой единицы E,

3) для любой функции $e \in C_\infty(Q)$ существует разбиение единицы $(U_\xi)_{\xi \in \Xi}$ в алгебре Clop(Q) такое, что функция e постоянна на каждом из множеств U_ξ.

Линейный оператор $T\colon E \to E$ называется нерасширяющим или сохраняющим компоненты, если для любых $e, f \in E$ из $|e| \wedge |f| = 0$ следует $|Te| \wedge |f| = 0$.

Следующая теорема объединяет результаты, полученные Ю.А. Абрамовичем, А.И. Векслером и А.В. Колдуновым [1; теорема 2.1], а также П.Т.Н. Макполином и А.В. Викстедом [2, теорема 3.2].

Теорема 1. *Пусть E – расширенное K-пространство. Каждый нерасширяющий оператор $T\colon E \to E$ регулярен тогда и только тогда, когда K-пространство E локально-одномерно.*

Во избежание недоразумений при чтении статей [1, 2] следует иметь в виду следующие обстоятельства. Во-первых, несмотря на то что в формулировке теоремы 2.1 из [1] фигурирует произвольное недискретное K-пространство, доказательство этой теоремы приведено лишь для локально-одномерных K-пространств. Во-вторых, пример недискретного локально-одномерного K-пространства, приведенный в [2], содержит ошибку, о чем А.В. Викстед недавно сообщил в статье [3]. Таким образом, вопрос о том, всякое ли локально-одномерное K-пространство должно быть дискретным (т.е. иметь атомную базу), по всей видимости, до сих пор оставался открытым.

Понятие локально-одномерного K-пространства имеет следующую булевозначную интерпретацию. (За разъяснением основных понятий булевозначного анализа мы отсылаем читателя ко второй части монографии [4].) Пусть B – полная булева алгебра, $\mathcal{R}$ – поле вещественных чисел внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и $\mathbb{R}^\wedge$ – каноническое погружение $\mathbb{R}$ в $\mathbb{V}^{(B)}$.

Теорема 2. *Равенство $\mathbb{R}^\wedge = \mathcal{R}$ имеет место тогда и только тогда, когда спуск $\mathcal{R}$ является локально-одномерным K-пространством.*

Из личных бесед с коллегами автору настоящего сообщения известно, что среди специалистов в области булевозначного анализа весьма популярна гипотеза об атомности всех булевых алгебр B, обеспечивающих равенство $\mathbb{R}^\wedge = \mathcal{R}$ в $\mathbb{V}^{(B)}$. Таким образом, вопрос о связи между дискретными и локально-одномерными K-пространствами имеет довольно широкую область приложений, по крайней мере включающую теорию векторных решеток, теорию положительных операторов и булевозначный анализ.

После некоторого предварительного обсуждения основных понятий мы приведем пример безатомного локально-одномерного K-пространства. В силу теоремы 1 мы тем самым получим безатомное расширенное K-пространство E, для которого все нерасширяющие операторы $T\colon E \to E$ регулярны, а в силу теоремы 2 мы будем иметь безатомную полную булеву алгебру B, для которой $\mathbb{R}^\wedge = \mathcal{R}$ в $\mathbb{V}^{(B)}$.

Напомним, что σ-полная алгебра B называется σ-дистрибутивной, если она удовлетворяет

Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской Академии наук, Новосибирск

одному из следующих эквивалентных условий (см. [5]: 19.1):

1) $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \bigvee_{m \in \mathbb{N}} b_m^n = \bigvee_{m \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} b_{m(n)}^n$ для любых $b_m^n \in B, n, m \in \mathbb{N}$;

2) $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \bigwedge_{m \in \mathbb{N}} b_m^n = \bigwedge_{m \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigvee_{n \in \mathbb{N}} b_{m(n)}^n$ для любых $b_m^n \in B, n, m \in \mathbb{N}$;

3) для любой последовательности $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ элементов B выполнено $\bigvee_{\sigma \in \{1, -1\}^{\mathbb{N}}} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \sigma(n) b_n = 1$, где $1b_n = b_n$ и $(-1) = 1 \backslash b_n$.

Теорема 3. *Расширенное K-пространство локально-одномерно тогда и только тогда, когда его база σ-дистрибутивна.*

Таким образом, вопрос о существовании безатомного локально-одномерного K-пространства сводится к существованию безатомной σ-дистрибутивной полной булевой алгебры. Построению такой алгебры посвящена оставшаяся часть этой заметки.

Булева алгебра B называется σ-индуктивной, если любая убывающая последовательность ненулевых элементов B имеет ненулевую нижнюю границу. Подалгебра B_0 булевой алгебры B называется плотной или массивной, если для любого ненулевого элемента $b \in B$ существует ненулевой элемент $b_0 \in B_0$ такой, что $b_0 \leq b$.

Лемма 1. *Если σ-полная булева алгебра содержит σ-индуктивную плотную подалгебру, то она σ-дистрибутивна.*

Как известно, для любой булевой алгебры B существует полная булева алгебра $\bar{B}$, содержащая B как плотную подалгебру (см. [5, § 35]). Такая алгебра $\bar{B}$ единственна с точностью до изоморфизма и называется пополнением алгебры B. Очевидно, пополнение безатомной алгебры безатомно. Кроме того, в силу леммы 4 пополнение σ-индуктивной алгебры σ-дистрибутивно. Поэтому для доказательства существования безатомной σ-дистрибутивной полной булевой алгебры достаточно предъявить произвольную безатомную σ-индуктивную булеву алгебру. Примеры таких алгебр безусловно известны. Для полноты картины мы приведем здесь одну из наиболее простых конструкций.

Пример. Пусть B – булева алгебра всех подмножеств $\mathbb{N}$, а I – идеал B, состоящий из всех конечных подмножеств $\mathbb{N}$. Тогда фактор-алгебра B/I (см. [5, § 10]) безатомна и σ-индуктивна.

Автор благодарен Э.Ю. Емельянову, С.С. Кутателадзе и С.А. Малюгину за внимание к работе, а также Ю.А. Абрамовичу за предоставленную им информацию, способствовавшую успешному решению проблемы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамович Ю.А., Векслер А.И., Колдунов А.В.* // Линейные операторы и их приложения. Межвуз. сб. науч. тр. Л.: ЛГПИ, 1981. С. 13–34.
2. *McPolin P.T.N., Wickstead A.W.* // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1985. V. 97. № 3. P. 481–487.
3. *Abramovich Y.A., Wickstead A.W.* // Quart. J. Math. Oxford. 1993. V. 44. № 175. P. 257–270.
4. *Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С.* Нестандартные методы анализа. Новосибирск: Наука, 1990.
5. *Сикорский Р.* Булевы алгебры. М.: Мир, 1969.