ДОКЛАД
А. Е. Гутмана
об основных положениях диссертации
“Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств”

Наука, о которой пойдет речь, берет начало в теории функциональных уравнений, а точнее, в той ее области, где применяются порядковые методы анализа и решения функциональных уравнений, в частности, метод мажорант.

Метод мажорант удобно проиллюстрировать на примере какого-нибудь конкретного функционального уравнения, — например, интегрального (см. рис. 1). Предположим, что модуль ядра k интеграла оценен сверху функцией $\overline{k}$. Обозначим через $\overline{T}$ интегральный оператор с ядром $\overline{k}$. Какой смысл в этом случае следует придать записи $|T| \leqslant \overline{T}$? Элементарные вычисления позволяют заключить, что последнюю формулу нужно интерпретировать следующим образом: $|Tx| \leqslant \overline{T}|x|$ для всех x. В этом случае оператор $\overline{T}$ называется *мажорантой* для T.

Суть метода мажорант заключается в том, что мажорируемый оператор наследует многие полезные свойства своей мажоранты (см. рис. 2). Если мажорирующий оператор $\overline{T}$ в определенном смысле “хороший” (непрерывный, компактный, интегральный и т. д.), то мажорируемый оператор T будет “хорошим” в том же смысле.

В зависимости от конкретных функциональных пространств, в которых задано изучаемое уравнение (см. рис. 3), метод мажорант имеет различные технические реализации. Тем не менее, идейная основа во всех случаях едина. Естественным является стремление разработать метод мажорант на теоретическом уровне, не зависящем от конкретных пространств функций. Этой цели можно достигнуть с помощью замены рассматриваемых объектов на их абстрактные аналоги. О каком абстрактном аналоге следует говорить в данном случае? Во-первых, мы должны уметь складывать значения переменной x и умножать их на числа, потому речь идет, по крайней мере, о векторном пространстве. Во-вторых, мы должны уметь сравнивать значения x, т. е. наше векторное пространство должно быть упорядоченным. Наконец, мы должны уметь вычислять модуль значений x, а следовательно, речь идет о векторной решетке. Именно теория векторных решеток и положительных операторов обеспечивает необходимую теоретическую базу для разработки метода мажорант на абстрактном уровне.

Однако переход на абстрактный уровень имеет свои издержки. Во-первых, теряется наглядность: если раньше мы имели дело с функциями, определенными на каком-либо конкретном базовом множестве и обладающими конкретными свойствами, то теперь мы работаем с абстрактными элементами абстрактной векторной решетки. Во-вторых, доказательства становятся более сложными, превращаясь из функциональных в чисто алгебраические.

При разработке теоретической стороны метода мажорант хотелось бы сохранить общность подхода, но вместе с тем получить возможность работать не с абстрактными элементами, а с функциями. Такую возможность предоставляет универсальное функциональное представление векторных решеток (см. рис. 4). Каждая векторная решетка канонически — и в определенном смысле плотно — вкладывается в пространство $C_\infty(Q)$ непрерывных числовых функций, определенных на всюду плотных подмножествах экстремально несвязного компакта Q.

Допустим теперь, что значениями переменной x рассматриваемого функционального уравнения являются не отдельные числовые функции, а их конечные наборы: $x = \big(x_1(s), \dots, x_n(s)\big)$ или последовательности: $x = \big(x_1(s), \dots, x_n(s), \dots\big)$ или произвольные семейства: $x = \big(x_\xi(s)\big)_{\xi \in \Xi}$ или переменная x зависит от дополнительного параметра: $x = x(s, \lambda)$ (непрерывным или измеримым образом) или же имеет место самая общая из всех рассмотренных ситуаций — значениями x являются вектор-функции: $x = \vec{x}(s)$, где $\vec{x}(s)$ — элементы какого-либо нормированного пространства. В этом случае метод мажорант рушится уже потому, что мы теряем возможность сравнивать различные значения x.

Спасительной идеей является привлечение так называемой векторной или решеточной нормы. В каждом из рассмотренных случаев значению переменной x можно естественным образом сопоставить числовую функцию $|\!|\!|x|\!|\!|$. Функция $|\!|\!|x|\!|\!|$ вычисляется в разных случаях по-разному. Например, $|\!|\!|x|\!|\!|(s) = |x_1(s)| + \dots + |x_n(s)|$ или $|\!|\!|x|\!|\!|(s) = \sup_\lambda |x(s,\lambda)|$ или $|\!|\!|x|\!|\!|(s) = \|\vec{x}(s)\|$.

В результате мы, конечно, не приобретаем возможность сравнивать значения x, но зато мы можем сравнивать их решеточные нормы $|\!|\!|x|\!|\!|$. Эта идея позволяет адаптировать метод мажорант к новой ситуации: достаточно заменить в оригинальном методе взятие модуля на вычисление решеточной нормы (см. рис. 5). Исследования показывают, что адаптированный метод мажорант вполне адекватен: набор свойств, наследуемых мажорируемым оператором, не становится более бедным.

Как и оригинальный метод, адаптированный метод мажорант имеет различные технические реализации, зависящие от конкретных функциональных пространств, в которых задано изучаемое уравнение. Стремление к унификации разрабатываемых приемов вновь приводит к переходу на абстрактный уровень. В данном случае речь уже идет не о векторных решетках, а о решеточно нормированных пространствах (этот термин содержится в названии диссертации) — векторных пространствах, снабженных нормой, принимающей значения не во множестве чисел, а в некоторой векторной решетке. Теория решеточно нормированных пространств и мажорируемых операторов обеспечивает необходимую теоретическую базу для разработки метода мажорант на абстрактном уровне.

Надо сказать, что упомянутая теория до сих пор находилась лишь на абстрактном уровне, страдающем отмеченными выше типичными недостатками: потерей наглядности и усложнением (алгебраизацией) доказательств. Как и раньше, хотелось бы сохранить общность подхода, но вместе с тем получить возможность работать не с абстрактными элементами, а с функциями. Такую возможность могло бы предоставить универсальное функциональное представление решеточно нормированных пространств.

Именно такое представление является центральным результатом диссертации (см. рис. 6). Каждое решеточно нормированное пространство канонически — и в определенном смысле плотно — вкладывается в пространство $C_\infty(Q, \mathcal{X})$ непрерывных функций, определенных на всюду плотных подмножествах экстремально несвязного компакта Q. Однако теперь речь идет не о числовых функциях и даже не о вектор-функциях, а о сечениях банахова расслоения $\mathcal{X}$.

Понятие банахова расслоения (см. рис. 7) представляет собой формализацию интуитивного представления о семействе банаховых пространств $\mathcal{X}(q)$, непрерывным образом изменяющихся от точки к точке топологического пространства Q. Пространства $\mathcal{X}(q)$ называются слоями банахова расслоения. Подходящая формализация, в частности, позволяет дать определение непрерывного сечения x банахова расслоения $\mathcal{X}$ — функции x, в каждой точке $q \in Q$ принимающей значение $x(q)$ из соответствующего пространства $\mathcal{X}(q)$. Именно из таких функций состоит универсальное представление решеточно нормированного пространства.

Предложенное функциональное представление универсально, но, тем не менее, не всегда адекватно. Если в какой-либо области приложений класс рассматриваемых уравнений включает лишь уравнения, заданные в пространствах измеримых функций, то представление $C_\infty(Q, \mathcal{X})$ не является удобным. Дело в том, что оно навязывает переход от измеримых функций к непрерывным, в корне меняя технологию исследования. Более приемлемым предложением было бы, пожертвовав универсальностью, построить представление, состоящее из измеримых функций. В диссертации имеется такое представление (см. рис. 8): каждое решеточно нормированное пространство, возникающее в упомянутом классе задач, можно представить в виде пространства измеримых сечений *измеримого* банахова расслоения $\mathcal{X}$ над пространством с мерой Ω. Понятие измеримого банахова расслоения является новым. Помимо соответствующего определения в диссертации развита теория таких расслоений.

Итак, центральными результатами диссертации являются теоремы о представлении абстрактных решеточно нормированных пространств в виде пространств функций. Приложения этих результатов возникают, по крайней мере, в следующих областях.

(1) Внутренние задачи теории РНП.
   (а) Проблема o-замыкания.
   (б) Различные типы ограниченности.
   (в) Проблема существования неограниченных ортоморфизмов.

(2) Банаховы расслоения.
   (а) Описание гомоморфизмов в терминах действия на сечениях.
   (б) Проблема существования операторного расслоения.
   (в) Проблема равенства $\mathcal{X}'(q) = \mathcal{X}(q)'$.

(3) Вектор-функции.
   (а) Продолжение не всюду определенных непрерывных функций.
   (б) Лифтинг в пространствах измеримых функций.
   (в) Связь между измеримыми и непрерывными функциями (стоуновское преобразование).

(4) Представление операторов.
   (а) Тень оператора.
   (б) Операторы взвешенного сдвига.
   (в) Представление операторов, сохраняющих дизъюнктность.

Подробно осветить каждую из упомянутых областей я, конечно, не успею. Постараюсь привести по одному примеру приложения для каждой из областей.

В теории решеточно нормированных пространств важную роль играет понятие порядковой сходимости или o-сходимости. Тем не менее, некоторые ключевые проблемы, связанные с этим понятием, до сих пор не были решены. Совокупность всевозможных o-пределов сетей, составленных из элементов некоторого подмножества решеточно нормированного пространства, называется o-замыканием этого подмножества. Возникает естественный вопрос: является ли o-замыкание o-замкнутым, т. е. верно ли, что повторное o-замыкание не добавляет новых элементов?

Поскольку o-сходимость не топологична, этот вопрос далеко не тривиален и до сих пор не был решен даже для конечно-цикличных множеств, которые чаще всего рассматриваются в вопросах пополнения и продолжения. При построении o-замкнутой оболочки авторы были вынуждены рассматривать Борелевские надстройки, т. е. присоединять к данному множеству o-пределы его элементов, затем o-пределы o-пределов и т. д.

Указанную проблему удалось решить с помощью функционального представления решеточно нормированных пространств (см. рис. 9). В предложенном реализационном описании o-замыкания фигурирует операция топологического замыкания. Это позволило сделать вывод о том, что повторные присоединения o-пределов не нужны: несмотря на нетопологичность o-сходимости, o-замыкание можно получить однократным присоединением o-пределов.

Приложения в области теории банаховых расслоений связаны главным образом с понятием гомоморфизма расслоений (см. рис. 10). Поскольку гомоморфизм представляет собой операторнозначную функцию, значения которой в различных точках представляют собой линейные операторы в различных парах банаховых пространств, возникает естественное стремление определить банахово расслоение, слоями которого были бы пространства операторов, а сечениями — гомоморфизмы. Существование такого операторного расслоения до сих пор оставалось открытым вопросом. В диссертации предложено решение этой проблемы следующим образом. Введено и исследовано новое понятия просторного банахова расслоения и доказано, что операторное расслоение для расслоений $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ существует тогда и только тогда, когда расслоение $\mathcal{X}$ просторно.

Приложения к теории вектор-функций имеют разный характер в зависимости от класса рассматриваемых функций. При изучении непрерывных функций рассматриваются пространства $C(Q,X)$, $C(Q,X|X')$, $C(Q,X'|X)$, $C(Q,X|Y)$, а приложения касаются главным образом вопросов продолжимости не всюду определенных функций. При изучении измеримых функций рассматриваются пространства $L^p(\Omega,X)$, $L^p(\Omega,X|X')$, $L^p(\Omega,X'|X)$, $L^p(\Omega,X|Y)$, а приложения касаются вопросов существования разнообразных лифтингов. Кроме того, имеются результаты о связи между измеримыми и непрерывными вектор-функциями. В таких теоремах строится фиксированное отображение $\tau\colon \Omega \to Q$, с помощью которого измеримые и непрерывные функции получаются друг из друга простой заменой переменной (см. рис. 11).

Обратимся к приложениям, касающимся построения аналитических представлений для линейных операторов. В качестве объекта для исследования был выбран класс так называемых операторов взвешенного сдвига. В зависимости от конкретных функциональных пространств, в которых задано рассматриваемое уравнение, оператор взвешенного сдвига может определяться различными формулами. Например:

$$(Tx)_n = w_n \cdot x_{n+1}$$
$$(Tx)_\lambda = w_\lambda \cdot x_{s(\lambda)}$$
$$(Tx)(t) = w(t) \cdot x\big(s(t)\big)$$

Стремление к разработке универсального метода исследования уравнений с операторами взвешенного сдвига приводит к переходу на абстрактный уровень. Установлено, что абстрактный аналог оператора взвешенного сдвига представляет собой оператор, сохраняющий дизъюнктность, т. е. оператор, переводящий пары дизъюнктных функций в дизъюнктные. (Функции называются дизъюнктными, если их носители не пересекаются.)

Однако, как и всякий переход на абстрактный уровень, данная абстракция также страдает неоднократно упоминаемыми ранее недостатками — потерей наглядности и усложнением (алгебраизацией) доказательств. Хотелось бы сохранить общность но, вместе с тем, приобрести возможность работать не с абстрактно описанным оператором, а с оператором, действующим по конкретной формуле. Это достигается с помощью построенного в диссертации универсального аналитического представления для операторов, сохраняющих дизъюнктность (см. рис. 12).

В заключение я приведу краткое оглавление диссертации.

БАНАХОВЫ РАССЛОЕНИЯ В ТЕОРИИ РЕШЕТОЧНО НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ

Рис. 1. Понятие мажоранты

Функциональное уравнение	*Операторная запись*
$\int k(s,t)x(s)\,ds = y(t)$	$Tx = y$
$\bigl\lvert k(s,t)\bigr\rvert \leqslant \overline{k}(s,t)$	$\lvert T\rvert \leqslant \overline{T}$
$\bigl\lvert \int kx \bigr\rvert \leqslant \int \overline{k}\,\lvert x\rvert$	$\lvert Tx\rvert \leqslant \overline{T}\lvert x\rvert$

Рис. 2. Метод мажорант

$$\bigl\lvert T x \bigr\rvert \leqslant \overline{T}\,\lvert x \rvert$$

хороший $\Longleftarrow$ хороший

$\left(\begin{array}{l}\textit{непрерывный,}\\ \textit{компактный,}\\ \textit{интегральный, \ldots}\end{array}\right)$

Рис. 3. Различная техника

$\mathbb{R}^n$	$L^1[0,1]$	$C[0,1]$	$\overline{C}^1(\mathbb{R})$
ℓ^1	$L^p[0,1]$	$\overline{C}[0,1]$	$\overline{C}^k(\mathbb{R})$
ℓ^p	$L^p(\Omega)$	$C(Q)$	$\overline{C}^k(\mathbb{R}^n)$

Абстрактный уровень:

Векторные решетки (ВР) и положительные операторы

Издержки:

Теряется наглядность, усложняются доказательства

Выход:

Универсальное функциональное представление ВР

Рис. 4. Теорема Огасавары

$$\text{ВР} \hookrightarrow C_\infty(Q)$$

Q — *экстремально несвязный компакт*

Крушение метода мажорант:

$$x = \big(x_1(s), \dots, x_n(s)\big)$$
$$x = \big(x_1(s), \dots, x_n(s), \dots\big)$$
$$x = \big(x_\xi(s)\big)_{\xi \in \Xi}$$
$$x = x(s, \lambda)$$
$$x = \vec{x}(s)$$

Спасительная идея: $\quad x \mapsto |\!|\!| x |\!|\!|$

Например:

$$|\!|\!| x |\!|\!| (s) = |x_1(s)| + \dots + |x_n(s)|$$
$$|\!|\!| x |\!|\!| (s) = \sup_\lambda |x(s, \lambda)|$$
$$|\!|\!| x |\!|\!| (s) = \|\vec{x}(s)\|$$

Рис. 5. Адаптированный метод

$$\Big|\!\Big|\!\Big| T x \Big|\!\Big|\!\Big| \leqslant \overline{T} |\!|\!| x |\!|\!|$$

хороший $\Longleftarrow$ хороший

$\left(\begin{array}{l}\textit{непрерывный,}\\ \textit{компактный,}\\ \textit{интегральный, \dots}\end{array}\right)$

Рис. 6. Теорема 3.4.2

$$\text{РНП} \hookrightarrow C_\infty(Q, \mathcal{X})$$

Q — *экстремально несвязный компакт*
$\mathcal{X}$ — *банахово расслоение над* Q

Рис. 7. Банахово расслоение $\mathcal{X}$

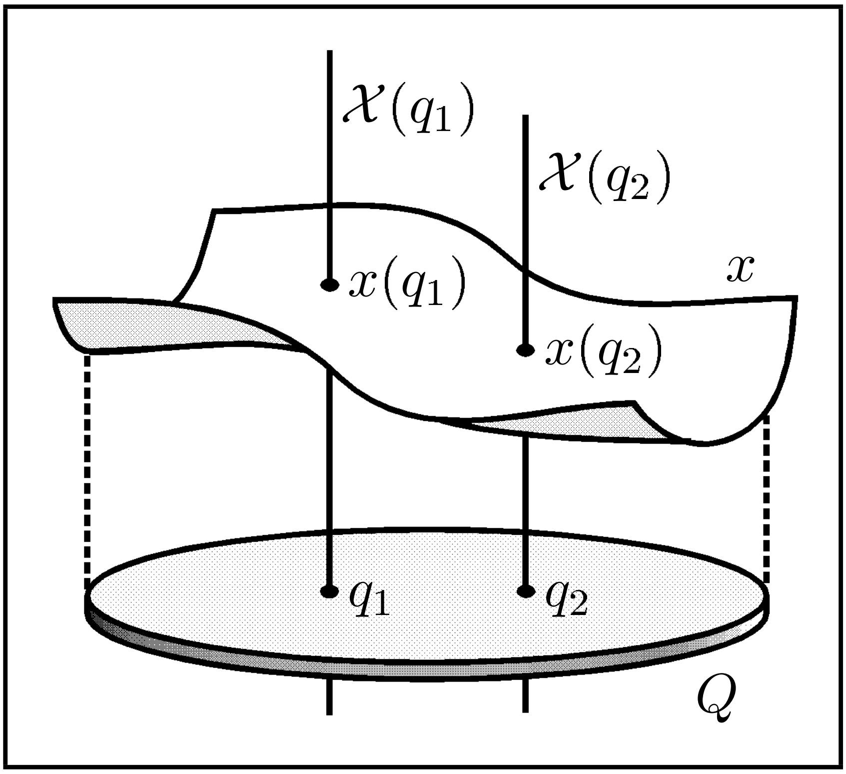


Рис. 8. Теорема 4.4.8

$$\text{РНП над } L^p(\Omega) \ \hookrightarrow \ L^p(\Omega, \mathcal{X})$$

Ω — *пространство с мерой*
$\mathcal{X}$ — *измеримое банахово расслоение*

ОБЛАСТИ ПРИЛОЖЕНИЙ

(1) Внутренние задачи теории РНП

- (а) Проблема o-замыкания
- (б) Различные типы ограниченности
- (в) Проблема существования неограниченных ортоморфизмов

(2) Банаховы расслоения

- (а) Описание гомоморфизмов в терминах действия на сечениях
- (б) Проблема существования операторного расслоения
- (в) Проблема равенства $\mathcal{X}'(q) = \mathcal{X}(q)'$

(3) Вектор-функции

- (а) Продолжение несвюду определенных непрерывных функций
- (б) Лифтинг в пространствах измеримых функций
- (в) Связь между измеримыми и непрерывными функциями (стоуновское преобразование)

(4) Представление операторов

- (а) Тень оператора
- (б) Операторы взвешенного сдвига
- (в) Представление операторов, сохраняющих дизъюнктность

Рис. 9. Построение o-замыкания

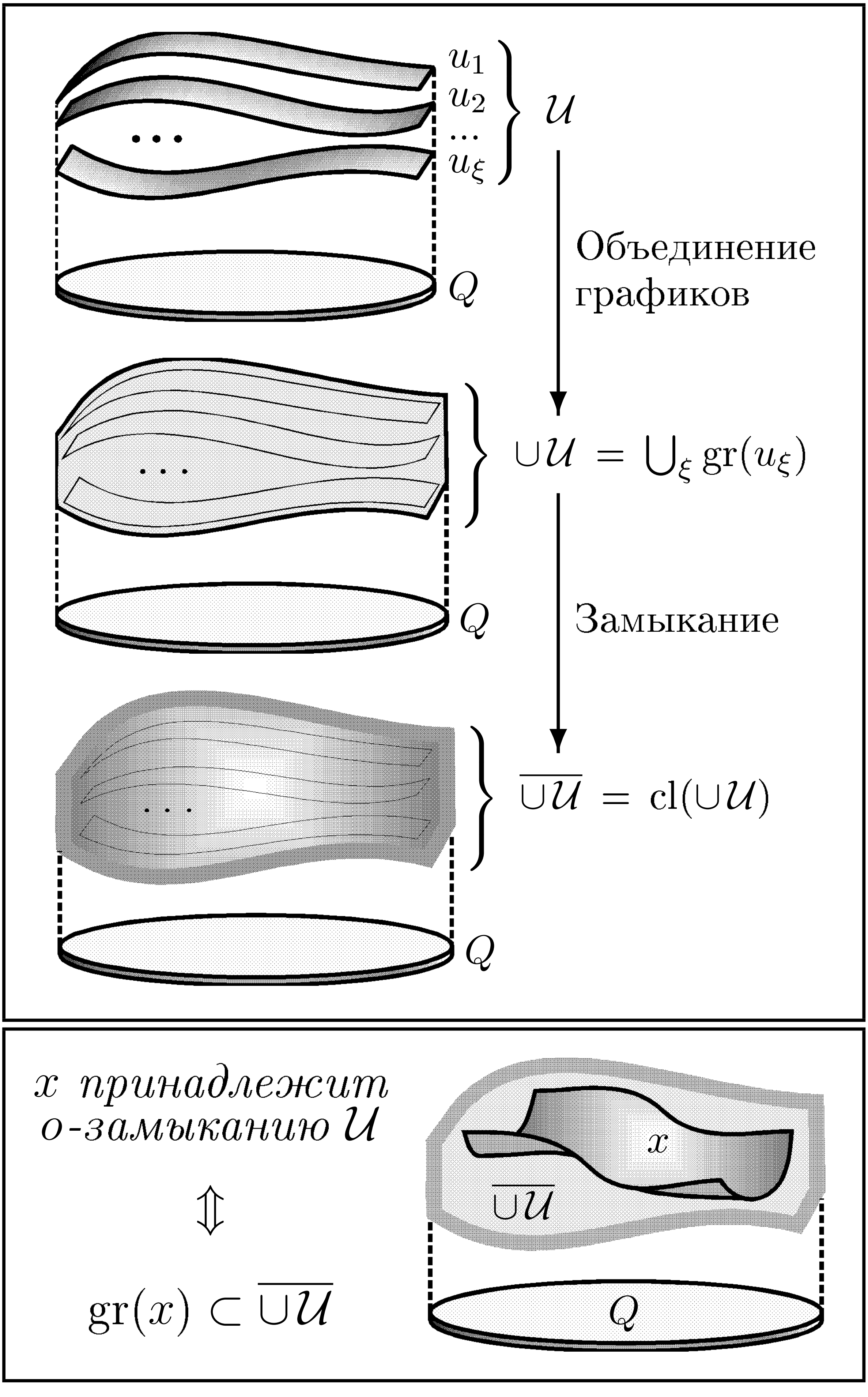
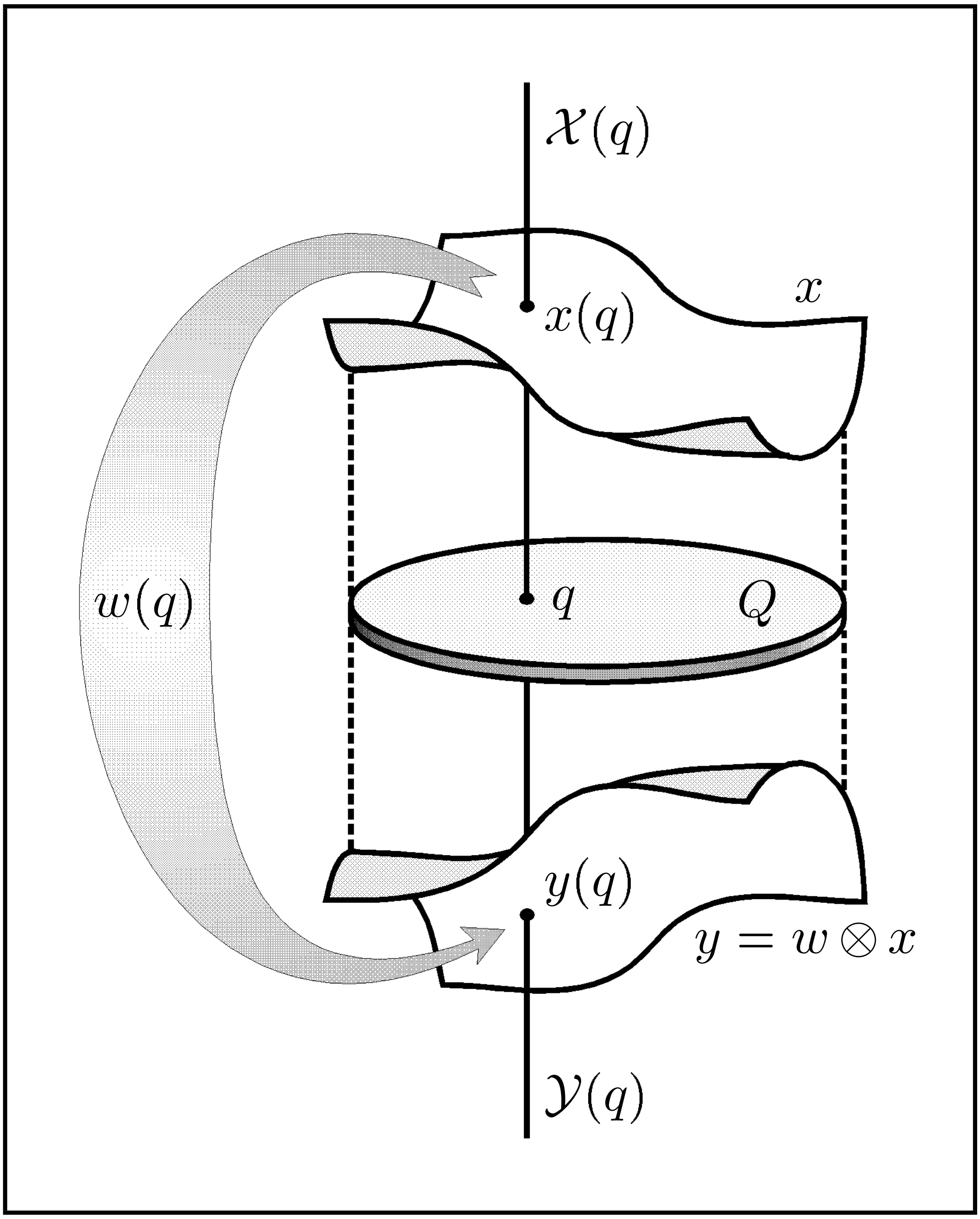


Рис. 10. Гомоморфизм w



Проблемы теории банаховых расслоений

(а) Действие гомоморфизмов на сечениях

(б) Проблема существования операторного расслоения

(в) Проблема равенства $\mathcal{X}'(q) = \mathcal{X}(q)'$

Приложения к вектор-функциям

Непрерывные функции:

Классы функций: $C(Q,X)$, $C(Q,X|X')$, $C(Q,X'|X)$, $C(Q,X|Y)$

Продолжение невсюду определенных функций

Измеримые функции:

Классы функций: $L^p(\Omega,X)$, $L^p(\Omega,X|X')$, $L^p(\Omega,X'|X)$, $L^p(\Omega,X|Y)$

Лифтинги

Рис. 11. Связь между ними:

Имеется такое отображение $\tau\colon\Omega\to Q$, *что*

функция x *измерима*

$$\Updownarrow$$

$$x \underset{\text{п.в.}}{=} \hat{x}\circ\tau,$$

где $\hat{x}$ — *непрерывная функция*

Операторы взвешенного сдвига

$$(Tx)_n = w_n \cdot x_{n+1}$$
$$(Tx)_\lambda = w_\lambda \cdot x_{s(\lambda)}$$
$$(Tx)(t) = w(t) \cdot x\big(s(t)\big)$$

Абстрактный уровень:
оператор, сохраняющий дизъюнктность

Рис. 12. Взвешенный сдвиг