

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БУЛЕВОЗНАЧНОГО УНИВЕРСУМА

А. Е. Гутман, Г. А. Лосенков

Аннотация

Для абстрактной булевозначной системы предлагается функциональный аналог — модель, элементы которой являются функциями, а основные логические операции вычисляются «поточечно». Вводится и исследуется новое понятие непрерывного поливерсума, представляющего собой непрерывное расслоение моделей теории множеств. Показывается, что класс непрерывных сечений поливерсума является булевозначной алгебраической системой, удовлетворяющей всем основным принципам булевозначного анализа, а также устанавливается, что любая такая булевозначная алгебраическая система может быть представлена в виде класса сечений подходящего непрерывного поливерсума.

Ключевые слова и фразы: булевозначный анализ, функциональное представление, стоуновский компакт, непрерывное расслоение, непрерывное сечение.

В основе методов булевозначного анализа лежит рассмотрение нестандартных моделей теории множеств с многозначной истинностью. Точнее говоря, истинность высказывания в таких моделях принимает значения в некоторой полной булевой алгебре.

В настоящее время булевозначный анализ представляет собой достаточно мощную теорию, изобилующую многочисленными глубокими результатами и имеющую разнообразные приложения, главным образом, в теории множеств. Применительно к функциональному анализу методы булевозначного анализа нашли весьма удачное применение в таких областях, как теория векторных решеток и решеточно нормированных пространств, теория положительных и мажорируемых операторов, теория алгебр фон Неймана, выпуклый анализ, теория векторных мер.

Современные методы булевозначного анализа в силу самой своей природы сопряжены с довольно громоздкой техникой логического характера. Можно сказать, что с прагматической точки зрения рядового пользователя-аналитика эта техника в значительной степени отвлекает от вполне конкретной цели — воспользоваться достижениями булевозначного анализа для решения той или иной аналитической задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97-01-00001).

Поскольку в функциональном анализе наиболее привычным объектом исследования являются разнообразные пространства функций, возникает естественное желание иметь дело не с абстрактной булевозначной системой, а с ее функциональным аналогом — моделью, элементы которой являются функциями, а основные логические операции вычисляются «поточечно». Примером такой модели является класс \mathbb{V}^Q всех функций, определенных на фиксированном непустом множестве Q и действующих в класс \mathbb{V} всех множеств. Значениями истинности в модели \mathbb{V}^Q являются всевозможные подмножества Q , причем истинность $\llbracket \varphi(u_1, \dots, u_n) \rrbracket$ высказывания $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ на функциях $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{V}^Q$ вычисляется следующим образом:

$$\llbracket \varphi(u_1, \dots, u_n) \rrbracket = \{q \in Q \mid \varphi(u_1(q), \dots, u_n(q))\}.$$

В настоящей работе предлагается решение поставленной выше задачи. С этой целью вводится и исследуется новое понятие непрерывного поливерсума, представляющего собой непрерывное расслоение моделей теории множеств. Показывается, что класс непрерывных сечений поливерсума является булевозначной алгебраической системой, удовлетворяющей всем основным принципам булевозначного анализа, а также устанавливается, что любая такая булевозначная алгебраическая система может быть представлена в виде класса сечений подходящего непрерывного поливерсума.

§ 1. Предварительные сведения

1.1. Пусть X и Y — топологические пространства. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *открытым*, если оно удовлетворяет любому из следующих эквивалентных условий:

- (1) для всякого открытого подмножества $A \subset X$ образ $f(A)$ открыт в Y ;
- (2) для всякой точки $x \in X$ и любой ее окрестности $A \subset X$ образ $f(A)$ является окрестностью точки $f(x)$ в Y ;
- (3) $f^{-1}(\text{cl } B) \subset \text{cl } f^{-1}(B)$ для любого подмножества $B \subset Y$.

Заметим, что равенство $f^{-1}(\text{cl } B) = \text{cl } f^{-1}(B)$ имеет место для всех подмножеств $B \subset Y$ тогда и только тогда, когда отображение f непрерывно и открыто.

Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *замкнутым*, если оно удовлетворяет любому из следующих эквивалентных условий:

- (1) для всякого замкнутого подмножества $A \subset X$ образ $f(A)$ замкнут в Y ;
- (2) $\text{cl } f(A) \subset f(\text{cl } A)$ для любого подмножества $A \subset X$.

Равенство $\text{cl } f(A) = f(\text{cl } A)$ выполняется для любого подмножества $A \subset X$ тогда и только тогда, когда отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно и замкнуто.

1.2. Пусть X — некоторый класс. Подкласс $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ назовем *топологией* на X , если

- (1) $\cup \tau = X$;
- (2) $U \cap V \in \tau$ для всех $U, V \in \tau$;
- (3) $\cup \mathcal{U} \in \tau$ для любого подмножества $\mathcal{U} \subset \tau$.

Класс X , наделенный топологией, мы, как обычно, будем называть *топологическим пространством*.

Все основные топологические понятия (такие, как окрестность точки, замкнутое множество, внутренность, замыкание, непрерывная функция, хаусдорфовость и т. п.) вводятся аналогично тому, как это делается для топологии на множестве. Заметим однако, что не все классические подходы к определению этих понятий сохраняют свою формальную силу в случае класс-топологии. Например, из двух определений замкнутого множества:

- (а) как подмножества X , дополнение которого принадлежит τ ,
- (б) как подмножества X , дополнение которого с каждой своей точкой содержит элемент τ ,

следует выбрать второе.

Определяя замыкание множества A как наименьшее замкнутое подмножество X , содержащее A , мы подвергаем себя определенному риску: некоторые множества могут не иметь замыкания. Однако эта проблема отсутствует, если топология τ хаусдорфова: в этом случае каждое множество будет иметь замыкание. (Действительно, в случае хаусдорфовой топологии каждый сходящийся фильтр имеет единственный предел, а значит, совокупность всех пределов сходящихся фильтров над данным множеством окажется множеством, а не собственным классом.)

Символом $\text{Clor}(X)$ обозначается класс всех открыто-замкнутых подмножеств X (т. е. подмножеств, являющихся одновременно открытыми и замкнутыми). В дальнейшем запись $U \sqsubset X$ будет означать, что $U \in \text{Clor}(X)$. Для класса $\{U \sqsubset X \mid x \in U\}$ мы будем использовать обозначение $\text{Clor}(x)$.

Топология называется *экстремально несвязной*, если замыкание всякого открытого множества является открытым множеством.

Большинство необходимых нам сведений о топологических пространствах можно найти, например, в [1, 2].

1.3. Пусть B — полная булева алгебра. Тройка $(\mathfrak{U}, [\cdot = \cdot], [\cdot \in \cdot])$ называется *булевозначной алгебраической системой* над B (или *B -значной алгебраической системой*), если классы $[\cdot = \cdot]$ и $[\cdot \in \cdot]$ являются класс-функциями из $\mathfrak{U} \times \mathfrak{U}$ в B , обладающими следующими свойствами:

- (1) $[[u = u]] = \mathbf{1}$;
- (2) $[[u = v]] = [[v = u]]$;

- (3) $\llbracket u = v \rrbracket \wedge \llbracket v = w \rrbracket \leq \llbracket u = w \rrbracket$;
- (4) $\llbracket u = v \rrbracket \wedge \llbracket v \in w \rrbracket \leq \llbracket u \in w \rrbracket$;
- (5) $\llbracket u = v \rrbracket \wedge \llbracket w \in v \rrbracket \leq \llbracket w \in u \rrbracket$

для всех $u, v, w \in \mathfrak{U}$.

Класс-функции $\llbracket \cdot = \cdot \rrbracket$ и $\llbracket \cdot \in \cdot \rrbracket$ называются булевозначными (B -значными) оценками истинности равенства и принадлежности.

Вместо $(\mathfrak{U}, \llbracket \cdot = \cdot \rrbracket, \llbracket \cdot \in \cdot \rrbracket)$ мы обычно будем писать просто \mathfrak{U} и в случае необходимости снабжать символы булевозначных оценок истинности индексом $\llbracket \cdot = \cdot \rrbracket_{\mathfrak{U}}$ и $\llbracket \cdot \in \cdot \rrbracket_{\mathfrak{U}}$.

Булевозначная система \mathfrak{U} называется *отделимой*, если для любых $u, v \in \mathfrak{U}$ из $\llbracket u = v \rrbracket = \mathbf{1}$ следует $u = v$.

1.4. Рассмотрим булевозначные алгебраические системы \mathfrak{U} и \mathfrak{V} над полными булевыми алгебрами B и C и предположим, что между алгебрами B и C имеется булев изоморфизм $j: B \rightarrow C$. *Изоморфизмом булевозначных алгебраических систем \mathfrak{U} и \mathfrak{V} , согласованным с изоморфизмом j* , называется биективная класс-функция $i: \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{V}$, удовлетворяющая соотношениям

$$\begin{aligned} j(\llbracket u_1 = u_2 \rrbracket_{\mathfrak{U}}) &= \llbracket i(u_1) = i(u_2) \rrbracket_{\mathfrak{V}}, \\ j(\llbracket u_1 \in u_2 \rrbracket_{\mathfrak{U}}) &= \llbracket i(u_1) \in i(u_2) \rrbracket_{\mathfrak{V}} \end{aligned}$$

для всех $u_1, u_2 \in \mathfrak{U}$. Говорят, что булевозначные системы *изоморфны*, если между ними существует изоморфизм.

В том случае, когда \mathfrak{U} и \mathfrak{V} — булевозначные алгебраические системы над одной и той же алгеброй B , всякий изоморфизм $i: \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{V}$ по умолчанию предполагается ассоциированным с тождественным изоморфизмом: $\llbracket u_1 = u_2 \rrbracket_{\mathfrak{U}} = \llbracket i(u_1) = i(u_2) \rrbracket_{\mathfrak{V}}$, $\llbracket u_1 \in u_2 \rrbracket_{\mathfrak{U}} = \llbracket i(u_1) \in i(u_2) \rrbracket_{\mathfrak{V}}$. При необходимости подчеркнуть это обстоятельство, мы будем называть такой изоморфизм *B -изоморфизмом* и называть соответствующие системы *B -изоморфными*.

1.5. Всюду в дальнейшем, употребляя запись вида $\varphi(t_1, \dots, t_n)$, мы по умолчанию предполагаем, что φ — формула теоретико-множественной сигнатуры, все свободные переменные которой попадают в список (t_1, \dots, t_n) .

Произвольный набор (u_1, \dots, u_n) элементов системы \mathfrak{U} называется *означиванием* списка переменных (t_1, \dots, t_n) . Рекурсией по сложности формулы определяется (булевозначная) истинность $\llbracket \varphi(u_1, \dots, u_n) \rrbracket$ любой формулы $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ относительно произвольного означивания (u_1, \dots, u_n) переменных (t_1, \dots, t_n) . Если формула φ атомарна, т. е. имеет вид $t_1 = t_2$ или $t_1 \in t_2$, то ее истинность относительно означивания (u_1, u_2) полагается равной $\llbracket u_1 = u_2 \rrbracket$ и $\llbracket u_1 \in u_2 \rrbracket$ соответственно. Истинность же формул

большей сложности определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \llbracket \varphi(u_1, \dots, u_n) \& \psi(u_1, \dots, u_n) \rrbracket &:= \llbracket \varphi(u_1, \dots, u_n) \rrbracket \wedge \llbracket \psi(u_1, \dots, u_n) \rrbracket, \\ \llbracket \varphi(u_1, \dots, u_n) \vee \psi(u_1, \dots, u_n) \rrbracket &:= \llbracket \varphi(u_1, \dots, u_n) \rrbracket \vee \llbracket \psi(u_1, \dots, u_n) \rrbracket, \\ \llbracket \varphi(u_1, \dots, u_n) \rightarrow \psi(u_1, \dots, u_n) \rrbracket &:= \llbracket \varphi(u_1, \dots, u_n) \rrbracket \Rightarrow \llbracket \psi(u_1, \dots, u_n) \rrbracket, \\ \llbracket \neg \varphi(u_1, \dots, u_n) \rrbracket &:= \llbracket \varphi(u_1, \dots, u_n) \rrbracket^\perp, \\ \llbracket (\forall t) \varphi(t, u_1, \dots, u_n) \rrbracket &:= \bigwedge_{u \in \mathfrak{U}} \llbracket \varphi(u, u_1, \dots, u_n) \rrbracket, \\ \llbracket (\exists t) \varphi(t, u_1, \dots, u_n) \rrbracket &:= \bigvee_{u \in \mathfrak{U}} \llbracket \varphi(u, u_1, \dots, u_n) \rrbracket, \end{aligned}$$

где символ b^\perp обозначает дополнение b в булевой алгебре B . Говорят, что формула $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ истинна в алгебраической системе \mathfrak{U} относительно означивания (u_1, \dots, u_n) , если имеет место равенство $\llbracket \varphi(u_1, \dots, u_n) \rrbracket = \mathbf{1}$. В этом случае пишут $\mathfrak{U} \models \varphi(u_1, \dots, u_n)$.

1.6. Предложение. Если формула $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ доказуема в исчислении предикатов, то $\llbracket \varphi(u_1, \dots, u_n) \rrbracket = \mathbf{1}$ для всех $u_1, \dots, u_n \in \mathfrak{U}$.

◁ Несложно убедиться в том, что все аксиомы исчисления предикатов истинны в системе \mathfrak{U} , а правила вывода сохраняют истинность. Последнее означает, что выводимость формулы φ в исчислении предикатов из формул $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ обеспечивает неравенство $\llbracket \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rrbracket \leq \llbracket \varphi \rrbracket$. ▷

Из последнего предложения, в частности, следует, что для любой формулы $\varphi(t, t_1, \dots, t_n)$ и любых элементов $u, v, w_1, \dots, w_n \in \mathfrak{U}$ имеет место неравенство $\llbracket u = v \rrbracket \wedge \llbracket \varphi(u, w_1, \dots, w_n) \rrbracket \leq \llbracket \varphi(v, w_1, \dots, w_n) \rrbracket$.

1.7. Пусть $u \in \mathfrak{U}$ таково, что $\mathfrak{U} \models u \neq \emptyset$. Спуском элемента u называется класс $\{v \in \mathfrak{U} \mid \mathfrak{U} \models v \in u\}$, который будет обозначаться символом $u \downarrow$.

1.8. Пусть $(u_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — семейство элементов \mathfrak{U} и $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — семейство элементов алгебры B . Элемент $u \in \mathfrak{U}$ называется подъемом семейства $(u_\xi)_{\xi \in \Xi}$ относительно $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$, если $\llbracket v \in u \rrbracket = \bigvee_{\xi \in \Xi} b_\xi \wedge \llbracket v = u_\xi \rrbracket$ для всех $v \in \mathfrak{U}$.

Пусть \mathcal{U} — подмножество \mathfrak{U} . Элемент $\bar{u} \in \mathfrak{U}$ называется подъемом множества \mathcal{U} , если $\llbracket v \in \bar{u} \rrbracket = \bigvee_{u \in \mathcal{U}} \llbracket v = u \rrbracket$ для всех $v \in \mathfrak{U}$, т. е. \bar{u} является подъемом семейства $(u)_{u \in \mathcal{U}}$ с единичными весами.

Предположим, что $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — антицепь в алгебре B . Элемент $u \in \mathfrak{U}$ называется перемешиванием семейства $(u_\xi)_{\xi \in \Xi}$ относительно $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$, если $\llbracket u = u_\xi \rrbracket \geq b_\xi$ для всех $\xi \in \Xi$ и $\llbracket u = \emptyset \rrbracket \geq (\bigvee_{\xi \in \Xi} b_\xi)^\perp$.

Если система \mathfrak{U} отделима и в ней истинна аксиома экстенциональности, то подъем (перемешивание) любого семейства $(u_\xi)_{\xi \in \Xi}$ относительно

семейства (антицепи) $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ определяется единственным образом. В этом случае, если подъем (перемешивание) существует, мы будем обозначать его символом $\text{asc}_{\xi \in \Xi} b_\xi u_\xi$ (соответственно $\text{mix}_{\xi \in \Xi} b_\xi u_\xi$). Для подъема множества $\mathcal{U} \subset \mathfrak{U}$ используется обозначение $\mathcal{U}\uparrow$.

1.9. В булевозначном анализе особую роль играют три основных принципа — принцип максимума, принцип перемешивания и принцип подъема. Это связано с тем, что в алгебраических системах, удовлетворяющих этим принципам, появляется возможность с помощью ранее имеющихся элементов конструировать новые.

В этом пункте мы сформулируем упомянутые принципы и исследуем взаимосвязь между ними, оставив в стороне их проверку для конкретных алгебраических систем.

Пусть B — полная булева алгебра и \mathfrak{U} — B -значная алгебраическая система.

Принцип максимума. Для любой формулы $\varphi(t, t_1, \dots, t_n)$ и элементов $u_1, \dots, u_n \in \mathfrak{U}$ существует такой элемент $u \in \mathfrak{U}$, что

$$\llbracket (\exists t) \varphi(t, u_1, \dots, u_n) \rrbracket = \llbracket \varphi(u, u_1, \dots, u_n) \rrbracket.$$

Принцип перемешивания. Для всякого семейства $(u_\xi)_{\xi \in \Xi}$ элементов \mathfrak{U} и любой антицепи $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ в алгебре B существует перемешивание $(u_\xi)_{\xi \in \Xi}$ относительно $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$.

Принцип подъема. (1) Для всякого семейства $(u_\xi)_{\xi \in \Xi}$ элементов \mathfrak{U} и любого семейства $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ элементов алгебры B существует подъем $(u_\xi)_{\xi \in \Xi}$ относительно $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$.

(2) Для любого элемента $u \in \mathfrak{U}$ существуют семейство $(u_\xi)_{\xi \in \Xi}$ элементов \mathfrak{U} и семейство $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ элементов алгебры B такие, что u является подъемом $(u_\xi)_{\xi \in \Xi}$ относительно $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$.

1.10. Теорема. Если B -значная алгебраическая система \mathfrak{U} удовлетворяет принципу перемешивания, то она также удовлетворяет и принципу максимума.

◁ Рассмотрим формулу $\varphi(t, t_1, \dots, t_n)$, обозначим символом \vec{u} набор произвольных элементов $u_1, \dots, u_n \in \mathfrak{U}$ и положим $b = \llbracket (\exists t) \varphi(t, \vec{u}) \rrbracket$. По определению булевозначной истинности $b = \bigvee_{v \in \mathfrak{U}} \llbracket \varphi(v, \vec{u}) \rrbracket$. Благодаря принципу исчерпывания найдутся антицепь $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ в алгебре B и семейство $(v_\xi)_{\xi \in \Xi}$ элементов \mathfrak{U} такие, что $\bigvee_{\xi \in \Xi} b_\xi = b$ и $b_\xi \leq \llbracket \varphi(v_\xi, \vec{u}) \rrbracket$. По условию теоремы существует перемешивание $v \in \mathfrak{U}$ семейства $(v_\xi)_{\xi \in \Xi}$ относительно антицепи $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$. В частности, $\llbracket v = v_\xi \rrbracket \geq b_\xi$. В силу предложения 1.6 имеют место неравенства $\llbracket \varphi(v, \vec{u}) \rrbracket \geq \llbracket v = v_\xi \rrbracket \wedge \llbracket \varphi(v_\xi, \vec{u}) \rrbracket \geq b_\xi$. Следовательно, $\llbracket \varphi(v, \vec{u}) \rrbracket \geq \bigvee_{\xi \in \Xi} b_\xi = b$. Неравенство $\llbracket \varphi(v, \vec{u}) \rrbracket \leq b$ очевидно. ▷

1.11. Теорема. Пусть B -значная алгебраическая система \mathfrak{U} удовлетворяет принципу подъема и в \mathfrak{U} истинна аксиома экстенциональности. Тогда для \mathfrak{U} справедлив принцип перемешивания.

◁ Пусть $(u_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — семейство элементов \mathfrak{U} и $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — антицепь в алгебре B . По условию теоремы для всякого $\xi \in \Xi$ найдутся семейство $(u_\xi^\alpha)_{\alpha \in A(\xi)}$ элементов \mathfrak{U} и семейство $(b_\xi^\alpha)_{\alpha \in A(\xi)}$ элементов алгебры B такие, что

$$\llbracket v \in u_\xi \rrbracket = \bigvee_{\alpha \in A(\xi)} b_\xi^\alpha \wedge \llbracket v = u_\xi^\alpha \rrbracket \quad \text{для всех } v \in \mathfrak{U}.$$

Рассмотрим множество $\Gamma = \{(\xi, \alpha) \mid \xi \in \Xi, \alpha \in A(\xi)\}$ и для каждой пары $\gamma = (\xi, \alpha) \in \Gamma$ положим $c_\gamma = b_\xi \wedge b_\xi^\alpha$ и $v_\gamma = u_\xi^\alpha$. Пусть $u \in \mathfrak{U}$ — подъем семейства $(v_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ относительно $(c_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$. Непосредственный подсчет с привлечением определений дает следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \llbracket v \in u \rrbracket &= \bigvee_{\gamma \in \Gamma} c_\gamma \wedge \llbracket v = v_\gamma \rrbracket \\ &= \bigvee_{\xi \in \Xi} \bigvee_{\alpha \in A(\xi)} b_\xi \wedge b_\xi^\alpha \wedge \llbracket v = u_\xi^\alpha \rrbracket \\ &= \bigvee_{\xi \in \Xi} b_\xi \wedge \llbracket v \in u_\xi \rrbracket. \end{aligned}$$

Покажем, что u является перемешиванием семейства $(u_\xi)_{\xi \in \Xi}$ относительно $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$. Сначала установим неравенство $\llbracket u = u_\xi \rrbracket \geq b_\xi$. В силу истинности аксиомы экстенциональности достаточно показать $(\llbracket v \in u \rrbracket \Leftrightarrow \llbracket v \in u_\xi \rrbracket) \geq b_\xi$ или, что то же самое, $b_\xi \wedge \llbracket v \in u \rrbracket = b_\xi \wedge \llbracket v \in u_\xi \rrbracket$. Поскольку $b_\xi \wedge b_\eta = \mathbf{0}$ при $\xi \neq \eta$, мы имеем

$$b_\xi \wedge \llbracket v \in u \rrbracket = \bigvee_{\eta \in \Xi} b_\xi \wedge b_\eta \wedge \llbracket v \in u_\eta \rrbracket = b_\xi \wedge \llbracket v \in u_\xi \rrbracket.$$

Покажем теперь, что $\llbracket u \neq \emptyset \rrbracket \leq \bigvee_{\xi \in \Xi} b_\xi$. Действительно,

$$\llbracket u \neq \emptyset \rrbracket = \llbracket (\exists t) t \in u \rrbracket = \bigvee_{v \in \mathfrak{U}} \llbracket v \in u \rrbracket = \bigvee_{v \in \mathfrak{U}} \bigvee_{\xi \in \Xi} b_\xi \wedge \llbracket v \in u_\xi \rrbracket \leq \bigvee_{\xi \in \Xi} b_\xi. \quad \triangleright$$

1.12. Теорема. Если B -значная алгебраическая система \mathfrak{U} удовлетворяет принципам максимума и подъема, то она также удовлетворяет и принципу перемешивания.

◁ Пусть $\emptyset^\wedge \in \mathfrak{U}$ — подъем пустого подмножества \mathfrak{U} . Легко проверить, что $\llbracket \emptyset^\wedge = \emptyset \rrbracket = \mathbf{1}$. (Здесь, как и всюду в дальнейшем, запись $u = \emptyset$ означает $(\forall t) t \notin u$.)

Рассмотрим семейство $(u_\xi)_{\xi \in \Xi}$ элементов \mathfrak{U} и антицепь $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$ в алгебре B . Положим $b = (\bigvee_{\xi \in \Xi} b_\xi)^\perp$. Определим семейство $(v_\xi)_{\xi \in \Xi'}$ и разбиение единицы $(c_\xi)_{\xi \in \Xi'}$ следующим образом: $\Xi' = \Xi \cup \{\Xi\}$, $v_\xi = u_\xi$, $c_\xi = b_\xi$ при $\xi \in \Xi$ и $v_\Xi = \emptyset^\wedge$, $c_\Xi = b$. Пусть $u \in \mathfrak{U}$ — подъем семейства $(v_\xi)_{\xi \in \Xi'}$ относительно $(c_\xi)_{\xi \in \Xi'}$. Легко понять, что $\llbracket u \neq \emptyset \rrbracket = \mathbf{1}$. Действительно, $\llbracket v_\xi \in u \rrbracket \geq c_\xi$ при $\xi \in \Xi'$, откуда следует, что

$$\llbracket u \neq \emptyset \rrbracket = \bigvee_{v \in \mathfrak{U}} \llbracket v \in u \rrbracket \geq \bigvee_{\xi \in \Xi'} c_\xi = \mathbf{1}.$$

Таким образом, $\llbracket (\exists t) t \in u \rrbracket = \mathbf{1}$. Согласно принципу максимума найдется такой элемент $v \in \mathfrak{U}$, что $\llbracket v \in u \rrbracket = \mathbf{1}$. Тогда по определению подъема

$$c_\xi = \mathbf{1} \wedge c_\xi = \bigvee_{\eta \in \Xi'} c_\eta \wedge \llbracket v = v_\eta \rrbracket \wedge c_\xi = \llbracket v = v_\xi \rrbracket \wedge c_\xi$$

и, стало быть, $\llbracket v = v_\xi \rrbracket \geq c_\xi$ для всех $\xi \in \Xi'$. В частности, при $\xi \in \Xi$ имеем $\llbracket v = u_\xi \rrbracket \geq b_\xi$. Кроме того, в силу леммы 1.6 выполнены следующие соотношения:

$$\left(\bigvee_{\xi \in \Xi} b_\xi \right)^\perp \leq \llbracket v = \emptyset^\wedge \rrbracket = \llbracket v = \emptyset^\wedge \rrbracket \wedge \llbracket \emptyset^\wedge = \emptyset \rrbracket \leq \llbracket v = \emptyset \rrbracket.$$

Следовательно, v представляет собой перемешивание семейства $(u_\xi)_{\xi \in \Xi}$ относительно антицепи $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$. \blacktriangleright

1.13. Пусть B — полная булева алгебра и \mathfrak{U} — B -значная алгебраическая система. Система \mathfrak{U} называется *булевозначным универсумом над B* (*B -значным универсумом*), если она удовлетворяет следующим трем условиям:

- (1) система \mathfrak{U} отделима;
- (2) \mathfrak{U} удовлетворяет принципу подъема;
- (3) в \mathfrak{U} истинны аксиомы экстенциональности и регулярности.

Теорема [7]. *Для любой полной булевой алгебры B существует B -значный универсум, причем единственный с точностью до B -изоморфизма.*

Подробное изложение теорий булевых алгебр и булевозначных алгебраических систем имеется в [3–6].

§ 2. Понятие непрерывного расслоения

2.1. Пусть Q — произвольное непустое множество и $V^Q \subset Q \times \mathbb{V}$ — класс-соответствие. (Здесь и далее \mathbb{V} обозначает класс всех множеств.) Для каждой точки $q \in Q$ класс

$$\{q\} \times V^Q(q) = V^Q \cap (\{q\} \times \mathbb{V}) = \{(q, x) \mid (q, x) \in V^Q\}$$

обозначим символом V^q . Очевидно, $V^p \cap V^q = \emptyset$ при $p \neq q$. Соответствие V^Q будем называть *расслоением* над Q , а класс V^q — *слоем* расслоения V^Q в точке q .

Пусть $D \subset Q$. Функцию $u: D \rightarrow V^Q$ называют *сечением* расслоения V^Q над множеством D , если $u(q) \in V^q$ для всех $q \in D$. Класс всех сечений V^Q над D обозначают символом $S(D, V^Q)$. Сечения, определенные на Q , называют *глобальными*. Если X — подмножество V^Q , то символом $S(D, X)$ обозначают множество всех сечений расслоения X над D .

Точку $q \in Q$ назовем *проекцией элемента* $x \in V^Q$ и обозначим символом $\text{pr}(x)$, если $x \in V^q$. *Проекцией множества* $X \subset V^Q$ будем называть совокупность $\{\text{pr}(x) \mid x \in X\}$ и обозначать ее символом $\text{pr}(X)$.

2.2. Предположим теперь, что Q — топологическое пространство и на классе $V^Q \subset Q \times \mathbb{V}$ задана некоторая топология. В этом случае мы будем называть V^Q *непрерывным расслоением* над Q .

Под *непрерывным сечением* расслоения V^Q понимается сечение, являющееся непрерывной функцией. Для любого подмножества $D \subset Q$ символом $C(D, V^Q)$ обозначается класс всех непрерывных сечений V^Q над D . Аналогичным образом, если X — подмножество V^Q , то символом $C(D, X)$ обозначается совокупность всех непрерывных сечений X над D . Очевидно, $C(D, X) = C(D, V^Q) \cap S(D, X)$.

Всюду в дальнейшем мы считаем, что Q — экстремально несвязный компакт, и предполагаем выполненными следующие условия:

- (1) $\forall q \in Q \quad \forall x \in V^q \quad \exists u \in C(Q, V^Q) \quad u(q) = x;$
- (2) $\forall u \in C(Q, V^Q) \quad \forall A \sqsubset Q \quad u(A) \sqsubset V^Q.$

2.3. Предложение. *Непрерывное расслоение V^Q обладает следующими свойствами:*

- (1) *топология V^Q хаусдорфова;*
- (2) *для любых $u \in C(Q, V^Q)$ и $q \in Q$ семейство $\{u(A) \mid A \in \text{Clor}(q)\}$ является базой окрестностей точки $u(q)$;*
- (3) *все элементы $C(Q, V^Q)$ являются открытыми и замкнутыми отображениями (см. 1.1).*

◁ Пусть x и y — различные элементы V^Q . Положим $p = \text{pr}(x)$ и $q = \text{pr}(y)$. В силу 2.2(1) найдутся сечения $u, v \in C(Q, V^Q)$ такие, что $u(p) = x$ и $v(q) = y$.

Предположим сначала, что $p = q$. В силу 2.2(2) множество $A = \{q \in Q \mid u(q) \neq v(q)\} = Q \setminus u^{-1}(v(Q))$ открыто-замкнуто. Тогда $u(A)$ и $v(A)$ — непересекающиеся окрестности точек x и y .

Пусть теперь $p \neq q$. В этом случае существуют $A, B \sqsubset Q$ такие, что $A \cap B = \emptyset$, $p \in A$ и $q \in B$. Тогда $u(A)$ и $v(B)$ — непересекающиеся окрестности точек x и y .

Утверждение (2) с очевидностью вытекает из 2.2(2).

Утверждение (3) эквивалентно 2.2(2) в силу того обстоятельства, что $\text{Clor}(Q)$ является базой как открытой, так и замкнутой топологии в Q . ▷

2.4. Лемма. *Подмножество $X \subset V^Q$ открыто-замкнуто тогда и только тогда, когда $u^{-1}(X) \sqsubset Q$ для всех $u \in C(Q, V^Q)$.*

◁ В пояснении нуждается лишь достаточность. Рассмотрим произвольный элемент $x \in V^Q$. Пусть сечение $u \in C(Q, V^Q)$ и точка $q \in Q$ таковы, что $u(q) = x$.

Предположим сначала, что $x \in X$. Поскольку множество $A = u^{-1}(X)$ открыто-замкнуто, $u(A)$ — окрестность x , содержащаяся в X . В силу произвольности x заключаем, что множество X открыто.

Если же $x \notin X$, то, воспользовавшись открыто-замкнутостью множества $A = Q \setminus u^{-1}(X)$, заключаем, что $u(A)$ — окрестность x , не пересекающаяся с X . Произвольность x позволяет сделать вывод, что множество X замкнуто. ▷

2.5. Предложение. *Топология V^Q экстремально несвязна.*

◁ Пусть X — открытое подмножество V^Q . В силу хаусдорфовости топологии V^Q замыкание $\text{cl } X$ является множеством, а не собственным классом (см. 1.2). При этом для всякого сечения $u \in C(Q, V^Q)$ множество $u^{-1}(\text{cl } X) = \text{cl } u^{-1}(X)$ открыто-замкнуто. В силу леммы 2.4 множество $\text{cl } X$ открыто. ▷

2.6. Лемма. *Для любого подмножества $X \subset V^Q$ выполнены следующие равенства:*

$$\begin{aligned} X &= \bigcup_{u \in C(Q, V^Q)} u(u^{-1}(X)), \\ \text{int } X &= \bigcup_{u \in C(Q, V^Q)} u(\text{int } u^{-1}(X)), \\ \text{cl } X &= \bigcup_{u \in C(Q, V^Q)} u(\text{cl } u^{-1}(X)). \end{aligned}$$

◁ Очевидное следствие 2.2(1) и открытости всех непрерывных сечений. ▷

2.7. Лемма. *Подклассы $X, Y \subset V^Q$ совпадают тогда и только тогда, когда $u^{-1}(X) = u^{-1}(Y)$ для всех $u \in C(Q, V^Q)$.*

◁ Возьмем произвольно $q \in Q$, $x \in V^q$ и рассмотрим сечение $u \in C(Q, V^Q)$ такое, что $u(q) = x$. Если $x \in X$, то $q \in u^{-1}(X) = u^{-1}(Y)$ и, следовательно, $x = u(q) \in Y$. Обратное включение устанавливается аналогично. ▷

2.8. Предложение. *Сечение $u \in S(D, V^Q)$, определенное на открытом подмножестве $D \subset Q$, непрерывно тогда и только тогда, когда $\text{im } u$ — открытое подмножество V^Q .*

◁ Предположим, что сечение u непрерывно. Для всякого $q \in D$ подберем сечение $u_q \in C(Q, V^Q)$ такое, что $u_q(q) = u(q)$. Множество $D_q = \{p \in D \mid u(p) = u_q(p)\} = u^{-1}(\text{im } u_q)$ открыто в D , а значит, и в Q . Поэтому образ $u(D_q) = u_q(D_q)$ открыт в силу открытости глобальных непрерывных сечений. Очевидно, $D = \bigcup_{q \in D} D_q$, так как $q \in D_q$. Стало быть, множество

$$\text{im } u = u(D) = u\left(\bigcup_{q \in D} D_q\right) = \bigcup_{q \in D} u(D_q)$$

является открытым.

Предположим теперь, что $\text{im } u$ — открытое множество. Рассмотрим произвольную точку $q \in D$ и подберем сечение $u_q \in C(Q, V^Q)$ такое, что $u(q) = u_q(q)$. Множество $\{p \in D \mid u_q(p) = u(p)\} = u_q^{-1}(\text{im } u)$ открыто и является окрестностью точки q , откуда следует непрерывность сечения u в точке q . ▷

2.9. Лемма. *Для любого подмножества $X \subset V^Q$ выполнены следующие соотношения:*

- (1) $\text{pr}(\text{cl } X) \subset \text{cl } \text{pr}(X)$;
- (2) $\text{pr}(\text{int } X) \subset \text{int } \text{pr}(X)$.

◁ Рассмотрим произвольное сечение $u \in C(Q, V^Q)$. С учетом 1.1 и 2.3(3) мы имеем $u^{-1}(\text{cl } X) = \text{cl } u^{-1}(X) \subset \text{cl } \text{pr}(X)$, откуда благодаря равенству $\text{pr}(X) = \bigcup_{u \in C(Q, V^Q)} u^{-1}(X)$ следует включение $\text{pr}(\text{cl } X) \subset \text{cl } \text{pr}(X)$.

Соотношение (2) устанавливается аналогично. ▷

§ 3. Непрерывный поливерсум

3.1. Рассмотрим непустое множество Q и расслоение $V^Q \subset Q \times \mathbb{V}$. Предположим, что для каждой точки $q \in Q$ класс V^q является алгебраической системой сигнатуры $\{\in\}$.

Для произвольной формулы $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ и сечений u_1, \dots, u_n расслоения V^Q символом $\{\varphi(u_1, \dots, u_n)\}$ будем обозначать множество

$$\{q \in \text{dom } u_1 \cap \dots \cap \text{dom } u_n \mid V^q \models \varphi(u_1(q), \dots, u_n(q))\}.$$

Для любого элемента $x \in V^q$ положим $x \downarrow = \{y \in V^q \mid V^q \models y \in x\}$. Очевидно, если в системе V^q истинна аксиома экстенциональности, то для всех $x, y \in V^q$ равенства $x \downarrow = y \downarrow$ и $x = y$ равносильны. Если X — подмножество V^Q , то символом $\sqcup X$ обозначается объединение $\bigcup_{x \in X} x \downarrow$.

Всюду в дальнейшем предполагается, что Q — экстремально несвязный компакт и V^Q — непрерывное расслоение над Q .

Для произвольного сечения $u \in C(Q, V^Q)$ класс $\bigcup_{q \in Q} u(q) \downarrow$ мы будем называть *распаковкой* сечения u и обозначать символом $\sqcup u$.

3.2. Непрерывное расслоение V^Q назовем *непрерывным поливерсумом* над Q , если в каждом слое V^q ($q \in Q$) истинны аксиомы экстенциональности и регулярности и, кроме того, выполнены следующие условия:

- (1) $\forall q \in Q \quad \forall x \in V^q \quad \exists u \in C(Q, V^Q) \quad u(q) = x$;
- (2) $\forall u \in C(Q, V^Q) \quad \forall A \in \text{Clop}(Q) \quad u(A) \in \text{Clop}(V^Q)$;
- (3) $\forall u \in C(Q, V^Q) \quad \sqcup u \in \text{Clop}(V^Q)$;
- (4) $\forall X \in \text{Clop}(V^Q) \quad \exists u \in C(Q, V^Q) \quad \sqcup u = X$.

3.3. Для произвольных сечений $u, v \in C(Q, V^Q)$ равенства $\{u = v\} = u^{-1}(\text{im } v)$ и $\{u \in v\} = u^{-1}(\sqcup v \downarrow)$ обеспечивают открыто-замкнутость множеств $\{u = v\}$ и $\{u \in v\}$, что позволяет нам ввести в рассмотрение две класс-функции $\llbracket \cdot = \cdot \rrbracket, \llbracket \cdot \in \cdot \rrbracket: C(Q, V^Q) \times C(Q, V^Q) \rightarrow \text{Clop}(Q)$, полагая $\llbracket u = v \rrbracket = \{u = v\}$ и $\llbracket u \in v \rrbracket = \{u \in v\}$.

Несложно убедиться в том, что тройка $(C(Q, V^Q), \llbracket \cdot = \cdot \rrbracket, \llbracket \cdot \in \cdot \rrbracket)$ представляет собой отделимую $\text{Clop}(Q)$ -значную алгебраическую систему (см. 1.3).

Из определения непрерывного поливерсума 3.2(4) следует существование непрерывного сечения \varnothing^\wedge , удовлетворяющего условию $\sqcup \varnothing^\wedge = \varnothing$. Очевидно, такое сечение единственно. Кроме того, легко заметить, что $V^q \models \varnothing^\wedge(q) = \varnothing$ для всех $q \in Q$, $\llbracket \varnothing^\wedge = \varnothing \rrbracket = Q$, а также $\llbracket u = \varnothing^\wedge \rrbracket = \llbracket u = \varnothing \rrbracket$ для всех $u \in C(Q, V^Q)$.

3.4. Лемма. Для любого подмножества $X \subset V^Q$ имеют место следующие соотношения:

- (1) если $X \sqsubset V^Q$, то $\text{pr}(X) \sqsubset Q$;
- (2) если множество X открыто, то $\text{pr}(\text{cl } X) = \text{cl } \text{pr}(X)$.

◁ (1) Если $X \sqsubset V^Q$, то найдется сечение $u \in C(Q, V^Q)$ такое, что $\sqcup \text{im } u = \sqcup u = X$. Очевидно, $\text{pr}(\sqcup \text{im } u) = \llbracket u \neq \emptyset \rrbracket$, откуда следует открыто-замкнутость $\text{pr}(X)$.

(2) Пусть X — открытое подмножество V^Q . Тогда замыкание $\text{cl } X$ открыто-замкнуто, как и его проекция $\text{pr}(\text{cl } X)$. Очевидное включение $\text{pr}(X) \subset \text{pr}(\text{cl } X)$ влечет $\text{cl } \text{pr}(X) \subset \text{pr}(\text{cl } X)$. Обратное включение установлено в 2.9. ▷

З а м е ч а н и е. Следующие вопросы пока остаются открытыми.

- (1) Верно ли, что из замкнутости подмножества $X \subset V^Q$ следует замкнутость его проекции $\text{pr}(X) \subset Q$?
- (2) Справедливо ли равенство $\text{pr}(\text{cl } X) = \text{cl } \text{pr}(X)$ для любого (не обязательно открытого) подмножества $X \subset V^Q$?

3.5. *Носителем* сечения $u \in S(D, V^Q)$, определенного на $D \subset Q$, называется множество $\text{supp } u = \{q \in D \mid V^q \models u(q) \neq \emptyset\}$. Очевидно, $\text{supp } u = \{u \neq \emptyset\} = \{u \neq \emptyset^\wedge\}$. Таким образом, если $u \in C(Q, V^Q)$, то $\text{supp } u$ — открыто-замкнутое множество.

Пусть u — непрерывное сечение V^Q и D — подмножество $\text{supp } u$. Символом $C(D, u)$ обозначается класс

$$\{v \in C(D, V^Q) \mid (\forall q \in D) V^q \models v(q) \in u(q)\}.$$

Очевидно, $C(D, u) = C(D, \sqcup u)$.

Спуском сечения u будем называть класс $C(\text{supp } u, u)$ и обозначать его символом $u \downarrow$. Легко заметить, что $u \downarrow = C(\text{supp } u, \sqcup u)$. Очевидно, в случае $\{u \neq \emptyset\} = Q$ спуск сечения u представляет собой спуск u как элемента булевозначной алгебраической системы (см. 1.7).

3.6. Предложение. Для любых $X \sqsubset V^Q$ и $u \in C(Q, V^Q)$ следующие утверждения эквивалентны:

- (1) $\sqcup u = X$;
- (2) $u(q) \downarrow = X \cap V^q$ для всех $q \in Q$;
- (3) $\text{supp } u = \text{pr}(X)$ и $u \downarrow = C(\text{pr}(X), X)$;
- (4) $\llbracket v \in u \rrbracket = v^{-1}(X)$ для всех $v \in C(Q, V^Q)$.

◁ (1)→(3). Достаточно лишь заметить, что $\text{supp } u = \llbracket u \neq \emptyset \rrbracket = \text{pr}(\sqcup u)$, и воспользоваться равенством $u \downarrow = C(\text{supp } u, \sqcup u)$.

(3)→(2). Положим $A = \text{supp } u$. Легко понять, что $X \cap V^q = \emptyset = u(q) \downarrow$ для всех $q \in Q \setminus A$.

Для произвольной точки $q \in A$ найдутся $x \in u(q) \downarrow$ и $v_q \in C(Q, V^Q)$ такие, что $v_q(q) = x$. Пусть $B_q = \llbracket v_q \in u \rrbracket$. Семейство $(B_q)_{q \in A}$ образует

открытое покрытие компакта A , поэтому из него можно выбрать подпокрытие $(B_q)_{q \in F}$, где F — конечное подмножество A . По принципу исчерпывания найдется антицепь $(C_q)_{q \in F}$ такая, что $C_q \subset B_q$ для $q \in F$ и $\bigcup_{q \in F} C_q = \bigvee_{q \in F} C_q = \bigvee_{q \in F} B_q = A$. Построим сечение $v \in S(A, V^Q)$, для каждой точки $p \in A$ полагая $v(p) = v_q(p)$, где q такой (единственный) элемент F , что $p \in C_q$. Сечение v непрерывно, поскольку $v = v_q$ на C_q ($q \in F$). Легко заметить, что $v \in u \downarrow = C(A, X)$.

Пусть q — произвольный элемент A .

Рассмотрим $x \in u(q) \downarrow$, подберем сечение $w \in C(Q, V^Q)$ такое, что $w(q) = x$, и построим сечение $\bar{w} \in S(A, V^Q)$ следующим образом:

$$\bar{w}(p) = \begin{cases} w(p), & \text{если } p \in \llbracket w \in u \rrbracket, \\ v(p), & \text{если } p \in A \setminus \llbracket w \in u \rrbracket. \end{cases}$$

Очевидно, сечение \bar{w} непрерывно, и $\bar{w} \in u \downarrow = C(A, X)$, откуда следует, что $x = \bar{w}(q) \in X$ в силу включения $q \in \llbracket w \in u \rrbracket$.

Пусть теперь $x \in X \cap V^q$. Как и раньше, подберем сечение $w \in C(Q, V^Q)$ такое, что $w(q) = x$. Рассмотрим сечение $\bar{w} \in S(A, V^Q)$, определенное следующим образом:

$$\bar{w}(p) = \begin{cases} w(p), & \text{если } p \in w^{-1}(X), \\ v(p), & \text{если } p \in A \setminus w^{-1}(X). \end{cases}$$

Из очевидных соотношений $\bar{w} \in C(A, X) = u \downarrow$ и $q \in w^{-1}(X)$ вытекает, что $x = w(q) = \bar{w}(q) \in u(q) \downarrow$.

(2)→(4). Рассмотрим произвольное сечение $v \in C(Q, V^Q)$. Если $q \in \llbracket v \in u \rrbracket = v^{-1}(\perp u \perp)$, то $v(q) \in \perp u \perp$ и, следовательно, $v(q) \in u(q) \downarrow = X \cap V^q$, т. е. $q \in v^{-1}(X)$.

Если же $q \in v^{-1}(X)$, то $v(q) \in X \cap V^q = u(q) \downarrow$, а значит, $V^q \models v(q) \in u(q)$ и $q \in \llbracket v \in u \rrbracket$.

(4)→(1). Заметим, что $v^{-1}(\perp u \perp) = \llbracket v \in u \rrbracket = v^{-1}(X)$ для всех $v \in C(Q, V^Q)$. Поэтому согласно лемме 2.7 имеет место равенство $X = \perp u \perp$. \blacktriangleright

Для каждого множества $X \sqsubset V^Q$ сечение u , удовлетворяющее условиям (1)–(4), очевидно, единственно. Это сечение мы будем называть *унаковкой* множества X и обозначать символом $\lceil X \rceil$.

Несложно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Предложение. Пусть X — открытое подмножество V^Q . Сечение $\bar{u} \in C(Q, V^Q)$ совпадает с $\lceil \text{cl } X \rceil$ тогда и только тогда, когда \bar{u} является поточечно наименьшим среди сечений $u \in C(Q, V^Q)$, удовлетворяющих включению $X \cap V^q \subset u(q) \downarrow$ для всех $q \in Q$.

3.7. Лемма. Если $u \in C(Q, V^Q)$ и $A \in \text{Clop}(Q)$, то $\sqcup u(A) \in \text{Clop}(V^Q)$.

◁ Для любого сечения $v \in C(Q, V^Q)$ множество $v^{-1}(\sqcup u(A)) = A \cap \llbracket v \in u \rrbracket$ открыто-замкнуто, откуда в силу 2.4 следует открыто-замкнутость множества $\sqcup u(A)$. ▷

3.8. Предложение. Любое непрерывное сечение V^Q , определенное на открытом или замкнутом подмножестве Q , продолжается до глобального непрерывного сечения.

◁ Пусть $A \subset Q$ и $u \in C(A, V^Q)$. Для каждой точки $q \in A$ найдутся сечение $u_q \in C(Q, V^Q)$ и множество $B_q \sqsubset Q$ такие, что $q \in B_q$ и $u_q = u$ на $B_q \cap A$.

Предположим, что множество A открыто. Не нарушая общности, мы можем считать, что $B_q \subset A$. Рассмотрим открытое множество $X = \bigcup_{q \in A} u(q)\downarrow = \bigcup_{q \in A} \sqcup u_q(B_q)$ и покажем, что $(\text{cl } X) \cap V^q = u(q)\downarrow$ для всех $q \in A$. Проверим лишь включение $(\text{cl } X) \cap V^q \subset u(q)\downarrow$ (обратное включение вытекает из очевидных свойств замыкания). Пусть $x \in (\text{cl } X) \cap V^q$. Найдется сечение $v \in C(Q, V^Q)$ такое, что $v(q) = x$. Очевидно, для всякой окрестности $B \sqsubset Q$ точки q пересечение $v(B) \cap X$ непусто и, стало быть, найдется такая точка $p \in B \cap B_q$, что $v(p) \in u(p)\downarrow$. С другой стороны, $u(p) = u_q(p)$ и, следовательно, $v(B) \cap \sqcup u_q(B_q) \neq \emptyset$. Множество $\sqcup u_q(B_q)$ замкнуто, и поэтому $x \in \sqcup u_q(B_q)$, откуда следует, что $x \in u_q(q)\downarrow = u(q)\downarrow$. Положим $\bar{u} = \lceil \text{cl } X \rceil$. Из установленного выше вытекает равенство $\bar{u}(q)\downarrow = u(q)\downarrow$ для всех $q \in A$. Таким образом, \bar{u} — искомое глобальное продолжение сечения u .

Предположим теперь, что множество A замкнуто. Семейство $(B_q)_{q \in A}$ образует открытое покрытие компакта A , а значит, из этого покрытия можно выбрать подпокрытие $(B_q)_{q \in F}$, где F — конечное подмножество A . Без ограничения общности можно предполагать, что $\bigcup_{q \in F} B_q = Q$. По принципу исчерпывания найдется антицепь $(C_q)_{q \in F}$ такая, что $C_q \subset B_q$ для всех $q \in F$ и $\bigcup_{q \in F} C_q = Q$. Построим сечение $\bar{u} \in S(Q, V^Q)$, для каждой точки $p \in Q$ полагая $\bar{u}(p) = u_q(p)$, где q — такой (единственный) элемент F , что $p \in C_q$. Сечение \bar{u} непрерывно, поскольку $\bar{u} = u_q$ на C_q ($q \in F$). Очевидно, $\bar{u} = u$ на A . ▷

Следствие. Если A — открытое или замкнутое подмножество Q , то $C(A, V^Q) = \{u|_A : u \in C(Q, V^Q)\}$.

Принцип продолжения. Для любого сечения $u \in C(A, V^Q)$, определенного на открытом подмножестве $A \subset Q$, существует единственное сечение $\bar{u} \in C(\text{cl } A, V^Q)$, продолжающее u .

◁ Согласно предложению 3.8 существует сечение $u_1 \in C(Q, V^Q)$ такое, что $u_1 = u$ на A . Положим $\bar{u} = u_1|_{\text{cl}A}$.

Единственность построенного продолжения очевидна. ▷

Сечение \bar{u} , фигурирующее в формулировке принципа продолжения, будем называть *закрыванием* сечения u и обозначать символом $\text{ext}(u)$.

3.9. Несложно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Теорема. Рассмотрим семейство $(u_\xi)_{\xi \in \Xi}$ глобальных непрерывных сечений V^Q , антицепь $(B_\xi)_{\xi \in \Xi}$ в алгебре $\text{Clop}(Q)$ и положим $B = (\bigvee_{\xi \in \Xi} B_\xi)^\perp$. Тогда непрерывное сечение

$$u = \text{ext} \left(\bigcup_{\xi \in \Xi} u_\xi|_{B_\xi} \cup \emptyset^\wedge|_B \right)$$

является перемешиванием $(u_\xi)_{\xi \in \Xi}$ относительно $(B_\xi)_{\xi \in \Xi}$. В частности, для булевозначной алгебраической системы $C(Q, V^Q)$ справедлив принцип перемешивания.

Следствие. Булевозначная алгебраическая система $C(Q, V^Q)$ удовлетворяет принципу максимума.

3.10. Теорема о поточечной истинности. Для любой формулы $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ и произвольных сечений $u_1, \dots, u_n \in C(Q, V^Q)$ имеет место равенство

$$\llbracket \varphi(u_1, \dots, u_n) \rrbracket = \{q \in Q \mid V^q \models \varphi(u_1(q), \dots, u_n(q))\}. \quad (*)$$

◁ Доказательство проводится индукцией по сложности формулы φ .

Если формула φ атомарна, т.е. имеет вид $t_1 \in t_2$ или $t_1 = t_2$, то равенство (*) вытекает из определения оценок истинности $\llbracket \cdot = \cdot \rrbracket$ и $\llbracket \cdot \in \cdot \rrbracket$.

Допустим, для формул меньшей сложности теорема доказана. Мы ограничимся рассмотрением лишь того случая, когда формула φ имеет вид $(\exists t_0) \psi(t_0, \vec{t})$.

Если $V^q \models (\exists t_0) \psi(t_0, \vec{u}(q))$, то найдется такой элемент $x \in V^q$, что $V^q \models \psi(x, \vec{u}(q))$. Подберем сечение $u_0 \in C(Q, V^Q)$, удовлетворяющее равенству $u_0(q) = x$. По предположению индукции $q \in \llbracket \psi(u_0, \vec{u}) \rrbracket \subset \llbracket (\exists t_0) \psi(t_0, \vec{u}) \rrbracket$, что доказывает включение « \supset » в соотношении (*).

Покажем обратное включение. Пусть $q \in \llbracket (\exists t_0) \psi(t_0, \vec{u}) \rrbracket$. По принципу максимума найдется непрерывное сечение u_0 такое, что $\llbracket \psi(u_0, \vec{u}) \rrbracket = \llbracket (\exists t_0) \psi(t_0, \vec{u}) \rrbracket$. Тогда по предположению индукции $V^q \models \psi(u_0(q), \vec{u}(q))$ и, значит, $V^q \models (\exists t_0) \psi(t_0, \vec{u}(q))$. ▷

3.11. Лемма. Для любого подмножества $X \subset V^Q$ имеют место следующие соотношения:

- (1) $\sqcup \text{cl} X \subset \text{cl} \sqcup X$;
- (2) $\sqcup \text{int} X \subset \text{int} \sqcup X$;
- (3) если $X \in \text{Clop}(V^Q)$, то $\sqcup X \in \text{Clop}(V^Q)$;
- (4) если множество X открыто, то $\sqcup X$ — открытое подмножество V^Q ;
- (5) если множество X открыто, то $\sqcup \text{cl} X = \text{cl} \sqcup X$.

◁ (1) Пусть $x \in \sqcup \text{cl} X$. Тогда $x \in y \downarrow$ для некоторого $y \in \text{cl} X$. Рассмотрим сечения $u, v \in C(Q, V^Q)$ такие, что $u(q) = x$ и $v(q) = y$, где $q = \text{pr}(x)$. Для всякого $A \in \text{Clop}(q)$ выполнено $v(A) \cap X \neq \emptyset$. Положим $B = A \cap \llbracket u \in v \rrbracket \sqsubset Q$. Поскольку $q \in B$, найдется такая точка $p \in B$, что $v(p) \in X$. Очевидно, $u(p) \in v(p) \downarrow \subset \sqcup X$ и, стало быть, $u(A) \cap \sqcup X \neq \emptyset$. Следовательно, $x \in \text{cl} \sqcup X$.

(2) Предположим, что $x \in \sqcup \text{int} X$, и рассмотрим $y \in \text{int} X$ и $u, v \in C(Q, V^Q)$ такие, что $x \in y \downarrow$, $u(q) = x$ и $v(q) = y$, где $q = \text{pr}(x)$. Ясно, что множество $B = v^{-1}(X) \cap \llbracket u \in v \rrbracket$ является окрестностью q , а значит, $u(B)$ — окрестность x . Кроме того, $u(p) \in v(p) \downarrow \subset \sqcup X$ для всех $p \in B$, т. е. $u(B) \subset \sqcup X$. Стало быть, $x \in \text{int} \sqcup X$.

(3) Согласно лемме 2.4 достаточно рассмотреть произвольное сечение $v \in C(Q, V^Q)$ и показать, что множество $v^{-1}(\sqcup X)$ открыто-замкнуто. Пусть $u = \ulcorner X \urcorner$. Очевидно, $v(q) \in \sqcup X$ тогда и только тогда, когда $V^q \models (\exists t \in u(q)) v(q) \in t$. По теореме о поточечной истинности $v^{-1}(\sqcup X) = \{q \in Q \mid V^q \models (\exists t \in u(q)) v(q) \in t\} = \llbracket (\exists t \in u) v \in t \rrbracket$ и, следовательно, $v^{-1}(\sqcup X) \sqsubset Q$.

(4) Тривиальным образом следует из (2).

(5) Пусть множество X открыто. Тогда его замыкание $\text{cl} X$ открыто-замкнуто, и согласно (3) множество $\sqcup \text{cl} X$ также является открыто-замкнутым. Очевидное соотношение $\sqcup X \subset \sqcup \text{cl} X$ влечет $\text{cl} \sqcup X \subset \sqcup \text{cl} X$. Обратное включение справедливо в силу (1). ▷

З а м е ч а н и е. Следующие вопросы пока остаются открытыми.

- (1) Верно ли, что из замкнутости подмножества $X \subset V^Q$ следует замкнутость $\sqcup X \subset V^Q$?
- (2) Справедливо ли равенство $\sqcup \text{cl} X = \text{cl} \sqcup X$ для любого (не обязательно открытого) подмножества $X \subset V^Q$?

3.12. Теорема. Булевозначная алгебраическая система $C(Q, V^Q)$ удовлетворяет принципу подъема.

◁ Пусть $(u_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — семейство глобальных непрерывных сечений V^Q и $(B_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — семейство открыто-замкнутых подмножеств Q . Рассмотрим

открыто-замкнутое множество $X = \text{cl} \bigcup_{\xi \in \Xi} u_\xi(B_\xi)$ и положим $u = \lceil X \rceil$. Покажем, что построенное таким образом сечение $u \in C(Q, V^Q)$ является подъемом $(u_\xi)_{\xi \in \Xi}$ относительно $(B_\xi)_{\xi \in \Xi}$. Действительно, для любого сечения $v \in C(Q, V^Q)$ имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \llbracket v \in u \rrbracket &= v^{-1}(\lrcorner u \lrcorner) = v^{-1} \left(\text{cl} \bigcup_{\xi \in \Xi} u_\xi(B_\xi) \right) = \text{cl} v^{-1} \left(\bigcup_{\xi \in \Xi} u_\xi(B_\xi) \right) \\ &= \text{cl} \bigcup_{\xi \in \Xi} v^{-1}(u_\xi(B_\xi)) = \text{cl} \bigcup_{\xi \in \Xi} B_\xi \cap \llbracket v = u_\xi \rrbracket = \bigvee_{\xi \in \Xi} B_\xi \wedge \llbracket v = u_\xi \rrbracket. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь произвольное сечение $u \in C(Q, V^Q)$ и покажем, что оно является подъемом некоторого семейства элементов $C(Q, V^Q)$ относительно подходящего семейства элементов $\text{Clop}(Q)$. Пусть $X = \lrcorner u \lrcorner$. Для каждого $x \in X$ подберем такое сечение $u_x \in C(Q, V^Q)$, что $x \in \text{im } u_x$. Положим $B_x = \llbracket u_x \in u \rrbracket = u_x^{-1}(X)$. Очевидно, $x \in u_x(B_x) \subset X$ для всех $x \in X$, откуда следует, что $X = \bigcup_{x \in X} u_x(B_x) = \text{cl} \bigcup_{x \in X} u_x(B_x)$. Аналогично тому, как это сделано в первой части доказательства, можно установить равенство $\llbracket v \in u \rrbracket = \bigvee_{x \in X} B_x \wedge \llbracket v = u_x \rrbracket$ для всех $v \in C(Q, V^Q)$. Таким образом, u — подъем семейства $(u_x)_{x \in X}$ относительно $(B_x)_{x \in X}$. \blacktriangleright

3.13. Пусть $D \subset Q$ и \mathcal{U} — подмножество $S(D, V^Q)$. Для каждой точки $q \in D$ обозначим символом $\mathcal{U}(q)$ совокупность $\{u(q) \mid u \in \mathcal{U}\}$.

Предложение. Пусть \mathcal{U} — непустое подмножество $C(D, V^Q)$, где $D \sqsubset Q$. Следующие свойства сечения $\bar{u} \in C(Q, V^Q)$ эквивалентны:

- (1) $\bar{u} = \lceil \text{cl} \bigcup_{u \in \mathcal{U}} \text{im } u \rceil$;
- (2) $\llbracket v \in \bar{u} \rrbracket = \text{cl} \{q \in D \mid v(q) \in \mathcal{U}(q)\}$ для всех $v \in C(Q, V^Q)$;
- (3) $\llbracket v \in \bar{u} \rrbracket = \text{cl} \bigcup_{u \in \mathcal{U}} \{v = u\}$ для всех $v \in C(Q, V^Q)$;
- (4) $\bar{u} \downarrow = \left\{ \text{ext} \left(\bigcup_{u \in \mathcal{U}} u|_{D_u} \right) \mid (D_u)_{u \in \mathcal{U}} \text{ — разбиение единицы в алгебре } \text{Clop}(D) \right\}$;
- (5) $\bar{u} \downarrow = C(D, \text{cl} \bigcup_{u \in \mathcal{U}} \text{im } u)$;
- (6) сечение \bar{u} является поточечно наименьшим среди сечений $\tilde{u} \in C(Q, V^Q)$, удовлетворяющих включению $\mathcal{U}(q) \subset \tilde{u}(q) \downarrow$ для всех $q \in D$.

\blacktriangleleft (1) \rightarrow (2). Положим $X = \bigcup_{u \in \mathcal{U}} \text{im } u$. Тогда $\lrcorner \bar{u} \lrcorner = \text{cl } X$ и поэтому $\llbracket v \in \bar{u} \rrbracket = v^{-1}(\lrcorner \bar{u} \lrcorner) = v^{-1}(\text{cl } X) = \text{cl } v^{-1}(X)$ для всех $v \in C(Q, V^Q)$. Несложно убедиться в том, что $X = \bigcup_{q \in D} \mathcal{U}(q)$, а также установить эквивалентность включений $v(q) \in \mathcal{U}(q)$ и $q \in v^{-1}(\bigcup_{q \in D} \mathcal{U}(q))$.

(2) \rightarrow (3). Достаточно показать, что множества $\{q \in D \mid v(q) \in \mathcal{U}(q)\}$

и $\bigcup_{u \in \mathcal{U}} \{v = u\}$ совпадают для всех $v \in C(Q, V^Q)$. Возьмем произвольную точку $q \in D$.

Если $v(q) \in \mathcal{U}(q)$, то для некоторого элемента $u \in \mathcal{U}$ выполнено $v(q) = u(q)$ и, следовательно, $q \in \{v = u\}$.

Если же $q \in \bigcup_{u \in \mathcal{U}} \{v = u\}$, то для подходящего $u \in \mathcal{U}$ имеет место включение $q \in \{v = u\}$, а значит, $v(q) = u(q) \in \mathcal{U}(q)$.

(3)→(4). Рассмотрим произвольный элемент $v \in C(D, V^Q)$ и определим сечение $\bar{v} \in C(Q, V^Q)$ следующим образом:

$$\bar{v}(q) = \begin{cases} v(q), & \text{если } q \in D, \\ \emptyset^\wedge(q), & \text{если } q \notin D. \end{cases}$$

Пусть $v \in \bar{u} \downarrow$. Тогда $D = \{v \in \bar{u}\} \subset \llbracket \bar{v} \in \bar{u} \rrbracket = \text{cl} \bigcup_{u \in \mathcal{U}} \{\bar{v} = u\} \subset D$. Для всех $u \in \mathcal{U}$ множество $\{\bar{v} = u\} = u^{-1}(\text{im } \bar{v})$ открыто-замкнуто. Согласно принципу исчерпывания найдется антицепь $(D_u)_{u \in \mathcal{U}}$ в алгебре $\text{Clor}(Q)$ такая, что $D_u \subset \{\bar{v} = u\}$ и

$$\bigvee_{u \in \mathcal{U}} D_u = \text{cl} \bigcup_{u \in \mathcal{U}} \{\bar{v} = u\} = D.$$

Очевидно, сечение $w = \bigcup_{u \in \mathcal{U}} u|_{D_u}$ непрерывно, множество $\text{dom } w$ открыто, $D = \text{cl } \text{dom } w$ и $\{w = v\} = \{w = \bar{v}\} = \text{dom } w$. Ясно, что $\text{ext}(w) \in C(D, V^Q)$ и $\{\text{ext}(w) = v\} = D$. Поэтому $\text{ext}(w) = v$ и, таким образом, справедливо включение «C».

Установим обратное включение. Пусть $(D_u)_{u \in \mathcal{U}}$ — разбиение единицы в алгебре $\text{Clor}(D)$ и $v = \text{ext}(\bigcup_{u \in \mathcal{U}} u|_{D_u})$. Покажем, что $v \in \bar{u} \downarrow$. Поскольку $\text{dom } v = D$, достаточно установить включение $\text{im } v \subset \llcorner \bar{u} \lrcorner$. Очевидно, $u(D_u) \subset \llcorner \bar{u} \lrcorner$ для всех $u \in \mathcal{U}$ и, следовательно, $\bigcup_{u \in \mathcal{U}} u(D_u) \subset \llcorner \bar{u} \lrcorner$. Заметим, что $\text{im } v = \text{cl} \bigcup_{u \in \mathcal{U}} u(D_u)$, а значит, $\text{im } v \subset \llcorner \bar{u} \lrcorner$.

(4)→(5). Положим $X = \text{cl} \bigcup_{u \in \mathcal{U}} \text{im } u$. Пусть $(D_u)_{u \in \mathcal{U}}$ — разбиение единицы в алгебре $\text{Clor}(D)$ и $v = \text{ext}(\bigcup_{u \in \mathcal{U}} u|_{D_u})$. Очевидно, $\text{dom } v = D$. Покажем, что $\text{im } v \subset X$. Из включения $u(D_u) \subset X$ следует $\bigcup_{u \in \mathcal{U}} u(D_u) \subset X$, откуда с учетом равенства $\text{im } v = \text{cl} \bigcup_{u \in \mathcal{U}} u(D_u)$ вытекает требуемое соотношение $\text{im } v \subset X$. Таким образом, $\bar{u} \downarrow \subset C(D, X)$.

Для доказательства обратного включения рассмотрим произвольное сечение $v \in C(D, X)$ и установим равенство $v = \text{ext}(\bigcup_{u \in \mathcal{U}} u|_{D_u})$ для некоторого разбиения единицы $(D_u)_{u \in \mathcal{U}}$ в алгебре $\text{Clor}(D)$. Очевидно, $v^{-1}(X) = D$. Поскольку сечение v открыто, $D = \text{cl } v^{-1}(\bigcup_{u \in \mathcal{U}} \text{im } u)$. Кроме того, множество $A = v^{-1}(\bigcup_{u \in \mathcal{U}} \text{im } u)$ открыто и плотно в D .

С каждым элементом $u \in \mathcal{U}$ свяжем открыто-замкнутое множество $C_u = \{v = u\} = v^{-1}(\text{im } u)$. Из очевидного равенства $A = \bigcup_{u \in \mathcal{U}} C_u$ следует, что $\bigvee_{u \in \mathcal{U}} C_u = D$. Согласно принципу исчерпывания найдется разбиение

единицы $(D_u)_{u \in \mathcal{U}}$ в алгебре $\text{Clor}(D)$ такое, что $D_u \subset C_u$ для всех $u \in \mathcal{U}$. Положим $w = \bigcup_{u \in \mathcal{U}} u|_{D_u}$. Ясно, что для каждого $u \in \mathcal{U}$ имеют место равенства $w|_{D_u} = u|_{D_u} = v|_{D_u}$, так как $D_u \subset \{v = u\}$. Следовательно, по принципу продолжения $\text{ext}(w) = v$, что доказывает требуемое включение.

(5)→(1). Достаточно заметить, что $D = \text{pr}(\text{cl} \bigcup_{u \in \mathcal{U}} \text{im } u)$, и воспользоваться предложением 3.6 (3).

Эквивалентность (1) и (6) очевидна. \blacktriangleright

Сечение \bar{u} , фигурирующее в условии предложения, очевидно, единственно. Мы будем называть это сечение *подъемом* множества \mathcal{U} и обозначать символом $\mathcal{U}\uparrow$.

Заметим, что в случае $\mathcal{U} \subset C(Q, V^Q)$ условие (3) можно записать в следующем виде: $\llbracket v \in \bar{u} \rrbracket = \bigvee_{u \in \mathcal{U}} \llbracket v = u \rrbracket$ для всех $v \in C(Q, V^Q)$. Таким образом, если \mathcal{U} — непустое подмножество $C(Q, V^Q)$, то понятие подъема \mathcal{U} совпадает с одноименным понятием, введенным в 1.8.

§ 4. Функциональное представление булевозначного универсума

На протяжении всего параграфа мы предполагаем, что Q — экстремально несвязный компакт и \mathfrak{U} — булевозначный универсум над $\text{Clor}(Q)$.

4.1. Для дальнейшей работы нам понадобится понятие фактор-класса X/\sim , где X — (собственный) класс, а \sim — отношение эквивалентности на X . Традиционное определение фактор-класса, вводимое для того случая, когда X является множеством, не всегда переносится на случай собственного класса, поскольку элементы X , эквивалентные данному $x \in X$, могут, вообще говоря, образовывать собственный класс. Это препятствие преодолимо с помощью следующего факта.

Теорема Фреге — Рассела — Скотта. *Для любого отношения эквивалентности \sim на классе X существует функция $F: X \rightarrow \mathbb{V}$ такая, что*

$$F(x) = F(y) \leftrightarrow x \sim y \quad \text{для всех } x, y \in X. \quad (*)$$

В качестве F можно взять функцию, определенную следующим образом:

$$F(x) = \{y \in X \mid y \sim x \ \& \ (\forall z \in X)(z \sim x \rightarrow \text{rank}(y) \leq \text{rank}(z))\}.$$

Такую функцию F принято называть *канонической проекцией* отношения эквивалентности \sim . Соотношение (*) позволяет рассматривать $F(x)$ как аналог класса эквивалентности, содержащего элемент $x \in X$. В связи с этим мы будем обозначать $F(x)$ символом $\sim(x)$.

4.2. Для каждой точки $q \in Q$ введем отношение эквивалентности \sim_q на классе \mathfrak{U} следующим образом:

$$u \sim_q v \leftrightarrow q \in \llbracket u = v \rrbracket.$$

Рассмотрим расслоение $V^Q = \{(q, \sim_q(u)) \mid q \in Q, u \in \mathfrak{U}\}$ и условимся обозначать пару $(q, \sim_q(u))$ символом $\hat{u}(q)$. Очевидно, для каждого элемента $u \in \mathfrak{U}$ отображение $\hat{u}: q \mapsto \hat{u}(q)$ представляет собой сечение расслоения V^Q . Заметим, что для всякого $x \in V^Q$ существуют $u \in \mathfrak{U}$ и $q \in Q$ такие, что $\hat{u}(q) = x$. Кроме того, равенство $\hat{u}(q) = \hat{v}(q)$ выполнено тогда и только тогда, когда $q \in \llbracket u = v \rrbracket$.

Превратим каждый слой V^q расслоения V^Q в алгебраическую систему сигнатуры $\{\in\}$, полагая

$$V^q \models x \in y \leftrightarrow q \in \llbracket u \in v \rrbracket,$$

где элементы $u, v \in \mathfrak{U}$ таковы, что $\hat{u}(q) = x$ и $\hat{v}(q) = y$. Легко убедиться в том, что приведенное определение корректно. Действительно, если $\hat{u}_1(q) = x$ и $\hat{v}_1(q) = y$ для какой-либо другой пары элементов u_1, v_1 , то включения $q \in \llbracket u \in v \rrbracket$ и $q \in \llbracket u_1 \in v_1 \rrbracket$ эквивалентны.

Несложно убедиться в том, что класс $\{\hat{u}(A) \mid u \in \mathfrak{U}, A \sqsubset Q\}$ является базой некоторой открытой топологии на V^Q , что позволяет нам рассматривать V^Q как непрерывное расслоение.

4.3. Теорема. (1) *Расслоение V^Q является непрерывным поливерсумом.*

(2) *Отображение $u \mapsto \hat{u}$ осуществляет изоморфизм между булевозначными универсумами \mathfrak{U} и $C(Q, V^Q)$.*

Доказательство последней теоремы разобьем на несколько этапов.

4.4. Лемма. *Если $u \in \mathfrak{U}$ и $A \sqsubset Q$, то $\hat{u}(A) \sqsubset V^Q$.*

◁ Для каждого элемента $x \in V^Q \setminus \hat{u}(A)$ найдутся $v \in \mathfrak{U}$ и $q \in Q$ такие, что $x = \hat{v}(q)$.

Если $q \in A$, то $\hat{u}(q) \neq x = \hat{v}(q)$, $q \in \llbracket u \neq v \rrbracket$ и поэтому множество $\hat{v}(\llbracket u \neq v \rrbracket)$ является окрестностью точки x , не пересекающейся с $\hat{u}(A)$. Если же $q \notin A$, то окрестность $\hat{v}(Q \setminus A)$ точки x не пересекается с $\hat{u}(A)$. ▷

4.5. Лемма. *Классы $\{\hat{u} \mid u \in \mathfrak{U}\}$ и $C(Q, V^Q)$ совпадают.*

◁ Рассмотрим произвольный элемент $u \in \mathfrak{U}$ и покажем, что сечение \hat{u} непрерывно. Если $v \in \mathfrak{U}$ и $A \sqsubset Q$, то множество $\hat{u}^{-1}(\hat{v}(A)) = A \cap \llbracket u = v \rrbracket$ открыто. Произвольность v и A позволяет заключить, что $\hat{u} \in C(Q, V^Q)$.

Установим обратное включение. Пусть $f \in C(Q, V^Q)$. Для каждой точки $q \in Q$ подберем такой элемент $u_q \in \mathfrak{U}$, что $\hat{u}_q(q) = f(q)$, и положим

$$A_q := \{p \in Q \mid \hat{u}_q(p) = f(p)\} = f^{-1}(\hat{u}_q(Q)) \sqsubset Q.$$

Таким образом, $(A_q)_{q \in Q}$ — открытое покрытие компакта Q , а значит, из него можно выбрать подпокрытие $(A_q)_{q \in F}$, где F — конечное подмножество Q . По принципу исчерпывания найдется антицепь $(B_q)_{q \in F}$ такая, что $B_q \subset A_q$ для всех $q \in F$ и $\bigcup_{q \in F} B_q = Q$. Поскольку булевозначная алгебраическая система \mathfrak{U} удовлетворяет принципу перемешивания, у нас есть возможность рассмотреть элемент $u = \text{mix}_{q \in F} B_q u_q \in \mathfrak{U}$. Несложно убедиться в том, что $\widehat{u} = f$. \triangleright

4.6. Лемма. *Топология V^Q экстремально несвязна.*

\triangleleft Вытекает из лемм 4.4 и 4.5 и предложения 2.5. \triangleright

4.7. Лемма. *Отображение $(u \mapsto \widehat{u}): \mathfrak{U} \rightarrow C(Q, V^Q)$ является биекцией, причем для всех $u, v \in \mathfrak{U}$ выполнены равенства*

$$\llbracket u = v \rrbracket_{\mathfrak{U}} = \llbracket \widehat{u} = \widehat{v} \rrbracket_{C(Q, V^Q)},$$

$$\llbracket u \in v \rrbracket_{\mathfrak{U}} = \llbracket \widehat{u} \in \widehat{v} \rrbracket_{C(Q, V^Q)}.$$

\triangleleft Легко заметить, что для всех $u, v \in \mathfrak{U}$ и $q \in Q$ имеют место соотношения

$$V^q \models \widehat{u}(q) \in \widehat{v}(q) \iff q \in \llbracket u \in v \rrbracket,$$

$$V^q \models \widehat{u}(q) = \widehat{v}(q) \iff q \in \llbracket u = v \rrbracket.$$

Тем самым требуемые равенства установлены. В лемме 4.6 показана сюръективность отображения $u \mapsto \widehat{u}$. Нам остается обосновать его инъективность. Пусть элементы $u, v \in \mathfrak{U}$ таковы, что $\widehat{u} = \widehat{v}$. Тогда $\llbracket u = v \rrbracket = \llbracket \widehat{u} = \widehat{v} \rrbracket = Q$, откуда в силу отделимости системы \mathfrak{U} следует равенство $u = v$. \triangleright

Таким образом, тройка $(C(Q, V^Q), \llbracket \cdot = \cdot \rrbracket, \llbracket \cdot \in \cdot \rrbracket)$ представляет собой булевозначную алгебраическую систему над $\text{Clor}(Q)$, изоморфную \mathfrak{U} , а значит, $C(Q, V^Q)$ является булевозначным универсумом над $\text{Clor}(Q)$.

4.8. Лемма. *Если $u \in C(Q, V^Q)$, то $\perp u \perp$ — открыто-замкнутое подмножество V^Q .*

\triangleleft Пусть $u \in C(Q, V^Q)$. Поскольку $C(Q, V^Q)$ удовлетворяет принципу подъема, мы имеем $u = \text{asc}_{\xi \in \Xi} B_\xi u_\xi$ для некоторого семейства $(u_\xi)_{\xi \in \Xi}$ непрерывных сечений V^Q и семейства $(B_\xi)_{\xi \in \Xi}$ открыто-замкнутых подмножеств Q . Для всякого $v \in C(Q, V^Q)$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} v^{-1} \left(\text{cl} \bigcup_{\xi \in \Xi} u_\xi(B_\xi) \right) &= \text{cl} \bigcup_{\xi \in \Xi} v^{-1}(u_\xi(B_\xi)) = \text{cl} \bigcup_{\xi \in \Xi} B_\xi \cap \llbracket v = u_\xi \rrbracket \\ &= \bigvee_{\xi \in \Xi} B_\xi \wedge \llbracket v = u_\xi \rrbracket = \llbracket v \in u \rrbracket = v^{-1}(\perp u \perp). \end{aligned}$$

Таким образом, согласно лемме 2.7 установлено равенство

$$\perp u \perp = \text{cl} \bigcup_{\xi \in \Xi} u_{\xi}(B_{\xi}).$$

Множество $\bigcup_{\xi \in \Xi} u_{\xi}(B_{\xi})$ открыто, поэтому в силу леммы 4.6 класс $\perp u \perp$ является открыто-замкнутым множеством. \blacktriangleright

4.9. Лемма. *Для любого подмножества $X \sqsubset V^Q$ существует такое сечение $u \in C(Q, V^Q)$, что $\perp u \perp = X$.*

\blacktriangleleft С каждым элементом $x \in X$ свяжем сечение $u_x \in C(Q, V^Q)$ такое, что $x \in \text{im } u_x$. Очевидно, множество $B_x = u_x^{-1}(X)$ открыто-замкнуто. Рассмотрим подъем $u = \text{asc}_{x \in X} B_x u_x$ и установим равенство $\perp u \perp = X$. Поскольку $x \in u_x(B_x) \subset X$ для всех $x \in X$, мы имеем $X = \bigcup_{x \in X} u_x(B_x) = \text{cl} \bigcup_{x \in X} u_x(B_x)$. Для произвольного сечения $v \in C(Q, V^Q)$ справедливы соотношения

$$v^{-1}(X) = \bigcup_{x \in X} v^{-1}(u_x(B_x)) = \bigvee_{x \in X} B_x \wedge \llbracket v = u_x \rrbracket = \llbracket v \in u \rrbracket = v^{-1}(\perp u \perp).$$

Согласно лемме 2.7 требуемое равенство установлено. \blacktriangleright

4.10. Лемма. *Для любой формулы $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ и произвольных сечений $u_1, \dots, u_n \in C(Q, V^Q)$ имеет место равенство*

$$\llbracket \varphi(u_1, \dots, u_n) \rrbracket = \{q \in Q \mid V^q \models \varphi(u_1(q), \dots, u_n(q))\}.$$

\blacktriangleleft Доказательство леммы в точности повторяет доказательство теоремы 3.10 о поточечной истинности. \blacktriangleright

Из последней леммы следует, что в каждом слое истинны аксиомы экстенциональности и регулярности. Таким образом, теорема 4.3 полностью доказана.

В заключение сформулируем теорему, объединяющую основные результаты § 3, 4.

Теорема. *Пусть Q — стоуновский компакт полной булевой алгебры B .*

(1) *Класс $C(Q, V^Q)$ непрерывных сечений поливерсума V^Q над Q является булевозначным универсумом.*

(2) *Для любого булевозначного универсума \mathfrak{U} над B существует непрерывный поливерсум V^Q над Q , класс $C(Q, V^Q)$ непрерывных сечений которого изоморфен \mathfrak{U} .*

Литература

1. Архангельский А. В., Пономарев В. И. *Основы общей топологии в задачах и упражнениях*. М.: Наука, 1974.
2. Бурбаки Н. *Общая топология*. М.: Наука, 1968.
3. Владимиров Д. А. *Булевы алгебры*. М.: Наука, 1969.
4. Гордон Е. И., Морозов С. Ф. *Булевозначные модели теории множеств*. Горький: Изд.-во Горьковского гос. ун-та, 1982.
5. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. *Нестандартные методы анализа*. Новосибирск: Наука, 1990.
6. Сикорский Р. *Булевы алгебры*. М.: Мир, 1969.
7. Solovay R., Tennenbaum S. Iterated Cohen extensions and Souslin's problem // *Ann. Math.* 1971. V. 94, N 2. P. 201–245.

Гутман Александр Ефимович

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, РОССИЯ.
E-mail: gutman@math.nsc.ru

Статья поступила
в ноябре 1997 г.

Лосенков Георгий Анатольевич

Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2,
630090 Новосибирск, РОССИЯ.
E-mail: losenkov@math.nsc.ru