МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

А. Е. Гутман, А. С. Колесников

РЕШЕТКИ БАНАХА — КАНТОРОВИЧА

Учебное пособие

НОВОСИБИРСК
2000

Введение

В общем виде решеточно нормированные пространства (РНП) впервые возникли в работах Л. В. Канторовича, где они были названы «пространствами, нормированными с помощью элементов полуупорядоченного пространства». Мотивацией для рассмотрения таких пространств послужило построение обобщенного метода мажорант Коши для решения функциональных уравнений. А. В. Бухвалов впервые использовал РНП для выработки общего подхода к исследованию разнородных объектов функционального анализа, так или иначе связанных с векторными нормами. Позже А. Г. Кусраев и его ученики построили развитую теорию РНП, включающую глубокую разработку понятия мажорируемого оператора.

Современный список примеров РНП весьма обширен и включает такие объекты, как пространства непрерывных и слабо непрерывных вектор-функций, пространства измеримых и слабо измеримых вектор-функций, пространство суммируемых по Бохнеру вектор-функций, пространство порядково ограниченных решеточнозначных функций, пространство векторных мер ограниченной вариации, пространство решеточнозначных мер, пространство операторов с абстрактной нормой, пространства доминированных и мажорируемых операторов. Интересные и важные классы РНП связаны с сечениями банаховых расслоений.

Теория РНП продолжает активно развиваться. Одним из последних достижений в этой области явилось создание А. Г. Кусраевым теории пространств со смешанной нормой. Им же положено начало теории мажорируемых операторов в пространствах со смешанной нормой.

Одним из традиционных методов функционального анализа является построение аналитических представлений различных абстрактных пространств (векторных решеток, нормированных алгебр и др.) и действующих в них операторов (линейных, монотонных, непрерывных и т. п.). Это обусловлено прежде всего тем, что наличие у объекта того или иного аналитического представления значительно облегчает работу с ним. Например, вместо списка абстрактных свойств оператора можно получить его выражение в виде конкретной формулы, в которую автоматически заложены все эти свойства. (Такой формулой может быть матрица, интеграл с ядром, оператор взвешенного сдвига и т. д.) Аналогичное преимущество перед аксиоматическим описанием алгебраических систем имеет их конкретная реализация, например, в виде какого-либо пространства функций. К тому же, вести речь об аналитическом представлении оператора можно лишь после того, как объекты, в которых он действует, получат надлежащую реализацию.

С другой стороны, естественным является и противоположное стремление — найти список абстрактных свойств пространства или оператора, эквивалентный наличию у него конкретного аналитического представления. В первую очередь, такой список используется для того, чтобы проверить, имеет ли данный объект рассматриваемое представление. Кроме того, абстрактное описание сосредоточивает в себе свойства многих изучаемых объектов и тем самым позволяет сэкономить время, затрачиваемое на исследование каждого из них в отдельности, сконцентрировав усилия на развитии общей теории.

Описанные традиции в полной мере свойственны теории векторных решеток и (в частности) K-пространств. Понятие K-пространства, введенное Л. В. Канторовичем в 1935 г., несомненно явилось результатом абстрактного обобщения известных к тому времени пространств непрерывных и измеримых вещественных функций, а также линейных функционалов на этих пространствах. Последовавшее затем развитие теории векторных решеток привело к тому, что в 40-е годы Б. З. Вулихом и независимо Т. Огасаварой было получено представление произвольного K-пространства в виде фундамента векторной решетки $C_\infty(Q)$ расширенных непрерывных функций на экстремально несвязном компакте Q. Таким образом, теория K-пространств завершила «полный цикл»

$$\text{примеры} \;\rightarrow\; \text{абстрактное понятие} \;\rightarrow\; \text{универсальная реализация}$$

и дала начало новому этапу теоретических исследований: поиску аналитических представлений для различных классов операторов, действующих в абстрактных векторных решетках.

Если рассмотреть теорию РНП, сосредоточивая внимание на их аналитическом представлении, то можно прийти к выводу, что история РНП в общих чертах повторяет схему развития теории векторных решеток. Прежде всего, понятие РНП можно рассматривать как абстрактное обобщение пространств непрерывных и измеримых функций, принимающих значения в нормированном пространстве. (Впрочем, Л. В. Канторович, вводя понятие РНП все в том же 1935 г., едва ли руководствовался именно этим соображением: систематическое исследование вектор-функций в то время тоже находилось в стадии зарождения.) Если аналитическое представление K-пространств было получено сравнительно через короткое время после их введения, то РНП долгое время оставались без универсальной функциональной реализации. Лишь в 1987 г. А. Г. Кусраев и В. З. Стрижевский получили первый результат в этом направлении. В 1991–95 гг. А. Е. Гутман создал и развил теорию просторных банаховых расслоений и измеримых банаховых расслоений с лифтингом, среди основных результатов которой являются теоремы о представлении РНП в виде пространств непрерывных и измеримых сечений банаховых расслоений.

Данная работа продолжает исследования, связанные с РНП и их представлениями в виде пространств сечений. Здесь речь идет, в первую очередь, о понятии решеточно упорядоченного РНП, т. е. РНП, снабженного порядком, превращающим это РНП в векторную решетку, а его решеточную норму — в монотонную (относительно модуля) функцию. Примерами таких пространств являются пространства непрерывных, слабо непрерывных, измеримых, слабо измеримых и суммируемых по Бохнеру функций со значениями в банаховых решетках, пространства порядково ограниченных решеточнозначных функций, пространства векторных мер ограниченной вариации со значениями в банаховой решетке, пространства решеточнозначных мер, а также рассматриваемые в данной работе пространства непрерывных и измеримых сечений расслоений банаховых решеток.

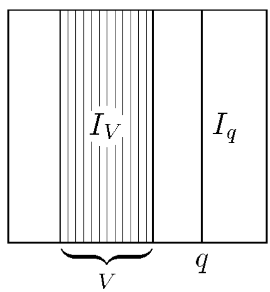
Говоря об абстрактных решеточно упорядоченных РНП, мы рассматриваем лишь векторные решетки, полные относительно порядковой сходимости в смысле решеточной нормы, — так называемые решетки Банаха — Канторовича (РБК). Основное внимание сосредоточено на представлении таких пространств в виде пространств функций. Главная роль в функциональном представлении РБК отводится непрерывным и измеримым расслоениям банаховых решеток (НБРБ и ИРБР) — новым понятиям, которые вводятся и исследуются в данной работе.

В качестве приложения результатов, касающихся РБК, НБРБ и ИРБР, мы рассматриваем задачу об аналитическом представлении условного математического ожидания. Пусть $(\mathcal{P}, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $\mathcal{B}$ — σ-подалгебра $\mathcal{A}$ и $f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{P})$. Напомним, что условным математическим ожиданием функции f относительно $\mathcal{B}$ называется $\mathcal{B}$-измеримая функция $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ (определяемая единственным образом с точностью до равенства почти всюду) такая, что

$$\int_{\mathcal{P}} (\chi(U) \cdot f)\, d\mu = \int_{\mathcal{P}} \big(\chi(U) \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)\big)\, d\mu \quad \text{для всех } U \in \mathcal{B},$$

где $\chi(U)$ — индикатор множества U.

Проблему аналитического представления условного математического ожидания удобно пояснить на следующем примере.



Пусть $\mathcal{P} = [0,1]^2$, $\mathcal{A}$ — σ-алгебра измеримых по Лебегу подмножеств $\mathcal{P}$ и μ — мера на $\mathcal{P}$. Символом ν обозначим меру Лебега на множестве $Q := [0,1]$. С каждой точкой $q \in Q$ свяжем «слой» $I_q := \{(q,y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ и рассмотрим на I_q стандартную измеримую структуру с мерой Лебега μ_q. Произвольному подмножеству $V \subset Q$ поставим в соответствие множество $I_V := \bigcup_{q \in V} I_q$. Как легко убедиться, совокупность $\mathcal{B} := \{I_V \mid V$ — измеримое подмножество $Q\}$ является σ-подалгеброй алгебры $\mathcal{A}$. Ясно, что $\mathcal{A}$-измеримая функция измерима относительно $\mathcal{B}$

тогда и только тогда, когда она постоянна на каждом слое I_q. Для произвольной функций $f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{P})$ положим $V_f := \{q \in Q : f|_{I_q} \in \mathcal{L}^1(I_q)\}$. Теорема Фубини позволяет заключить, что $\nu(V_f) = 1$. Определим $\mathcal{B}$-измеримую функцию g на $\mathcal{P}$, полагая $g(q, y) := \int_{I_q} f|_{I_q}\, d\mu_q$ для всех $q \in V_f$ и $y \in [0, 1]$. Вновь привлекая теорему Фубини, мы заключаем, что $g \in \mathcal{L}^1(\mathcal{P})$. Более того, функция g представляет собой условное ожидание f относительно $\mathcal{B}$. Таким образом, для почти всех $q \in Q$ и всех $y \in [0, 1]$ имеет место равенство

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)(q, y) = \int_{I_q} f|_{I_q}\, d\mu_q \tag{$*$}$$

и, кроме того,

$$\int_{\mathcal{P}} f\, d\mu = \int_Q \left(\int_{I_q} f|_{I_q}\, d\mu_q \right) d\nu.$$

В связи с рассмотренным примером возникает естественное желание получить аналогичную формулу и в общей ситуации — а именно, имея произвольное пространство с мерой $\mathcal{P}$ и некоторую σ-подалгебру его измеримых подмножеств, построить разбиение $\mathcal{P}$ на слои так, чтобы возникло представление условного ожидания, близкое к $(*)$.

В том случае, когда носитель $\mathcal{P}$ пространства с мерой является экстремально несвязным компактом, задача успешно решается: в § 4 данной работы построено разбиение $\mathcal{P}$ на множество слоев, в каждом из которых введена структура пространства с мерой и установлена формула, аналогичная $(*)$.

Разбиение на множество слоев возможно и в самой общей ситуации, но на появляющихся слоях не всегда удается должным образом ввести структуру пространства с мерой. Однако даже в этом случае можно получить формулы, близкие к $(*)$, привлекая понятие расслоения банаховых решеток (решению этой задачи, в частности, посвящен § 5). При таком подходе выражение $\int_{I_q} f|_{I_q}\, d\mu_q$ заменяется на некоторый «абстрактный» интеграл. Точнее говоря, вместо сужения $f|_{I_q}$ рассматривается элемент $\hat{f}(q)$ подходящей банаховой решетки $\mathcal{X}(q)$, а вместо интеграла $\int_{I_q}(\cdot)\,d\mu_q$ возникает его абстрактный аналог — существенно положительный порядково непрерывный линейный функционал. Функция $\mathcal{X}\colon q\mapsto\mathcal{X}(q)$ называется расслоением банаховых решеток, а $\hat{f}\colon q\mapsto\hat{f}(q)\in\mathcal{X}(q)$ — сечением этого расслоения.

Работа разбита на пять параграфов. Первый параграф содержит предварительные сведения об основных рассматриваемых объектах — таких как экстремально несвязные компакты, пространства с мерой, условные математические ожидания, булевы алгебры, нормированные решетки, решетки Банаха — Канторовича, банаховы расслоения.

Во втором параграфе по произвольной булевой алгебре A с заданной на ней мерой μ строятся абстрактные аналоги пространств измеримых, ограниченных и интегрируемых по мере μ функций. Там же устанавливается ряд вспомогательных фактов, необходимых для последующего изложения.

В третьем параграфе обсуждается связь между тремя классами объектов: решетками Банаха — Канторовича (РБК), непрерывными расслоениями банаховых решеток (НРБР) и пространствами вида $L^1(A,\mu)$ с выделенной правильной подалгеброй $B\subset A$. Доказывается, что векторная решетка $L^1(A,\mu)$ может быть представлена в виде пространства сечений НРБР и устанавливается «абстрактный» аналог формулы $(*)$, связанный с этим представлением.

В четвертом параграфе рассматривается случай пространства с мерой над экстремально несвязным компактом и выводится аналитическое представление условного ожидания, близкое к представлению $(*)$.

В пятом параграфе вводится понятие измеримого расслоения банаховых решеток (ИРБР), исследуются соотношения между измеримыми и непрерывными расслоениями банаховых решеток, устанавливается связь между РБК и ИРБР, а также предлагается реализация L^1-пространства с выделенной σ-подалгеброй в виде пространства сечений ИРБР и связанное с этой реализацией аналитическое представление условного ожидания.

§ 1. Предварительные сведения

Основными объектами, фигурирующими в данной работе, являются экстремально несвязные компакты, пространства с мерой, условные математические ожидания, булевы алгебры, нормированные решетки, решетки Банаха — Канторовича, банаховы расслоения, а также непрерывные и измеримые функции разных типов — вещественные функции и сечения банаховых расслоений. Этот параграф содержит предварительные сведения о большинстве перечисленных объектов.

1.1. Пусть X и Y — топологические пространства, причем Y хаусдорфово, D — всюду плотное подмножество X

Объединения счетных семейств нигде не плотных множеств (т. е. множества первой категории по Бэру) принято называть *тощими*, а дополнения к ним — *котощими* множествами.

Топологическое пространство X называется *вполне несвязным*, если совокупность $\mathrm{Clop}(X)$ всех открыто-замкнутых (т. е. открытых и замкнутых одновременно) подмножеств X является базой его открытой топологии. Если замыкание $\mathrm{cl}\, U$ всякого открытого подмножества $U \subset X$ является открытым, то пространство X называется *экстремально несвязным.* Всякий экстремально несвязный компакт вполне регулярен и вполне несвязен.

Известно, что экстремально несвязный компакт является компактификацией по Стоуну — Чеху любого своего всюду плотного подмножества (см. [14, 24.2]). Иными словами, если D — всюду плотное подмножество экстремально несвязного компакта Q и K — произвольный компакт, то всякая непрерывная функция $f\colon D \to K$ имеет (единственное) непрерывное продолжение $\bar{f}\colon Q \to K$, обозначаемое символом $\mathrm{ext}(f)$.

1.2. Под *пространством с мерой* в данной работе понимается тройка $(\mathcal{P}, \mathcal{A}, \mu)$, где $\mathcal{P}$ — произвольное множество, $\mathcal{A}$ — некоторая σ-алгебра подмножеств $\mathcal{P}$ а μ — мера на $\mathcal{A}$, т. е. положительная счетно-аддитивная функция $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$.

Вместо $(\mathcal{P}, \mathcal{A}, \mu)$ мы будем писать просто $\mathcal{P}$. При этом элементы σ-алгебры $\mathcal{A}$ называются $\mathcal{A}$-измеримыми или просто измеримыми подмножествами $\mathcal{P}$.

Как обычно, мы будем говорить, что то или иное условие выполнено *почти всюду в* $U \in \mathcal{A}$ или *почти для всех* $p \in U$, если оно имеет место для всех элементов U, за исключением некоторого пренебрежимого множества (= множества нулевой меры). «Почти всюду» означает «почти всюду в $\mathcal{P}$». Символом $\mathcal{L}^0(\mathcal{P})$ обозначается совокупность всех почти всюду определенных вещественных функций, измеримых относительно σ-алгебры $\mathcal{A}$. Множество всех существенно ограниченных функций из $\mathcal{L}^0(\mathcal{P})$ обозначается через $\mathcal{L}^\infty(\mathcal{P})$, а совокупность всех интегрируемых функций из $\mathcal{L}^0(\mathcal{P})$ — через $\mathcal{L}^1(\mathcal{P})$. Для интеграла в пространстве $\mathcal{P}$ мы будем, помимо стандартного $\int_{\mathcal{P}} f\,d\mu$, использовать обозначение $\mathcal{M}(f)$.

Пусть $\mathcal{B}$ — σ-подалгебра алгебры $\mathcal{A}$. Пусть μ_0 — сужение меры μ на $\mathcal{B}$. Пространство с мерой $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mu_0)$ мы будем обозначать через $(\mathcal{P}, \mathcal{B})$, а элементы алгебры $\mathcal{B}$ будем называть $\mathcal{B}$-измеримыми множествами. Совокупность почти всюду определенных $\mathcal{B}$-измеримых вещественных функций обозначается символом $\mathcal{L}^0(\mathcal{P}, \mathcal{B})$. Аналогичным образом вводятся обозначения $\mathcal{L}^\infty(\mathcal{P}, \mathcal{B})$ и $\mathcal{L}^1(\mathcal{P}, \mathcal{B})$.

1.3. Пусть $\mathcal{P}$ — пространство с ненулевой мерой. Множества $U, V \in \mathcal{A}$ называются *эквивалентными* (пишем $U \sim V$), если симметрическая разность $U \triangle V$ пренебрежима. Фактор-множество $\mathcal{A}/{\sim}$ будет обозначаться через A. Для произвольного элемента $U \in \mathcal{A}$ символом $U^\sim$ обозначается содержащий его класс эквивалентности из A. На множестве A естественным образом вводится (частичный) порядок: $\mathbf{U} \leqslant \mathbf{V}$ тогда и только тогда, когда разность $U \backslash V$ пренебрежима для некоторых (а тогда и для любых) представителей $U \in \mathbf{U}$ и $V \in \mathbf{V}$. По отношению к этому порядку множество A, очевидно, является булевой алгеброй с нулем $\varnothing^\sim$ и единицей $\mathcal{P}^\sim$. Булевы операции в алгебре A осуществляются по формулам

$$U^\sim \vee V^\sim = (U \cup V)^\sim, \quad U^\sim \wedge V^\sim = (U \cap V)^\sim, \quad (U^\sim)^\perp = (\mathcal{P} \setminus U)^\sim,$$

где $U, V \in \mathcal{A}$.

Функции $f, g \in \mathcal{L}^0(\mathcal{P})$ называются *эквивалентными* или, точнее, *μ-эквивалентными* (пишем $f \sim g$), если они совпадают почти всюду. Фактор-множество $\mathcal{L}^0(\mathcal{P})/\!\sim$ будет обозначаться через $L^0(\mathcal{P})$. Аналогичным образом вводятся обозначения $L^\infty(\mathcal{P})$ и $L^1(\mathcal{P})$, а также $L^0(\mathcal{P},\mathcal{B})$, $L^\infty(\mathcal{P},\mathcal{B})$ и $L^1(\mathcal{P},\mathcal{B})$, где $\mathcal{B}$ — σ-подалгебра алгебры $\mathcal{A}$. Для произвольного элемента $f \in \mathcal{L}^0(\mathcal{P})$ символом $f^\sim$ обозначается содержащий его класс эквивалентности из $L^0(\mathcal{P})$. Соотношения

$$\alpha f^\sim + \beta g^\sim = (\alpha f|_{\operatorname{dom} g} + \beta g|_{\operatorname{dom} f})^\sim, \quad f^\sim g^\sim = (f|_{\operatorname{dom} g} \cdot g|_{\operatorname{dom} f})^\sim,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $f, g \in \mathcal{L}^0(\mathcal{P})$, определяют на множествах $L^0(\mathcal{P})$ и $L^\infty(\mathcal{P})$ структуру векторного пространства с нулем $0^\sim$ и коммутативной алгебры с единицей $1^\sim$. Кроме того, на множестве $L^0(\mathcal{P})$ естественным образом вводится (частичный) порядок: $\mathbf{f} \leqslant \mathbf{g}$ тогда и только тогда, когда $f \leqslant g$ почти всюду для некоторых (а тогда и для любых) представителей $f \in \mathbf{f}$ и $g \in \mathbf{g}$. Относительно введенных операций пространство $L^0(\mathcal{P})$ и его подпространства $L^\infty(\mathcal{P})$ и $L^1(\mathcal{P})$ являются векторными решетками. Точные границы в этих решетках вычисляются по формулам

$$f^\sim \vee g^\sim = (f|_{\operatorname{dom} g} \vee g|_{\operatorname{dom} f})^\sim, \quad f^\sim \wedge g^\sim = (f|_{\operatorname{dom} g} \wedge g|_{\operatorname{dom} f})^\sim$$

для $f, g \in \mathcal{L}^0(\mathcal{P})$. Кроме того, пространства $L^0(\mathcal{P})$ и $L^\infty(\mathcal{P})$ оказываются упорядоченными алгебрами.

Для любого класса $\mathbf{f} \in L^1(\mathcal{P})$ символом $\int_{\mathcal{P}} \mathbf{f}\, d\mu$ (или $M(\mathbf{f})$) обозначается интеграл $\int_{\mathcal{P}} f\, d\mu$ произвольного представителя $f \in \mathbf{f}$.

Всюду в дальнейшем, рассматривая пространство с мерой $(\mathcal{P}, \mathcal{A}, \mu)$, мы будем по умолчанию предполагать выполненным следующее условие: если $U \in \mathcal{A}$, $\mu(U) = 0$ и $U_0 \subset U$, то $U_0 \in \mathcal{A}$. Аналогично, по умолчанию будет предполагаться, что любая σ-подалгебра $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, содержит все пренебрежимые подмножества $\mathcal{P}$.

1.4. Пусть $(\mathcal{P}, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с ненулевой мерой, $\mathcal{B}$ — σ-подалгебра $\mathcal{A}$ и $f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{P})$. *Условным математическим ожиданием* (или просто *условным ожиданием*) *функции f относительно $\mathcal{B}$* называется $\mathcal{B}$-измеримая функция g, обозначаемая символом $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$, такая, что

$$\mathcal{M}(\chi(V) \cdot f) = \mathcal{M}(\chi(V) \cdot g) \quad \text{для всех } V \in \mathcal{B},$$

где $\chi(V)$ — индикатор множества V.

Теорема. *Для любой функции* $f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{P})$ *условное ожидание* $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ *существует и единственно с точностью до равенства почти всюду.*

Для любого класса $\mathbf{f} \in L^1(\mathcal{P})$ символом $M_{\mathcal{B}}(\mathbf{f})$ обозначается класс $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)^{\sim}$, где f — произвольный представитель $\mathbf{f}$. Таким образом, возникает отображение

$$M_{\mathcal{B}}\colon L^1(\mathcal{P}) \to L^1(\mathcal{P}, \mathcal{B}).$$

Подробное изложение свойств условных математических ожиданий содержится, например, в [2].

1.5. Отображение $\rho\colon L^{\infty}(\mathcal{P}) \to \mathcal{L}^{\infty}(\mathcal{P})$ называется *лифтингом фактор-пространства* $L^{\infty}(\mathcal{P})$, если для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in L^{\infty}(\mathcal{P})$ имеют место следующие соотношения:

(1) $\rho(\mathbf{f}) \in \mathbf{f}$ и $\operatorname{dom} \rho(\mathbf{f}) = \mathcal{P}$;

(2) если $\mathbf{f} \leqslant \mathbf{g}$, то $\rho(\mathbf{f}) \leqslant \rho(\mathbf{g})$ всюду на $\mathcal{P}$;

(3) $\rho(\alpha\mathbf{f} + \beta\mathbf{g}) = \alpha\rho(\mathbf{f}) + \beta\rho(\mathbf{g})$, $\rho(\mathbf{fg}) = \rho(\mathbf{f})\rho(\mathbf{g})$,
$\rho(\mathbf{f} \vee \mathbf{g}) = \rho(\mathbf{f}) \vee \rho(\mathbf{g})$, $\rho(\mathbf{f} \wedge \mathbf{g}) = \rho(\mathbf{f}) \wedge \rho(\mathbf{g})$;

(4) $\rho(0^{\sim}) = 0$ и $\rho(1^{\sim}) = 1$ всюду на $\mathcal{P}$.

(Некоторые из перечисленных условий являются следствиями остальных.) Если $f \in \mathcal{L}^{\infty}(\mathcal{P})$, то для функции $\rho(f^{\sim})$ принято более короткое обозначение: $\rho(f)$. Поскольку лифтинг является правым обратным отображением к операции $f \mapsto f^{\sim}$, мы будем иногда использовать запись $\mathbf{f}_{\sim}$ вместо $\rho(\mathbf{f})$ там, где это не приведет к путанице. Аналогично символ $f_{\sim}$ будет употребляться вместо $\rho(f)$. Под значением $\mathbf{f}(p)$ класса $\mathbf{f} \in L^{\infty}(\mathcal{P})$ в точке $p \in \mathcal{P}$ мы будем понимать значение лифтинга этого класса в точке p, т. е. $\mathbf{f}(p) := \mathbf{f}_{\sim}(p)$.

Зафиксируем произвольный класс $\mathbf{U} \in A$ и обозначим через $\chi(\mathbf{U})$ класс из $L^{\infty}(\mathcal{P})$, содержащий характеристическую функцию некоторого (а тогда и любого) представителя класса $\mathbf{U}$. Из свойств лифтинга с очевидностью вытекает, что функция $\rho(\chi(\mathbf{U}))$ принимает только значения 0 или 1. Обозначим через $\rho(\mathbf{U})$ подмножество $\mathcal{P}$, характеристическая функция которого равна $\rho(\chi(\mathbf{U}))$. Полученное таким образом отображение $\rho\colon A \to \mathcal{A}$ является *лифтингом фактор-алгебры* A, т. е. для всех $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in A$ имеют место следующие соотношения:

(1) $\rho(\mathbf{U}) \in \mathbf{U}$;
(2) если $\mathbf{U} \leqslant \mathbf{V}$, то $\rho(\mathbf{U}) \subset \rho(\mathbf{V})$;
(3) $\rho(\mathbf{U} \vee \mathbf{V}) = \rho(\mathbf{U}) \cup \rho(\mathbf{V})$, $\rho(\mathbf{U} \wedge \mathbf{V}) = \rho(\mathbf{U}) \cap \rho(\mathbf{V})$,
$\rho(\mathbf{U}^{\perp}) = \mathcal{P} \setminus \rho(\mathbf{U})$;
(4) $\rho(\varnothing^{\sim}) = \varnothing$ и $\rho(\mathcal{P}^{\sim}) = \mathcal{P}$.

По аналогии с лифтингом пространства $L^{\infty}(\mathcal{P})$ мы будем иногда употреблять символ $\mathbf{U}_{\sim}$ в качестве $\rho(\mathbf{U})$, а также писать $\rho(U)$ или $U_{\sim}$ вместо $\rho(U^{\sim})$.

Таким образом, лифтинг фактор-пространства $L^{\infty}(\mathcal{P})$ определяет лифтинг фактор-алгебры A. Стоит отметить, что имеется также и обратная связь, а именно, для всякого лифтинга ρ фактор-алгебры A существует единственный лифтинг пространства $L^{\infty}(\mathcal{P})$ (обозначаемый тем же символом ρ) такой, что $\rho(\chi(\mathbf{U})) = \chi(\rho(\mathbf{U}))$ для всех $\mathbf{U} \in A$.

Точки $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ называются *ρ-неразличимыми*, если для каждого класса $\mathbf{f} \in L^{\infty}(\mathcal{P})$ выполнено $\rho(\mathbf{f})(p_1) = \rho(\mathbf{f})(p_2)$. Очевидно, точки p_1 и p_2 ρ-неразличимы тогда и только тогда, когда включения $p_1 \in \rho(\mathbf{U})$ и $p_2 \in \rho(\mathbf{U})$ равносильны для любого $\mathbf{U} \in A$.

1.6. Вопрос о существовании лифтинга для произвольного σ-конечного пространства с мерой был впервые решен Д. Магарам [11]. Из ее результатов, в частности, следует, что в рассматриваемых нами пространствах $L^{\infty}(\mathcal{P})$ всегда существует лифтинг. Более подробное изложение фактов, касающихся теории лифтинга, можно найти в [16].

1.7. Для произвольной булевой алгебры символы 0 и 1 обозначают наименьший и наибольший ее элементы, $a \vee b$ и $a \wedge b$ — точные границы множества $\{a, b\}$, $a^{\perp}$ — дополнение элемента a, запись $a \setminus b$, как обычно, обозначает $a \wedge b^{\perp}$. Булева алгебра B называется *полной*, если всякое ее подмножество $B_0 \subset B$ имеет точные границы $\sup B_0$ и $\inf B_0$.

Говорят, что элементы $a, b \in B$ *дизъюнктны* (и пишут $a \perp b$), если $a \wedge b = 0$. Семейство элементов булевой алгебры называют *дизъюнктным*, если его члены попарно дизъюнктны. *Разбиением единицы* в булевой алгебре называется всякое дизъюнктное семейство $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ ее элементов, удовлетворяющее условию $\sup_{\xi\in\Xi} b_\xi = 1$.

Доказательства всех приводимых ниже фактов об абстрактных булевых алгебрах можно найти, например, в [9].

1.8. Говорят, что подмножество Y упорядоченного множества X *наследственно вложено в* X, если для любого подмножества $Z \subset Y$ из существования $\sup_Y Z$ следуют существование $\sup_X Z$ и равенство $\sup_X Z = \sup_Y Z$, а из существования $\inf_Y Z$ — существование $\inf_X Z$ и равенство $\inf_X Z = \inf_Y Z$. Наследственно вложенную подалгебру булевой алгебры называют *наследственной подалгеброй*.

Предложение. *Пусть B — подалгебра булевой алгебры A. Следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *B — наследственная подалгебра A;*

(2) *для любого подмножества $C \subset B$ из соотношения $\inf_B C = 0$ следует $\inf_A C = 0$;*

(3) *для любого подмножества $C \subset B$ из соотношения $\inf_B C = 1$ следует $\inf_A C = 1$.*

Говорят, что подмножество Y упорядоченного множества X *правильно вложено в* X, если для любого подмножества $Z \subset Y$ из существования $\sup_X Z$ следует включение $\sup_X Z \in Y$, а из существования $\inf_X Z$ — включение $\inf_X Z \in Y$. Правильно вложенную подалгебру булевой алгебры называют *правильной подалгеброй*.

Предложение. (1) *Всякая правильная подалгебра является наследственной.*

(2) *Если наследственная подалгебра полна, то она является правильной.*

1.9. Пусть A и B — булевы алгебры. Отображение $h\colon A \to B$ называется *булевым гомоморфизмом*, если для всех $a, a_1, a_2 \in A$ имеют место равенства

(1) $h(a_1 \vee a_2) = h(a_1) \vee h(a_2)$;
(2) $h(a_1 \wedge a_2) = h(a_1) \wedge h(a_2)$;
(3) $h(a^{\perp}) = h(a)^{\perp}$.

Заметим, что условие (1) вытекает из (2) и (3), а условие (2) — из (1) и (3). Каждый булев гомоморфизм $h\colon A \to B$ сохраняет порядок, т. е. для любых $a_1, a_2 \in A$ из $a_1 \leqslant a_2$ следует $h(a_1) \leqslant h(a_2)$.

Отображение $h\colon A \to B$ называется булевым *изоморфизмом алгебры A на B*, если оно обладает любым из следующих эквивалентных свойств:

(1) h — биекция, причем h и h^{-1} — булевы гомоморфизмы;
(2) h — биективный булев гомоморфизм;
(3) h — сюръективный булев гомоморфизм и $h^{-1}(0) = \{0\}$;
(4) h — сюръективный булев гомоморфизм и $h^{-1}(1) = \{1\}$.

Если существует булев изоморфизм A на B, то говорят, что алгебры A и B *изоморфны*.

1.10. Предложение [4, 1.2.4]. *Пусть A и B — булевы алгебры. Отображение $h\colon A \to B$ является булевым гомоморфизмом тогда и только тогда, когда для любого разбиения единицы (a_1, a_2, a_3) в алгебре A тройка $(h(a_1), h(a_2), h(a_3))$ является разбиением единицы в алгебре B.*

1.11. Пусть Q — произвольное топологическое пространство. Тогда упорядоченное по включению множество $\mathrm{Clop}(Q)$ всех его открыто-замкнутых подмножеств является булевой алгеброй. Булевы операции в алгебре $\mathrm{Clop}(Q)$ совпадают с теоретико-множественными:

$$0 = \varnothing, \quad 1 = Q, \quad U \vee V = U \cup V, \quad U \wedge V = U \cap V, \quad U^{\perp} = Q \setminus U.$$

Сведения об алгебрах открыто-замкнутых множеств можно найти в монографиях [3, 9, 14].

Теорема Стоуна — Огасавары [12, 15]. *Пусть B — произвольная булева алгебра и Q — совокупность всех ультрафильтров в B. Для каждого элемента $b \in B$ обозначим множество $\{q \in Q : b \in q\}$ через $\hat{b}$.*

(1) *Множество $\{\hat{b} : b \in B\}$ является базой некоторой топологии на Q, относительно которой Q является вполне несвязным компактом.*

(2) *Отображение $b \mapsto \hat{b}$ осуществляет булев изоморфизм между алгебрами B и $\mathrm{Clop}(Q)$.*

(3) *Булева алгебра B является полной тогда и только тогда, когда компакт Q экстремально несвязен.*

Компакт Q, построенный в формулировке последней теоремы, называется *стоуновским компактом булевой алгебры* B, а отображение $b \mapsto \hat{b}$ — *каноническим изоморфизмом* B на $\mathrm{Clop}(Q)$ или *стоуновской реализацией* алгебры B. Стоуновским компактом алгебры B называют также любой вполне несвязный компакт K, алгебра $\mathrm{Clop}(K)$ открыто-замкнутых подмножеств которого изоморфна B. Это соглашение оправдано, так как такой компакт K определяется алгеброй B однозначно с точностью до гомеоморфизма.

Итак, согласно теореме Стоуна — Огасавары булева алгебра $\mathrm{Clop}(Q)$, где Q — вполне несвязный компакт, представляет собой общий вид булевой алгебры. Если же Q — экстремально несвязный компакт, то $\mathrm{Clop}(Q)$ — общий вид полной булевой алгебры. Точные границы в этой алгебре вычисляются по формулам

$$\sup_{\xi \in \Xi} U_\xi = \mathrm{cl} \bigcup_{\xi \in \Xi} U_\xi, \quad \inf_{\xi \in \Xi} U_\xi = \mathrm{int} \bigcap_{\xi \in \Xi} U_\xi,$$

где cl и int — операции замыкания и внутренности в пространстве Q.

1.12. Как было отмечено в 1.3, совокупность A классов эквивалентности измеримых подмножеств пространства с ненулевой конечной мерой $\mathcal{P}$ представляет собой булеву алгебру. В рассматриваемом нами случае пространства с конечной мерой булева алгебра A является полной. Доказательство этого факта можно найти, например, в [16, гл. I].

В силу теоремы Стоуна — Огасавары стоуновский компакт P алгебры A экстремально несвязен. Известно (см. [13]), что совокупности тощих и нигде не плотных подмножеств P совпадают.

Пусть ρ — лифтинг пространства $L^\infty(\mathcal{P})$. Для каждой точки $p \in \mathcal{P}$ обозначим ультрафильтр $\{\mathbf{U} \in A \mid p \in \rho(\mathbf{U})\}$ через $\tau(p)$. Построенное таким образом отображение $\tau\colon \mathcal{P} \to P$ будем называть *каноническим погружением* $\mathcal{P}$ *в* P, соответствующим лифтингу ρ.

Теорема. *Пусть ρ — лифтинг пространства $L^\infty(\mathcal{P})$, τ — соответствующее каноническое погружение $\mathcal{P}$ в стоуновский компакт P булевой алгебры A и $\mathbf{U} \mapsto \widehat{\mathbf{U}}$ — канонический изоморфизм A на* $\mathrm{Clop}(P)$.

(1) *Для каждого класса $\mathbf{U} \in A$ имеет место равенство $\rho(\mathbf{U}) = \tau^{-1}[\widehat{\mathbf{U}}]$. В частности, прообраз $\tau^{-1}[G]$ всякого открыто-замкнутого множества $G \subset P$ измерим.*

(2) *Отображение $G \mapsto \tau^{-1}[G]^\sim$ осуществляет изоморфизм булевой алгебры $\mathrm{Clop}(P)$ на A, обратный к изоморфизму $\mathbf{U} \mapsto \widehat{\mathbf{U}}$.*

(3) *Образ $\tau[\mathcal{P}]$ всюду плотен в P.*

(4) *Прообраз $\tau^{-1}[G]$ всякого открытого множества $G \subset P$ измерим, причем $\tau^{-1}[G] \sim \tau^{-1}[\mathrm{cl}\, G]$.*

(5) *Отображение $\tau\colon \mathcal{P} \to P$ измеримо по Борелю.*

(6) *Прообраз $\tau^{-1}[N]$ всякого тощего (= нигде не плотного) множества $N \subset P$ измерим в $\mathcal{P}$ и имеет нулевую меру.*

(7) *Точки $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ ρ-неразличимы тогда и только тогда, когда $\tau(p_1) = \tau(p_2)$.*

1.13. В произвольной векторной решетке (= решеточно упорядоченном архимедовом векторном пространстве) бинарные решеточные операции обозначаются символами $\vee$ и $\wedge$. Положительная часть $e \vee 0$, отрицательная часть $(-e) \vee 0$ и модуль $e \vee (-e)$ элемента e векторной решетки обозначаются соответственно через e_+, e_- и $|e|$. Множество всех положительных элементов векторной решетки E обозначается символом E_+. Символ $\perp$ обозначает отношение дизъюнктности:

$$e \perp f \;\Leftrightarrow\; |e| \wedge |f| = 0.$$

Дизъюнктное дополнение $\{e \in E : e \perp f \text{ для всех } f \in F\}$ подмножества F векторной решетки E обозначатся через $F^{\perp}$, символ $F^{\perp\perp}$ является сокращением записи $(F^{\perp})^{\perp}$. Подмножество векторной решетки E, имеющее вид $F^{\perp\perp}$ для некоторого $F \subset E$, называется *компонентой* E (порожденной множеством F). Подмножество $F \subset E$ является компонентой тогда и только тогда, когда $F^{\perp\perp} = F$. Компонента вида $\{e\}^{\perp\perp}$, где $e \in E$, называется *главной*. Элемент $1 \in E$ называют (*слабой*) *порядковой единицей*, если $1 \geqslant 0$ и $\{1\}^{\perp\perp} = E$. Если для каждого элемента $e \in E$ существует число $\lambda \in \mathbb{R}$ такое, что $|e| \leqslant \lambda 1$, то элемент $1 \in E$ называется *сильной* (*порядковой*) *единицей*.

Тот факт, что сеть $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ монотонно убывает и $\inf_{\alpha\in\mathrm{A}} e_\alpha = e$, коротко обозначается формулой $e_\alpha \downarrow e$. Говорят, что сеть $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ элементов векторной решетки E *o-сходится к* элементу $e \in E$ (и пишут $e = o\text{-}\lim_{\alpha\in\mathrm{A}} e_\alpha$), если в E существует такая сеть $(f_\beta)_{\beta\in\mathrm{B}}$, что $f_\beta \downarrow 0$ и

$$\forall\, \beta \in \mathrm{B} \;\; \exists\, \bar\alpha \in \mathrm{A} \;\; \forall\, \alpha \geqslant \bar\alpha \;\; |e_\alpha - e| \leqslant f_\beta.$$

Если в роли сети $(f_\beta)_{\beta\in\mathrm{B}}$ выступает последовательность $(f/n)_{n\in\mathbb{N}}$, где $f \geqslant 0$, то говорят, что сеть $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ *r-сходится к* e (*с регулятором* f) и пишут $e = r\text{-}\lim_{\alpha\in\mathrm{A}} e_\alpha$. Сеть $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ называется *o-фундаментальной* (*r-фундаментальной с регулятором* $f \in E$), если сеть $(e_\alpha - e_\beta)_{(\alpha,\beta)\in\mathrm{A}\times\mathrm{A}}$ o-сходится (соответственно r-сходится с регулятором f) к нулю. Сеть $(e_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ называется *асимптотически ограниченной*, если существует такой индекс $\bar\alpha \in \mathrm{A}$, что множество $\{e_\alpha : \alpha \geqslant \bar\alpha\}$ порядково ограничено. Очевидно, всякая o-сходящаяся сеть является асимптотически ограниченной.

Пусть E — векторная решетка. Линейный оператор $\pi\colon E \to E$ называется *порядковым проектором*, если $\pi^2 = \pi$ и $0 \leqslant \pi e \leqslant e$ для всех положительных элементов $e \in E$. На множестве $\mathrm{Pr}(E)$ всех порядковых проекторов в E вводится порядок: $\pi_1 \leqslant \pi_2$ означает $\pi_1 e \leqslant \pi_2 e$ для всех положительных $e \in E$. Относительно такого порядка множество $\mathrm{Pr}(E)$ представляет собой булеву алгебру. Нулем и единицей в этой алгебре являются соответственно нулевой и тождественный id_E операторы, а булевы операции осуществляются следующим образом:

$$\pi_1 \wedge \pi_2 = \pi_1 \circ \pi_2, \quad \pi_1 \vee \pi_2 = \pi_1 + \pi_2 - \pi_1 \circ \pi_2, \quad \pi^{\perp} = \mathrm{id}_E - \pi.$$

Если $e \in E$, то элементы вида πe, где $\pi \in \mathrm{Pr}(E)$, называют *осколками* e.

Образ любого порядкового проектора векторной решетки является компонентой. Каждый порядковый проектор однозначно определяется своим образом. Для произвольного элемента $e \in E$ символом $\langle e \rangle$ обозначается порядковый проектор на компоненту $\{e\}^{\perp\perp}$ (если таковой существует). Аналогично для подмножества $F \subset E$ символом $\langle F \rangle$ обозначается проектор на компоненту $F^{\perp\perp}$.

Векторное подпространство $F \subset E$ называется (*порядковым*) *идеалом* векторной решетки E, если для любых $f \in F$ и $e \in E$ из $|e| \leqslant |f|$ следует $e \in F$. Идеал $F \subset E$ называют *фундаментом*, если $F^{\perp\perp} = E$.

Векторная решетка называется *пространством Канторовича* или, более коротко, *K-пространством*, если всякое ее порядково ограниченное подмножество имеет точные границы. В K-пространстве каждая o- или r-фундаментальная сеть имеет соответственно o- или r-предел. Для любой векторной решетки E имеется (единственное с точностью до линейного и порядкового изоморфизма) K-пространство $\overline{E}$, содержащее E как o-плотную векторную подрешетку. Такое K-пространство $\overline{E}$ называется *o-пополнением* решетки E. Говорят, что K-пространство является *расширенным*, если любое семейство попарно дизъюнктных его элементов порядково ограничено. Всякое K-пространство является фундаментом некоторого (единственного с точностью до линейного и порядкового изоморфизма) расширенного K-пространства, которое называется его *максимальным расширением*. Любой идеал K-пространства является K-пространством. Для всякого K-пространства E булева алгебра $\mathrm{Pr}(E)$ полна. Если F — фундамент K-пространства E, то отображение $\pi \mapsto \pi|_F$ осуществляет изоморфизм между булевыми алгебрами $\mathrm{Pr}(E)$ и $\mathrm{Pr}(F)$. Мы условимся отождествлять алгебры $\mathrm{Pr}(E)$ и $\mathrm{Pr}(F)$ посредством этого изоморфизма. В K-пространстве имеются порядковые проекторы на любую компоненту.

1.14. Непрерывную функцию $f\colon Q \to \overline{\mathbb{R}}$, определенную на экстремально несвязном компакте Q, принято называть *расширенной*, если она принимает конечные значения на всюду плотном подмножестве Q и тем самым совпадает с максимальным расширением своего сужения на $\operatorname{dom} f = \{q \in Q \mid f(q) \in \mathbb{R}\}$ (см. 1.1). Совокупность всех расширенных функций из Q в $\overline{\mathbb{R}}$ обозначается через $C_\infty(Q)$. Множество $C_\infty(Q)$ можно естественным образом снабдить структурой векторного пространства и алгебры: для $f, g \in C_\infty(Q)$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ следует положить

$$\lambda f + \mu g := \operatorname{ext}(\lambda f|_{\operatorname{dom} g} + \mu g|_{\operatorname{dom} f}), \quad fg := \operatorname{ext}(f|_{\operatorname{dom} g} \cdot g|_{\operatorname{dom} f}).$$

Похожим образом множество $C_\infty(Q)$ наделяется (частичным) порядком: $f \leqslant g$, если $f(q) \leqslant g(q)$ для всех $q \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$. Относительно введенных операций $C_\infty(Q)$ является расширенным K-пространством и упорядоченной коммутативной алгеброй с единицей.

Теорема [3, 12]**.** *Пусть E — произвольное K-пространство, Q — стоуновский (экстремально несвязный) компакт булевой алгебры $\operatorname{Pr}(E)$ и $\pi \mapsto \hat{\pi}$ — канонический изоморфизм $\operatorname{Pr}(E)$ на $\operatorname{Clop}(Q)$.*

(1) *Существует линейный и порядковый изоморфизм $e \mapsto \hat{e}$ K-пространства E на фундамент $\widehat{E}$ K-пространства $C_\infty(Q)$ такой, что $(\pi e)^\wedge = \chi(\hat{\pi}) \cdot \hat{e}$ для всех $\pi \in \operatorname{Pr}(E)$ и $e \in E$.*

(2) *Если в E фиксирована порядковая единица* 1, *то существует единственный изоморфизм $e \mapsto \hat{e}$ K-пространства E на фундамент $\widehat{E} \subset C_\infty(Q)$ такой, что $(\pi 1)^\wedge = \chi(\hat{\pi})$ для всех $\pi \in \operatorname{Pr}(E)$.*

(3) *Образ любого изоморфизма расширенного K-пространства на фундамент $C_\infty(Q)$ совпадает с $C_\infty(Q)$.*

Отображение $e \mapsto \hat{e}$, фигурирующее в формулировке последней теоремы, называется *реализацией* K-пространства E, а фундамент $\widehat{E} \subset C_\infty(Q)$ — *стоуновским преобразованием* K-пространства E.

З а м е ч а н и е. Из последней теоремы, в частности, следует, что в любом расширенном K-пространстве E можно определить произведение так, что E превратится в коммутативную упорядоченную алгебру. Если дополнительно фиксировать порядковую единицу в K-пространстве E и потребовать, чтобы она была единицей умножения, то способ определения произведения в E становится единственным.

1.15. Теорема. *Предположим, что $\mathcal{P}$ — пространство с ненулевой конечной мерой.*

(1) *Векторная решетка $L^0(\mathcal{P})$ представляет собой расширенное K-пространство.*

(2) *Семейство $(\mathbf{f}_\xi)_{\xi \in \Xi}$ элементов $L^0(\mathcal{P})$ порядково ограничено сверху тогда и только тогда, когда существует такое семейство представителей $f_\xi \in \mathbf{f}_\xi$ $(\xi \in \Xi)$, что $\sup_{\xi \in \Xi} f_\xi(p) < \infty$ почти для всех $p \in \mathcal{P}$.*

1.16. Теорема. *Пусть $(\mathcal{P}, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с ненулевой мерой, ρ — лифтинг пространства $L^\infty(\mathcal{P})$ и $\tau \colon \mathcal{P} \to P$ — соответствующее каноническое погружение $\mathcal{P}$ в стоуновский компакт P булевой алгебры A* (см. 1.12).

(1) *Почти всюду в $\mathcal{P}$ определенная вещественная функция e измерима тогда и только тогда, когда $e \sim f \circ \tau$ для некоторого элемента $f \in C_\infty(P)$.*

(2) *Для любого класса $\mathbf{e} \in L^0(\mathcal{P})$ существует единственная функция $\hat{\mathbf{e}} \in C_\infty(P)$, дающая представление $\mathbf{e}$ в виде $(\hat{\mathbf{e}} \circ \tau)^\sim$.*

(3) *Отображение $\mathbf{e} \mapsto \hat{\mathbf{e}}$ осуществляет линейный, алгебраический и порядковый изоморфизм $L^0(\mathcal{P})$ на $C_\infty(P)$. Обратный изоморфизм $C_\infty(P)$ на $L^0(\mathcal{P})$ действует по правилу $f \mapsto (f \circ \tau)^\sim$.*

(4) *Образ $L^\infty(\mathcal{P})$ при изоморфизме $\mathbf{e} \mapsto \hat{\mathbf{e}}$ совпадает с $C(P)$. Для каждого класса $\mathbf{e} \in L^\infty(\mathcal{P})$ имеет место равенство $\rho(\mathbf{e}) = \hat{\mathbf{e}} \circ \tau$.*

1.17. Предположим, что векторная решетка E является также нормированным пространством. Говорят, что норма $\|\cdot\|$ в векторной решетке E *монотонна*, если для всех $e, f \in E$ неравенство $|e| \leqslant |f|$ влечет $\|e\| \leqslant \|f\|$. Векторную решетку E, снабженную монотонной нормой, называют *нормированной решеткой.* Если нормированная решетка E полна относительно нормы $\|\cdot\|$, то она называется *банаховой решеткой.*

Теорема [14, 3.9.5]. *Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — нормированная решетка и $\overline{E}$ — пополнение нормированного пространства E по норме $\|\cdot\|$. Тогда на $\overline{E}$ можно ввести порядок, совпадающий с исходным порядком на E, так, что $\overline{E}$ превратится в банахову решетку.*

1.18. *Изоморфизмом нормированных решеток* E и F называется отображение $i\colon E \to F$, осуществляющее линейный и порядковый изоморфизм векторной решетки E на F и сохраняющее норму.

Теорема [1]. *Всякая положительная изометрия одной нормированной решетки на другую осуществляет изоморфизм между этими решетками.*

1.19. Рассмотрим векторное пространство $\mathcal{U}$, векторную решетку E и функцию $\lvert\!\cdot\!\rvert\colon \mathcal{U} \to E$. Пара $(\mathcal{U}, \lvert\!\cdot\!\rvert)$ называется *решеточно нормированным пространством* (РНП) *над* E, если для любых $u, v \in \mathcal{U}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ имеют место следующие соотношения:

(1) $\lvert u\rvert \geqslant 0$;
(2) $\lvert \lambda u\rvert = |\lambda|\lvert u\rvert$;
(3) $\lvert u+v\rvert \leqslant \lvert u\rvert + \lvert v\rvert$;
(4) $\lvert u\rvert = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$.

При этом отображение $\lvert\!\cdot\!\rvert$ именуется *решеточной* (*векторной*, *E-значной*) *нормой*, а пространство E называется *нормирующей решеткой пространства* $\mathcal{U}$. Вместо $(\mathcal{U}, \lvert\!\cdot\!\rvert)$ обычно пишут просто $\mathcal{U}$ и в случае необходимости снабжают символ $\lvert\!\cdot\!\rvert$ индексом: $\lvert\!\cdot\!\rvert_{\mathcal{U}}$. РНП $\mathcal{U}$ называют *разложимым* (*d-разложимым*), если для любого элемента $u \in \mathcal{U}$ и любого разложения $\lvert u\rvert = f + g$ в сумму положительных (соответственно дизъюнктных) элементов $f, g \in E$ найдутся такие $v, w \in \mathcal{U}$, что

$$\lvert v\rvert = f, \quad \lvert w\rvert = g, \quad v + w = u.$$

В настоящей работе по умолчанию предполагается, что все рассматриваемые РНП d-разложимы и их нормирующие решетки являются K-пространствами. Кроме того, мы будем предполагать, что образ нормы РНП $\mathcal{U}$ максимально широк в нормирующей решетке E, т. е. $\{\lvert u\rvert : u \in \mathcal{U}\}^{\perp\perp} = E$.

Пусть $\mathcal{U}$ — РНП над E. Подмножество $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ называется (*порядково*) *ограниченным*, если множество $\{\lvert v\rvert : v \in \mathcal{V}\}$ порядково ограничено в E. Говорят, что *элементы* $u, v \in \mathcal{U}$ *дизъюнктны* (и пишут $u \perp v$), если $\lvert u\rvert \perp \lvert v\rvert$. Всякое семейство, состоящее из попарно дизъюнктных элементов РНП, называют *дизъюнктным семейством.*

Говорят, что сеть $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ элементов РНП $\mathcal{U}$ над E *o-сходится* (*r-сходится с регулятором* $e \in E$) *к* $u \in \mathcal{U}$ (и пишут $u = o\text{-}\lim_{\alpha\in\mathrm{A}} u_\alpha$ и соответственно $u = r\text{-}\lim_{\alpha\in\mathrm{A}} u_\alpha$), если в E выполнено $o\text{-}\lim_{\alpha\in\mathrm{A}} \lvert u_\alpha - u\rvert = 0$ ($r\text{-}\lim_{\alpha\in\mathrm{A}} \lvert u_\alpha - u\rvert = 0$ с регулятором e). Сеть $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ называется *o-фундаментальной* (*r-фундаментальной с регулятором* $e \in E$), если сеть $(u_\alpha - u_\beta)_{(\alpha,\beta)\in\mathrm{A}\times\mathrm{A}}$ o-сходится (соответственно r-сходится с регулятором e) к нулю.

1.20. Предположим, что $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ — РНП над E и F соответственно, и пусть j — линейный и порядковый изоморфизм E на F. Линейная биекция $i\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ называется *изометрией, ассоциированной с* j, если $\big\lvert i(u)\big\rvert = j(\lvert u\rvert)$ для всех $u \in \mathcal{U}$. Говорят, что РНП $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ *изометричны*, если существуют изоморфизм E на F и ассоциированная с ним изометрия $\mathcal{U}$ на $\mathcal{V}$.

В том случае, когда $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ — РНП над одной и той же решеткой E, всякая изометрия $i\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ по умолчанию предполагается ассоциированной с тождественным изоморфизмом: $\big\lvert i(u)\big\rvert = \lvert u\rvert$ для всех $u \in \mathcal{U}$. При необходимости подчеркнуть последнее обстоятельство мы будем называть такую изометрию *E-изометрией*, а соответствующие РНП — *E-изометричными.*

1.21. РНП называется *порядково полным* или *o-полным* (*r-полным*), если всякая o-фундаментальная (r-фундаментальная) сеть элементов этого пространства o-сходится (r-сходится). *Пространством Банаха — Канторовича* (ПБК) называется d-разложимое o-полное РНП над K-пространством. Можно показать, что всякое ПБК является разложимым РНП.

1.22. ПБК $(\mathcal{U}, \lvert\cdot\rvert)$ над K-пространством E называется *решеткой Банаха — Канторовича* (РБК), если на пространстве $\mathcal{U}$ задан порядок, относительно которого оно является векторной решеткой, и норма $\lvert\cdot\rvert$ монотонна, т. е. для всех $u, v \in \mathcal{U}$ из $|u| \leqslant |v|$ следует $\lvert u\rvert \leqslant \lvert v\rvert$.

Предположим, что $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ — РБК над E и F соответственно и пусть j — линейный и порядковый изоморфизм E на F. Отображение $i\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ называется *изоморфизмом* РБК, *ассоциированным с* j, если i является изометрией РНП $\mathcal{U}$ на $\mathcal{V}$, ассоциированной с j (см. 1.20), и, кроме того, i осуществляет порядковый изоморфизм векторной решетки $\mathcal{U}$ на $\mathcal{V}$. Говорят, что РБК $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ *изоморфны*, если существует изоморфизм E на F и ассоциированный с ним изоморфизм РБК $\mathcal{U}$ на $\mathcal{V}$.

В том случае, если $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ — РБК над одной и той же решеткой E, всякий изоморфизм $i\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ по умолчанию предполагается ассоциированным с тождественным изоморфизмом: $\big|i(u)\big| = |u|$ для всех $u \in \mathcal{U}$. Как и в случае РНП (ср. 1.20), мы будем называть такое отображение i *E-изоморфизмом*, а соответствующие РБК — *E-изоморфными.*

1.23. В настоящей работе мы имеем дело с банаховыми расслоениями двух типов: непрерывными и измеримыми. Общей базой для этих объектов является понятие дискретного банахова расслоения, которому посвящена оставшаяся часть параграфа.

Пусть Q — непустое множество. (*Дискретным*) *банаховым расслоением над* Q называется всякое отображение $\mathcal{X}$, определенное на Q и ставящее в соответствие каждой точке $q \in Q$ некоторое банахово пространство $\mathcal{X}(q)$. Значение $\mathcal{X}(q)$ банахова расслоения $\mathcal{X}$ называется его *слоем* в точке $q \in Q$. Норма элемента x в слое $\mathcal{X}(q)$ будет обозначаться символом $\|x\|_{\mathcal{X}(q)}$ или просто $\|x\|$, если ясно, о каком слое идет речь.

1.24. Пусть $\mathcal{X}$ — банахово расслоение над Q. Функция u, определенная на подмножестве $D \subset Q$, называется *сечением расслоения* $\mathcal{X}$ *над* D, если $u(q) \in \mathcal{X}(q)$ для всех $q \in D$. Совокупность всех сечений расслоения $\mathcal{X}$ над D обозначается символом $S(D, \mathcal{X})$. Элементы $S(Q, \mathcal{X})$ называются *глобальными сечениями.* В том случае, если Q — пространство с мерой, для совокупности сечений расслоения $\mathcal{X}$, определенных почти всюду на Q, будет использоваться обозначение $S_{\sim}(Q, \mathcal{X})$.

Множество сечений $\mathcal{U}$ расслоения $\mathcal{X}$ называется *послойно плотным* в $\mathcal{X}$, если совокупность $\{u(q) \mid u \in \mathcal{U},\ q \in \operatorname{dom} u\}$ всюду плотна в $\mathcal{X}(q)$ для любой точки $q \in Q$.

Для каждого сечения $u \in S(D, \mathcal{X})$ рассматривается его *поточечная норма* $|u|$: $q \in D \mapsto \|u(q)\|$.

1.25. Множество $S(D, \mathcal{X})$ всех сечений над $D \subset Q$ естественным образом наделяется структурой векторного пространства:

$$(\alpha u + \beta v)(q) = \alpha u(q) + \beta v(q)$$

для $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u, v \in S(D, \mathcal{X})$, $q \in D$. Пространство $S(D, \mathcal{X})$ может также рассматриваться как модуль над кольцом $S(D)$ всех функций из D в $\mathbb{R}$: для $e \in S(D)$ и $u \in S(D, \mathcal{X})$ сечение $eu \in S(D, \mathcal{X})$ определяется формулой

$$(eu)(q) = e(q)u(q).$$

Аналогичные операции определяются также для пар функций, имеющих разные области определения: если $A, B, C \subset Q$, $u \in S(A, \mathcal{X})$, $v \in S(B, \mathcal{X})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $e \in S(C)$, то

$$\alpha u + \beta v := \alpha(u|_{A \cap B}) + \beta(v|_{A \cap B}), \quad eu := e|_{A \cap C}\, u|_{A \cap C}.$$

§ 2. Аналитическое представление L^1-пространств

В этом параграфе по произвольной булевой алгебре A строятся абстрактные аналоги $L^0(A)$, $L^\infty(A)$ и $L^1(A,\mu)$ пространств измеримых, ограниченных и интегрируемых по мере μ функций, исследуются их основные свойства и реализации, а также вводится и изучается абстрактный оператор условного ожидания. Большинство результатов данного параграфа имеют вспомогательный характер и не претендуют на новизну.

2.1. Пусть A — полная булева алгебра. Рассмотрим множество $\mathcal{E}$ всевозможных наборов пар $\{(\alpha_i, a_i)\}_{i\in I}$, где I — произвольное конечное множество, α_i — вещественные числа, $\{a_i\}_{i\in I}$ — разбиение единицы в алгебре A.

На множестве $\mathcal{E}$ введем отношение $\sim$: два набора $\{(\alpha_i, a_i)\}_{i\in I}$ и $\{(\beta_j, b_j)\}_{j\in J}$ находятся в отношении $\sim$ тогда и только тогда, когда для любых $i \in I$ и $j \in J$ из условия $a_i \wedge b_j \neq 0$ следует $\alpha_i = \beta_j$.

Пусть P — стоуновский компакт алгебры A (см. 1.11). Рассмотрим совокупность $\mathrm{St}(P)$ всех непрерывных всюду определенных ступенчатых функций вида $\sum_{i\in I} \alpha_i \chi(U_i)$, где I — произвольное конечное множество, U_i — открыто-замкнутые подмножества P, $\chi(U_i)$ — их индикаторы. Очевидно, между $\mathcal{E}$ и $\mathrm{St}(P)$ имеется сюръективное соответствие, сопоставляющее семейству $e = \{(\alpha_i, a_i)\}_{i\in I}$ функцию $\hat{e} = \sum_{i\in I} \alpha_i \chi(\hat{a}_i)$.

2.2. Предложение. *Для любых $e_1, e_2 \in \mathcal{E}$ соотношение $e_1 \sim e_2$ равносильно равенству $\hat{e}_1 = \hat{e}_2$.*

Доказательство. Пусть $e_1 = \{(\alpha_i, a_i)\}_{i\in I}$, $e_2 = \{(\beta_j, b_j)\}_{j\in J}$. Предположим, что $e_1 \sim e_2$. Рассмотрим произвольную точку $p \in P$ и установим равенство $\hat{e}_1(p) = \hat{e}_2(p)$. Ясно, что p содержится только в одном из множеств $\hat{a}_i$, $i \in I$, например, в $\hat{a}_{i_0}$. Аналогичным образом введем множество $\hat{b}_{j_0}$. Пересечение $\hat{a}_{i_0} \cap \hat{b}_{j_0}$, очевидно, непусто, а значит, $a_{i_0} \wedge b_{j_0} \neq 0$. Отсюда следует, что $\alpha_{i_0} = \beta_{j_0}$, т. е. функции $\hat{e}_1$ и $\hat{e}_2$

совпадают в точке p. Поскольку точка p была выбрана произвольно, мы заключаем, что $\hat{e}_1 = \hat{e}_2$ всюду на P.

Предположим теперь, что $\hat{e}_1 = \hat{e}_2$. Пусть $a_i \wedge b_j \neq 0$ для некоторых $i \in I$ и $j \in J$. Тогда найдется точка p, лежащая в пересечении $\hat{a}_i \cap \hat{b}_j$. Из совпадения функций $\hat{e}_1$ и $\hat{e}_2$ в этой точке следует равенство соответствующих чисел α_i и β_j. Предложение доказано.

Следствие. *Отношение $\sim$ является отношением эквивалентности на $\mathcal{E}$.*

2.3. Положим $\mathrm{St}(A) := \mathcal{E}/{\sim}$ и условимся обозначать символом $\sum_{i\in I} \alpha_i a_i$ класс эквивалентности, содержащий набор $\{(\alpha_i, a_i)\}_{i\in I}$. Каждому элементу $s \in \mathrm{St}(A)$ однозначно соответствует ступенчатая функция $\hat{e} \in \mathrm{St}(P)$, где e — произвольный представитель класса s. Возникающую таким образом биекцию между $\mathrm{St}(A)$ и $\mathrm{St}(P)$ мы будем по-прежнему обозначать символом $(\cdot)^\wedge$.

Введем на множестве $\mathrm{St}(A)$ операции сложения, умножения на скаляр, а также отношение порядка, перенеся их из векторной решетки $\mathrm{St}(P)$ посредством биекции $(\cdot)^\wedge$, а именно:

$$(s_1 + s_2)^\wedge = \hat{s}_1 + \hat{s}_2, \quad (\alpha \cdot s)^\wedge = \alpha \cdot \hat{s}, \quad s_1 \leqslant s_2 \Leftrightarrow \hat{s}_1 \leqslant \hat{s}_2$$

для всех $s, s_1, s_2 \in \mathrm{St}(A)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Относительно введенных операций и отношения порядка множество $\mathrm{St}(A)$ является векторной решеткой. Несложно убедиться в том, что операции в $\mathrm{St}(A)$ вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha \sum_{i\in I} \alpha_i a_i &= \sum_{i\in I} \alpha\alpha_i a_i, \\ \sum_{i\in I} \alpha_i a_i + \sum_{j\in J} \beta_j b_j &= \sum_{(i,j)\in I\times J} (\alpha_i + \beta_j)(a_i \wedge b_j). \end{aligned}$$

Отношение порядка $\leqslant$ на $\mathrm{St}(A)$ задается следующим образом:

$$\sum_{i\in I} \alpha_i a_i \leqslant \sum_{j\in J} \beta_j b_j \;\Leftrightarrow\; \forall\, i \in I \;\forall\, j \in J \;(a_i \wedge b_j \neq 0 \;\Rightarrow\; \alpha_i \leqslant \beta_j).$$

2.4. Символом $L^0(A)$ обозначим максимальное расширение векторной решетки $\mathrm{St}(A)$.

Класс $s \in \mathrm{St}(A)$, содержащий набор вида $\{(1,a),(0,a^{\perp})\}$, мы будем называть *индикатором элемента* a алгебры A и обозначать $\chi(a)$. В K-пространстве $L^0(A)$ фиксируем порядковую единицу $\chi(1)$. В дальнейшем этот элемент будет обозначаться символом 1. Идеал $L^0(A)$, порожденный единицей $1 \in L^0(A)$, обозначается через $L^{\infty}(A)$.

2.5. Определение. Функцию $\mu\colon A \to \mathbb{R}_+$ назовем *мерой* на булевой алгебре A, если она аддитивна, существенно положительна и порядково непрерывна:

$$\begin{aligned}
&\mu(a \vee b) = \mu(a) + \mu(b) \quad \text{при } a \perp b,\\
&\mu(a) \neq 0 \quad \text{при } a \neq 0,\\
&\sup_{\xi\in\Xi} \mu(a_\xi) = \mu(a) \quad \text{при } \sup_{\xi\in\Xi} a_\xi = a.
\end{aligned}$$

Лемма. *Пусть A — булева алгебра счетного типа и $\varphi\colon A \to \mathbb{R}_+$ — аддитивная функция. Следующие условия эквивалентны*:

(1) *функция φ о-непрерывна*;

(2) *функция φ счетно о-непрерывна*;

(3) *функция φ σ-о-непрерывна*;

(4) *функция φ σ-аддитивна.*

В дальнейшем мы будем рассматривать только булевы алгебры счетного типа. Заметим, что в нашем случае всякая существенно положительная σ-аддитивная функция является мерой.

2.6. Пусть на алгебре A задана мера μ. Определим функционал M на решетке $\mathrm{St}(A)$ следующей формулой:

$$M\Bigl(\sum_{i\in I} \alpha_i a_i\Bigr) := \sum_{i\in I} \alpha_i \mu(a_i).$$

Корректность такого определения очевидна.

Фиксируем произвольно $f \in L^0(A)$ и положим $m(f) := \{s \in \mathrm{St}(A) \mid 0 \leqslant s \leqslant |f|\}$. Совокупность $\{f \in L^0(A) \mid \sup_{s \in m(f)} M(s) < \infty\}$ обозначим через $L^1(A, \mu)$. Очевидно, множество $L^1(A, \mu)$ представляет собой фундамент в K-пространстве $L^0(A)$ и, следовательно, само является K-пространством.

Распространим функционал M на все пространство $L^1(A, \mu)$, полагая

$$M(f) := \sup_{s \in m(f)} M(s)$$

для $0 \leqslant f \in L^1(A, \mu)$ и

$$M(f) := M(f^+) - M(f^-)$$

для произвольного элемента $f \in L^1(A, \mu)$.

Функционал $M\colon L^1(A, \mu) \to \mathbb{R}$ оказывается линейным, существенно положительным и порядково непрерывным. Функционалы с такими свойствами часто называют *интегралами*, поэтому мы будем иногда использовать обозначение $\int f\, d\mu$ для $M(f)$.

2.7. Пусть $(\mathcal{P}, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с ненулевой мерой и A — (полная) булева алгебра классов эквивалентных множеств. Мы будем считать, что мера μ задана и на алгебре A, полагая $\mu(\mathbf{U}) := \mu(U)$ для $U \in \mathbf{U} \in A$.

Предложение. *Расширенные K-пространства $L^0(\mathcal{P})$ и $L^0(A)$ изоморфны, а банаховы решетки $L^1(\mathcal{P})$ и $L^1(A, \mu)$ изометричны.*

Доказательство. Известно, что база K-пространства $L^0(\mathcal{P})$ изоморфна A. Следовательно, векторные решетки $L^0(\mathcal{P})$ и $L^0(A)$ изоморфны как расширенные K-пространства, имеющие изоморфные базы. Кроме того, классы ступенчатых функций из $L^0(\mathcal{P})$ переходят при этом изоморфизме в элементы $\mathrm{St}(A)$ с сохранением интеграла. Значит, сужение изоморфизма между $L^0(\mathcal{P})$ и $L^0(A)$ на пространство $L^1(\mathcal{P})$

представляет собой изометрию $L^1(\mathcal{P})$ на $L^1(A, \mu)$. Предложение доказано.

Таким образом, любое пространство классов измеримых функций может быть представлено в виде $L^0(A)$ для подходящей алгебры A. Более того, для всякой «абстрактной» полной булевы алгебры A с мерой пространство $L^0(A)$ оказывается линейно и порядково изоморфным некоторому пространству классов измеримых функций. По сути дела, последний факт хорошо известен, однако для дальнейшей работы нам потребуется достаточно подробное его рассмотрение.

2.8. Пусть на булевой алгебре A задана мера μ. Определим меру $\hat{\mu}$ на алгебре $\mathrm{Clop}(P)$ открыто-замкнутых подмножеств стоуновского компакта P алгебры A по формуле $\hat{\mu}(\hat{a}) := \mu(a)$. В дальнейшем мы будем использовать прежний символ μ для обозначения меры $\hat{\mu}$.

Символом $\mathrm{Bo}(P)$ обозначим σ-алгебру всех борелевских подмножеств компакта P. Между существенно положительными регулярными борелевскими мерами на $\mathrm{Bo}(P)$ и мерами на $\mathrm{Clop}(P)$ имеется тесная связь, описание которой содержится в следующих двух теоремах. (Напомним, что борелевская мера $\bar{\mu}$ называется существенно положительной, если $\bar{\mu}(U) > 0$ для всех непустых открытых множеств U.)

2.9. Теорема. (1) *Предположим, что функция $\bar{\mu}\colon \mathrm{Bo}(P) \to \mathbb{R}_+$ является существенно положительной регулярной борелевской мерой. Тогда сужение $\bar{\mu}|_{\mathrm{Clop}(P)}$ является существенно положительной аддитивной функцией.*

(2) *Для любой существенно положительной аддитивной функции $\mu : \mathrm{Clop}(P) \to \mathbb{R}_+$ существует единственная существенно положительная регулярная борелевская мера $\bar{\mu}\colon \mathrm{Bo}(P) \to \mathbb{R}$, совпадающая с μ на $\mathrm{Clop}(P)$.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно, а второе доказано в [8, § 2].

2.10. Теорема. *Пусть P — экстремально несвязный компакт, $\bar{\mu}\colon \operatorname{Bo}(P) \to \mathbb{R}_+$ — существенно положительная регулярная борелевская мера и μ — сужение $\bar{\mu}$ на $\operatorname{Clop}(P)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *μ — мера на $\operatorname{Clop}(P)$;*

(2) *нигде не плотные борелевские подмножества компакта P пренебрежимы относительно $\bar{\mu}$;*

(3) *любое открытое множество $U \subset P$ $\bar{\mu}$-эквивалентно своему замыканию;*

(4) *для любого борелевского множества $V \subset P$ существует единственное $\bar{\mu}$-эквивалентное ему открыто-замкнутое подмножество $V_\sim \subset P$, которое можно вычислить по формуле*

$$V_\sim = \inf\{U \in \operatorname{Clop}(P) \mid U \supset V\}.$$

Доказательство. Установим сначала равносильность утверждений (2)–(4).

(2) $\Rightarrow$ (3). Предположим, что всякое борелевское нигде не плотное подмножество P пренебрежимо относительно $\bar{\mu}$, и рассмотрим произвольное открытое множество $U \subset P$. Множество $\operatorname{cl} U \setminus U$ нигде не плотно а значит, пренебрежимо. Следовательно,

$$\bar{\mu}(\operatorname{cl} U) = \bar{\mu}(U) + \bar{\mu}(\operatorname{cl} U \setminus U) = \bar{\mu}(U),$$

что и требовалось установить.

(3) $\Rightarrow$ (4). Предположим, что любое открытое множество $\bar{\mu}$-эквивалентно своему замыканию. Тогда в силу регулярности меры $\bar{\mu}$ любое борелевское подмножество компакта P аппроксимируется по мере $\bar{\mu}$ открыто-замкнутыми множествами. Точнее говоря, для любого борелевского подмножества $V \subset P$ существует убывающая последовательность $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ открыто-замкнутых множеств, содержащих V, такая, что $\inf_{n\in\mathbb{N}} \bar{\mu}(U_n) = \bar{\mu}(V)$. С другой стороны, $\inf_{n\in\mathbb{N}} \bar{\mu}(U_n) = \bar{\mu}\big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\big)$, а пересечение $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ $\bar{\mu}$-эквивалентно открыто-замкнутому множеству

$\operatorname{int}\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Таким образом, $V \sim \inf_{n\in\mathbb{N}} U_n =: V_\sim$. Единственность построенного множества $V_\sim$ с очевидностью вытекает из существенной положительности меры $\bar{\mu}$.

(4) $\Rightarrow$ (2). Предположим, что каждое борелевское множество V эквивалентно по мере $\bar{\mu}$ открыто-замкнутому множеству $V_\sim$ Рассмотрим произвольное нигде не плотное борелевское множество V и установим равенство $V_\sim = \varnothing$. Допустим, что $V_\sim \neq \varnothing$. Поскольку множество V нигде не плотно, найдется непустое открыто-замкнутое множество $U_0 \subset V_\sim$ такое, что $U_0 \cap V = \varnothing$. Очевидно, множество $U := P \setminus U_0$ содержит V и $V_\sim \not\subset U$, что противоречит соотношению $V_\sim = \inf\{U \in \operatorname{Clop}(P) \mid U \supset V\}$.

Для завершения доказательства теоремы достаточно установить равносильность (1) и (3).

(1) $\Rightarrow$ (3). Пусть μ — мера на $\operatorname{Clop}(P)$. Рассмотрим произвольное открытое множество $U \subset P$ и возрастающую последовательность $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ открыто-замкнутых подмножеств P, содержащихся в U, такую, что $U \subset \operatorname{cl}\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$. (Указанная последовательность существует в силу счетности типа алгебры $\operatorname{Clop}(P)$.) Ясно, что

$$\operatorname{cl} U = \sup_{n\in\mathbb{N}} U_n = \operatorname{cl}\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n.$$

Из неравенств $\bar{\mu}(U_n) \leqslant \bar{\mu}(U)$ следует

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \bar{\mu}(U_n) \leqslant \bar{\mu}(U) \leqslant \bar{\mu}(\operatorname{cl} U).$$

С другой стороны, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \bar{\mu}(U_n) = \bar{\mu}(\operatorname{cl} U)$, поскольку $\bar{\mu}$ совпадает с μ на $\operatorname{Clop}(P)$ и функция μ порядково непрерывна. Таким образом,

$$\bar{\mu}(U) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \bar{\mu}(U_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(U_n) = \mu(\operatorname{cl} U) = \bar{\mu}(\operatorname{cl} U).$$

(3) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что любое открытое подмножество компакта P $\bar{\mu}$-эквивалентно своему замыканию. Рассмотрим возрастающую последовательность $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ открыто-замкнутых множеств и положим $U := \sup_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Поскольку множество U $\bar{\mu}$-эквивалентно

объединению $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ и $\bar\mu(U) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \bar\mu(U_n)$, из совпадения $\bar\mu$ и μ на $\mathrm{Clop}(P)$ следует (секвенциальная) порядковая непрерывность функции μ. Теорема доказана.

Борелевскую меру $\bar\mu\colon \mathrm{Bo}(P) \to \mathbb{R}_+$ мы будем называть *непрерывной*, если мера $\bar\mu$ регулярна, существенно положительна и удовлетворяет одному из эквивалентных условий теоремы 2.10.

2.11. Пусть A — полная булева алгебра, P — ее стоуновский компакт и μ — мера на A. По заключенному выше соглашению (см. 2.8), мы считаем, что мера μ задана на открыто-замкнутых подмножествах стоуновского компакта P алгебры A. Пусть $\bar\mu$ — мера на $\mathrm{Bo}(P)$, полученная продолжением меры μ согласно теореме 2.9. Следующее утверждение легко получить из установленных выше фактов.

Предложение. (1) *Отображение $a \in A \mapsto [\hat a]$ есть булев изоморфизм между алгебрами A и $\mathrm{Bo}(P)/\bar\mu^{-1}(0)$.*

(2) *Класс $\bar\mu^{-1}(0)$ не зависит от выбора меры μ. Точнее говоря, каковы бы ни были меры μ_1 и μ_2 на алгебре A, классы $\bar\mu_1^{-1}(0)$ и $\bar\mu_2^{-1}(0)$ совпадают.*

2.12. Замечание. В силу предложения 2.11 (2), отношение эквивалентности по мере на борелевских функциях $f\colon P \to \mathbb{R}$ не зависит от выбора непрерывной меры. Поэтому в обозначении пространства классов эквивалентности борелевских функций на P мы не будем упоминать меру и употреблять для этого пространства символ $L^0(P)$. Соответственно, пространство классов ограниченных борелевских функций на P будет обозначаться через $L^\infty(P)$. Для пространства классов интегрируемых по мере $\bar\mu$ борелевских функций мы сохраним обозначение $L^1(P,\bar\mu)$.

2.13. Предложение. *В каждом классе $\mathbf{f} \in L^0(P)$ имеется единственный представитель $\mathbf{f}_\sim \in C_\infty(P)$. Отображение $\mathbf{f} \mapsto \mathbf{f}_\sim$ осуществляет линейный и порядковый изоморфизм между K-пространствами $L^0(P)$ и $C_\infty(P)$.*

Доказательство. Известно (см. 1.14), что между расширенными K-пространствами $L^0(P)$ и $C_\infty(P)$ существует линейный и порядковый изоморфизм i, переводящий класс $\chi(V)^\sim \in L^0(P)$ в индикатор $\chi(V_\sim) \in C(P)$ для каждого борелевского подмножества $V \subset P$. Учитывая непрерывность функции $\chi(V_\sim)$ и привлекая очевидное соотношение $\chi(V_\sim) \in \chi(V)^\sim$, легко показать, что $i(\mathbf{s}) \in C(P)$ и $i(\mathbf{s}) \in \mathbf{s}$ для каждого класса $\mathbf{s} \in L^0(P)$, содержащего ступенчатую функцию.

Фиксируем произвольный класс $\mathbf{f} \in L^0(P)$ и рассмотрим последовательность $\{\mathbf{s}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, классов ступенчатых функций, порядково сходящуюся к $\mathbf{f}$. Тогда последовательность непрерывных функций $i(\mathbf{s}_n)$ будет порядково сходиться к элементу $i(\mathbf{f})$ в $C_\infty(P)$. Согласно [5, 2.33] порядковая сходимость в $C_\infty(P)$ является поточечной сходимостью на некотором котощем множестве, а поскольку все тощие подмножества P пренебрежимы (см. 2.10 (2)), функция $\mathbf{f}_\sim := i(\mathbf{f})$ является искомым представителем класса $\mathbf{f}$. Предложение доказано.

В дальнейшем мы будем использовать обозначение $L^1[P,\bar{\mu}]$ для пересечения $C_\infty(P) \cap \mathcal{L}^1(P,\bar{\mu})$. Несложно убедиться в том, что $L^1[P,\bar{\mu}]$ является фундаментом $C_\infty(P)$, а отображение $\mathbf{f} \mapsto \mathbf{f}_\sim$ осуществляет изоморфизм между K-пространствами $L^1(P,\bar{\mu})$ и $L^1[P,\bar{\mu}]$.

2.14. Теорема. *Пусть A — полная булева алгебра, μ — мера на A и P — стоуновский компакт алгебры A. Тогда существует единственный линейный и порядковый изоморфизм $(\cdot)^\wedge\colon L^0(A) \to L^0(P)$ такой, что*

$$\Big(\sum_{i\in I} \alpha_i a_i\Big)^\wedge = \Big(\sum_{i\in I} \alpha_i \chi(\hat{a}_i)\Big)^\sim$$

для всех элементов $\sum_{i\in I} \alpha_i a_i \in \mathrm{St}(A)$. Соответствующие сужения этого изоморфизма осуществляют линейный и порядковый изоморфизм между K-пространствами $L^\infty(A)$ и $L^\infty(P)$, а также между $L^1(A,\mu)$ и $L^1(P,\bar{\mu})$.

Доказательство. Ясно, что отображение $(\cdot)^\wedge$ осуществляет линейный и порядковый изоморфизм решетки $\mathrm{St}(A)$ на решетку $\mathrm{St}^\sim(P)$ классов эквивалентности ступенчатых борелевских функций. Так как обе упомянутые решетки порядково плотны в расширенных K-пространствах $L^0(A)$ и $L^0(P)$ соответственно, отображение $(\cdot)^\wedge$ единственным образом продолжается до изоморфизма $(\cdot)^\wedge\colon L^0(A) \to L^0(P)$.

При этом изоморфизме порядковая единица $1 \in L^0(A)$ переходит в порядковую единицу $\chi(P)^\sim \in L^0(P)$, откуда следует, что сужение $(\cdot)^\wedge|_{L^\infty(A)}$ осуществляет изоморфизм между $L^\infty(A)$ и $L^\infty(P)$.

Покажем теперь, что $(\cdot)^\wedge$ отображает $L^1(A,\mu)$ на $L^1(P,\bar{\mu})$. Поскольку соответствие $(\cdot)^\wedge$ переводит $\mathrm{St}(A)$ в $\mathrm{St}^\sim(P)$ и сохраняет интеграл, из порядковой непрерывности интегралов на $L^1(A,\mu)$ и $L^1(P,\bar{\mu})$ следует, что $\hat{\mathbf{f}} \in L^1(P,\bar{\mu})$ для всех $\mathbf{f} \in L^1(A,\mu)$, при этом $\int \mathbf{f}\, d\mu = \int_P \hat{\mathbf{f}}\, d\bar{\mu}$. Сюръективность отображения $(\cdot)^\wedge\colon L^1(A,\mu) \to L^1(P,\bar{\mu})$ очевидна. Теорема доказана.

Определим на $L^1(A,\mu)$ норму, полагая: $\|\mathbf{f}\| := \int |\mathbf{f}|\, d\mu$. Как следует из доказательства теоремы, в этом случае отображение $(\cdot)^\wedge|_{L^1(A,\mu)}$ становится изометрией $L^1(A,\mu)$ на $L^1(P,\bar{\mu})$. Более того, это отображение сохраняет интеграл. Аналогичным образом можно ввести норму на пространстве $L^1[P,\bar{\mu}]$, положив $\|f\| := \int_P |f|\, d\bar{\mu}$.

2.15. Следствие. *Банаховы решетки $L^1(A,\mu)$, $L^1(P,\bar{\mu})$ и $L^1[P,\bar{\mu}]$ порядково изометричны.*

2.16. Пусть A — полная булева алгебра, μ_1 и μ_2 — меры на A. Пусть $\bar{\mu}_1$ и $\bar{\mu}_2$ — регулярные борелевские меры на стоуновском компакте P алгебры A, полученные продолжением мер μ_1 и μ_2 с открыто-замкнутых подмножеств P (см. 2.9).

Из существенной положительности мер μ_1 и μ_2 следует, что меры $\bar{\mu}_1$ и $\bar{\mu}_2$ взаимно абсолютно непрерывны. Согласно теореме Радона — Никодима существует единственная (с точностью до равенства почти всюду) борелевская функция $\varphi\colon P \to \overline{\mathbb{R}}$ такая, что

$$\int_V f\, d\bar{\mu}_1 = \int_V f \cdot \varphi\, d\bar{\mu}_2$$

для всех $V \in \mathrm{Bo}(P)$ и $f \in \mathcal{L}^1(P, \bar{\mu})$. Как известно, класс эквивалентности $\varphi^{\sim}$ называют производной меры $\bar{\mu}_1$ по мере $\bar{\mu}_2$ и обозначают символом $\frac{d\bar{\mu}_1}{d\bar{\mu}_2}$.

Теорема. *Пусть A — полная булева алгебра, μ_1 и μ_2 — меры на A. Существует единственный элемент $g \in L^0(A)$ такой, что оператор $f \mapsto f \cdot g$ осуществляет линейный и порядковый изоморфизм между K-пространствами $L^1(A, \mu_1)$ и $L^1(A, \mu_2)$, сохраняющий интеграл. При этом $\hat{g} = \frac{d\bar{\mu}_1}{d\bar{\mu}_2}$, где $(\cdot)^\wedge$ — изоморфизм, фигурирующий в формулировке теоремы* 2.14.

Доказательство. Обозначим через M_1 и M_2 интегралы в пространствах $L^1(A, \mu_1)$ и $L^1(A, \mu_2)$ соответственно.

Пусть g — прообраз класса $\frac{d\bar{\mu}_1}{d\bar{\mu}_2}$ при отображении $(\cdot)^\wedge$. Из того факта, что $(\cdot)^\wedge$ сохраняет интеграл, и из определения производной $\frac{d\bar{\mu}_1}{d\bar{\mu}_2}$ следует, что для всякого элемента $f \in L^1(A, \mu_1)$ произведение $f \cdot g$ принадлежит $L^1(A, \mu_2)$ и при этом интегралы $M_1(f)$ и $M_2(f \cdot g)$ совпадают.

В силу взаимной абсолютной непрерывности мер $\bar{\mu}_1$ и $\bar{\mu}_2$, имеется обратное отображение из $L^1(A, \mu_2)$ в $L^1(A, \mu_1)$ (осуществляемое умножением на элемент g^{-1}), также сохраняющее интеграл, откуда следует, что элементы вида $f \cdot g$, где $f \in L^1(A, \mu_1)$, исчерпывают все пространство $L^1(A, \mu_2)$.

Единственность элемента g следует из единственности производной меры $\bar{\mu}_1$ по мере $\bar{\mu}_2$. Теорема доказана.

2.17. Предложение. *Пусть E — банахова решетка с аддитивной нормой. Тогда существуют полная булева алгебра A и мера μ на этой алгебре такие, что банаховы решетки E и $L^1(A, \mu)$ изоморфны* (см. 1.18).

Доказательство по существу содержится в [10].

2.18. На протяжении оставшейся части параграфа A — полная булева алгебра, μ — мера на A, B — правильная подалгебра алгебры A и μ_0 — ограничение меры μ на B. Поскольку B — полная булева алгебра и μ_0 — мера на B, мы вправе рассмотреть пространства $L^0(B)$, $L^\infty(B)$ и $L^1(B,\mu_0)$. Вложение $B \subset A$ естественным образом индуцирует вложения соответствующих векторных решеток. Это обстоятельство позволяет нам считать, что $L^0(B) \subset L^0(A)$, $L^\infty(B) \subset L^\infty(A)$ и $L^1(B,\mu_0) \subset L^1(A,\mu)$.

2.19. Теорема [6]. *Существует единственный линейный оператор $T\colon L^1(A,\mu) \to L^1(B,\mu_0)$, обладающий следующими свойствами:*

(1) *оператор T существенно положителен, o-непрерывен и идемпотентен;*

(2) *$M(g\cdot f) = M(g\cdot T(f))$ для всех $f \in L^1(A,\mu)$ и $g \in L^0(B)$ таких, что $g \cdot f \in L^1(A,\mu)$.*

2.20. Предложение. *Для любого элемента $f \in L^1(A,\mu)$ существует единственный элемент $g \in L^1(B,\mu_0)$ такой, что*

$$M(\chi(b)\cdot f) = M(\chi(b)\cdot g)) \quad \text{для всех } b \in B. \tag{1}$$

Доказательство. Допустим, что имеются два различных элемента $g_1, g_2 \in L^1(B,\mu_0)$, удовлетворяющие условию (1). Не нарушая общности, можно считать, что $\chi(b)\cdot g_1 > \chi(b)\cdot g_2$ для некоторого элемента $b \in B$. Тогда

$$M(\chi(b)\cdot f) = M(\chi(b)\cdot g_1) > M(\chi(b)\cdot g_2) = M(\chi(b)\cdot f),$$

что невозможно. Предложение доказано.

2.21. Определение. Элемент g, фигурирующий в предложении 2.20, мы будем называть *условным математическим ожиданием* элемента $f \in L^1(A,\mu)$ относительно подалгебры B и обозначать символом $M_B(f)$.

Очевидно, оператор $T\colon L^1(A,\mu) \to L^1(B,\mu_0)$, упомянутый в теореме 2.19, совпадает с M_B.

2.22. Пусть $\mathcal{A}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств стоуновского компакта P алгебры A, $\mathcal{B}$ — ее σ-подалгебра, порожденная всеми открыто-замкнутыми множествами вида $\hat{b}$, где $b \in B$. Как показывает следующий результат, «абстрактное» условное ожидание $M_B \colon L^1(A, \mu) \to L^1(B, \mu_0)$ может быть реализовано в виде классического условного ожидания $M_{\mathcal{B}} \colon L^1(P, \mathcal{A}, \bar{\mu}) \to L^1(P, \mathcal{B})$.

Теорема. *Пусть* $(\cdot)^\wedge$ *— линейный и порядковый изоморфизм* $L^0(A)$ *на* $L^0(P)$, *фигурирующий в теореме* 2.14. *Тогда для всех* $f \in L^1(A, \mu)$ *имеет место равенство*

$$M_B(f)^\wedge = M_{\mathcal{B}}(\hat{f}).$$

Доказательство. Покажем, что $M_B(f)^\wedge$ представляет собой условное ожидание класса $\hat{f}$. Действительно, для любого множества $V \in \mathcal{B}$, существует элемент $b \in B$ такой, что $\chi(b)^\wedge = \chi(V)^\sim$ и имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} M(\chi(V)^\sim \cdot M_B(f)^\wedge) &= M(\chi(b)^\wedge \cdot M_B(f)^\wedge) = M((\chi(b) \cdot M_B(f))^\wedge) \\ = M(\chi(b) \cdot M_B(f)) &= M(\chi(b) \cdot f) = M((\chi(b) \cdot f)^\wedge) = M(\chi(V)^\sim \cdot \hat{f}). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

§ 3. Взаимосвязь между L^1-пространствами, решетками Банаха — Канторовича и расслоениями банаховых решеток

3.1. Пусть Q — непустое множество. (*Дискретным*) *расслоением банаховых решеток над* Q называется всякое отображение $\mathcal{X}$, определенное на Q и ставящее в соответствие каждой точке $q \in Q$ некоторую банахову решетку $\mathcal{X}(q)$, называемую *слоем* $\mathcal{X}$ в точке $q \in Q$. Символы нормы, отношения порядка, а также векторных и решеточных операций в слое $\mathcal{X}(q)$ будут при необходимости снабжаться индексом, указывающим на этот слой, например, $\|\cdot\|_{\mathcal{X}(q)}$, $\leqslant_{\mathcal{X}(q)}$ и т. п.

Пусть $\mathcal{X}$ — расслоение банаховых решеток над Q. В векторном пространстве $S(D, \mathcal{X})$ всех сечений $\mathcal{X}$ над $D \subset Q$ (см. 1.25) естественным образом вводится отношение порядка:

$$u \leqslant v \;\Leftrightarrow\; u(q) \leqslant v(q) \text{ для всех } q \in D.$$

Легко понять, что $S(D, \mathcal{X})$ с таким порядком является векторной решеткой, при этом решеточные операции вычисляются следующим образом:

$$(u \vee v)(q) = u(q) \vee v(q), \quad (u \wedge v)(q) = u(q) \wedge v(q).$$

3.2. Лемма. *Пусть E — векторная решетка. Для любого векторного подпространства $F \subset E$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *F является векторной подрешеткой решетки E;*

(2) *модуль $|f|$ любого элемента $f \in F$, вычисленный в E, принадлежит F;*

(3) *положительная часть f_+ любого элемента $f \in F$, вычисленная в E, принадлежит F.*

Доказательство имеется, например, в [14, 3.3.4].

3.3. Пусть Q — топологическое пространство. Множество $\mathcal{C} \subset S(Q,\mathcal{X})$ глобальных сечений расслоения банаховых решеток $\mathcal{X}$ над Q называется *решеточной непрерывной структурой в* $\mathcal{X}$, если выполнены следующие условия:

(1) множество $\mathcal{C}$ является векторным подпространством $S(Q,\mathcal{X})$;
(2) множество $\mathcal{C}$ является подрешеткой $S(Q,\mathcal{X})$;
(3) поточечная норма $|c|\colon Q \to \mathbb{R}$ любого элемента $c \in \mathcal{C}$ непрерывна;
(4) множество $\mathcal{C}$ послойно плотно в $\mathcal{X}$.

Если $\mathcal{C}$ — решеточная непрерывная структура в $\mathcal{X}$, то пара $(\mathcal{X},\mathcal{C})$ называется *непрерывным расслоением банаховых решеток* (НРБР) над Q. При этом вместо $(\mathcal{X},\mathcal{C})$ мы будем писать просто $\mathcal{X}$, а структуру $\mathcal{C}$ обозначать символом $\mathcal{C}_{\mathcal{X}}$.

Сечение $u \in S(D,\mathcal{X})$ над $D \subset Q$ называется $\mathcal{C}$-*непрерывным* (или просто *непрерывным*) *в точке* $q \in D$, если функция $|u - c|\colon D \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке q для любого элемента $c \in \mathcal{C}$. Сечение $u \in S(D,\mathcal{X})$, $\mathcal{C}$-непрерывное в каждой точке $q \in Q$, называется $\mathcal{C}$-*непрерывным* (или просто *непрерывным*). Множество всех непрерывных сечений над D обозначается символом $C(D,\mathcal{X})$, а множество всех глобальных непрерывных сечений — символом $C(Q,\mathcal{X})$.

З а м е ч а н и е. Если отказаться от рассмотрения порядка в слоях $\mathcal{X}$ и исключить условие (2) из определения решеточной непрерывной структуры, то мы придем к понятию *непрерывной структуры* и *непрерывного банахова расслоения* (НБР) *над* Q. Теория таких расслоений подробно изложена в [4].

3.4. Отметим, что непрерывная структура $\mathcal{C}$ в расслоении банаховых решеток $\mathcal{X}$ не обязана, вообще говоря, быть одновременно и решеточной непрерывной структурой. Более того, возможна ситуация, когда поточечная норма положительной части c_+ элемента $c \in \mathcal{C}$ в решетке $S(Q,\mathcal{X})$ является всюду разрывной функцией на Q.

П р и м е р. Пусть $\mathcal{X}$ — банахово расслоение над $Q = [0,1]$, каждый слой $\mathcal{X}(q)$ которого равен $\mathbb{R}$ с нормой $\|x\| := |x|$. Пусть $\mathcal{C} \subset S(Q,\mathcal{X})$ — совокупность всех постоянных сечений расслоения $\mathcal{X}$. Ясно, что $\mathcal{C}$ — непрерывная структура в $\mathcal{X}$.

Фиксируем некоторое всюду плотное подмножество $D \subset Q$, дополнение которого также всюду плотно. Определим порядок в слоях $\mathcal{X}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} x \geqslant_{\mathcal{X}(q)} 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x \geqslant 0, \qquad q \in D, \\ x \geqslant_{\mathcal{X}(q)} 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x \leqslant 0, \qquad q \in Q \setminus D, \end{aligned}$$

где $\geqslant$ — обычный порядок на числовой прямой.

Рассмотрим сечение $c \equiv 1$, $c \in \mathcal{C}$. Положительная часть c_+ этого сечения, вычисленная в $S(Q,\mathcal{X})$, выглядит следующим образом:

$$c_+(q) = \begin{cases} 1, & q \in D, \\ 0, & q \in Q \setminus D. \end{cases}$$

Отсюда видно, что поточечная норма сечения c_+ всюду разрывна и, в частности, множество $\mathcal{C}$ не замкнуто относительно поточечных решеточных операций, а значит, не является решеточной непрерывной структурой.

3.5. З а м е ч а н и е. В силу леммы 3.2 для того, чтобы проверить, является ли данная непрерывная структура решеточной, достаточно установить замкнутость данной структуры относительно поточечных операций вычисления модуля или положительной части.

3.6. Теорема. *Пусть $\mathcal{X}$ — НРБР над топологическим пространством Q, D — произвольное подмножество Q. Тогда пространство $C(D,\mathcal{X})$ является векторной подрешеткой $S(D,\mathcal{X})$, т. е. решеточные операции в $C(D,\mathcal{X})$ являются поточечными.*

Доказательство. В силу леммы 3.2 достаточно убедиться в том, что векторное пространство $C(D,\mathcal{X})$ замкнуто относительно вычисления положительной части. Пусть $u \in C(D,\mathcal{X})$. Покажем, что сечение $u_+ \colon q \mapsto u(q)_+$ непрерывно на D.

Фиксируем произвольно $q \in D$. Докажем, что функция $\boldsymbol{|} u_+ - c \boldsymbol{|}$ непрерывна в точке q для любого элемента $c \in \mathcal{C}_{\mathcal{X}}$. Согласно [4, 2.3.2], необходимо убедиться лишь в полунепрерывности сверху этой функции. Фиксируем число $\varepsilon > 0$ и, обозначив $\|u_+(q) - c(q)\|$ через λ, установим неравенство $\|u_+(p) - c(p)\| < \lambda + \varepsilon$ для всех p из некоторой окрестности точки q.

Выберем сечение $v \in \mathcal{C}_{\mathcal{X}}$ так, чтобы выполнялось неравенство $\|u(q) - v(q)\| < \varepsilon/2$. Тогда, в силу непрерывности сечения u в точке q, неравенства $\|u(p) - v(p)\| < \varepsilon/2$ будут выполнены для всех p из некоторой окрестности точки q. Поскольку $|u(p)_+ - v(p)_+| \leqslant |u(p) - v(p)|$, мы имеем

$$\|u(p)_+ - v(p)_+\| < \varepsilon/2 \quad \text{в окрестности точки } q. \tag{1}$$

Далее, $\|v(q)_+ - c(q)\| \leqslant \|u(q)_+ - c(q)\| + \|u(q)_+ - v(q)_+\| < \lambda + \varepsilon/2$, откуда ввиду непрерывности сечения $v_+ \in \mathcal{C}_{\mathcal{X}}$ и с учетом равенства $v(q)_+ = v_+(q)$, мы заключаем, что

$$\|v_+(p) - c(p)\| < \lambda + \varepsilon/2 \quad \text{в окрестности точки } q. \tag{2}$$

Привлекая соотношения (1) и (2), мы получаем, что

$$\|u(p)_+ - c(p)\| \leqslant \|v_+(p) - c(p)\| + \|u(p)_+ - v_+(p)\| < (\lambda + \varepsilon/2) + \varepsilon/2 = \lambda + \varepsilon$$

в окрестности точки q, и непрерывность сечения u_+ в точке q тем самым доказана.

Поскольку точка $q \in D$ была выбрана произвольно, мы заключаем, что сечение u_+ принадлежит $C(D,\mathcal{X})$. Теорема доказана.

3.7. Предложение. *Пусть* $\mathcal{X}$ — НРБР *над топологическим пространством* Q. *Для любых двух непрерывных сечений* u *и* v *расслоения* $\mathcal{X}$ *множество* $\{q \in \operatorname{dom} u \cap \operatorname{dom} v \mid u(q) \leqslant v(q)\}$ *замкнуто в* $\operatorname{dom} u \cap \operatorname{dom} v$.

Доказательство. Положим $D := \{q \in \operatorname{dom} u \cap \operatorname{dom} v \mid u(q) \leqslant v(q)\}$. Сечение $w := v - u$ непрерывно на множестве $\operatorname{dom} u \cap \operatorname{dom} v$. Применяя теорему 3.6, мы заключаем, что сечение w_+ тоже непрерывно на $\operatorname{dom} u \cap \operatorname{dom} v$. Так как непрерывные сечения w и w_+ совпадают на множестве D, они совпадают и на его замыкании $\overline{D}$. Следовательно, $D = \overline{D}$. Предложение доказано.

3.8. Символом $B(X, Y)$ обозначается пространство ограниченных линейных операторов, действующих из нормированного пространства X в нормированное пространство Y.

Определение. Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — НРБР над топологическим пространством Q. Рассмотрим отображение $i\colon q \mapsto i(q) \in B(\mathcal{X}(q), \mathcal{Y}(q))$. Для всякого сечения $u \in S(Q, \mathcal{X})$ символом $i \otimes u$ обозначим сечение расслоения $\mathcal{Y}$, действующее по правилу $(i \otimes u)(q) := i(q)(u(q))$.

Отображение $i\colon q \mapsto i(q) \in B(\mathcal{X}(q), \mathcal{Y}(q))$ будем называть *изоморфизмом* НРБР $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, если выполнены следующие условия:

(1) сечение $i \otimes u$ принадлежит $C(Q, \mathcal{Y})$ для всех $u \in C(Q, \mathcal{X})$;

(2) отображение $i(q)$ является изометрией банаховых пространств $\mathcal{X}(q)$ и $\mathcal{Y}(q)$ для всех $q \in Q$;

(3) отображение $i(q)$ осуществляет порядковый изоморфизм решеток $\mathcal{X}(q)$ и $\mathcal{Y}(q)$ для всех $q \in Q$.

Согласно теореме 1.18 условие (3) в определении можно ослабить, потребовав лишь положительность оператора $i(q)$ для всех $q \in Q$.

Заметим, что отображения i, обладающие свойствами (1), (2), и только они являются *изометриями* НБР $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ [4, 2.4.3, 2.4.4].

Предложение. *Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ —* НРБР *над топологическим пространством Q. Изометрия i между $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ является изоморфизмом* НРБР *тогда и только тогда, когда отображение $u \mapsto i \otimes u$ осуществляет порядковый изоморфизм между векторными решетками $C(Q, \mathcal{X})$ и $C(Q, \mathcal{X})$.*

Доказательство. В пояснении нуждается только достаточность. Рассмотрим положительный элемент x слоя $\mathcal{X}(q)$. Докажем, что элемент $i(q)x$ тоже положителен.

Проведем положительное сечение u через элемент x (т. е. так, что $u(q) = x$). Поскольку сечение $i \otimes u$ положительно, мы заключаем, что $i(q)x \geqslant 0$ в $\mathcal{Y}(q)$. Таким образом, изометрия $i(q)$ является положительной для всех $q \in Q$ и, следовательно, отображение i является изоморфизмом НРБР $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$. Предложение доказано.

3.9. Лемма. *Пусть $\mathcal{X}$ —* НБР *над топологическим пространством Q и пусть $\mathcal{C}$ — некоторая непрерывная структура расслоения $\mathcal{X}$, снабженная порядком, относительно которого она является векторной решеткой, причем поточечная норма $|\cdot|$ монотонна* (*см.* 1.22). *Тогда на слоях $\mathcal{X}$ можно ввести порядок так, что $\mathcal{X}$ превратится в* НРБР, *а порядок и решеточные операции в $\mathcal{C}$ станут поточечными.*

Доказательство. Фиксируем произвольно точку $q \in Q$. В банаховом пространстве $X := \mathcal{X}(q)$ рассмотрим подмножество $X_0 = \{c(q) \mid c \in \mathcal{C}\}$. Из определения непрерывной структуры следует, что X_0 является плотным нормированным подпространством банахова пространства X.

На множестве X_0 введем порядок следующим образом: $x_1 \leqslant x_2$ тогда и только тогда, когда найдутся элементы $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$ такие, что $c_1(q) = x_1$, $c_2(q) = x_2$ и $c_1 \leqslant c_2$ в смысле порядка в решетке $\mathcal{C}$. Установим, что введенное отношение действительно является порядком и что X_0 представляет собой нормированную решетку относительно этого порядка.

Докажем сначала некоторое вспомогательное утверждение. Пусть x и y — элементы X_0 и пусть c_x и c_y — сечения из $\mathcal{C}$, проходящие через x

и y соответственно. Тогда из неравенства $x \leqslant y$ следует $(c_x \vee c_y)(q) = y$. Действительно, по определению порядка в X_0 найдутся такие сечения $c'_x, c'_y \in \mathcal{C}$, что $c'_x \leqslant c'_y$. С учетом классического неравенства Биркгофа мы имеем:

$$\begin{aligned}|c_x \vee c_y - c_y| &\leqslant \left|c_x \vee c_y - c_x \vee c'_y\right| + \left|c_x \vee c'_y - c'_x \vee c'_y\right| + \left|c'_x \vee c'_y - c_y\right| \\ &\leqslant \left|c_y - c'_y\right| + \left|c_x - c'_x\right| + \left|c'_x \vee c'_y - c_y\right|.\end{aligned}$$

Отсюда ввиду равенства $c'_x \vee c'_y = c'_y$ следует, что $\left|c_x \vee c_y - c_y\right|(q) = 0$, т. е. сечение $c_x \vee c_y$ также проходит через y.

Рефлексивность отношения $\leqslant$ на X_0 очевидна, а его антисимметричность и транзитивность легко установить с помощью доказанного выше утверждения. Таким образом, $\geqslant$ — отношение порядка на X_0.

Проверим, что введенный на X_0 порядок согласован со структурой векторного пространства. Очевидно, совокупность положительных элементов пространства X_0 образует конус. Докажем, что из $x \geqslant 0$ и $-x \geqslant 0$ следует $x = 0$. Действительно, если $c_1, c_2 \geqslant 0$ — такие элементы $\mathcal{C}$, что $c_1(q) = x$ и $c_2(q) = -x$, то в силу монотонности поточечной нормы имеют место следующие соотношения:

$$\|x\| = |c_1|(q) \leqslant |c_1 + c_2|(q) = \|x + (-x)\| = 0.$$

Убедимся в том, что порядок в X_0 решеточный. Положительной частью всякого элемента $x \in X_0$ является элемент $(c_x \vee 0)(q)$, где $c_x \in \mathcal{C}$, $c_x(q) = x$. Действительно, $(c_x \vee 0)(q)$ является верхней границей x и 0 в X_0. Докажем, что это наименьшая из таких границ. Предположим, $y \geqslant 0$ и $y \geqslant x$ в X_0 и рассмотрим такое сечение $c_y \in \mathcal{C}$, что $c_y(q) = y$. Согласно доказанному выше утверждению сечение $c_y \vee c_x \vee 0 \in \mathcal{C}$ проходит через y и при этом, очевидно, поточечно больше сечения $c_x \vee 0$. Следовательно, $y \geqslant (c \vee 0)(q)$ по определению порядка на X_0.

Монотонность нормы в X_0 вытекает из монотонности поточечной нормы $|\cdot|$ на $\mathcal{C}$. Тем самым, пространство X_0 представляет собой нормированную решетку. Тогда (см. 1.17) на пополнении X нормированного пространства X_0 можно ввести порядок, совпадающий на X_0 с уже имеющимся там порядком, так, что X превратится в банахову решетку. Таким образом, мы превратили $\mathcal{X}$ в (дискретное) расслоение банаховых решеток. Осталось заметить, что $\mathcal{C}$ будет решеточной непрерывной структурой в расслоении $\mathcal{X}$. Лемма доказана.

3.10. Пусть $\mathcal{X}$ — НБР над экстремально несвязным компактом Q. Любое непрерывное сечение u расслоения $\mathcal{X}$, определенное на всюду плотном подмножестве Q, имеет наибольшее непрерывное продолжение, т. е. такое сечение $\bar{u}$, что $\operatorname{dom} u \subset \operatorname{dom} \bar{u}$ и $\bar{u}$ является продолжением любого непрерывного продолжения u (см [4, 2.5.2]). Сечение $\bar{u}$ мы будем называть *максимальным расширением сечения* u и обозначать символом $\operatorname{ext}(u)$. Непрерывное сечение u над всюду плотным подмножеством $D \subset Q$ называется *расширенным*, если $\operatorname{ext}(u) = u$. Символ $C_\infty(Q, \mathcal{X})$ обозначает множество всех расширенных сечений $\mathcal{X}$.

На множестве $C_\infty(Q, \mathcal{X})$ введем структуру РНП над $C_\infty(Q)$ следующим образом. Если $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $u, v \in C_\infty(Q, \mathcal{X})$, то линейная комбинация $\alpha u + \beta v$ определяется как $\operatorname{ext}(\alpha u|_D + \beta v|_D)$, где $D = \operatorname{dom} u \cap \operatorname{dom} v$. В качестве нормы $|u|$ сечения $u \in C_\infty(Q, \mathcal{X})$ возьмем продолжение $\operatorname{ext}(|u|) \in C_\infty(Q)$ непрерывной функции $|u|$. Пространство $C_\infty(Q, \mathcal{X})$ представляет собой модуль над $C_\infty(Q)$, где $eu = \operatorname{ext}(e|_{\operatorname{dom} u} \cdot u|_{\operatorname{dom} e})$ для $e \in C_\infty(Q)$ и $u \in C_\infty(Q, \mathcal{X})$.

Как известно [4, 2.5.3], пространство $C_\infty(Q, \mathcal{X})$ всех непрерывных расширенных сечений расслоения $\mathcal{X}$ является (расширенным) ПБК над $C_\infty(Q)$ с решеточной нормой $|\cdot|$.

Кроме того, на элементах $C_\infty(Q, \mathcal{X})$ естественным образом вводится отношение порядка: $u \leqslant v$ тогда и только тогда, когда $u(q) \leqslant v(q)$ для всех $q \in \operatorname{dom} u \cap \operatorname{dom} v$. В силу предложения 3.7 если $u \leqslant v$ на всюду плотном подмножестве $\operatorname{dom} u \cap \operatorname{dom} v$, то $u \leqslant v$ в смысле порядка в $C_\infty(Q, \mathcal{X})$.

Теорема. *Пусть $\mathcal{X}$ —* НРБР *над экстремально несвязным компактом Q. Тогда пространство $C_\infty(Q, \mathcal{X})$ является* РБК *над $C_\infty(Q)$.*

Доказательство. Пространство $C_\infty(Q,\mathcal{X})$ является ПБК над $C_\infty(Q)$, причем векторные операции и решеточная норма, очевидно, согласованы с введенным выше порядком. Проверим, что $C_\infty(Q,\mathcal{X})$ — векторная решетка. Достаточно установить, что для любого элемента $u \in C_\infty(Q,\mathcal{X})$ существует $u_+ := u \vee 0 \in C_\infty(Q,\mathcal{X})$.

Согласно теореме 3.6 сечение $u_0\colon q \mapsto u(q)_+$, определенное на $\operatorname{dom} u$, непрерывно. Несложно убедиться в том, что расширенное сечение $\operatorname{ext} u_0 \in C_\infty(Q,\mathcal{X})$ является искомой положительной частью u_+. Теорема доказана.

3.11. Пусть $\mathcal{X}$ — НРБР над экстремально несвязным компактом Q и пусть E — идеал в $C_\infty(Q)$. Согласно [4, 2.5.4], множество $E(\mathcal{X}) := \{u \in C_\infty(Q,\mathcal{X}) \mid |u| \in E\}$ с операциями, индуцированными из $C_\infty(Q,\mathcal{X})$, представляет собой ПБК над E. Если, кроме того, снабдить $E(\mathcal{X})$ индуцированным из $C_\infty(Q,\mathcal{X})$ порядком, то $E(\mathcal{X})$ превратится в РБК. Ниже будет показано, что пространство $E(\mathcal{X})$ является в определенном смысле общим видом РБК.

3.12. Определения. (1) Пусть $\mathcal{X}$ — НРБР над топологическим пространством Q. НРБР $\mathcal{X}_0$ будем называть *подрасслоением* $\mathcal{X}$, если $\mathcal{X}_0(q)$ является банаховой подрешеткой $\mathcal{X}(q)$ для любой точки $q \in Q$ и, кроме того, $C(Q,\mathcal{X}_0) = C(Q,\mathcal{X}) \cap S(Q,\mathcal{X}_0)$.

(2) Отказываясь от рассмотрения порядка в слоях $\mathcal{X}$ и требуя, чтобы $\mathcal{X}_0(q)$ было лишь банаховым подпространством $\mathcal{X}(q)$ для всех $q \in Q$, мы приходим к понятию *подрасслоения* НБР.

(3) Непрерывное банахово расслоение $\mathcal{X}$ над экстремально несвязным компактом Q называется *просторным*, если каждое непрерывное ограниченное сечение $\mathcal{X}$ над всюду плотным подмножеством Q продолжается до глобального непрерывного сечения. НРБР $\mathcal{X}$ будем называть *просторным*, если $\mathcal{X}$ просторно как НБР.

(4) Подрасслоение $\mathcal{X}$ непрерывного банахова расслоения $\overline{\mathcal{X}}$ над экстремально несвязным компактом Q, называется *всюду плотным в* $\overline{\mathcal{X}}$, если всякое сечение $u \in C_\infty(Q,\overline{\mathcal{X}})$ принимает значения $u(q) \in \mathcal{X}(q)$ на котощем подмножестве Q (см. [4, 2.5.8]).

3.13. Лемма. *Пусть* $\mathcal{X}$ — *просторное* НБР *над экстремально несвязным компактом* Q. *Если* $\mathcal{X}_0$ — *всюду плотное подрасслоение расслоения* $\mathcal{X}$, *являющееся* НРБР, *то всех слоях* $\mathcal{X}$ *можно ввести порядок так, что* $\mathcal{X}$ *превратится в* НРБР, *а* $\mathcal{X}_0$ *станет подрасслоением* $\mathcal{X}$ *в смысле* 3.12.

Доказательство. На протяжении этого пункта для произвольного элемента $u \in C(Q, \mathcal{X})$ мы будем использовать обозначение D_u для множества всех точек $q \in Q$ таких, что $u(q) \in \mathcal{X}_0(q)$. Поскольку $\mathcal{X}_0$ — всюду плотное подрасслоение НБР $\mathcal{X}$, для всякого сечения $u \in C(Q, \mathcal{X})$ множество $D_u \subset Q$ является котощим (см. [4, 2.5.8]).

Введем отношение порядка на множестве $C(Q, \mathcal{X})$, полагая

$$u \leqslant v \;\Leftrightarrow\; u \leqslant v \;\text{ всюду на } D_u \cap D_v.$$

Докажем, что данное отношение действительно является порядком. Рефлексивность и антисимметричность очевидны, остается установить транзитивность. Пусть $u \leqslant v$ на $D_u \cap D_v$ и $v \leqslant w$ на $D_v \cap D_w$. Тогда $u \leqslant w$ на $D := D_u \cap D_v \cap D_w$. Множество D, будучи котощим подмножеством Q, всюду плотно в $D_u \cap D_w$, а значит, $u \leqslant w$ на $D_u \cap D_w$ по предложению 3.7.

Пусть $u \in C(Q, \mathcal{X})$. На множестве D_u определим сечение u_0, положив $u_0(q) := u(q) \vee 0$. Поскольку $\mathcal{X}_0$ — НРБР, сечение u_0 непрерывно. В силу просторности расслоения $\mathcal{X}$ расширенное непрерывное сечение $\operatorname{ext}(u_0)$ принадлежит $C(Q, \mathcal{X})$. Как нетрудно видеть, это сечение является положительной частью u_+ сечения u в $C(Q, \mathcal{X})$. Таким образом, порядок в $C(Q, \mathcal{X})$ является решеточным.

Монотонность поточечной нормы очевидна, и мы вправе применить лемму 3.9 к НБР $\mathcal{X}$, взяв в качестве непрерывной структуры $\mathcal{C}$ пространство $C(Q, \mathcal{X})$. В результате $\mathcal{X}$ превращается в НРБР, причем порядок и решеточные операции в $C(Q, \mathcal{X})$ становятся поточечными.

Несложно проверить, что $\mathcal{X}_0$ — подрасслоение $\mathcal{X}$ в смысле определения 3.12. Остается установить, что всякий слой $\mathcal{X}_0(q)$ является подрешеткой слоя $\mathcal{X}(q)$. Через произвольный элемент $x \in \mathcal{X}_0(q)$ проведем сечение $u \in C(Q, \mathcal{X})$. Положительной частью элемента x в $\mathcal{X}(q)$ будет элемент $(u \vee 0)(q)$. С другой стороны, точка q, очевидно, принадлежит множеству D_u и, следовательно, как было отмечено выше, $(u \vee 0)(q) = x \vee 0$ в смысле решеточных операций в $\mathcal{X}_0(q)$. Таким образом, положительные части произвольного элемента $x \in \mathcal{X}_0(q)$, вычисленные в $\mathcal{X}(q)$ и $\mathcal{X}_0(q)$, совпадают, а значит, $\mathcal{X}_0(q)$ является подрешеткой $\mathcal{X}(q)$. Лемма доказана.

3.14. Предложение. *Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — просторные* НРБР *над экстремально несвязным компактом Q, E — фундамент K-пространства $C_\infty(Q)$.* РБК $E(\mathcal{X})$ *и* $E(\mathcal{Y})$ *изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны* НРБР $\mathcal{X}$ *и* $\mathcal{Y}$.

Доказательство. Как установлено в [4, 6.5.14], отображение $I\colon E(\mathcal{X}) \to E(\mathcal{Y})$ является изометрией тогда и только тогда, когда существует изометрия i расслоения $\mathcal{X}$ на $\mathcal{Y}$ такая, что $I(u) = i\overline{\otimes} u$ для всех $u \in E(\mathcal{X})$, где $i\overline{\otimes} u$ — сечение из $C_\infty(Q, \mathcal{Y})$, вычисляемое по правилу

$$i\overline{\otimes} u := \operatorname{ext}(i \otimes u).$$

Таким образом, нам остается доказать, что изометрия $I\colon E(\mathcal{X}) \to E(\mathcal{Y})$ является положительной в том и только том случае, когда соответствующая изометрия $i\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ поточечно положительна.

Пусть I — положительная изометрия и $u \in C(Q, \mathcal{X})$ — положительное сечение. Поскольку E — фундамент $C_\infty(Q)$, найдется котощее множество $D \subset Q$ такое, что $u(q) \in E(\mathcal{X})(q)$ для всех $q \in D$. Сечение $I \otimes u$ непрерывно, положительно и совпадает с непрерывным сечением $i \otimes u$ на D. Привлекая предложения 3.7 и 3.8, мы заключаем, что изометрия i является положительной.

Если изометрия i положительна, то изометрия I, очевидно, также является положительной. Предложение доказано.

3.15. Следствие. *Пусть $\mathcal{X}$ — НРБР над экстремально несвязным компактом Q. Существует единственное с точностью до изоморфизма* НРБР $\overline{\mathcal{X}}$ *над Q такое, что*

(1) НРБР $\overline{\mathcal{X}}$ *просторно*;

(2) НРБР $\mathcal{X}$ *является подрасслоением* $\overline{\mathcal{X}}$ *в смысле* 3.12 (1);

(3) НБР $\mathcal{X}$ *всюду плотно в* $\overline{\mathcal{X}}$.

Доказательство следует из [4, теорема 3.1.5], леммы 3.13 и предложения 3.14.

НРБР $\overline{\mathcal{X}}$, фигурирующее в последнем утверждении, будем называть *просторной оболочкой* НРБР $\mathcal{X}$.

3.16. Теорема. *Для любой решетки Банаха — Канторовича $\mathcal{U}$ над фундаментом $F \subset C_\infty(Q)$ существует единственное с точностью до изоморфизма просторное* НРБР $\mathcal{X}$ *над Q такое, что* РБК $\mathcal{U}$ *и $F(\mathcal{X})$ F-изоморфны.*

Доказательство. Всякая решетка Банаха — Канторовича является, в частности, ПБК. Как известно [4, 3.4.4], для всякого ПБК существует единственное с точностью до изометрии просторное НБР $\mathcal{X}$ такое, что РНП $\mathcal{U}$ и $F(\mathcal{X})$ изометричны. В расслоении $\mathcal{X}$ выделим (дискретное) банахово расслоение $\mathcal{X}_0$ следующим образом:

$$\mathcal{X}_0(q) := \{u(q) \mid u \in F(\mathcal{X})\}.$$

Так как $F(\mathcal{X})$ — фундамент расслоения $C_\infty(Q, \mathcal{X})$, согласно [4, 2.5.12] заключаем, что каждый слой расслоения $\mathcal{X}_0$ имеет вид $\mathcal{X}_0(q) \in \{0, \mathcal{X}(q)\}$. Отсюда, в частности, следует, что для всех $q \in Q$ пространство $\mathcal{X}_0(q)$ является банаховым подпространством в $\mathcal{X}(q)$. Ясно также, что $C(Q, \mathcal{X}_0) = C(Q, \mathcal{X}) \cap S(Q, \mathcal{X}_0)$. Отсюда заключаем, что $\mathcal{X}_0$ является подрасслоением НБР $\mathcal{X}$, и более того, всюду плотно в $\mathcal{X}$.

Нетрудно видеть, что изометрия между $\mathcal{U}$ и $F(\mathcal{X})$ является также изоморфизмом решеток Банаха — Канторовича, так что мы можем считать, что на $F(\mathcal{X})$ и на расслоении $\mathcal{X}_0$ определена структура РБК. Пространство непрерывных сечений $C(Q, \mathcal{X}_0)$ является, очевидно, фундаментом РБК $\mathcal{X}_0$, и значит, само есть РБК. Применяя лемму 3.9 к НБР $\mathcal{X}_0$ с непрерывной структурой $C(Q, \mathcal{X}_0)$, заключаем, что на слоях расслоения $\mathcal{X}_0$ можно ввести порядок так, что $\mathcal{X}_0$ превратится в НРБР, а порядок в $C(Q, \mathcal{X}_0)$ станет поточечным.

С помощью леммы 3.13 введем порядок на всех слоях просторного расслоения $\mathcal{X}$. Единственность расслоения $\mathcal{X}$ с точностью до изоморфизма следует из предложения 3.14. Теорема доказана.

3.17. Следствие. *Для любой решетки Банаха — Канторовича $\mathcal{U}$ над E существуют экстремально несвязный компакт Q, фундамент $F \subset C_\infty(Q)$, изоморфный решетке E, и просторное* НРБР $\mathcal{X}$ *над Q такие, что* РБК $\mathcal{U}$ *и $F(\mathcal{X})$ изоморфны.*

3.18. В дальнейшем мы предполагаем, что A — полная булева алгебра, μ — мера на A, B — правильная подалгебра A, μ_0 — сужение меры μ на B. Для произвольного элемента $f \in L^1(A, \mu)$ положим

$$\lvert\!\lvert f \rvert\!\rvert := M_B(|f|) \in L^1(B, \mu_0).$$

Теорема. *Функция $\lvert\!\lvert\cdot\rvert\!\rvert\colon L^1(A,\mu) \to L^1(B,\mu_0)$ является монотонной аддитивной решеточной нормой на $L^1(A,\mu)$. При этом* РНП *$(L^1(A,\mu), \lvert\!\lvert\cdot\rvert\!\rvert)$ является* РБК *над $L^1(B,\mu_0)$.*

Доказательство. Ясно, что $L^1(A,\mu)$ относительно введенной нормы представляет собой РНП над $L^1(B,\mu_0)$. Установим теперь, что $L^1(A,\mu)$ является ПБК над $L^1(B,\mu_0)$. Прежде всего, заметим, что $L^1(B,\mu_0)$ — это K-пространство. Докажем o-полноту и d-разложимость РНП $(L^1(A,\mu), \lvert\!\lvert\cdot\rvert\!\rvert)$.

Пусть $\{f_\xi\}_{\xi\in\Xi}$ — сеть элементов $L^1(A,\mu)$ такая, что сеть $\{\lvert\!\lvert f_\xi - f_\eta \rvert\!\rvert\}_{(\xi,\eta)\in\Xi\times\Xi}$ порядково сходится к нулю в K-пространстве

$L^1(B,\mu_0)$. Установим, что данная сеть имеет предел, а именно, что существует элемент $f \in L^1(A,\mu)$ такой, что сеть $\{\lvert\!\lvert f_\xi - f \rvert\!\rvert\}_{\xi\in\Xi}$ o-сходится к нулю в $L^1(B,\mu_0)$. Из порядковой непрерывности интеграла в $L^1(B,\mu_0)$ и свойств условного ожидания следует, что числовая сеть $\{M(|f_\xi - f_\eta|)\}_{(\xi,\eta)\in\Xi\times\Xi}$ сходится к нулю. Поскольку пространство $L^1(A,\mu)$ банахово, в нем существует элемент f такой, что $M(|f_\xi - f|) \to 0$. Очевидно, сеть $\{\lvert\!\lvert f_\xi - f \rvert\!\rvert\}_{\xi\in\Xi}$ асимптотически ограничена (см. 1.13). Покажем, что она o-сходится к нулю. Предположим вопреки доказываемому, что верхний предел этой сети отличен от нуля. Тогда в силу порядковой непрерывности интеграла и условного ожидания мы имеем:

$$\limsup_{\xi\in\Xi} M(|f_\xi - f|) = M\Big(\limsup_{\xi\in\Xi} |f_\xi - f|\Big) = M\Big(\limsup_{\xi\in\Xi} \lvert\!\lvert f_\xi - f \rvert\!\rvert\Big) > 0,$$

что невозможно. Таким образом, сеть $\{f_\xi\}_{\xi\in\Xi}$ o-сходится по норме $\lvert\!\lvert\cdot\rvert\!\rvert$ к элементу f, а значит, РНП $L^1(A,\mu)$ o-полно.

Установим теперь d-разложимость $L^1(A,\mu)$. Пусть $f \in L^1(A,\mu)$ и $\lvert\!\lvert f \rvert\!\rvert = v + w$, где v и w — дизъюнктные элементы $L^1(B,\mu_0)$. Докажем, что найдутся элементы g и h из $L^1(A,\mu)$, удовлетворяющие соотношениям $f = g + h$, $\lvert\!\lvert g \rvert\!\rvert = v$ и $\lvert\!\lvert h \rvert\!\rvert = w$.

Мы считаем, что $L^1(B,\mu_0) \subset L^1(A,\mu)$, поэтому элементы v и w принадлежат также пространству $L^1(A,\mu)$. Обозначим через $\langle v\rangle$ и $\langle w\rangle$ соответствующие порядковые проекторы в $L^1(A,\mu)$. Положим $g := \langle v\rangle f$, $h := \langle w\rangle f$. Порядковые проекторы $\langle v\rangle$ и $\langle w\rangle$ выносятся из-под условного ожидания, следовательно,

$$\lvert\!\lvert g \rvert\!\rvert = \lvert\!\lvert \langle v\rangle f \rvert\!\rvert = \langle v\rangle \lvert\!\lvert f \rvert\!\rvert = \langle v\rangle (v + w) = v.$$

Равенство $\lvert\!\lvert h \rvert\!\rvert = w$ устанавливается аналогично. Очевидно, $\lvert\!\lvert g + h \rvert\!\rvert = \lvert\!\lvert f \rvert\!\rvert$. Так как g и h — осколки f, с учетом существенной положительности нормы $\lvert\!\lvert\cdot\rvert\!\rvert$, мы заключаем, что $|g + h| = |f|$. Снова привлекая тот факт, что g и h — осколки f, окончательно получаем $g + h = f$.

Поскольку $L^1(A,\mu)$ само по себе является решеткой и условное ожидание (т. е. решеточная норма) в этой решетке согласовано с порядком, мы заключаем, что $L^1(A,\mu)$ является РБК над $L^1(B,\mu_0)$. Аддитивность нормы $\lvert\!\lvert\cdot\rvert\!\rvert$ очевидна. Теорема доказана.

3.19. Пусть $\mathcal{U}$ — ПБК над E. Предположим, что E является нормированной решеткой с нормой $\|\cdot\|_E$. Тогда на $\mathcal{U}$ определена так называемая смешанная норма $\|\cdot\| := \|\lvert\cdot\rvert\|_E$, которая превращает $\mathcal{U}$ в нормированное пространство (см. [7]).

Предложение. *Пусть* $\mathcal{U}$ — РБК *над банаховой решеткой* E. *Тогда* $\mathcal{U}$ *является банаховой решеткой относительно смешанной нормы.*

Доказательство. Полнота нормированного пространства $\mathcal{U}$ обоснована в [7, 4.2], монотонность нормы очевидна.

3.20. Теорема. *Пусть* B — *полная булева алгебра,* μ_0 — *мера на* B, $\mathcal{U}$ — РБК *с аддитивной решеточной нормой* $\lvert\cdot\rvert$ *над пространством* $L^1(B, \mu_0)$. *Тогда существуют полная булева алгебра* A, *содержащая* B *как правильную подалгебру, и мера* μ *на* A, *продолжающая меру* μ_0, *такие, что решетки Банаха — Канторовича* $(\mathcal{U}, \lvert\cdot\rvert)$ *и* $(L^1(A, \mu), M_B(|\cdot|))$ *изоморфны.*

Доказательство. Согласно предложению 3.19 РБК $\mathcal{U}$ со смешанной нормой является банаховой решеткой. При этом смешанная норма аддитивна, а значит, найдутся алгебра A, мера μ и изоморфизм $(\cdot)^\wedge\colon \mathcal{U} \to L^1(A, \mu)$ банаховых решеток $\mathcal{U}$ и $L^1(A, \mu)$.

Покажем, что существует вложение алгебры B в алгебру A, сохраняющее точные границы любых подмножеств B. Условимся отождествлять элементы алгебр A и B с порядковыми проекторами на компоненты K-пространств $L^1(A, \mu)$ и $L^1(B, \mu_0)$ соответственно.

В силу d-разложимости $\mathcal{U}$ для любого $\pi \in B$ и любого элемента $u \in \mathcal{U}$ существует единственный элемент $\pi u \in \mathcal{U}$ такой, что

$$\lvert\pi u\rvert = \pi\lvert u\rvert, \quad \lvert u - \pi u\rvert = \pi^\perp\lvert u\rvert$$

Определим оператор $\hat{\pi}$ в пространстве $L^1(A, \mu)$, полагая $\hat{\pi}\hat{u} := (\pi u)^\wedge$. Поскольку $\pi u \perp u - \pi u$, мы имеем $0 \leqslant \pi u \leqslant u$ для всех $u \geqslant 0$, откуда следует, что $0 \leqslant \hat{\pi}\hat{u} \leqslant \hat{u}$. Таким образом, $\hat{\pi}$ — порядковый проектор в $L^1(A, \mu)$.

Пусть $\{\pi_\xi\}_{\xi\in\Xi}$ — произвольное семейство элементов алгебры B такое, что $\sup_{\xi\in\Xi}\pi_\xi = 1$ в B. Докажем, что $\sup_{\xi\in\Xi}\hat{\pi}_\xi = 1$ в A. Предположим, $u \neq 0$. Из соотношений $\pi_\xi\|u\| = \|\pi_\xi u\|$ заключаем, что $\pi_\xi u \neq 0$ для всех $\xi \in \Xi$, откуда $(\pi_\xi u)^\wedge = \hat{\pi}_\xi \hat{u} \neq 0$. Таким образом, если $\hat{\pi}_\xi \hat{u} = 0$ для всех $\xi \in \Xi$, то $\hat{u} = 0$, а это и означает, что $\sup_{\xi\in\Xi}\hat{\pi}_\xi = 1$ в A.

Из доказанного немедленно следует, что соотношение $\inf_{\xi\in\Xi}\pi_\xi = 0$ в B влечет $\inf_{\xi\in\Xi}\hat{\pi}_\xi = 0$ в A. Тем самым, отображение $(\cdot)^\wedge$ разнозначно и, более того, переводит любое разбиение единицы (π_1, π_2, π_3) алгебры B в разбиение единицы в алгебре A. С учетом [4, 1.2.4] мы вправе заключить, что отображение $(\cdot)^\wedge\colon B \to A$ является булевым мономорфизмом. Для обоснования правильности построенного вложения достаточно привлечь [4, 1.2.5] и доказанное выше утверждение. Итак, мы можем считать, что B — правильная подалгебра A. Поскольку $\mathcal{U}$ и $L^1(A,\mu)$ изометричны как банаховы пространства, меры μ и μ_0 совпадают на B.

Таким образом, в пространстве $L^1(A,\mu)$ определено условное ожидание M_B относительно подалгебры B. Остается заметить, что $\|u\| = M_B(|\hat{u}|)$, т. е. отображение $(\cdot)^\wedge$ является изометрией РНП $\mathcal{U}$ и $L^1(A,\mu)$. Действительно,

$$M(\pi\|u\|) = M(\|\pi u\|),$$

где $M(\cdot)$ — интеграл в $L^1(B,\mu_0)$, а π — произвольный элемент алгебры B. Теорема доказана.

3.21. Пусть Q — стоуновский компакт алгебры B. Рассмотрим пространство $L^1[Q,\mu_0] \subset C_\infty(Q)$ непрерывных интегрируемых функций на Q. Согласно 2.15, банахова решетка $L^1[Q,\mu_0]$ порядково изометрична пространству $L^1(B,\mu_0)$. Если $\mathcal{X}$ — НРБР над Q, то символом $L^1[Q,\mu_0,\mathcal{X}]$ мы будем обозначать фундамент

$$\{u \in C_\infty(Q,\mathcal{X}) \mid \|u\| \in L^1[Q,\mu_0]\}.$$

Теорема. *Пусть A — полная булева алгебра, μ — мера на A, B — правильная подалгебра A, Q — стоуновский компакт B, μ_0 — сужение меры μ на B. Существует единственное с точностью до изоморфизма просторное* НРБР $\mathcal{X}$ *над Q с аддитивной поточечной нормой такое, что* РБК $L^1[Q, \mu_0, \mathcal{X}]$ *и $L^1(A, \mu)$ изоморфны.*

Доказательство. Согласно теореме 3.18 пространство $L^1(A, \mu)$ является РБК над $L^1(B, \mu_0)$ с аддитивной решеточной нормой.

По следствию 3.17 существует просторное НРБР $\mathcal{X}$ над Q такое, что РБК $L^1[Q, \mu_0, \mathcal{X}]$ и $L^1(A, \mu)$ изоморфны. Осталось заметить, что в силу имеющегося изоморфизма поточечная норма в НРБР $\mathcal{X}$ аддитивна. Теорема доказана.

3.22. Следуя [4, 3.4.4], просторное НРБР $\mathcal{X}$, фигурирующее в последней теореме, будем называть *реализационным* для пространства $L^1(A, \mu)$ с выделенной подалгеброй $B \subset A$.

Теорема. *Пусть A — полная булева алгебра, μ — мера на A, B — правильная подалгебра A, Q — стоуновский компакт B, μ_0 — сужение меры μ на B. Тогда существует просторное* НРБР $\mathcal{X}$ *над Q, обладающее следующими свойствами*:

(1) *для всех $q \in Q$ слой $\mathcal{X}(q)$ представляет собой L^1-пространство $L^1(A_q, \mu_q)$ для некоторой булевой алгебры A_q и меры μ_q на ней*;

(2) *существует изоморфизм $(\cdot)^\wedge$* РБК *$L^1(A, \mu)$ на $L^1[Q, \mu_0, \mathcal{X}]$*;

(3) *существует изоморфизм K-пространства $L^1(B, \mu_0)$ на $L^1[Q, \mu_0]$ (для которого мы также используем обозначение $(\cdot)^\wedge$), удовлетворяющий условию*

$$M_B(u)^\wedge \colon q \mapsto \int \hat{u}(q)\, d\mu_q, \quad \int u\, d\mu = \int_Q \Bigl(\int_q \hat{u}(q)\, d\mu_q \Bigr) d\bar{\mu}_0(q)$$

для всех $u \in L^1(A, \mu)$, где $\bar{\mu}_0$ — продолжение μ_0 до борелевской меры на Q (см. 2.9).

Доказательство. Пусть $\mathcal{X}$ — реализационное НРБР для пространства $L^1(A,\mu)$, существование которого было установлено в теореме 3.21. Каждый слой $\mathcal{X}(q)$ этого НРБР является банаховой решеткой с аддитивной нормой. По предложению 2.17 существуют полная булева алгебра A_q и мера μ_q на ней такие, что банаховы решетки $\mathcal{X}(q)$ и $L^1(A_q,\mu_q)$ и порядково изометричны. Следовательно, мы можем считать, что каждый слой $\mathcal{X}(q)$ равен $L^1(A_q,\mu_q)$. В силу теоремы 3.21 РБК $L^1(A,\mu)$ и $L^1[Q,\mu_0,\mathcal{X}]$ изоморфны. Остается проверить справедливость утверждения (3) теоремы.

Для положительных элементов $u \in L^1(A,\mu)$ формула, дающая представление условного математического ожидания, верна, поскольку отображение $(\cdot)^\wedge$ является изометрией РНП $L^1(A,\mu)$ и $L^1[Q,\mu_0,\mathcal{X}]$. Справедливость этой же формулы для произвольного элемента $u \in L^1(A,\mu)$ следует из представления $u = u_+ + u_-$, где u_+ и u_- — положительные элементы, а также из линейности условного ожидания с одной стороны и линейности интеграла с другой. Формула для вычисления математического ожидания получается из формулы для вычисления условного ожидания. Теорема доказана.

§ 4. Расслоение пространства с мерой на экстремально несвязном компакте

В данном параграфе мы рассматриваем случай пространства с мерой над экстремально несвязным компактом и получаем аналитическое представление условного ожидания, близкое к представлению $(*)$, упомянутому во введении.

4.1. Всюду на протяжении данного параграфа P — экстремально несвязный компакт, $\mu\colon \mathrm{Bo}(P) \to \mathbb{R}_+$ — непрерывная мера, $\mathcal{B}$ — σ-подалгебра $\mathrm{Bo}(P)$. Символом $\mathcal{L}^0(P,\mu)$ $(\mathcal{L}^1(P,\mu))$ условимся обозначать множество всех почти всюду конечных (соответственно, интегрируемых) борелевских функций из P в $\overline{\mathbb{R}}$.

Как было показано в 2.10, для каждого борелевского множества $a \subset P$ существует единственное μ-эквивалентное ему открыто-замкнутое множество, обозначаемое символом $a_\sim$. Аналогичным образом, согласно 2.13 для любой функции $f \in \mathcal{L}^0(P,\mu)$ существует единственная эквивалентная ей функция из $C_\infty(P)$, которая обозначается символом $f_\sim$.

4.2. Всякий раз, зафиксировав некоторое разбиение Q множества P, мы условимся называть элементы разбиения *слоями*. Подмножество $U \subset P$ будем называть *полосатым*, если оно имеет вид $\cup G$, где G — некоторое множество слоев. Функцию $f\colon P \to \overline{\mathbb{R}}$ будем называть *полосатой*, если она постоянна на каждом слое.

Если функция $f\colon P \to \overline{\mathbb{R}}$ постоянна на некотором слое $q \in Q$, то символом $f[q]$ мы обозначим общее значение f на слое q. Если f — полосатая функция, то символом $f[\cdot]$ мы будем обозначать функцию, действующую из Q в $\overline{\mathbb{R}}$ и принимающую значения $f[q]$, $q \in Q$.

Если борелевское множество $a \subset P$ (отображение $f \in \mathcal{L}^0(P,\mu)$) μ-эквивалентно некоторому полосатому множеству (отображению), то его будем называть *почти полосатым*.

4.3. Положим $B := \{b_\sim \mid b \in \mathcal{B}\}$. Ясно, что множество B состоит из тех и только тех открыто-замкнутых множеств, которые μ-эквивалентны некоторому элементу $\mathcal{B}$. Легко видеть, что B является подалгеброй $\mathrm{Clop}(P)$.

Предложение. *Алгебра B является правильной подалгеброй $\mathrm{Clop}(P)$. В частности, B — полная булева алгебра.*

Доказательство. В силу счетности типа алгебры $\mathrm{Clop}(P)$ достаточно убедиться в том, что точная верхняя граница b любого счетного семейства $\{(b_n)_\sim\}_{n\in\mathbb{N}}$, $b_n \in \mathcal{B}$, вычисленная в полной алгебре $\mathrm{Clop}(P)$, лежит в B. Известно (см. 1.11), что указанная верхняя граница вычисляется по формуле $b = \mathrm{cl}\bigcup_{n=1}^{\infty}(b_n)_\sim$.

Докажем, что множество b μ-эквивалентно некоторому множеству $b' \in \mathcal{B}$. Используя непрерывность меры μ и привлекая 2.10, мы заключаем, что множество b μ-эквивалентно открытому множеству $\bigcup_{n=1}^{\infty}(b_n)_\sim$. Последнее множество, в свою очередь, μ-эквивалентно множеству $b' := \bigcup_{n=1}^{\infty} b_n$. Предложение доказано.

4.4. Точки p_1 и p_2 компакта P назовем *B-эквивалентными*, если для любого множества $b \in B$ включения $p_1 \in b$ и $p_2 \in b$ равносильны. Введенное отношение эквивалентности приводит к разбиению P на классы, совокупность которых мы будем обозначать символом Q. Фигурирующие в дальнейшем понятия слоя, полосатого множества и полосатой функции по умолчанию связываются именно с этим разбиением.

Заметим, что все множества $b \in B$ автоматически оказываются полосатыми.

На множестве Q введем топологию, считая открытыми те и только те множества $G \subset Q$, объединения $\cup G$ которых открыты в P.

4.5. Лемма. *Пусть q — слой в P и пусть a — замкнутое подмножество P такое, что $a \cap q = \varnothing$. Тогда существует множество $b \in B$, содержащее слой q и удовлетворяющее соотношению $a \cap b = \varnothing$.*

Доказательство. Предположим, вопреки доказываемому, что для любого множества $b \in B$, содержащего слой q, пересечение $a \cap b$ не пусто. Обозначим через B_q множество всех элементов алгебры B, содержащих слой q. Поскольку B_q направлено вниз и все множества вида $a \cap b$, $b \in B_q$, замкнуты, пересечение $\bigcap_{b \in B_q} a \cap b \subset a$ не пусто. С другой стороны, в силу равенства $\cap B_q = q$ последнее пересечение содержится в слое q. Таким образом, $a \cap q \neq \varnothing$, что противоречит условию леммы. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть q — слой в P.*

(1) *Если a — открытое подмножество P и $q \subset a$, то существует множество $b \in B$ такое, что $q \subset b \subset a$;*

(2) *Если a — открыто-замкнутое подмножество P и $a \cap q = \varnothing$, то существует множество $b \in B$ такое, что $q \subset b$ и $a \cap b = \varnothing$;*

(3) *Если a — открыто-замкнутое подмножество P и $q \subset a$, то существует множество $b \in B$ такое, что $q \subset b \subset a$.*

4.6. Лемма. *Для любого открытого подмножества $G \subset Q$ существует семейство $B_G \subset B$ такое, что $\cup B_G = \cup G$.*

Доказательство. Пусть G — открытое подмножество Q. По определению топологии на Q множество $\cup G$ открыто в P.

Применяя следствие 4.5 (1) для открытого множества $\cup G$ и произвольного слоя $q \in G$, мы заключаем, что существует множество b_q, удовлетворяющее соотношениям $b_q \supset q$ и $b_q \subset \cup G$. Легко понять, что семейство $B_G := \{b_q \mid q \in G\}$ является искомым.

Следствие. (1) *Любое открыто-замкнутое полосатое подмножество P является элементом алгебры B.*

(2) *Пусть G — произвольное открытое подмножество Q. Тогда объединение $\cup \operatorname{cl} G$ открыто, т. е. $\operatorname{cl} G$ — открыто-замкнутое подмножество Q.*

Доказательство. (1) Пусть b — открыто-замкнутое и полосатое подмножество P, т. е. $b = \cup G$, где G — открыто-замкнутое подмножество Q.

Рассмотрим семейство $B_G \subset B$, существование которого установлено в последней лемме. Поскольку B — правильная подалгебра $\mathrm{Clop}(P)$, супремум $\mathrm{cl} \cup B_G$ семейства B_G лежит в B. С другой стороны, $\cup B_G = \cup G$, а множество $\cup G$, в частности, замкнуто в P. Следовательно, $\mathrm{cl} \cup B_G = \cup B_G$, откуда в силу равенства $\cup G = \cup B_G$ вытекает включение $b \subset B$. Первое утверждение доказано.

(2) Пусть G — открытое подмножество Q. Рассмотрим такое семейство $B_G \subset B$, что $\cup B_G = \cup G$. Тогда $\mathrm{cl} \cup B_G = \mathrm{cl} \cup G$, а поскольку $\mathrm{cl} \cup B_G$ является супремумом семейства B_G, мы заключаем, что $\mathrm{cl} \cup G \in B$, в частности, множество $\mathrm{cl} \cup G$, открыто.

Таким образом, нам достаточно установить равенство $\cup \mathrm{cl}\, G = \mathrm{cl} \cup G$. Ясно, что $\cup \mathrm{cl}\, G \supset \mathrm{cl} \cup G$; докажем обратное включение. Допустим, напротив, что найдется точка $p \in \cup \mathrm{cl}\, G$, не принадлежащая множеству $\mathrm{cl} \cup G$. Поскольку $\mathrm{cl} \cup G$ принадлежит B, и, в частности, является полосатым, никакая точка слоя q, содержащего точку p, не принадлежит $\mathrm{cl} \cup G$. Привлекая лемму 4.5, мы выводим, что существует множество $b \in B$, $b \supset q$, такое, что $b \cap \mathrm{cl} \cup G = \varnothing$. Следовательно, $b \cap \cup G = \varnothing$, откуда вытекает, что слой q не может принадлежать $\mathrm{cl}\, G$, а значит, $p \notin \cup \mathrm{cl}\, G$. Полученное противоречие завершает доказательство.

4.7. Теорема. *Топологическое пространство Q является экстремально несвязным компактом, и отображение $G \mapsto \cup G$ осуществляет изоморфизм алгебры $\mathrm{Clop}(Q)$ на B. В частности, Q является стоуновским компактом алгебры B.*

Доказательство. Проверим, что множество Q является хаусдорфовым топологическим пространством. Пусть q и q' — различные слои. По определению слоя, найдется множество $b' \in B$, содержащее q' и не пересекающееся со слоем q. Тогда согласно следствию 4.5 (2) существует $b \in B$ такое, что $b \supset q$ и $b \cap b' = \varnothing$. Таким образом, мы нашли непересекающиеся окрестности слоев q и q'.

Пусть множества $\{G_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ образуют открытое покрытие Q. Тогда семейство $\{\cup G_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ — открытое покрытие P. Поскольку P — компакт, из указанного семейства можно выделить конечное подпокрытие $\{\cup G_{\xi_1}, \dots, \cup G_{\xi_n}\}$. Ясно, что множества $G_{\xi_1}, \dots, G_{\xi_n}$ образуют подпокрытие исходного покрытия $\{G_\xi\}_{\xi \in \Xi}$. Следовательно, Q — компакт. Согласно следствию 4.6 (2) замыкание любого открытого в Q множества открыто, значит, компакт Q экстремально несвязен.

Остается проверить, что отображение $i\colon G \mapsto \cup G$ является изоморфизмом алгебры $\mathrm{Clop}(Q)$ на B. В силу следствия 4.6 (1) включение $\cup G \in B$ имеет место для всех $G \in \mathrm{Clop}(Q)$. Далее, как легко видеть, любое разбиение единицы $\{G_1, G_2, G_3\}$ в $\mathrm{Clop}(Q)$ переводится отображением i в разбиение единицы в B. С учетом [4, 1.2.4] мы заключаем, что i — булев гомоморфизм алгебр $\mathrm{Clop}(Q)$ и B. Осталось заметить, что любое множество $b \in B$ однозначно представимо в виде $\cup G$ для подходящего $G \in \mathrm{Clop}(Q)$. Теорема доказана.

4.8. Предложение. *Если непрерывная функция $g\colon P \to \overline{\mathbb{R}}$ эквивалентна некоторой $\mathcal{B}$-измеримой функции, то она является полосатой.*

Доказательство. Пусть $|g(p)| < \infty$, где точка p принадлежит некоторому слою q. Докажем, что $g(p') = g(p)$ для любой точки $p' \in q$. Предположим, что $g(p) < g(p')$. Положим

$$b := \mathrm{cl}\bigl\{g^{-1}\bigl((g(p), \infty)\bigr)\bigr\}.$$

Поскольку функция g непрерывна и эквивалентна некоторой $\mathcal{B}$-измеримой, множество b принадлежит алгебре B и, очевидно, разделяет точки p и p', что невозможно.

Предположим теперь, что $|g(p)| = \infty$ для некоторой точки $p \in q$. Рассмотрим последовательность $\{b_K\}_{K \in \mathbb{N}}$ открыто-замкнутых множеств:

$$b_K := \mathrm{cl}\{p \in P \mid |g(p)| > K\}.$$

Очевидно, $b_K \in B$ для всех $K \in \mathbb{N}$. Кроме того, ясно, что множество $\bigcap_{K\in\mathbb{N}} b_K$ содержит точку p и, следовательно, обязано содержать весь слой q. Таким образом, во всех точках $p' \in q$ функция g принимает бесконечные значения. Предложение доказано.

4.9. Лемма. *Если функция $g \in C_\infty(P)$ эквивалентна некоторой B-измеримой, то функция $g[\cdot]\colon Q \to \overline{\mathbb{R}}$ непрерывна и конечна на котощем подмножестве Q.*

Доказательство. Пусть V — открытое подмножество $\mathbb{R}$. Поскольку функция g непрерывна и эквивалентна $\mathcal{B}$-измеримой, в силу предложения 4.8 $g^{-1}(V) = \cup G$, где $G \subset Q$. При этом множество $\cup G$ открыто в P, следовательно, G — открытое множество в Q, являющееся прообразом V при отображении $g[\cdot]$. Таким образом, функция $g[\cdot]\colon Q \to \overline{\mathbb{R}}$ непрерывна.

Для завершения доказательства осталось заметить, что $g[\cdot]$ конечна на котощем подмножестве Q, поскольку объединение тех слоев, где функция g бесконечна, является тощим в P.

4.10. Для всякой функции $f \in \mathcal{L}^1(P, \mu)$ символом $\mathcal{M}_B(f)$ будем обозначать непрерывный представитель класса, содержащего условное ожидание f относительно σ-подалгебры $\mathcal{B} \subset \mathrm{Bo}(P)$, т. е.

$$\mathcal{M}_B(f) = (\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f))_\sim.$$

В частности, для всех $q \in Q$ определено число $\mathcal{M}_B(f)[q]$.

4.11. Предложение. *Пусть q — слой в P и пусть a — открыто-замкнутое множество такое, что $a \cap q = \varnothing$. Тогда $\mathcal{M}_B(\chi(a))[q] = 0$.*

Доказательство. Пусть $a \in \mathrm{Clop}(P)$ удовлетворяет условию предложения. Согласно следствию 4.5 (2) существует множество $b \in B$ такое, что $q \subset b$ и $a \cap b = \varnothing$. Из свойств условного ожидания следует, что $\mathcal{M}_B(\chi(a))[q] = 0$ для всех слоев q, содержащихся в b. Предложение доказано.

4.12. Теорема. *Пусть P — экстремально несвязный компакт, B — правильная подалгебра $\mathrm{Clop}(P)$. Тогда P можно разбить на множество слоев Q так, что на каждом слое $q \in Q$ возникает σ-алгебра A_q, содержащая открыто-замкнутые подмножества слоя, и борелевская мера μ_q, причем будут выполнены следующие условия:*

(1) *множество $a \in \mathrm{Clop}(P)$ принадлежит B тогда и только тогда, когда a полосато;*

(2) *функция $f \in C_\infty(P)$ является $\mathcal{B}$-измеримой тогда и только тогда, когда она полосатая;*

(3) *для всех $a \in \mathrm{Clop}(P)$ имеет место равенство*

$$\mathcal{M}_B(\chi(a))[q] = \mu_q(a \cap q);$$

(4) *для любой непрерывной ограниченной функции $f \in \mathcal{L}^1[P, \mu]$ имеет место равенство*

$$\mathcal{M}_B(f)[q] = \int_q f|_q \, d\mu_q$$

для всех $q \in Q$;

(5) *для любой непрерывной функции $f \in \mathcal{L}^1[P, \mu]$ имеет место равенство*

$$\mathcal{M}_B(f)[q] = \int_q f|_q \, d\mu_q$$

для всех $q \in D$, где D — некоторое котощее подмножество Q.

Доказательство. Рассмотрим множество слоев Q. На каждом слое $q \in Q$ введем структуру пространства с мерой, т. е. укажем σ-алгебру $\mathcal{A}_q$ подмножеств q (содержащую все открыто-замкнутые подмножества слоя) и меру μ_q на этой σ-алгебре.

Пусть α — открыто-замкнутое подмножество слоя, т. е. $\alpha = a \cap q$, где $a \in \mathrm{Clop}(P)$. Положим $\tilde{\mu}_q(\alpha) := \mathcal{M}_B(\chi(a))[q]$. Такое определение корректно, поскольку $a_1 \cap q = a_2 \cap q$ влечет $\mathcal{M}_B(\chi(a_1))[q] = \mathcal{M}_B(\chi(a_2))[q]$ в силу предложения 4.11.

Заметим, что всякий слой q в экстремально несвязном компакте является вполне несвязным компактом, поэтому функция $\tilde{\mu}_q$ может быть продолжена до борелевской меры μ_q на некоторой σ-алгебре $\mathcal{A}_q$, порожденной открыто-замкнутыми подмножествами слоя (см. [8]). Таким образом, мы получаем пространство с конечной (даже вероятностной) мерой $(q, \mathcal{A}_q, \mu_q)$.

Утверждение (1) теоремы следует из п. 4.4 и следствия 4.6 (1).

(2) Необходимость была доказана в предложении 4.8. Докажем достаточность. Предположим, что непрерывная функция g является полосатой. Если дополнительно предположить, что функция g является ступенчатой, то она, как легко следует из доказанного выше, будет $\mathcal{B}$-измеримой. Чтобы доказать нужное утверждение в общем случае, заметим, что каждую полосатую функцию из множества $C_\infty(P)$ мы можем представить в виде предела последовательности ступенчатых полосатых функций, а предел последовательности $\mathcal{B}$-измеримых функций, как известно, $\mathcal{B}$-измерим.

Равенство (3) имеет место по построению меры μ_q.

(4) Заметим в первую очередь, что предлагаемая формула верна для непрерывных ступенчатых функций (опять же по построению меры на слое). Для произвольной функции $f \in C(P)$ существует последовательность $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ступенчатых непрерывных функций, равномерно сходящаяся к f. Тогда последовательность условных ожиданий $\mathcal{M}_B(s_n)$ будет равномерно сходиться к $\mathcal{M}_B(f)$. Следовательно, для всех $f \in C(P)$ и $q \in Q$

$$\mathcal{M}_B(f)[q] = \lim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_B(s_n)[q] = \lim_{n\in\mathbb{N}} \int_q s_n|_q \, d\mu_q = \int_q f|_q \, d\mu_q.$$

(5) Для любой функции $f_0 \in C_\infty(P)$ существует последовательность $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ непрерывных функций, порядково сходящаяся к f. Тогда последовательность условных ожиданий $\mathcal{M}_B(f_n)$ будет порядково сходиться к $\mathcal{M}_B(f_0)[\cdot]$ в $C_\infty(Q)$. Остается воспользоваться тем фактом, что порядковая сходимость в $C_\infty(Q)$ есть поточечная сходимость на котощем множестве [5, § 13, 2.33]. Теорема доказана.

4.13. На множестве Q определим регулярную борелевскую меру ν следующим образом: для открыто-замкнутого множества $G \subset Q$ мы полагаем $\tilde{\nu}(G) := \mu(\cup G)$. Такое определение корректно в том смысле, что множество $\cup G$ измеримо. Ясно, что $\tilde{\nu}$ — σ-аддитивная функция на $\mathrm{Clop}(Q)$, а значит, существует ее продолжение до регулярной борелевской меры ν на σ-алгебре подмножеств Q, порожденной $\mathrm{Clop}(Q)$.

Лемма. *Пусть $V \in \mathcal{A}$ — множество нулевой меры. Тогда почти для всех (в смысле меры ν) слоев $q \in Q$ мера μ_q множества $V \cap q$ равна нулю.*

Доказательство. Мы знаем (см. 2.10), что всякое борелевское множество $V \in \mathcal{A}$ можно аппроксимировать по мере открыто-замкнутыми множествами, содержащими V. Пусть $\{a_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ — семейство открыто-замкнутых множеств, содержащих V и таких, что $\inf_{\xi\in\Xi} a_\xi = 0_A$. Тогда функции $\mathcal{M}_B(\chi(a))[\cdot]$ сходятся порядково в $C_\infty(Q)$ (и поточечно на некотором котощем подмножестве Q) сходятся к нулю. Так как тощие подмножества экстремально несвязного компакта Q пренебрежимы относительно меры ν (см. 2.10 (2)), почти для всех слоев $q \in Q$ инфимум $\mu_q(a_\xi \cap q)$ по всем $\xi \in \Xi$ равен нулю. Следовательно, $\mu_q(V \cap q) = 0$. Лемма доказана.

4.14. Теорема. *Пусть P — экстремально несвязный компакт, B — правильная подалгебра $\mathrm{Clop}(P)$. В этом случае компакт P можно разбить на множество слоев Q так, что на каждом слое $q \in Q$ возникает σ-алгебра A_q, содержащая открыто-замкнутые подмножества слоя, и борелевская мера μ_q. На σ-алгебре $\mathcal{B}$ подмножеств Q, порожденной $\mathrm{Clop}(Q)$, существует регулярная борелевская мера ν. При этом*

(1) *множество $a \in \mathcal{A}$ принадлежит $\mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда a почти полосато;*

(2) *измеримая функция f является $\mathcal{B}$-измеримой тогда и только тогда, когда она почти полосатая;*

(3) *для любого множества $a \in \mathcal{A}$ выполнено равенство*

$$\mathcal{M}_B(\chi(a))[q] = \mu_q(a \cap q)$$

почти для всех $q \in Q$;

(4) *для любой функции* $f \in \mathcal{L}^1(P, \mu)$ *выполнено равенство*

$$\mathcal{M}_B(f)[q] = \int_q f|_q \, d\mu_q$$

почти для всех $q \in Q$;

(5) *для всех* $f \in \mathcal{L}^1(P, \mu)$ *имеет место равенство*

$$\int_P f \, d\mu = \int_Q \left(\int_q f|_q \, d\mu_q \right) d\nu.$$

Доказательство. Утверждения (1)–(4) следуют из утверждений (1)–(3) и (5) теоремы 4.12 с учетом последней леммы. Утверждение (5) вытекает из (4) и известных свойств условного ожидания.

Замечание. Теоремы 4.12 и 4.14 по существу предлагают конкретное представление реализационного НРБР для РБК $L^1(P, \mu)$.

§ 5. Измеримые расслоения банаховых решеток и связанное с ними представление пространства с мерой

В данном параграфе вводится понятие измеримого расслоения банаховых решеток (ИРБР), исследуются соотношения между измеримыми и непрерывными расслоениями банаховых решеток, устанавливается связь между РБК и ИРБР, а также предлагается реализация измеримого пространства с выделенной σ-подалгеброй в виде пространства сечений ИРБР.

Всюду на протяжении этого параграфа $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ — пространство с конечной ненулевой мерой (см. 1.2), B — фактор-алгебра $\mathcal{B}/\mu^{-1}(0)$, Q — стоуновский компакт алгебры B.

5.1. Пусть $\mathcal{X}$ — дискретное расслоение банаховых решеток над Ω (см. 3.1). Символом $S_\sim(\Omega, \mathcal{X})$ обозначается совокупность сечений расслоения $\mathcal{X}$, определенных почти всюду. Пусть $u, v \in S_\sim(\Omega, \mathcal{X})$. Мы будем писать $u \leqslant v$ в том случае, когда $u(\omega) \leqslant v(\omega)$ для почти всех $\omega \in \operatorname{dom} u \cap \operatorname{dom} v$. Ясно, что введенное отношение $\leqslant$ является предпорядком в $S_\sim(\Omega, \mathcal{X})$.

Для любых сечений $u, v \in S_\sim(\Omega, \mathcal{X})$ мы определим элемент $u \vee v \in S_\sim(\Omega, \mathcal{X})$ следующим образом: для точек $\omega \in \operatorname{dom} u \cap \operatorname{dom} v$ положим $(u \vee v)(\omega) := u(\omega) \vee v(\omega)$, а в остальных точках $\omega \in \Omega$ оставим значение $u \vee v$ не определенным. Элементы $u \wedge v$, u_+, u_- и $|u|$ определяются аналогично.

Множество сечений $\mathcal{C} \subset S_\sim(\Omega, \mathcal{X})$ назовем *решеточной измеримой структурой в* $\mathcal{X}$, если оно удовлетворяет следующим условиям:

(1) $\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 \in \mathcal{C}$ для всех $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ и $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$;

(2) $c_+ \in \mathcal{C}$ для всех $c \in \mathcal{C}$;

(3) поточечная норма $|\!|c|\!|\colon \operatorname{dom} c \to \mathbb{R}$ любого элемента $c \in \mathcal{C}$ измерима;

(4) множество $\mathcal{C}$ послойно плотно в $\mathcal{X}$.

Если $\mathcal{C}$ — решеточная измеримая структура в $\mathcal{X}$, то пару $(\mathcal{X},\mathcal{C})$ мы называем *измеримым расслоением банаховых решеток* (ИРБР) *над* Ω. Вместо $(\mathcal{X},\mathcal{C})$ мы будем писать просто $\mathcal{X}$, а измеримую структуру $\mathcal{C}$ обозначать символом $\mathcal{C}_{\mathcal{X}}$.

Замечание. Если отказаться от рассмотрения порядка в слоях $\mathcal{X}$ и исключить условие (2) из определения решеточной измеримой структуры, то мы придем к понятию *измеримой структуры* и *измеримого банахова расслоения* (ИБР). Теория ИБР подробно изложена в [4].

5.2. Пусть $(\mathcal{X},\mathcal{C})$ — ИБР над Ω. Сечение $s \in S_{\sim}(\Omega,\mathcal{X})$ назовем *$\mathcal{C}$-ступенчатым* (или просто *ступенчатым*, если ясно, о какой измеримой структуре идет речь), если $s = \sum_{i=1}^{n} \chi(A_i)c_i$ для некоторых $n \in \mathbb{N}$, $A_1,\dots,A_n \in \mathcal{B}$ и $c_1,\dots,c_n \in \mathcal{C}$. Сечение $u \in S_{\sim}(\Omega,\mathcal{X})$ называется *$\mathcal{C}$-измеримым* (или просто *измеримым*), если найдется такая последовательность $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{C}$-ступенчатых сечений, что $s_n(\omega) \to u(\omega)$ почти для всех $\omega \in \Omega$. Множество всех $\mathcal{C}$-измеримых сечений $\mathcal{X}$ обозначается символом $\mathcal{L}^0(\Omega,\mathcal{X}|\mathcal{C})$ или, короче, $\mathcal{L}^0(\Omega,\mathcal{X})$. Понятие измеримости сечений без изменений переносится на случай сечений измеримого расслоения банаховых решеток.

5.3. Предложение. *Пусть* $\mathcal{X}$ — ИРБР *над* Ω, $u,v \in S_{\sim}(\Omega,\mathcal{X})$, $e\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

(1) *Если сечение u измеримо, то функция $|u|$ измерима.*

(2) *Если функция e и сечение u измеримы, то произведение eu измеримо.*

(3) *Если сечения u и v измеримы, то сумма $\alpha u + \beta v$ измерима.*

(4) *Если сечения u и v измеримы, то сечения $u\vee v$ и $u\wedge v$ измеримы.*

5.4. Пусть $\mathcal{X}$ — ИРБР над Ω. На множестве $\mathcal{L}^0(\Omega,\mathcal{X})$ рассмотрим отношение эквивалентности $\sim$, означающее совпадение почти всюду: $u \sim v$ равносильно равенству $u(\omega) = v(\omega)$ почти для всех $\omega \in \Omega$. Класс эквивалентности, содержащий элемент $u \in \mathcal{L}^0(\Omega,\mathcal{X})$, будем обозначать через $u^\sim$. Фактор-множество $\mathcal{L}^0(\Omega,\mathcal{X})/\!\sim$ естественным образом превращается в векторное пространство: мы полагаем $\alpha u^\sim + \beta v^\sim = (\alpha u + \beta v)^\sim$ при $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ и $u,v \in \mathcal{L}^0(\Omega,\mathcal{X})$. Кроме того, для каждого элемента $u^\sim \in \mathcal{L}^0(\Omega,\mathcal{X})/\!\sim$ можно определить его (векторную) норму $|\!|u^\sim|\!| := |\!|u|\!|^\sim \in L^0(\Omega)$. Ясно, что пара $(\mathcal{L}^0(\Omega,\mathcal{X})/\!\sim,\ |\!|\cdot|\!|)$ представляет собой РНП над $L^0(\Omega)$, которое мы будем обозначать символом $L^0(\Omega,\mathcal{X})$. Кроме того, мы можем ввести порядок на пространстве $L^0(\Omega,\mathcal{X})$, полагая $\mathbf{u} \leqslant \mathbf{v}$ тогда и только тогда, когда для некоторых (а тогда и для любых) представителей u и v соответствующих классов имеет место соотношение $u \leqslant v$ (см. 5.1). Несложно убедиться в том, что $L^0(\Omega,\mathcal{X})$ — векторная решетка, при этом $u^\sim \vee v^\sim = (u \vee v)^\sim$ (аналогичные соотношения имеют место и для операций $\wedge$, $(\cdot)_+$, $(\cdot)_-$ и $|\cdot|$.

Теорема. *Пусть* $\mathcal{X}$ — ИРБР *над пространством с ненулевой конечной мерой* Ω. *Тогда* $L^0(\Omega,\mathcal{X})$ *является* РБК *над* $L^0(\Omega)$.

Доказательство. Тот факт, что пространство $L^0(\Omega,\mathcal{X})$ является ПБК над $L^0(\Omega)$, установлен в [4, 4.1.14]. Остается только заметить, что решеточная норма $|\!|\cdot|\!|$ согласована с порядком.

5.5. Пусть E — идеал в $L^0(\Omega)$. Тогда множество

$$E(\mathcal{X}) := \{\mathbf{u} \in L^0(\Omega,\mathcal{X}) \mid |\!|\mathbf{u}|\!| \in E\},$$

снабженное операциями, индуцированными из $L^0(\Omega,\mathcal{X})$, очевидно, представляет собой РБК над E. Ниже мы увидим, что пространство $E(\mathcal{X})$ является в определенном смысле общим видом РБК над E.

Положим

$$\mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{X}) := \{u \in \mathcal{L}^0(\Omega,\mathcal{X}) \mid |\!|u|\!| \in \mathcal{L}^1(\Omega)\}.$$

Совокупность классов эквивалентности, состоящих из элементов $\mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{X})$, мы будем обозначать через $L^1(\Omega,\mathcal{X})$. Ясно, что $L^1(\Omega,\mathcal{X})$ совпадает с $E(\mathcal{X})$, где $E = L^1(\Omega)$. Отсюда, в частности, следует, что $L^1(\Omega,\mathcal{X})$ — РБК над $L^1(\Omega)$.

Символом $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{X})$ будет обозначаться множество

$$\{u \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{X}) : |u| \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)\},$$

а его элементы будут называться (*существенно*) *ограниченными измеримыми сечениями* ИРБР $\mathcal{X}$. Классы эквивалентности, состоящие из существенно ограниченных сечений, называются *ограниченными классами*, а совокупность всех таких классов обозначается через $L^\infty(\Omega, \mathcal{X})$. Очевидно, $L^\infty(\Omega, \mathcal{X})$ совпадает с $E(\mathcal{X})$, где $E = L^\infty(\Omega)$. В частности, $L^\infty(\Omega, \mathcal{X})$ — РБК над $L^\infty(\Omega)$.

5.6. Пусть $\mathcal{X}$ — ИРБР над пространством с конечной мерой Ω. Рассмотрим лифтинг $\rho\colon L^\infty(\Omega) \to \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ (см. 1.5). Отображение $\rho_{\mathcal{X}}\colon L^\infty(\Omega, \mathcal{X}) \to \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{X})$ будем называть *лифтингом* $L^\infty(\Omega, \mathcal{X})$ (*ассоциированным с* ρ), если для любых $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L^\infty(\Omega, \mathcal{X})$ и $\mathbf{e} \in L^\infty(\Omega)$ имеют место следующие соотношения:

(1) $\rho_{\mathcal{X}}(\mathbf{u}) \in \mathbf{u}$ и $\operatorname{dom} \rho_{\mathcal{X}}(\mathbf{u}) = \Omega$;

(2) $|\rho_{\mathcal{X}}(\mathbf{u})| = \rho(|\mathbf{u}|)$;

(3) $\rho_{\mathcal{X}}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \rho_{\mathcal{X}}(\mathbf{u}) + \rho_{\mathcal{X}}(\mathbf{v})$;

(4) $\rho_{\mathcal{X}}(\mathbf{e}\mathbf{u}) = \rho(\mathbf{e})\rho_{\mathcal{X}}(\mathbf{u})$;

(5) множество $\{\rho_{\mathcal{X}}(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in L^\infty(\Omega, \mathcal{X})\}$ послойно плотно в $\mathcal{X}$;

(6) если $\mathbf{u} \geqslant 0$, то $\rho_{\mathcal{X}}(\mathbf{u})(\omega) \geqslant 0$ во всех точках $\omega \in \Omega$.

В том случае, когда в $L^\infty(\Omega, \mathcal{X})$ существует лифтинг, ассоциированный с каким-либо лифтингом $L^\infty(\Omega)$, мы будем говорить, что $\mathcal{X}$ — ИРБР *с лифтингом*. При этом, если ясно, о каких лифтингах идет речь, то для $\mathbf{e} \in L^\infty(\Omega)$ и $\mathbf{u} \in L^\infty(\Omega, \mathcal{X})$ вместо $\rho(\mathbf{e})$ и $\rho_{\mathcal{X}}(\mathbf{u})$ будем писать соответственно $\mathbf{e}_\sim$ и $\mathbf{u}_\sim$. Для $e \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ и $u \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{X})$ записи $\rho(e^\sim)$, $\rho_{\mathcal{X}}(u^\sim)$, $(e^\sim)_\sim$ и $(u^\sim)_\sim$ заменяются символами $\rho(e)$, $\rho_{\mathcal{X}}(u)$, $e_\sim$ и $u_\sim$ соответственно.

Под значением $\mathbf{u}(\omega)$ класса сечений $\mathbf{u} \in L^\infty(\Omega)$ в точке $\omega \in \Omega$ мы будем понимать значение лифтинга этого класса в точке ω, т. е. $\mathbf{u}(\omega) := \mathbf{u}_\sim(\omega)$.

Если отказаться от рассмотрения порядка в слоях $\mathcal{X}$ и от условия (6) в определении лифтинга ИРБР, то мы получим определение *лифтинга* ИБР.

5.7. Следующий пример показывает, что существуют лифтинги, удовлетворяющие требованиям (1)–(5), но не обладающие свойством (6).

Пример. Пусть $\mathcal{X}$ — расслоение банаховых решеток над $\Omega = [0,1]$, каждый слой которого равен $\mathbb{R}$, с естественным порядком во всех слоях, за исключением одного слоя ω_0. В слое ω_0 заменим порядок на обратный к естественному порядку в $\mathbb{R}$. В качестве измеримой структуры $\mathcal{C}$ возьмем совокупность почти всюду определенных измеримых функций на Ω. Пусть ρ — какой-нибудь лифтинг в $L^\infty(\Omega)$. Ясно, что этот же лифтинг, рассматриваемый как лифтинг в ИБР $\mathcal{X}$, удовлетворяет требованиям (1)–(5), но не (6).

5.8. Пусть ρ — лифтинг $L^\infty(\Omega)$, а $\mathcal{X}$ — ИРБР с лифтингом над Ω. Будем говорить, что ИРБР $\mathcal{X}$ *неподвижно относительно* ρ или *ρ-неподвижно*, если для любых ρ-неразличимых точек $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ (см. 1.5) имеют место равенства $\mathcal{X}(\omega_1) = \mathcal{X}(\omega_2)$ и $\mathbf{u}_\sim(\omega_1) = \mathbf{u}_\sim(\omega_2)$ для всех $\mathbf{u} \in L^\infty(\Omega, \mathcal{X})$.

5.9. Пусть Q — стоуновский компакт булевой алгебры B и $\tau\colon \Omega \to Q$ — каноническое погружение Ω в Q, соответствующее лифтингу ρ пространства $L^\infty(\Omega)$ (см. 1.12).

Теорема. *Пусть $\mathcal{Y}$ — просторное* НРБР *над Q, $\mathcal{X} = \mathcal{Y} \circ \tau$ — дискретное расслоение банаховых решеток над Ω.*

(1) *Если $\mathcal{C}$ — послойно плотная в $\mathcal{Y}$ векторная подрешетка $C(Q, \mathcal{Y})$ (например, если $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\mathcal{Y}$), то множество $\{c \circ \tau \mid c \in \mathcal{C}\}$ является решеточной измеримой структурой в $\mathcal{X}$. (В дальнейшем $\mathcal{X}$ рассматривается как* ИРБР *относительно измеримой структуры $\{c \circ \tau \mid c \in \mathcal{C}\}$.)*

(2) *Почти всюду определенное сечение u расслоения $\mathcal{X}$ измеримо тогда и только тогда, когда $u \sim v \circ \tau$ для некоторого элемента $v \in C_\infty(Q, \mathcal{Y})$.*

(3) *Для любого класса $\mathbf{u} \in L^0(\Omega, \mathcal{X})$ существует единственное сечение $\hat{\mathbf{u}} \in C_\infty(Q, \mathcal{Y})$, дающее представление $\mathbf{u}$ в виде $(\hat{\mathbf{u}} \circ \tau)^\sim$.*

(4) *Отображение* $\mathbf{u} \mapsto \hat{\mathbf{u}}$ *осуществляет изоморфизм* РБК $L^0(\Omega, \mathcal{X})$ *на* $C_\infty(Q, \mathcal{Y})$, *ассоциированный с изоморфизмом* $(\mathbf{e} \mapsto \hat{\mathbf{e}}) : L^0(\Omega) \to C_\infty(Q)$ (см. 1.22). *Образом* $L^\infty(\Omega, \mathcal{X})$ *при этом изоморфизме является* $C(Q, \mathcal{Y})$. *Обратный изоморфизм* $C_\infty(Q, \mathcal{Y})$ *на* $L^0(\Omega, \mathcal{X})$ *действует по правилу* $v \mapsto (v \circ \tau)^\sim$ *и ассоциирован с изоморфизмом* $(e \mapsto (e \circ \tau)^\sim) \colon C_\infty(Q) \to L^0(\Omega)$.

(5) *Отображение* $\mathbf{u} \mapsto \hat{\mathbf{u}} \circ \tau$ *представляет собой лифтинг* $L^\infty(\Omega, \mathcal{X})$, *ассоциированный с* ρ. *Снабженное этим лифтингом* ИРБР $\mathcal{X}$ *является* ρ*-неподвижным.*

Доказательство. Утверждения (1)–(3) доказаны в [4, 4.3.4]. Там же установлена изометрия между ПБК $L^0(\Omega, \mathcal{X})$ и $C_\infty(Q, \mathcal{Y})$, а также тот факт, что отображение $\mathbf{u} \mapsto \hat{\mathbf{u}} \circ \tau$ является лифтингом в $L^\infty(\Omega, \mathcal{X})$, который удовлетворяет требованиям (1)–(5) определения 5.6.

Очевидно, изометрия $v \mapsto (v \circ \tau)^\sim$ является положительной. Привлекая теорему 1.18, заключаем, что указанное отображение является изоморфизмом, а значит, изоморфизмом будет и обратное отображение $\mathbf{u} \mapsto \hat{\mathbf{u}}$. Отсюда немедленно следуют утверждения (4) и (5) теоремы. Теорема доказана.

Сечение $\hat{\mathbf{u}} \in C_\infty(Q, \mathcal{Y})$, соответствующее элементу $\mathbf{u} \in L^0(\Omega, \mathcal{X})$ согласно п. (3), будем называть *стоуновским преобразованием* $\mathbf{u}$.

5.10. Теорема 5.9 описывает способ построения ИРБР с лифтингом на основе некоторого просторного НРБР. Следующий результат показывает, что всякое ИРБР с лифтингом может быть получено именно таким способом.

Теорема. *Пусть* ρ — *лифтинг* $L^\infty(\Omega)$ *и* $\tau \colon \Omega \to Q$ — *соответствующее каноническое погружение* Ω *в стоуновский компакт* Q *булевой алгебры* B. *Пусть* $\mathcal{X}$ — ρ*-неподвижное* ИРБР *над* Ω, *имеющее лифтинг, ассоциированный с* ρ. *Тогда существует единственное с точностью до изоморфизма просторное* НРБР $\widehat{\mathcal{X}}$ *над* Q *такое, что* $\mathcal{X} = \widehat{\mathcal{X}} \circ \tau$ *и* $\mathbf{u}_\sim = \hat{\mathbf{u}} \circ \tau$ *для всех* $\mathbf{u} \in L^\infty(\Omega, \mathcal{X})$, *где* $\hat{\mathbf{u}}$ — *стоуновское преобразование* $\mathbf{u}$.

Доказательство. Известно [4, 4.3.5], что существует единственное с точностью до изометрии просторное НБР $\widehat{\mathcal{X}}$ над Q такое, что $\mathcal{X} = \widehat{\mathcal{X}} \circ \tau$, при этом отображение $\mathbf{u} \mapsto \hat{\mathbf{u}}$ осуществляет изометрию $L^0(\Omega, \mathcal{X})$ на $C_\infty(Q, \widehat{\mathcal{X}})$. С помощью имеющейся изометрии мы можем ввести порядок на РНП $C_\infty(Q, \widehat{\mathcal{X}})$ так, что это РНП превратится в РБК, а изометрия будет осуществлять изоморфизм $L^0(\Omega, \mathcal{X})$ на $C_\infty(Q, \widehat{\mathcal{X}})$. В частности, РНП $C(Q, \widehat{\mathcal{X}})$ также представляет собой РБК.

Лемма 3.9 позволяет ввести порядок на слоях $\widehat{\mathcal{X}}$, превратив $\widehat{\mathcal{X}}$ в НРБР, при этом порядок на $C(Q, \widehat{\mathcal{X}})$ станет поточечным. Следовательно, $\mathcal{X}(\omega)$ и $(\widehat{\mathcal{X}} \circ \tau)(\omega)$ будут совпадать не только как банаховы пространства, но и как векторные решетки.

Из теоремы 5.9 следует, что $\widehat{\mathcal{X}}$ — реализационное НРБР для РБК $L^0(\Omega, \mathcal{X})$, откуда, согласно следствию 3.17, вытекает единственность этого НРБР с точностью до изоморфизма. Теорема доказана.

Просторное НРБР $\widehat{\mathcal{X}}$, фигурирующее в формулировке теоремы 5.10, называется *стоуновским преобразованием* ИРБР *с лифтингом* $\mathcal{X}$.

5.11. Следующий результат вытекает из 5.9, 5.10 и 3.17.

Следствие. *Пусть E — фундамент пространства $L^0(\Omega)$, а $\widehat{E}$ — фундамент в $C_\infty(Q)$ являющийся стоуновским преобразованием E. Тогда стоуновское преобразование $\widehat{\mathcal{X}}$* ИРБР $\mathcal{X}$ *является реализационным* НРБР *для* РБК $E(\Omega, \mathcal{X})$ (см. 3.17).

5.12. Пусть ρ — лифтинг $L^\infty(\Omega)$, а $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — ИРБР над Ω с лифтингами, ассоциированными с ρ. Расслоения $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ назовем *ρ-изоморфными* (или просто *изоморфными*), если существует отображение

$$i \colon \omega \in \Omega \mapsto i(\omega) \in B(\mathcal{X}(\omega), \mathcal{Y}(\omega)),$$

обладающее следующими свойствами:

(1) $i(\omega)$ — изоморфизм $\mathcal{X}(\omega)$ на $\mathcal{Y}(\omega)$;

(2) $\mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{Y}) = \{i \otimes u \mid u \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{X})\}$.

(3) $\rho_{\mathcal{Y}}(i \otimes u) = i \otimes \rho_{\mathcal{X}}(u)$ для всех $u \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{X})$.

Такое отображение i называется *ρ-изоморфизмом* или просто *изоморфизмом.*

З а м е ч а н и е. Если i — изоморфизм ИРБР $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ над Ω, то отображение $u^{\sim} \mapsto (i \otimes u)^{\sim}$ осуществляет изоморфизм РБК $L^0(\Omega, \mathcal{X})$ на $L^0(\Omega, \mathcal{Y})$.

5.13. Как показывает следующий пример, условие (3) последнего определения, вообще говоря, не следует из (1) и (2).

П р и м е р. Пусть $\mathcal{X}$ — расслоение банаховых решеток над $\Omega = [0,1]$, каждый слой которого равен $\mathbb{R}$ с естественным порядком. Введем на $\mathcal{X}$ измеримую структуру, состоящую из почти всюду определенных измеримых функций на Ω. Ясно, что любой лифтинг пространства $L^\infty(\Omega)$ будет лифтингом в ИРБР $\mathcal{X}$. В качестве расслоения $\mathcal{Y}$ мы возьмем ИРБР, построенное в примере 5.7. С каждой точкой $\omega \in \Omega$ мы свяжем тождественное отображение $i(\omega)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Нетрудно понять, что отображение i удовлетворяет требованиям (1) и (2), но, каков бы ни был лифтинг $\rho_{\mathcal{Y}}$ в ИРБР $\mathcal{Y}$, свойство (3) не будет иметь места.

5.14. Предложение. *Пусть ρ — лифтинг в $L^\infty(\Omega)$, Q — стоуновский компакт алгебры B, $\tau\colon \Omega \to Q$ — соответствующее каноническое погружение. Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — ρ-неподвижные* ИРБР *над Ω с лифтингами, ассоциированными с ρ, $\widehat{\mathcal{X}}$ и $\widehat{\mathcal{Y}}$ — их стоуновские преобразования.* ИРБР *$\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны* НРБР *$\widehat{\mathcal{X}}$ и $\widehat{\mathcal{Y}}$.*

Доказательство. Предположим, что ИРБР $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ изоморфны. Тогда изоморфны соответствующие РБК $L^0(\Omega, \mathcal{X})$ и $L^0(\Omega, \mathcal{Y})$. Согласно следствию 5.11 НРБР $\widehat{\mathcal{X}}$ и $\widehat{\mathcal{Y}}$ являются реализационными для указанных РБК, а значит, они должны быть изоморфными.

Обратная импликация очевидна. Предложение доказано.

5.15. Теорема. *Пусть* $\mathcal{U}$ — РБК *над фундаментом* E *пространства* $L^0(\Omega)$. *Тогда существует единственное с точностью до изоморфизма* ИРБР $\mathcal{X}$ *с лифтингом над* Ω *такое, что* РБК $\mathcal{U}$ *и* $E(\Omega, \mathcal{X})$ *изоморфны.*

Доказательство. Пусть $\widehat{E}$ — стоуновское преобразование пространства E. Обозначим символом $\widehat{\mathcal{U}}$ РБК над $\widehat{E}$, построенное следующим образом: множества $\mathcal{U}$ и $\widehat{\mathcal{U}}$ совпадают, а решеточная норма пространства $\widehat{\mathcal{U}}$ действует в $\widehat{E}$ и определяется соотношением $|u|_{\widehat{\mathcal{U}}} = (|u|_{\mathcal{U}})^{\wedge}$. Ясно, что РБК $\mathcal{U}$ и $\widehat{\mathcal{U}}$ изоморфны.

В силу теоремы 3.16 РБК $\widehat{\mathcal{U}}$ изоморфно $\widehat{E}(\mathcal{Y})$ для подходящего просторного НРБР $\mathcal{Y}$ над Q. Рассмотрим расслоение банаховых решеток $\mathcal{X} = \mathcal{Y} \circ \tau$, где τ — каноническое погружение Ω в Q. Согласно теореме 5.9 $\mathcal{X}$ представляет собой ИРБР с лифтингом над Ω, а следствие 5.11 гарантирует изоморфность РБК $\widehat{E}(\mathcal{Y})$ и $E(\Omega, \mathcal{X})$.

Из сказанного следует существование изоморфизма РБК $\mathcal{U}$ на $E(\Omega, \mathcal{X})$, который, как нетрудно видеть, является E-изоморфизмом.

Докажем единственность предъявленного расслоения. Предположим, $\mathcal{X}'$ — другое ИРБР с лифтингом такое, что РБК $\mathcal{U}$ и $E(\Omega, \mathcal{X}')$ изоморфны. Обозначим через $\mathcal{Y}'$ стоуновское преобразование $\mathcal{X}'$. Поскольку расслоения $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y}'$ являются реализационными НРБР для соответствующих РБК $E(\Omega, \mathcal{X})$ и $E(\Omega, \mathcal{X}')$, а последние, в свою очередь, изоморфны, мы заключаем, что НРБР $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y}'$ изоморфны. Осталось привлечь предложение 5.14. Теорема доказана.

5.16. Пусть $\mathcal{P} = (\mathcal{P}, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с ненулевой конечной мерой (см. 1.2), $\mathcal{B}$ — σ-подалгебра $\mathcal{A}$, μ_0 — сужение меры μ на алгебру $\mathcal{B}$. Обозначим через $L^1(\mathcal{P})$ ($L^\infty(\mathcal{P})$) пространство классов $\mathcal{A}$-измеримых интегрируемых (ограниченных) функций на $\mathcal{P}$, а через $L^1(\mathcal{P}, \mathcal{B})$ ($L^\infty(\mathcal{P}, \mathcal{B})$) — пространства соответствующих классов $\mathcal{B}$-измеримых функций.

Символами A и B обозначим фактор-алгебры $\mathcal{A}/\mu^{-1}(0)$ и $\mathcal{B}/\mu_0^{-1}(0)$ соответственно. Фиксируем лифтинг $(\cdot)_\sim$ в пространстве $L^\infty(\mathcal{P})$ (см. 1.5). Через $A_\sim$ и $B_\sim$ обозначаются множества $\{a_\sim \mid a \in A\}$ и $\{b_\sim \mid b \in B\}$.

5.17. Точки p_1 и p_2 множества $\mathcal{P}$ назовем *эквивалентными*, если для любого множества $b \in B_\sim$ включения $p_1 \in b$ и $p_2 \in b$ равносильны. Совокупность классов эквивалентности относительно данного отношения мы будем обозначать символом Ω. На протяжении оставшейся части параграфа мы связываем понятия слоя, полосатого множества и полосатой функции (см. 4.2) именно с этим разбиением Ω.

Нетрудно видеть, что лифтинг любого $\mathcal{B}$-измеримого множества ($\mathcal{B}$-измеримой функции) представляет собой полосатое множество (полосатую функцию). Следовательно, для любого класса $\mathbf{f} \in L^\infty(\mathcal{P}, \mathcal{B})$ и любого слоя $\omega \in \Omega$ определено число $\mathbf{f}_\sim[\omega] := \mathbf{f}_\sim(p)$, где p — произвольный элемент ω.

5.18. Множество $V \subset \Omega$ мы будем считать измеримым тогда и только тогда, когда $\cup V \in \mathcal{B}$. Совокупность всех измеримых подмножеств Ω мы будем обозначать символом $\mathcal{B}(\Omega)$. Для $V \in \mathcal{B}(\Omega)$ мы положим $\nu(V) := \mu_0(\cup V)$.

Предложение. (1) *Тройка $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \nu)$ является пространством с мерой.*

(2) *На алгебре классов эквивалентности $B(\Omega) := \mathcal{B}(\Omega)/\nu^{-1}(0)$ существует такой лифтинг, что для всех $V \in \mathcal{B}(\Omega)$ равенство $V = V_\sim$ равносильно $\cup V = (\cup V)_\sim$.*

(3) *Отображение $\mathbf{f} \mapsto (\mathbf{f}_\sim[\cdot])^\sim$ осуществляет изоморфизм между банаховыми решетками $L^\infty(\mathcal{P}, \mathcal{B})$ и $L^\infty(\Omega)$.*

Доказательство. (1) Ясно, что $\mathcal{B}(\Omega)$ образует σ-алгебру, а функция ν является конечной мерой на $\mathcal{B}(\Omega)$. Чтобы заключить, что $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu_0)$ — пространство с мерой, осталось заметить, что подмножество всякого пренебрежимого множества $V \subset \Omega$ пренебрежимо.

(2) Для любого класса $\mathbf{V} \in B(\Omega)$ определим его лифтинг $\mathbf{V}_\sim$ следующим образом. Выберем произвольный представитель $V \in \mathbf{V}$ и рассмотрим подмножество $(\cup V)_\sim \subset \mathcal{P}$, где $(\cdot)_\sim$ — лифтинг в $L^\infty(\mathcal{P})$. Поскольку множество $(\cup V)_\sim$ принадлежит алгебре $B_\sim$, оно является объединением некоторого набора V_0 слоев, который мы и возьмем

в качестве $\mathbf{V}_\sim$. Несложно проверить, что полученное отображение $\mathbf{V} \in B(\Omega) \mapsto \mathbf{V}_\sim \in \mathcal{B}(\Omega)$ является лифтингом и при этом для всех $V \in \mathcal{B}(\Omega)$ соотношение $V = V_\sim$ равносильно $\cup V = (\cup V)_\sim$.

(3) Докажем сначала изоморфность булевых алгебр B и $B(\Omega)$. Заметим, что между алгебрами $B_\sim$ и $B(\Omega)_\sim$ имеется взаимно однозначное соответствие: всякий элемент $U \in B_\sim$, представим в виде объединения $\cup(V)$ подходящего множества $V \in B(\Omega)_\sim$, а объединение любого множества $V \in B(\Omega)_\sim$ принадлежит $B_\sim$. Предъявленное соответствие дает возможность установить биекцию между алгебрами B и $B(\Omega)$, которая, как несложно проверить, представляет собой изоморфизм этих алгебр.

Зафиксируем $U \in B_\sim$. Существует множество $V \in B(\Omega)_\sim$ такое, что $U = \cup V$. Поскольку $U = U_\sim$, индикатор $\chi(U)$ совпадает со своим лифтингом. Функция $\chi(U)[\cdot]$, очевидно, представляет собой индикатор множества V. Таким образом, для любого ступенчатого класса $\mathbf{s}$ пространства $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mu_0)$ класс $(\mathbf{s}_\sim[\cdot])^\sim$ является ступенчатым в пространстве $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \nu)$. Привлекая построенный выше изоморфизм алгебр B и $B(\Omega)$, мы заключаем, что отображение $\mathbf{s} \mapsto (\mathbf{s}_\sim[\cdot])^\sim$ осуществляет изоморфизм между соответствующими пространствами ступенчатых классов, который, как известно, продолжается до изоморфизма $\mathbf{f} \mapsto (\mathbf{f}_\sim[\cdot])^\sim$ банаховых решеток $L^\infty(\mathcal{P}, \mathcal{B})$ и $L^\infty(\Omega)$. Предложение доказано.

Построенное выше пространство с мерой $\Omega := (\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \nu)$ мы будем называть фактор-пространством пространства $(\mathcal{P}, \mathcal{A}, \mu)$, порожденным σ-алгеброй $\mathcal{B}$ и лифтингом $L^\infty(\mathcal{P})$. В дальнейшем Ω всегда снабжается лифтингом, упомянутым в утверждении (2).

5.19. Для любого элемента $\mathbf{f} \in L^1(\mathcal{P})$ положим

$$M_{\mathcal{B}(\Omega)}(\mathbf{f}) := (M_{\mathcal{B}}(\mathbf{f}))^\wedge,$$

где $(\cdot)^\wedge$ — изоморфизм $L^1(\mathcal{P}, \mathcal{B})$ на $L^1(\Omega)$, полученный продолжением изоморфизма между $L^\infty(\mathcal{P}, \mathcal{B})$ и $L^\infty(\Omega)$, фигурирующего в утверждении (3) последней леммы.

Предложение. *Функция*

$$M_{\mathcal{B}(\Omega)}(|\cdot|)\colon L^1(\mathcal{P}) \to L^1(\Omega)$$

является монотонной решеточной нормой, относительно которой решетка $L^1(\mathcal{P})$ представляет собой РБК *над $L^1(\Omega)$.*

Доказательство. Согласно 2.7, банаховы решетки $L^1(\mathcal{P})$ и $L^1(\mathcal{P},\mathcal{B})$ изоморфны соответственно решеткам $L^1(A,\mu)$ и $L^1(B,\mu_0)$. При помощи этих изоморфизмов оператор условного ожидания $M_{\mathcal{B}}$, очевидно, переходит в свой «абстрактный» аналог M_B (см. 2.21). По теореме 3.18 РНП $(L^1(A,\mu), M_B(|\cdot|))$ представляет собой РБК над $L^1(B,\mu_0)$. Следовательно, $(L^1(\mathcal{P}), M_{\mathcal{B}}(|\cdot|))$ является РБК над $L^1(\mathcal{P},\mathcal{B})$, а $(L^1(\mathcal{P}), M_{\mathcal{B}(\Omega)}(|\cdot|))$ — РБК над $L^1(\Omega)$. Предложение доказано.

5.20. Теорема. *Пусть $(\mathcal{P},\mathcal{A},\mu)$ — пространство с конечной мерой, $\mathcal{B}$ — σ-подалгебра $\mathcal{A}$. Зафиксируем лифтинг в $L^\infty(\mathcal{P})$ и рассмотрим фактор-пространство $(\Omega,\mathcal{B}(\Omega),\nu)$ пространства $(\mathcal{P},\mathcal{A},\mu)$, порожденное σ-алгеброй $\mathcal{B}$. Тогда существуют единственное с точностью до изоморфизма* ИРБР *$\mathcal{X}$ над Ω с лифтингом и изоморфизм $(\cdot)^\wedge$ векторной решетки $L^1(\mathcal{P})$ на $L^1(\Omega,\mathcal{X})$ такие, что для всех $\mathbf{f} \in L^\infty(\mathcal{P})$ и для каждого слоя $\omega \in \Omega$ справедливо соотношение*

$$M_{\mathcal{B}}(|\mathbf{f}|)(p) = \|\mathbf{f}^\wedge(\omega)\|_{\mathcal{X}(\omega)} \quad \text{при } p \in \omega.$$

Каждый слой $\mathcal{X}(\omega)$ может быть представлен в виде $L^1(A_\omega,\mu_\omega)$, где A_ω — полная булева алгебра и μ_ω — мера на ней, так, что для каждого класса $\mathbf{f} \in L^\infty(\mathcal{P})$ будут иметь место следующие представления:

$$M_{\mathcal{B}}(\mathbf{f})(p) = \int \mathbf{f}^\wedge(\omega)\,d\mu_\omega \quad \text{при } p \in \omega,$$

$$\int_{\mathcal{P}} \mathbf{f}\,d\mu = \int_\Omega \left(\int (\mathbf{f}^\wedge)_\sim(\omega)\,d\mu_\omega\right) d\nu.$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{Y}$ — реализационное НРБР для РБК $(L^1(\mathcal{P}), M_{\mathcal{B}(\Omega)}(|\cdot|))$ (см. 3.17). Положим $\mathcal{X} := \mathcal{Y}\circ\tau$, где τ — каноническое погружение Ω в стоуновский компакт алгебры $B(\Omega)$. Как нетрудно убедиться,

$$M_{\mathcal{B}(\Omega)}(|\mathbf{f}|)_{\sim} \colon \omega \mapsto \|\mathbf{f}^{\wedge}(\omega)\|_{\mathcal{X}(\omega)},$$

а значит,

$$M_{\mathcal{B}}(|\mathbf{f}|)_{\sim} \equiv \|\mathbf{f}^{\wedge}(\omega)\|_{\mathcal{X}(\omega)}$$

на каждом слое $\omega \in \Omega$. При этом норма $\|\cdot\|_{\mathcal{X}(\omega)}$ аддитивна, а значит (см. 2.17), найдутся полная булева алгебра A_ω и мера μ_ω на ней такие, что банахова решетка $\mathcal{X}(\omega)$ порядково изометрична $L^1(A_\omega, \mu_\omega)$. Отсюда с учетом известных свойств условного ожидания вытекают все оставшиеся утверждения теоремы.

5.21. Замечание. Формулы, аналогичные фигурирующим в последней теореме, можно также получить для произвольных классов $\mathbf{f} \in L^1(\mathcal{P})$, должным образом определив значение класса $\mathbf{f}$ в точке. А именно, $\mathbf{f}(\omega)$, $\mathbf{f} \in L^1(\mathcal{P})$, следует положить равным $\hat{\mathbf{f}}(\tau(\omega))$ для таких ω, что $\tau(\omega) \in \operatorname{dom}\hat{\mathbf{f}}$ (здесь $\hat{\mathbf{f}}$ — стоуновское преобразование $\mathbf{f}$). Значение в точке для классов сечений определяется аналогично.

Литература

1. *Абрамович Ю. А.* Об изометриях нормированных решеток // *Оптимизация.* 1988. Т. 43 (60). С. 74–80.

2. *Боровков А. А. Математическая статистика.* М.: Наука, 1984.

3. *Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств.* М.: Физматгиз, 1961.

4. *Гутман А. Е.* Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // *Линейные операторы, согласованные с порядком* / Тр. Ин-та математики. Новосибирск: РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики, 1995. Т. 29. С. 63–211.

5. *Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.* М. — Л.: Гостехиздат, 1950.

6. *Кусраев А. Г. Векторная двойственность и ее приложения.* Новосибирск: Наука, 1985.

7. *Кусраев А. Г.* Линейные операторы в решеточно нормированных пространствах // *Исследования по геометрии «в целом» и математическому анализу* / Тр. Ин-та математики / АН СССР. Сиб. отд-ние. Новосибирск: Наука, 1987. Т. 9. С. 84–123.

8. *Кусраев А. Г.* Произведение и проективный предел векторных мер // *Современные проблемы геометрии и анализа* / Тр. Ин-та математики / АН СССР. Сиб. отд-ние. Новосибирск: Наука, 1989. Т. 14. С. 132–152.

9. *Сикорский Р. Булевы алгебры.* М.: Мир, 1969.

10. *Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces* / Lecture Notes in Math. V. 338. Berlin, etc.: Springer, 1973.

11. *Maharam D.* On a theorem of von Neumann // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1958. V. 9. P. 987–994.

12. *Ogasawara T.* Theory of vector lattices // *J. Sci. Hirosima Univ., Ser. A.* 1942. V. 12. P. 37–100; 1944. V. 13. P. 41–161.

13. *Oxtoby J. C. Measure and Category.* New York: Springer, 1971.

14. *Semadeni Z. Banach Spaces of Continuous Functions.* Warszawa: Polish Scientific Publ., 1971.

15. *Stone M. H.* Applications of the theory of Boolean rings to general topology // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1937. V. 41. P. 375–309.

16. *Ionescu Tulcea A., Ionescu Tulcea C.* On the lifting property. I // *J. Math. Anal. Appl.* 1961. V. 3. P. 537–546.