ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК 1997, том 353, № 5, с. 590–591

УДК 517.98 МАТЕМАТИКА

ЛОКАЛЬНО ОДНОМЕРНЫЕ *K*-ПРОСТРАНСТВА

А. Е. Гутман

На протяжение всего текста E — произвольное расширенное K-пространство, E^+ — совокупность положительных элементов E, Q — стоуновский компакт базы E и $\mathrm{Clop}(Q)$ — булева алгебра всех открыто-замкнутых подмножеств Q. Для произвольной булевой алгебры символы 0 и 1 обозначают ее наименьший и наибольший элементы, называемые соответственно нулем и единицей. Элемент $e \in E^+$ назовем *локально постоянным* относительно $f \in E^+$, если $e = \bigvee_{\xi\in\Xi} \lambda_\xi \pi_\xi f$ для некоторого числового семейства $(\lambda_\xi)_{\xi\in\Xi}$ и семейства $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ попарно дизъюнктных порядковых проекторов. Расширенное K-пространство E называется *локально одномерным*, если оно удовлетворяет одному из следующих эквивалентных условий:

(1) все элементы E^+ являются локально постоянными относительно некоторой порядковой единицы E;

(2) все элементы E^+ являются локально постоянными относительно любой порядковой единицы E;

(3) для любой функции $e \in C_\infty(Q)$ существует разбиение единицы $(U_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в алгебре $\mathrm{Clop}(Q)$ такое, что функция e постоянна на каждом из множеств U_ξ.

Линейный оператор $T : E \to E$ называется *нерасширяющим* или *сохраняющим компоненты*, если для любых $e, f \in E$ из $|e| \wedge |f| = 0$ следует $|Te| \wedge |f| = 0$.

Следующая теорема объединяет результаты, полученные Ю. А. Абрамовичем, А. И. Векслером и А. В. Колдуновым ([1]: теорема 2.1), а также П. Т. Н. Макполином и А. В. Викстедом ([2]: теорема 3.2).

Теорема 1. *Пусть E — расширенное K-пространство. Каждый нерасширяющий оператор $T : E \to E$ регулярен тогда и только тогда, когда K-пространство E локально одномерно.*

Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской Академии наук,
Новосибирск

Во избежание недоразумений при чтении статей [1] и [2] следует иметь в виду следующие два обстоятельства. Во-первых, несмотря на то, что в формулировке теоремы 2.1 из [1] фигурирует произвольное недискретное K-пространство, доказательство этой теоремы приведено лишь для локально одномерных K-пространств. Во-вторых, пример недискретного локально одномерного K-пространства, приведенный в [2], содержит ошибку, о чем А. В. Викстед недавно сообщил в статье [3]. Таким образом, вопрос о том, всякое ли локально одномерное K-пространство должно быть дискретным (т.е. иметь атомную базу), по всей видимости, до сих пор оставался открытым.

Понятие локально одномерного K-пространства имеет следующую булевозначную интерпретацию. (За разъяснением основных понятий булевозначного анализа мы отсылаем читателя ко второй части монографии [4].) Пусть B — полная булева алгебра, $\mathcal{R}$ — поле вещественных чисел внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ и $\mathbb{R}^\wedge$ — каноническое погружение $\mathbb{R}$ в $\mathbb{V}^{(B)}$.

Теорема 2. *Равенство $\mathbb{R}^\wedge = \mathcal{R}$ имеет место тогда и только тогда, когда спуск $\mathcal{R}$ является локально одномерным K-пространством.*

Из личных бесед с коллегами автору настоящей заметки известно, что среди специалистов в области булевозначного анализа весьма популярна гипотеза об атомности всех булевых алгебр B, обеспечивающих равенство $\mathbb{R}^\wedge = \mathcal{R}$ в $\mathbb{V}^{(B)}$. Таким образом, вопрос о связи между дискретными и локально одномерными K-пространствами имеет довольно широкую область приложений, по крайней мере включающую теорию векторных решеток, теорию положительных операторов и булевозначный анализ.

После некоторого предварительного обсуждения основных понятий мы приведем пример безатомного локально одномерного K-пространства. В силу теоремы 1 мы тем самым получим безатомное расширенное K-пространство E, для которого все нерасширяющие операторы $T : E \to E$ регулярны, а в силу теоремы 2 мы будем иметь безатомную полную булеву алгебру B, для которой $\mathbb{R}^\wedge = \mathcal{R}$ в $\mathbb{V}^{(B)}$.

Напомним, что σ-полная алгебра B называется *σ-дистрибутивной*, если она удовлетворяет одному из следующих эквивалентных условий (см. [5]: 19.1):

(1) $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \bigvee_{m\in\mathbb{N}} b^n_m = \bigvee_{m\in\mathbb{N}^\mathbb{N}} \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} b^n_{m(n)}$ для любых $b^n_m \in B$ $(n, m\in\mathbb{N})$;

(2) $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \bigwedge_{m\in\mathbb{N}} b^n_m = \bigwedge_{m\in\mathbb{N}^\mathbb{N}} \bigvee_{n\in\mathbb{N}} b^n_{m(n)}$ для любых $b^n_m \in B$ $(n, m\in\mathbb{N})$;

(3) для любой последовательности $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов B выполнено $\bigvee_{\sigma\in\{1,-1\}^\mathbb{N}} \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \sigma(n)b_n = 1$, где $1b_n = b_n$ и $(-1)b_n = 1\backslash b_n$.

Теорема 3. *Расширенное K-пространство локально одномерно тогда и только тогда, когда его база σ-дистрибутивна.*

Таким образом, вопрос о существовании безатомного локально одномерного K-пространства сводится к существованию безатомной σ-дистрибутивной полной булевой алгебры. Построению такой алгебры посвящена оставшаяся часть этой заметки.

Булева алгебра B называется *σ-индуктивной*, если любая убывающая последовательность ненулевых элементов B имеет ненулевую нижнюю границу. Подалгебра B_0 булевой алгебры B называется *плотной* или *массивной*, если для любого ненулевого элемента $b \in B$ существует ненулевой элемент $b_0 \in B_0$ такой, что $b_0 \leqslant b$.

Лемма 4. *Если σ-полная булева алгебра содержит σ-индуктивную плотную подалгебру, то она σ-дистрибутивна.*

Как известно, для любой булевой алгебры B существует полная булева алгебра $\overline{B}$, содержащая B как плотную подалгебру (см. [5]: § 35). Такая алгебра $\overline{B}$ единственна с точностью до изоморфизма и называется *пополнением* алгебры B. Очевидно, пополнение безатомной алгебры безатомно. Кроме того, в силу леммы 4 пополнение σ-индуктивной алгебры σ-дистрибутивно. Поэтому для доказательства существования безатомной σ-дистрибутивной полной булевой алгебры достаточно предъявить произвольную безатомную σ-индуктивную булеву алгебру. Примеры таких алгебр, безусловно, известны. Для полноты картины мы приведем здесь одну из наиболее простых конструкций.

П р и м е р 5. Пусть B — булева алгебра всех подмножеств $\mathbb{N}$, а I — идеал B, состоящий из всех конечных подмножеств $\mathbb{N}$. Тогда фактор-алгебра B/I (см. [5]: § 10) безатомна и σ-индуктивна.

Автор благодарен Э. Ю. Емельянову, С. С. Кутателадзе и С. А. Малюгину за внимание к работе, а также Ю. А. Абрамовичу за предоставленную им информацию, способствовавшую успешному решению проблемы.

Литература

1. *Абрамович Ю. А.*, *Векслер А. И.*, *Колдунов А. В.* (1981) Операторы, сохраняющие дизъюнктность, их непрерывность и мультипликативное представление, *Линейные операторы и их приложения*, Межвузовский сборник научных трудов, 13–34, ЛГПИ, Ленинград.
2. *McPolin P. T. N.*, *Wickstead A. W.* (1985) The order boundedness of band preserving operators on uniformly complete vector lattices, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, т. 97, N3, 481–487.
3. *Abramovich Y. A.*, *Wickstead A. W.* (1993) The regularity of order bounded operators into $C(K)$. II, *Quart. J. Math. Oxford*, т. 44, N175, 257–270.
4. *Кусраев А. Г.*, *Кутателадзе С. С.* (1990) *Нестандартные методы анализа*, Наука, Новосибирск.
5. *Сикорский Р.* (1969) *Булевы алгебры*, Мир, Москва.