На правах рукописи
УДК 517.98

Гутман Александр Ефимович

БАНАХОВЫ РАССЛОЕНИЯ В ТЕОРИИ РЕШЕТОЧНО НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ

01.01.01 — математический анализ

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск 1995

Работа выполнена в Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор, *А. В. Бухвалов*,

доктор физико-математических наук, профессор, *С. К. Водопьянов*,

доктор физико-математических наук, профессор, *С. П. Гулько.*

Ведущая организация: *Нижегородский государственный университет* (г. Нижний Новгород).

Защита состоится « 28 » *сентября* 1995 г. в 11 часов на заседании диссертационного совета Д 002.23.02 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора физико-математических наук при Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН по адресу: 630090, г. Новосибирск, Университетский проспект, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Университетский проспект, 4.

Автореферат разослан « 21 » *августа* 1995 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук *В. А. Шарафутдинов*

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

1. Одним из традиционных методов функционального анализа является построение аналитических представлений различных абстрактных пространств и действующих в них операторов. Это обусловлено прежде всего тем, что наличие у объекта того или иного аналитического представления значительно облегчает работу с ним. Например, вместо списка абстрактных свойств оператора можно получить его выражение в виде конкретной формулы, в которую автоматически заложены все эти свойства. Аналогичное преимущество перед аксиоматическим описанием алгебраических систем имеет их конкретная реализация, например, в виде какого-либо пространства функций.

Описанные традиции в полной мере свойственны теории векторных решеток и (в частности) K-пространств. Понятие K-пространства, введенное Л. В. Канторовичем в 1935 г., несомненно явилось результатом абстрактного обобщения известных к тому времени пространств непрерывных и измеримых вещественных функций, а также линейных функционалов на этих пространствах. Последовавшее затем развитие теории векторных решеток привело к тому, что в 40-е годы Б. З. Вулихом и независимо Т. Огасаварой было получено представление произвольного K-пространства в виде фундамента векторной решетки $C_\infty(Q)$ расширенных непрерывных функций на экстремально несвязном компакте Q. Таким образом, теория K-пространств завершила “полный цикл”

$$\text{примеры} \;\to\; \text{абстракция} \;\to\; \text{реализация} \tag{$*$}$$

и дала начало новому этапу теоретических исследований: поиску аналитических представлений для различных классов операторов, действующих в абстрактных векторных решетках.

2. Если рассмотреть теорию решеточно нормированных пространств (РНП), сосредоточивая внимание на их аналитическом представлении, то можно прийти к выводу, что история РНП в общих чертах повторяет схему развития теории векторных решеток. Прежде всего, понятие РНП, введенное Л. В. Канторовичем в 1935 г., можно рассматривать как абстрактное обобщение пространств непрерывных и измеримых функций, принимающих значения в нормированном пространстве. Если аналитическое представление K-пространств было получено сравнительно через короткое время после их введения, то РНП долгое время оставались без универсальной функциональной реализации. Лишь в 1987 г. А. Г. Кусраев и В. З. Стрижевский получили первый результат в этом направлении: всякое РНП представляется в виде пространства классов эквивалентности непрерывных сечений некоторого банахова расслоения.

Реализационная теорема Кусраева — Стрижевского, завершая цикл (∗) применительно к теории РНП и тем самым имея несомненную методологическую ценность, обладает тем не менее двумя очевидными техническими недостатками. Во-первых, в ней упоминаются классы эквивалентности, не свойственные пространствам непрерывных функций. Во-вторых, банахово расслоение в приведенной формулировке не является единственным (с точностью до изометрии). А. Г. Кусраев сам поставил задачу исправления указанных недостатков, которая явилась истоком теории просторных банаховых расслоений и измеримых банаховых расслоений с лифтингом. Систематическому изложению этой теории и ее приложений главным образом и посвящена диссертация.

3. Цель настоящей работы — превратить понятие банахова расслоения в привычный инструмент исследования РНП и действующих в них операторов. Получить функциональное представление абстрактных РНП в виде пространств непрерывных и измеримых сечений банаховых расслоений. Найти аналитические представления для широких классов линейных операторов, действующих в РНП.

4. В диссертационной работе используются разнообразные методы исследования современного функционального анализа. Наиболее интенсивно применяются идеи и техника теории векторных решеток, решеточно нормированных пространств и порядково ограниченных операторов. Кроме того, в различных фрагментах работы используются методы общей топологии, теории непрерывных вектор-функций и непрерывных банаховых расслоений, теории меры, измеримых вектор-функций и измеримых банаховых расслоений, а также теории лифтинга в фактор-пространствах измеримых функций, вектор-функций и сечений.

5. Научная новизна диссертационной работы состоит в том, что в ней впервые построена теория просторных банаховых расслоений, позволяющая реализовать РНП в виде пространства непрерывных расширенных сечений, а также предоставляющая возможность ввести в рассмотрение операторные и сопряженные банаховы расслоения. Создана теория измеримых банаховых расслоений и изучено понятие лифтинга в фактор-пространстве измеримых сечений. Решена проблема о соотношении классов локально одномерных и дискретных K-пространств. Изучены широкие классы операторов в РНП. Получены разложения и функциональные представления произвольных ограниченных операторов, сохраняющих дизъюнктность.

6. Ценность результатов диссертации двоякая. Во-первых, они составляют основу для дальнейшей разработки теории РНП и мажорируемых операторов методом функциональных реализаций, что позволяет решать внутренние проблемы этой теории. Во-вторых, результаты работы применяются к исследованию пространств непрерывных и измеримых вектор-функций, непрерывных и измеримых сечений банаховых расслоений, а также различных классов линейных операторов, действующих в этих функциональных пространствах. Некоторые из указанных приложений приводятся в диссертации.

7. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1–11]. Результаты диссертационной работы докладывались на конференции молодых ученых Сибири и Дальнего Востока в Новосибирске, на Сибирской конференции прикладной и индустриальной математики, на занятиях школы по теории операторов в функциональных пространствах в Новгороде, Ульяновске и Нижнем Новгороде, на семинаре по теории операторов в Петербургском государственном университете, на международной конференции молодых ученых в Москве, а также на еженедельных семинарах лаборатории функционального анализа в новосибирском Институте математики.

8. Диссертация состоит из введения, семи глав и списка литературы и занимает 297 страниц. Библиография включает 243 наименования. Глава 0 представляет собой подробный обзор результатов, изложенных в остальных шести главах. Глава 1 содержит определения и предварительные сведения об основных объектах, фигурирующих в диссертации. К предварительным сведениям можно отнести и несколько параграфов главы 2, включающей информацию общего характера о непрерывных банаховых расслоениях. Глава 3 является центральной как по расположению, так и по содержанию: в ней сосредоточен материал, касающийся просторных банаховых расслоений и реализации РНП в виде пространств сечений. В главе 4 развивается теория измеримых банаховых расслоений путем переноса схемы П. Даниэля на случай сечений. В этой же главе вводится и исследуется понятие лифтинга в пространстве измеримых сечений, а также приводятся результаты использования теории просторных банаховых расслоений в исследовании измеримых расслоений. Глава 5 содержит приложения результатов предыдущих глав к разнообразным пространствам непрерывных и измеримых вектор-функций. Наконец, глава 6 посвящена исследованию сохраняющих дизъюнктность операторов и построению их аналитических представлений.

Автор диссертации стремился ответить на все естественные вопросы, возникающие по поводу вводимых понятий и формулируемых результатов. Так, вслед за доказательством теоремы часто следует ее обсуждение в виде ряда примеров и утверждений, обосновывающих точность формулировки (например, неустранимость тех или иных дополнительных предположений). Основные определения, включающие несколько условий, снабжаются обоснованием независимости этих условий друг от друга, а схожие понятия уточняются примерами, объясняющими различия между ними.

ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ

1. В теории РНП важную роль играет o-сходимость и связанные с ней понятия. Один из естественных вопросов, затрагивающих эти понятия, звучит следующим образом: является ли o-замыкание o-замкнутым, т. е. верно ли, что повторное o-замыкание не добавляет новых элементов? Поскольку o-сходимость не топологична, этот вопрос далеко не тривиален и до сих пор не был решен даже для конечно-цикличных множеств, которые чаще всего рассматриваются в вопросах пополнения и продолжения.

Решить проблему o-замыкания удалось с помощью новой концепции порядковой аппроксимации, разработке которой посвящен § 1.5. После доказательства основной леммы (1.5.1) и исследования элементарных свойств аппроксимации (1.5.2) устанавливается ключевой результат (1.5.3): порядково аппроксимируемые элементы могут быть получены как пределы сетей элементов аппроксимирующего множества. Далее описаны способы приближения аппроксимируемых элементов разного рода пределами: в терминах o-сходимости (1.5.4), равномерной сходимости (1.5.5–1.5.7), r-сходимости (1.5.8, 1.5.9).

2. Из теории топологических векторных пространств хорошо известно, что та или иная непрерывность линейного оператора часто эквивалентна какой-либо его ограниченности. В теории РНП эта мысль осталась без внимания. Отчасти этим объясняется тот факт, что связь между разными типами непрерывности операторов в РНП тоже осталась по-существу не исследованной. Данное обстоятельство выражается, например, во всеобщем заблуждении по поводу секвенциальности r-непрерывности. В диссертации доказано, что r-непрерывность и секвенциальная r-непрерывность — существенно разные свойства оператора. Более того, счетная r-непрерывность отличается от каждого из этих двух свойств и занимает строго промежуточное положение между ними (1.6.1–1.6.6).

3. Одна из классических проблем теории РНП заключается в нахождении достаточных условий мажорируемости для сохраняющих дизъюнктность операторов, действующих в РНП. Известное условие Ю. А. Абрамовича (R) явилось исторически первым эквивалентом ограниченности сохраняющего дизъюнктность оператора, более слабым, чем секвенциальная r-o-непрерывность. Позже и это условие было ослаблено. П. Т. Н. МакПолин и А. В. Викстед показали, что для ограниченности сохраняющего дизъюнктность оператора в векторных решетках достаточно r-полунепрерывности.

Попытки обобщить критерий Абрамовича — МакПолина — Викстеда на случай операторов в РНП не могут привести к успеху, так как все рассмотренные в 1.6.3 четыре типа ограниченности попарно различны даже для операторов, сохраняющих дизъюнктность (соответствующие примеры имеются в 1.6.4–1.6.6). Однако, если область определения оператора — векторная решетка, а не произвольное РНП, то все четыре типа ограниченности совпадают (теорема 6.1.10). Кроме того, в работе установлено, что все типы ограниченности совпадают для нерасширяющих операторов, действующих в произвольных РНП (теорема 6.2.11).

4. Понятие σ-изолированной точки или P-точки (1.1.8) играет ключевую роль в теории векторных решеток и положительных операторов в тех вопросах, где становится существенным различие между свойствами полноты и счетной полноты или между свойствами непрерывности и секвенциальной непрерывности. Это понятие привлекло наше внимание и при изучении некоторых аспектов теории банаховых расслоений (3.3.5). В данном случае возник вопрос о существовании σ-изолированной, но не изолированной точки экстремально несвязного компакта. В работе установлено, что отрицательный ответ на поставленный вопрос не зависит от аксиом ZFC и эквивалентен отсутствию измеримых кардиналов (1.1.9).

5. До сих пор пространства непрерывных вектор-функций $C_\infty(Q, X)$ конструировались не из отдельных функций, как в случае $C_\infty(Q)$, а из классов эквивалентности X-значных непрерывных функций, определенных на котощих подмножествах Q. Если конструкция фактор-пространства обычна для измеримых функций, то в случае непрерывных функций она представляется нам неестественной. Вероятной причиной возникновения описанного подхода к построению пространств непрерывных вектор-функций явилось незнание или игнорирование возможности продолжения непрерывной вектор-функции на наибольшую область определения. В диссертации устанавливается такая возможность в форме концепции максимального расширения функций (5.1.1): любая непрерывная вектор-функция u, определенная на всюду плотном подмножестве базового топологического пространства, имеет наибольшее (в смысле области определения) непрерывное продолжение $\mathrm{ext}(u)$, причем область определения $\mathrm{ext}(u)$ является котощей.

Возможность продолжения на наибольшую область определения сохраняется и для слабо непрерывных вектор функций (5.1.4). Однако в отличие от сильно непрерывных функций область определения максимального слабо непрерывного расширения может не быть котощей и даже может оказаться тощей. Соответствующий пример приведен в 5.1.5.

6. Непрерывные вещественнозначные функции на экстремально несвязном компакте обладают одним замечательным свойством: всякая ограниченная непрерывная функция, определенная на всюду плотном множестве, продолжается на весь компакт с сохранением непрерывности. Ни непрерывные вектор-функции, ни тем более непрерывные сечения банаховых расслоений, вообще говоря, не обладают этим свойством. Обычные банаховы расслоения не обеспечивают достаточный простор для продолжений своих сечений. Однако среди банаховых расслоений есть и такие, которые этот простор обеспечивают. Мы назвали эти расслоения просторными (3.1.1–3.1.4).

Постоянное расслоение является просторным крайне редко — только в том случае, когда его слои конечномерны или базовый компакт конечен (теорема 5.1.3). Тем не менее, всякое банахово расслоение $\mathcal{X}$ можно расширить до просторного расслоения $\overline{\mathcal{X}}$, содержащего $\mathcal{X}$ в качестве всюду плотного подрасслоения (теорема 3.1.5). Такое расслоение $\overline{\mathcal{X}}$ мы называем просторной оболочкой $\mathcal{X}$.

7. Основным механизмом построения пространств сечений банаховых расслоений является идея максимального расширения функций, которая распространяется не только на случай вектор-функций, но и на случай сечений (2.5.1, 2.5.2). Концепция максимального расширения позволяет ввести в рассмотрение РНП $C_\infty(Q, \mathcal{X})$ расширенных непрерывных сечений расслоения $\mathcal{X}$, т. е. сечений, совпадающих со своими максимальными расширениями (2.5.2). Как выяснилось, именно такое пространство (точнее, его идеал) представляет собой общий вид РНП (2.5.3, 2.5.4, 3.4.2–3.4.4).

Банахово расслоение $\mathcal{X}$, дающее представление РНП в виде идеала $C_\infty(Q, \mathcal{X})$, вообще говоря не единственно. В диссертационной работе установлено (3.4.1), что среди всех реализационных банаховых расслоений данного РНП имеется ровно одно просторное.

8. Измеримые сечения банахова расслоения мы определяем как пределы почти всюду последовательностей элементов некоторого аксиоматически выделенного множества сечений, называемого измеримой структурой. Этот новый способ определения измеримых сечений аналогичен конструкции Даниэля и является формально более общим по сравнению с традиционным топологическим подходом.

После определения понятия измеримой структуры (4.1.1) и соответствующего понятия измеримого сечения (4.1.2), мы устанавливаем основные свойства измеримых сечений и разнообразные критерии измеримости (4.1.3–4.1.8). Критерий 4.1.9 измеримости порядково аппроксимируемого сечения является новым не только для сечений, но и для вектор-функций и даже для вещественнозначных функций. В качестве следствия получен порядковый критерий измеримости сечений 4.1.10.

Список приложений развитой нами теории измеримых банаховых расслоений к теории РНП начинается с построения пространства $M(\Omega, \mathcal{X})$ классов эквивалентности измеримых сечений расслоения $\mathcal{X}$ (4.1.13), которое оказывается o-полным РНП (теорема 4.1.14), как и его идеалы $E(\mathcal{X})$ (4.1.15). Основная теорема 4.4.8 об измеримой реализации РНП, в которой объединено сразу пять реализационных фактов, получена нами благодаря связи между измеримыми и непрерывными банаховыми расслоениями.

9. Естественная реализация идеи лифтинга применительно к пространству $L^\infty(\Omega, X)$ классов существенно ограниченных измеримых по Бохнеру X-значных функций заключается в таком выборе представителей классов, который сохраняет константы и согласуется с операциями решеточно нормированного модуля, т. е. сохраняет решеточную норму, сумму и умножение на скалярные классы (5.2.2). Однако попытка развить теорию такого “сильного” лифтинга приводит к неудаче: сильный лифтинг в $L^\infty(\Omega, X)$ существует тогда и только тогда, когда пространство с мерой Ω атомно или банахово пространство X конечномерно (теорема 5.2.2). Поэтому мы вынуждены ограничиться рассмотрением слабых лифтингов (5.3.11).

Наша основная теорема о существовании слабых лифтингов (теорема 5.3.12) была получена с помощью связи между измеримыми и непрерывными вектор-функциями. Из этой теоремы можно вывести существование лифтингов разной силы в разнообразных пространствах вектор-функций. В разделе 5.3.13 приведено 7 подобных следствий: лифтинг того или иного вида имеется в пространствах $L^c(\Omega, X)$, $L^c_Y(\Omega, X)$, $L^\infty(\Omega, X')$, $L^c(\Omega, X|Y)$, $L^\infty(\Omega, X|Y)$, $L^\infty(\Omega, X'|X)$ и $L^\infty(\Omega, X|X')$.

10. Лифтинг в фактор-пространстве измеримых сечений банахова расслоения — новая концепция. До сих пор самой общей ситуацией, в которой рассматривался лифтинг, было пространство измеримых вектор-функций, причем речь шла о так называемых слабых лифтингах — лифтингах, согласованных со скалярным лифтингом посредством двойственности.

Постоянное расслоение обладает лифтингом крайне редко — только в том случае, когда его слои конечномерны или базовое пространство с мерой атомно (теорема 5.2.2). Если в расслоении $\mathcal{X}$ можно выбрать измеримую структуру, состоящую из сечений с поточечными нормами в образе скалярного лифтинга (а это возможно, например, в постоянном расслоении), то $\mathcal{X}$ можно расширить до расслоения с лифтингом, содержащего $\mathcal{X}$ в качестве всюду плотного подрасслоения (теорема 4.4.5). Таким образом провал при попытке ввести лифтинг в пространстве вектор-функций $L^\infty(\Omega, X)$ (5.2.2) несколько компенсируется: подходящее расширение слоев, не добавляющее новых классов измеримых сечений, обеспечивает достаточный простор для существования лифтинга (теорема 5.2.3).

11. Стоуновское преобразование, обогатившее арсенал функционального анализа благодаря работам Д. Сентиллеса, имеет свои основные приложения в теории вектор-функций. Использовав теорию просторных банаховых расслоений и ее приложения к измеримым расслоениям, можно реализовать стоуновское преобразование в виде отображения замены переменной. Такая реализация осуществима для изоморфизма между следующими парами РНП:

- $M(\Omega, X)$ и $C_\infty(Q, X)$ (теорема 5.3.2);
- $L^c(\Omega, X)$ и $C(Q, X)$ (следствие 5.3.4 (1));
- $L^c_Y(\Omega, X)$ и $C_\infty(Q, X) \cap C(Q, X|Y)$ (следствие 5.3.4 (2));
- $L^c_{X'}(\Omega, X)$ и $C(Q, X|X')$ (следствие 5.3.6);
- $M(\Omega, X'|X)$ и $C_\infty(Q, X'|X)$ (теорема 5.3.7);
- $L^c(\Omega, X|Y)$ и $C(Q, X|Y)$ (следствие 5.3.9);
- $L^\infty(\Omega, X'|X)$ и $C(Q, X'|X)$ (вытекает из 5.3.9).

12. В формулировке теоремы 4.3.4 приведен конкретный способ преобразования просторного непрерывного расслоения в измеримое расслоение с лифтингом. Не вдаваясь в подробности, можно сказать, что это преобразование осуществляется с помощью замены переменной. Теорема 4.3.5 усиливает связь между измеримыми и непрерывными расслоениями, утверждая, что каждое измеримое банахово расслоение с лифтингом может быть получено описанным в теореме 4.3.4 способом.

Таким образом, между измеримыми расслоениями с лифтингом над пространством с мерой Ω и просторными непрерывными расслоениями над стоуновским компактом алгебры $B(\Omega)$ имеется конкретная конструктивная биекция. С помощью этой биекции весь багаж результатов, накопленный для просторных непрерывных расслоений, с легкостью переносится на измеримые расслоения с лифтингом (§ 4.4).

13. Нашим основным инструментом исследования оператора $T\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, действующего в из РНП $\mathcal{U}$ в РНП $\mathcal{V}$, является его тень — отображение h из базы $\mathcal{U}$ в базу $\mathcal{V}$, связанное с оператором T следующей формулой: $h(\pi) = \sup_{u \in \mathcal{U}} \langle T\pi u \rangle$ (6.1.2). Оператор сохраняет дизъюнктность тогда и только тогда, когда его тень является кольцевым гомоморфизмом (предложение 6.1.2). Концепция тени позволяет свести многие вопросы исследования операторов, сохраняющих дизъюнктность, к работе с кольцевыми и булевыми гомоморфизмами. Предложение 6.1.3 предлагает несколько эквивалентных описаний тени оператора. Совпадение теней оператора и его наименьшей мажоранты (предложение 6.1.4) позволяет осуществлять редукцию при рассмотрении “теневых” вопросов от операторов в РНП к операторам в K-пространствах.

14. Формализация понятия сходимости относительно тени (h-сходимости) позволяет доказать h-o-непрерывность любого оператора с тенью h (теорема 6.1.5) В связи с этим становится понятно, что любая непрерывность тени должна обеспечивать какую-то более сильную непрерывность оператора (более сильную, чем r-непрерывность), и наоборот — любая более сильная непрерывность оператора может появиться только за счет непрерывности его тени. Например, (секвенциальная) o-непрерывность оператора эквивалентна (соответственно секвенциальной) o-непрерывности его тени (следствие 6.1.6).

Теорема об h-o-непрерывности позволяет доказать аналог теоремы Хана — Банаха — Канторовича о мажорируемом продолжении оператора с h-аппроксимирующей областью определения (предложение 6.1.8). Имеются также признаки совпадения и расширения области совпадения для операторов с общей мажорантой теней (6.1.7, 6.1.9).

15. В 1977 г. А. В. Викстед поставил вопрос о том, является ли каждый нерасширяющий оператор автоматически ограниченным. Впервые существование неограниченного нерасширяющего оператора было установлено Ю. А. Абрамовичем, А. И. Векслером и А. В. Колдуновым в 1979 г. Позже выяснилось, что эта ситуация является в определенном смысле типичной. А именно, было установлено, что все нерасширяющие операторы в расширенном K-пространстве автоматически ограничены тогда и только тогда, когда это K-пространство локально одномерно.

Таким образом, вопрос А. В. Викстеда об ограниченности нерасширяющего оператора получил исчерпывающий ответ. Однако в формулировку ответа проникло новое понятие локально одномерного K-пространства. Необычность этого понятия привела к выдвижению гипотезы о его совпадении с понятием дискретного K-пространства. Вокруг этой гипотезы стали происходить любопытные события. В 1981 г. Ю. А. Абрамович, А. И. Векслер и А. В. Колдунов привели доказательство существования неограниченного нерасширяющего оператора в любом недискретном расширенном K-пространстве, тем самым подтвердив справедливость гипотезы. Однако позже выяснилось, что доказательство было ошибочным. Затем в 1985 г. П. Т. Н. МакПолин и А. В. Викстед привели пример недискретного локально одномерного K-пространства, опровергнув на этот раз обсуждаемую гипотезу. Однако через некоторое время вновь выяснилось, что пример содержал ошибку. Наконец, в 1993 г. А. В. Викстед зафиксировал гипотезу о совпадении понятий локально одномерного и дискретного K-пространства как открытую.

В диссертации приведено опровержение обсуждаемой гипотезы. После предварительного анализа понятия σ-дистрибутивной булевой алгебры (см. 6.2.4–6.2.6) показано, что локальная одномерность K-пространства эквивалентна σ-дистрибутивности его базы (теорема 6.2.7). Далее установлено, что пополнение σ-индуктивной булевы алгебры σ-дистрибутивно (лемма 6.2.8), и на основе этого факта приведен пример безатомной σ-дистрибутивной полной булевой алгебры и, соответственно, пример безатомного локально одномерного K-пространства (пример 6.2.9).

16. Гомоморфизм H между банаховыми расслоениями $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ над Q представляет собой операторнозначную функцию, причем значения этой функции в различных точках $q \in Q$ представляют собой операторы $H(q)\colon \mathcal{X}(q) \to \mathcal{Y}(q)$, действующие в различных парах банаховых пространств. Естественным является желание построить непрерывное банахово расслоение $B(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, слоями которых были бы пространства операторов из $\mathcal{X}(q)$ в $\mathcal{Y}(q)$, а непрерывными сечениями — гомоморфизмы из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$.

Расслоение $B(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ построено в 3.2.1–3.2.3. Можно с уверенностью сказать, что такое операторное расслоение никогда ранее не рассматривалось. Дело в том, что определение нужного нам расслоения $B(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ возможно только в предположении просторности $\mathcal{X}$ (3.3.8).

17. Следующим естественным шагом за исследованием операторного расслоения $B(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ является рассмотрение сопряженного расслоения: $\mathcal{X}' = B(\mathcal{X},\mathcal{R})$, где $\mathcal{R} = Q \times \mathbb{R}$. Проблема существования такого расслоения по понятным теперь причинам не могла была решена до создания теории просторных банаховых расслоений. Например, в 1978 г. И. Е. Шокетманом было дано определение сопряженного банахова расслоения без какого-либо исследования проблемы его существования и поставлен вопрос о том, образуют ли гомоморфизмы из $\mathcal{X}$ в $Q \times \{\mathbb{R}\}$ непрерывную структуру в расслоении с сопряженными слоями. Ответ на этот вопрос нам теперь известен: гомоморфизмы образуют непрерывную структуру тогда и только тогда, когда расслоение $\mathcal{X}$ просторно (см. 3.1.9, 3.2.1–3.2.2, 3.3.8). Разнообразные свойства сопряженного расслоения, вытекающие из общей теории операторных расслоений, собраны в формулировке теоремы 3.3.1.

По определению слои $\mathcal{X}'(q)$ сопряженного расслоения $\mathcal{X}'$ являются банаховыми подпространствами сопряженных пространств к соответствующим слоям $\mathcal{X}$, т. е. для каждой точки $q \in Q$ имеет место включение $\mathcal{X}'(q) \subset \mathcal{X}(q)'$. Естественный вопрос о равенстве $\mathcal{X}'(q) = \mathcal{X}(q)'$ давно волновал специалистов. В диссертации установлено (теорема 3.3.5), что равенство $\mathcal{X}'(q) = \mathcal{X}(q)'$ равносильно рефлексивности слоя $\mathcal{X}(q)$.

18. Если реализация ортоморфизма из идеала $C_\infty(Q)$ в идеал $C_\infty(Q)$ представляет собой оператор поточечного умножения на фиксированную функцию из $C_\infty(Q)$, то ортоморфизм из идеала $C_\infty(Q,\mathcal{X})$ в идеал $C_\infty(Q,\mathcal{Y})$, где $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — непрерывные банаховы расслоения над Q, представляется в виде оператора поточечного применения фиксированного непрерывного операторного сечения расслоения $B(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ (предложение 6.5.13). В качестве следствия получена реализация изоморфизмов и изометрий РНП в виде соответствующих вложений и изометрий банаховых расслоений (6.5.4).

19. Абстрактный аналог оператора замены переменной называется оператором сдвига. Каждый оператор сдвига порядково ограничен, сохраняет дизъюнктность и переводит осколки единицы в осколки единицы. Однако, как показывают простейшие примеры, этот список свойств не является полным и не дает точного описания операторов сдвига. Недостающим условием является следующее: необходимо, чтобы образ оператора не выходил за рамки компоненты, порожденной образами осколков единицы (теорема 6.3.9). Операторы, удовлетворяющие этому условию, мы называем широкими на осколках единицы. Для изучения этого нового понятия (и его обобщений) разработана небольшая теория широких операторов (6.3.1–6.3.6). Обобщение и исследование понятия оператора сдвига на случай РНП произведено в 6.3.14–6.3.15.

Другое абстрактное описание оператора сдвига дается теоремой 6.3.10: оператор, действующий в K-пространствах является оператором сдвига тогда и только тогда, когда он мультипликативен, т. е. сохраняет произведение. Последний раз подобное описание давалось очень давно (в 40-е годы) и при дополнительных ограничениях на пространства и оператор (наличие единицы и o-непрерывность).

20. Наиболее распространенной реализацией оператора сдвига является, безусловно, его представление в виде оператора замены переменной (6.5.7–6.5.8). Новое аналитическое представление оператора сдвига дано в предложении 6.5.9: всякий оператор сдвига может быть реализован как оператор сужения на фиксированное замкнутое подмножество. Реализация оператора сдвига в РНП (предложение 6.5.17), представляет собой композицию непрерывной замены переменной и изометрии банаховых расслоений.

21. Оператором взвешенного сдвига мы называем оператор, имеющий WSW-представление, т. е. представимый в виде композиции $W \circ S \circ w$ двух ортоморфизмов w и W и оператора сдвига S. В разделе 6.4.1 произведен подробный анализ этого понятия на уровне определения. Основной критерий WSW-представимости приведен в теореме 6.4.2: оператор имеет WSW-представление с внутренним весом w тогда и только тогда, когда он сохраняет дизъюнктность, порядково ограничен и широк на элементе $1/w$. Обобщение понятия оператора взвешенного сдвига на случай РНП приведено в 6.4.6. Разделы 6.4.4 и 6.4.7 включают разнообразные критерии WSW-представимости для операторов, действующих в K-пространствах и РНП.

22. Реализация оператора взвешенного сдвига, действующего из идеала $C_\infty(P)$ в идеал $C_\infty(Q)$, представляет собой умножение элемента на фиксированную функцию $w \in C_\infty(P)$ с последующей заменой переменной посредством непрерывной функции $s\colon Q \to P$ и завершающим умножением на фиксированную функцию $W \in C_\infty(Q)$, т. е. значение оператора T на элементе e реализуется следующим образом: $Te = W \cdot \big((w \cdot e) \circ s\big)$ (см. 6.5.10, 6.5.11).

В работе показано (теорема 6.4.6 и замечание 6.4.6 (2)), что оператор взвешенного сдвига, действующий в РНП, имеет WSW-представление со скалярным внутренним весом. Благодаря этому факту аналитическое представление оператора взвешенного сдвига из идеала $C_\infty(P, \mathcal{X})$ в идеал $C_\infty(Q, \mathcal{Y})$ значительно упрощается (теорема 6.5.18) и приобретает следующий вид: $Tu = W \otimes \big((w \cdot u) \circ s\big)$, где $w \in C_\infty(P)$, $s \in C(Q, P)$ и $W \in C_\infty\big(Q, B(\mathcal{X} \circ s, \mathcal{Y})\big)$.

23. До сих пор ни один из реализационных результатов не обеспечивал реализацию произвольного порядково ограниченного сохраняющего дизъюнктность оператора на всей области определения. Каждая теорема о представлении либо ограничивала класс рассматриваемых операторов, либо ограничивала класс пространств, либо не гарантировала функциональную реализацию на всей области определения оператора.

Введение внутреннего веса в определении оператора взвешенного сдвига впервые позволило получить глобальную реализацию. Ключевым результатом на пути поиска требуемого представления является разложение произвольного порядково ограниченного сохраняющего дизъюнктность оператора в РНП в сильно дизъюнктную сумму операторов взвешенного сдвига (теорема 6.4.8). Этот результат является новым даже для случая оператора в K-пространствах (теорема 6.4.5)

Следствием такого разложения явилось искомое глобальное функциональное представление произвольного сохраняющего дизъюнктность оператора, действующего как в K-пространствах (теорема 6.5.12), так и в РНП (теорема 6.5.19).

24. Глобальная реализация оператора, сохраняющего дизъюнктность, позволяет интерпретировать его свойства, выраженные на языке абстрактной алгебраической системы, в терминах его конкретного функционального представления. В тексте диссертации приведены интерпретации таких свойств оператора, сохраняющего дизъюнктность, как o-непрерывность (теорема 6.6.3), инъективность (теорема 6.6.5), идеальность образа (предложение 6.6.10 и теорема 6.6.12), сохранение подмодулей (предложение 6.6.14 и теорема 6.6.15).

25. В заключение мы приведем общий список основных результатов, выносимых на защиту.

- Разработана концепция порядковой аппроксимации в решеточно нормированном пространстве, описаны o-замыкания и o-пополнения (0.1.5, § 1.5).
- Введены и исследованы четыре типа порядковой ограниченности оператора, приведены примеры, доказывающие их попарное несовпадение (0.1.6, § 1.6).
- Доказано, что в экстремально несвязном компакте понятия изолированной и σ-изолированной точек совпадают (0.2.2, 1.1.9).
- Установлена возможность продолжения непрерывных функций, вектор-функций и сечений на наибольшие области определения; такое продолжение легло в основу построения соответствующих функциональных пространств (0.2.4, 0.2.5, 0.2.9, 1.1.1, 1.1.2, 2.5.1, 2.5.2, 5.1.1, 5.1.4, 5.1.5).
- Создана теория просторных непрерывных банаховых расслоений (0.2.8, глава 3).

- Осуществлена реализация решеточно нормированного пространства в виде пространства непрерывных расширенных сечений просторного банахова расслоения (0.2.9, § 3.4).
- Создана теория измеримых банаховых расслоений (0.3.4, глава 4).
- Доказано существование лифтинга в различных пространствах слабо измеримых вектор-функций (0.4.3, 5.3.11–5.3.13).
- Введено понятие лифтинга в пространстве измеримых сечений и создана соответствующая теория (0.4.4, § 4.3, § 4.4).
- Получена реализация широкого класса решеточно нормированных пространств в виде пространств измеримых сечений (0.3.4, § 4.4).
- Разработана концепция стоуновского преобразования для измеримых функций, вектор-функций и сечений (§ 0.5, 1.3.13, 4.3.4, 4.3.5, § 5.3).
- Разнообразные свойства решеточно нормированных пространств интерпретированы в терминах их реализаций (§ 0.6, 2.5.7, § 3.4, § 4.4).
- С помощью понятия тени оператора реализован метод r-d-расщепления для исследования операторов, сохраняющих дизъюнктность; решен ряд задач, связанных с порядковой непрерывностью таких операторов (0.8.1, 0.8.2, § 6.1).
- Опровергнута гипотеза о совпадении классов локально одномерных и дискретных K-пространств (0.9.1, 6.2.1–6.2.9).
- Получены описания гомоморфизмов банаховых расслоений в терминах их действия на сечениях (0.9.3, § 2.4).
- Определено и изучено банахово расслоение пространств операторов (0.9.4, § 3.2, 4.4.6).
- Впервые введено понятие сопряженного банахова расслоения и исследована соответствующая двойственность (0.9.5, § 3.3, 4.4.7).
- Введено и исследовано понятие оператора сдвига в векторных решетках и решеточно нормированных пространствах (§ 0.10, § 6.3).
- Получено разложение произвольного порядково ограниченного сохраняющего дизъюнктность оператора в сильно дизъюнктную сумму операторов взвешенного сдвига (§ 0.11, § 6.4).
- Получены функциональные представления для широкого класса операторов, сохраняющих дизъюнктность, и дана интерпретация их свойств в терминах реализации (0.9.6, 0.10.3, 0.11.2, 0.11.3, § 6.5, § 6.6).

Список работ автора по теме диссертации

1. О сохраняющих дизъюнктность операторах в пространствах Банаха — Канторовича // XIV *Школа по теории операторов в функциональных пространствах* / Тезисы докладов. N 1. Новгород, 1989. С. 75.
2. О сохраняющих дизъюнктность операторах в пространствах непрерывных вектор-функций // XV *Школа по теории операторов в функциональных пространствах* / Тезисы докладов. N 1. Ульяновск, 1990. С. 76.
3. Измеримые банаховы расслоения и весовые операторы // V *Школа молодых математиков Сибири и Дальнего Востока.* Новосибирск, 1990. С. 30–32.
4. Пример секвенциально o-непрерывного, но не мажорируемого оператора, сохраняющего дизъюнктность // *Оптимизация.* 1990. Т. 47 (64). С. 116–121.
5. Лифтинг в пространствах измеримых сечений // XVI *Школа по теории операторов в функциональных пространствах* / Тезисы докладов. N 1. Нижний Новгород, 1991. С. 63.
6. О реализации решеточно нормированных пространств // *Сиб. мат. журн.* 1991. Т. 32, N 2. С. 41–54.
7. *Реализация решеточно нормированных пространств и ее приложения* / Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1991.
8. Banach bundles in the theory of lattice-normed spaces. I. Continuous Banach bundles // *Siberian Adv. Math.* 1993. V. 3, N 3. P. 1–55.
9. Banach bundles in the theory of lattice-normed spaces. II. Measurable Banach bundles // *Siberian Adv. Math.* 1993. V. 3, N 4. P. 8–40.
10. Banach bundles in the theory of lattice-normed spaces. III. Approximating sets and bounded operators // *Siberian Adv. Math.* 1994. V. 4, N 2. P. 54–75.
11. Locally one-dimensional K-spaces and σ-distributive Boolean algebras // *Siberian Adv. Math.* 1995. V. 5, N 2. P. 99–121.