МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

А. Е. Гутман, Д. С. Феофанов

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ГЛАВНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ КОМПОНЕНТ

Учебное пособие

НОВОСИБИРСК
2000

В данной работе изучаются главные компоненты в пространствах операторов, действующих в векторных решетках и решеточно нормированных пространствах. При этом внимание сосредоточено на компонентах, порожденных операторами, сохраняющими дизъюнктность. Основными результатами являются критерии принадлежности оператора компоненте $\{A\}^{\perp\perp}$, порожденной данным оператором A. Каждый из установленных критериев дает конкретное аналитическое описание рассматриваемой компоненты.

Введение

Одной из важнейших проблем теории положительных и мажорируемых операторов является аналитическое описание операторных компонент. Насколько нам известно, общее решение этой проблемы до сих пор не найдено и исследования ведутся в основном в направлении поиска описаний компонент в различных частных случаях. В данной работе приводятся некоторые новые результаты, касающиеся аналитического описания главных компонент для случая операторов, сохраняющих дизъюнктность.

Понятие компоненты в векторной решетке E вводится следующим образом. Для произвольного множества $D \subset E$ определяется дизъюнктное дополнение

$$D^{\perp} = \{e \in E \ : \ e \perp d \ \text{для всех} \ d \in D\},$$

где $\perp$ — отношение дизъюнктности:

$$e \perp d \ \Leftrightarrow \ |e| \wedge |d| = 0.$$

Компонентой, порожденной D, называется множество $(D^{\perp})^{\perp}$ (более коротко обозначаемое символом $D^{\perp\perp}$). Главной компонентой называется компонента, порожденная одноэлементным множеством. Аналогичные понятия и обозначения вводятся для случая решеточно нормированных пространств.

В настоящей статье рассматриваются главные компоненты в пространствах операторов. При этом внимание сосредоточено на компонентах, порожденных операторами, сохраняющими дизъюнктность.

Следующая таблица схематично изображает основные результаты данной работы.

T	A	$\lvert T\rvert \in \{A\}^{\perp\perp}$	п.
$T\colon E \to F$	$A \in \mathcal{DPO}$	$T = g \circ A$	2.6
$T\colon E \to \mathcal{V}$	$A \in \mathcal{DPO}$	$T = g \circ A$	2.7
$T\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$	$A \in \mathcal{DPO}, A \geqslant 0$	$T = g \circ A_{\mathcal{U}}$	2.8
$T\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$	$A = W \circ S \circ w$	$T = \widehat{W} \circ S_{\mathcal{U}} \circ w$	2.9
$T\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$	$A \in \mathcal{DPO}$	$T = \bigoplus\limits_{\xi \in \Xi} \widehat{W}_\xi \circ (\rho_\xi S)_{\mathcal{U}_\xi} \circ w_\xi$	2.11
$T\colon E(\mathcal{X}) \to F(\mathcal{Y})$	$Ae = W\big((we) \bullet s\big)$	$Tu = \widehat{W}\ \overline{\otimes}\ \big((wu) \bullet s\big)$	3.7
$T\colon E(\mathcal{X}) \to F(\mathcal{Y})$	$A \in \mathcal{DPO}$	$Tu = \widehat{W}\,\overline{\otimes} \bigoplus\limits_{\xi \in \Xi} (w_\xi u \bullet s)\vert_{Q_\xi}$	3.8

В первой колонке таблицы указаны пространства, в которых действует оператор T (здесь E и F — K-пространства, $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ — пространства Банаха — Канторовича, $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — просторные банаховы расслоения), во второй колонке описан вид оператора A (здесь $\mathcal{DPO}$ — класс регулярных операторов, сохраняющих дизъюнктность), в третьей колонке приведены представления оператора T, равносильные соотношению $\lvert T\rvert \in \{A\}^{\perp\perp}$, а в четвертой колонке перечислены номера соответствующих теорем.

1. Вспомогательные сведения о пространствах Банаха — Канторовича и мажорируемых операторах

Основные определения и факты, касающиеся векторных решеток, решеточно нормированных пространств и мажорируемых операторов, можно найти в [1, 4–6].

На протяжении всего текста мы будем использовать терминологию и обозначения из [2], причем иногда без явных ссылок. Отметим, что работа [2] используется нами как своего рода справочник и присутствие ссылки на [2] в формулировке той или иной теоремы не всегда означает, что соответствующий факт был впервые установлен именно в [2].

Пусть E и F — векторные решетки. Линейный оператор $T\colon E \to F$ называется *положительным*, если $Te \geqslant 0$ для всех положительных $e \in E$, и *регулярным*, если существуют такие положительные операторы $T_1, T_2\colon E \to F$, что $T = T_1 - T_2$. Совокупность всех регулярных операторов из E в F обозначается символом $M(E, F)$.

1.1. Теорема Рисса — Канторовича. *Если E — векторная решетка и F — K-пространство, то $M(E, F)$ является K-пространством. При этом для любого порядково ограниченного подмножества $\mathcal{T} \subset M(E, F)$ и любого положительного элемента $e \in E$ имеют место следующие соотношения:*

$$(\sup \mathcal{T})e = \sup\{T_1e_1 + \cdots + T_ne_n : T_i \in \mathcal{T},\ e_i \in E^+,\ e_1 + \cdots + e_n = e,\ n \in \mathbb{N}\},$$

$$(\inf \mathcal{T})e = \inf\{T_1e_1 + \cdots + T_ne_n : T_i \in \mathcal{T},\ e_i \in E^+,\ e_1 + \cdots + e_n = e,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

В частности, если F — K-пространство, то $M(E,F)$ является векторной решеткой, что позволяет говорить о компонентах в $M(E,F)$.

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ — решеточно нормированные пространства (РНП) над векторными решетками E и F соответственно. Говорят, что положительный оператор $S\colon E \to F$ является *мажорантой* линейного оператора $T\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, если

$$\lvert Tu \rvert \leqslant S\lvert u \rvert \quad \text{для всех } u \in \mathcal{U}.$$

Оператор, имеющий мажоранту, называется *мажорируемым*. Совокупность всех мажорируемых операторов из $\mathcal{U}$ в $\mathcal{V}$ обозначается символом $M(\mathcal{U},\mathcal{V})$.

Напомним, что пространством Банаха — Канторовича (ПБК) называется d-разложимое o-полное РНП над K-пространством.

По умолчанию все РНП в этой работе рассматриваются над K-пространствами и в отсутствие соответствующих явных указаний предполагаются d-разложимыми.

1.2. Теорема [2: 1.6.9]. *Пусть* $\mathcal{U}$ — РНП *над* E, *а* $\mathcal{V}$ — РНП *над* F.

(1) *Каждый мажорируемый оператор* $T\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ *имеет наименьшую мажоранту* (*относительно порядка в* $M(E,F)$), *обозначаемую символом* $\lvert T \rvert$.

(2) *Если* $\mathcal{V}$ — ПБК, *то отображение* $\lvert\cdot\rvert\colon T \mapsto \lvert T \rvert$ *является разложимой* $M(E,F)$*-значной нормой на* $M(\mathcal{U},\mathcal{V})$, *в паре с которой* $M(\mathcal{U},\mathcal{V})$ *представляет собой* ПБК.

Последняя теорема дает основание для рассмотрения компонент в $M(\mathcal{U},\mathcal{V})$.

Пусть G — расширенное К-пространство, E и F — фундаменты $G, \mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ — РНП над E и F соответственно. Линейный оператор $T\colon E \to F$ называют *нерасширяющим*, если

$$(\forall\, e \in E)(\forall\, g \in G)(\, e \perp g \,\Rightarrow\, Te \perp g\,).$$

Линейный оператор $T\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ называют *нерасширяющим*, если

$$(\forall\, u \in \mathcal{U})(\forall\, g \in G)(\, |u| \perp g \,\Rightarrow\, |Tu| \perp g\,).$$

Ограниченные нерасширяющие операторы называют *ортоморфизмами*, а их совокупность обозначают через $\mathrm{Orth}(\mathcal{U},\mathcal{V})$. Вместо $\mathrm{Orth}(\mathcal{U},\mathcal{U})$ пишут $\mathrm{Orth}(\mathcal{U})$.

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ — РНП. *Тенью* оператора $T\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ называется отображение $h\colon \mathrm{Pr}(\mathcal{U}) \to \mathrm{Pr}(\mathcal{V})$, определенное формулой $h(\pi) = \sup_{u\in\mathcal{U}} \langle T\pi u\rangle$. (Здесь и ниже $\mathrm{Pr}(\mathcal{U})$ — булева алгебра порядковых проекторов РНП $\mathcal{U}$, а $\langle u\rangle$ — порядковый проектор на компоненту, порожденную элементом u.)

Пусть $\mathcal{U}$ — РНП над E, не обязательно d-разложимое. Под *d-разложимой оболочкой* $\mathcal{U}$ понимается минимальное d-разложимое РНП, содержащее $\mathcal{U}$ как подпространство с индуцированной нормой. Для d-разложимой оболочки $\mathcal{U}$ принято обозначение $d_{\mathrm{fin}}\mathcal{U}$.

Пусть E и F — К-пространства, $\mathcal{U}$ — РНП над E, $A\colon E \to F$ — решеточный гомоморфизм. Рассмотрим векторное подпространство

$$\mathcal{U}_0 := \{u \in \mathcal{U} : A|u| = 0\}.$$

Класс эквивалентности из $\mathcal{U}/\mathcal{U}_0$, содержащий элемент $u \in \mathcal{U}$, обозначается символом $A_{\mathcal{U}}u$. Легко убедится в том, что $\mathcal{U}/\mathcal{U}_0$

представляет собой (вообще говоря, не d-разложимое) РНП над F относительно нормы $|A_{\mathcal{U}}u| := A|u|$. В этом случае d-разложимая оболочка РНП $\mathcal{U}/\mathcal{U}_0$ называется *нормативным преобразованием* $\mathcal{U}$ посредством A и обозначается символом $A\mathcal{U}$. Линейный оператор $A_{\mathcal{U}}\colon \mathcal{U} \to A\mathcal{U}$ называется *оператором нормативного преобразования* $\mathcal{U}$ посредством A.

Пусть $\overline{E}$ и F — K-пространства, E — идеал $\overline{E}$, $\mathcal{U}$ — ПБК над E, $S\colon \overline{E} \to F$ — решеточный гомоморфизм. Условимся обозначать символом $S\mathcal{U}$ нормативное преобразование $\mathcal{U}$ посредством $S|_E$, а символом $S_{\mathcal{U}}$ — оператор нормативного преобразования $\mathcal{U}$ посредством $S|_E$.

1.3. Теорема Кутателадзе [2: 6.2.19]. *Пусть E — векторная решетка и F —* K-*пространство. Положительный оператор $T\colon E \to F$ сохраняет дизъюнктность тогда и только тогда, когда для любого оператора $S\colon E \to F$, удовлетворяющего неравенствам $0 \leqslant S \leqslant T$, найдется ортоморфизм $g \in \mathrm{Orth}(F)$ такой, что $0 \leqslant g \leqslant \mathrm{id}_F$ и $S = g \circ T$, где $\mathrm{id}_F\colon F \to F$ — тождественный оператор.*

1.4. Теорема [2: 6.1.8]. *Пусть $\mathcal{U}$ —* РНП *над E, $\mathcal{V}$ —* РНП *над F, $\mathcal{U}_0$ — аппроксимирующее векторное подпространство $\mathcal{U}$, $T_0\colon \mathcal{U}_0 \to \mathcal{V}$ — линейный оператор и пусть $S\colon E \to F$ — o-непрерывный положительный оператор, сохраняющий дизъюнктность. Предположим, что*

$$|T_0u_0| \leqslant S|u_0| \quad \textit{для всех } u_0 \in \mathcal{U}_0.$$

Тогда оператор T_0 допускает единственное линейное продолжение $T\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ такое, что

$$|Tu| \leqslant S|u| \quad \textit{для всех } u \in \mathcal{U}.$$

1.5. Предложение [2: 6.2.13]. *Пусть E и F — фундаменты* K-*пространства G, а $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ —* РНП *над E и F соответственно, причем* РНП *$\mathcal{U}$ порядково полно. Линейный оператор $T\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ является ортоморфизмом тогда и только тогда, когда он мажорируем и его наименьшая мажоранта $|T|\colon E \to F$ является ортоморфизмом.*

1.6. Предложение [2: 6.2.14]. *Любой ортоморфизм, действующий из* ПБК *в* РНП, *o-непрерывен.*

1.7. Следствие [2: 6.2.16]. *Пусть E и F — фундаменты* K-*пространства G, и $\mathcal{V}$ —* РНП *над F. Если два ортоморфизма $S, T \in \mathrm{Orth}(E, \mathcal{V})$ совпадают на некотором подмножестве $E_0 \subset E$, то они совпадают на $E_0^{\perp\perp}$.*

Говорят, что линейный оператор $T\colon E \to F$ является *оператором взвешенного сдвига*, если существуют фундаменты $E' \subset mE$ и $F' \subset mF$, ортоморфизмы $w\colon E \to E'$ и $W\colon F' \to F$ и оператор сдвига $S\colon E' \to F'$ такие, что $T = W \circ S \circ w$. Композиция $W \circ S \circ w$ называется *WSW-представлением T*, а операторы W, S и w называются *внешним весом*, *сдвигом* и *внутренним весом* представления $W \circ S \circ w$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "w"'] & F \\ E' \arrow[r, "S"] & F' \arrow[u, "W"'] \end{tikzcd}$$

2. Описание главных компонент в терминах ортоморфизмов

В данном параграфе дается описание главных операторных компонент на «абстрактном» языке — в терминах РНП, операторов сдвига и ортоморфизмов.

2.1. Лемма. *Пусть* F — K-*пространство,* $f_n \in F^+$ $(n \in \mathbb{N})$. *Если последовательность* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *не ограничена в* mF, *то существует элемент* $0 < f \in mF$ *такой, что для всех* $k \in \mathbb{N}$ *имеет место соотношение*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}(f_n \wedge kf) = kf.$$

◀ Не нарушая общности, можно считать, что $mF = C_\infty(Q)$, где Q — экстремально несвязный компакт. Определим функцию $\alpha\colon \overline{\mathbb{R}} \to [-1, 1]$ следующим образом:

$$\alpha(x) := \begin{cases} (2/\pi)\mathrm{arctg}(x): & |x| < \infty, \\ -1: & x = -\infty, \\ 1: & x = \infty. \end{cases}$$

Ясно, что α является топологическим и порядковым изоморфизмом $\overline{\mathbb{R}}$ на $[-1, 1]$. Поэтому отображение $f \mapsto \alpha \circ f$ представляет собой порядково изоморфное вложение mF в $C(Q, [-1, 1])$. Множество $\{\alpha \circ f_n : n \in \mathbb{N}\}$, очевидно, имеет супремум $g \in C(Q, [-1, 1])$.

Положим $A = \{q \in Q : g(q) = 1\}$. Покажем, что A — нетощее множество. Действительно, если множество A является тощим, то $\alpha^{-1} \circ f \in C_\infty(Q)$ — верхняя граница множества $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, а значит, последовательность $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

ограничена в mF, что противоречит условию доказываемой леммы.

Очевидно, множество A замкнуто. Поскольку оно не является тощим, его внутренность непуста. Следовательно, A содержит некоторое открыто-замкнутое множество B. Пусть f — (непрерывная) характеристическая функция χ_B множества B. Тогда

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} (\alpha \circ f_n) \wedge (\alpha \circ kf) = \alpha \circ kf,$$

а значит, $\sup_{n\in\mathbb{N}}(f_n \wedge kf) = kf$. ►

2.2. Лемма. *Пусть E, F — K-пространства, $A\colon E \to F$ — решеточный гомоморфизм. Если возрастающая последовательность $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ положительных элементов* $\mathrm{Orth}(F, mF)$ *ограничена, то последовательность $(g_n \circ A)_{n\in\mathbb{N}}$ ограничена в $M(E,F)$ и выполняется следующее соотношение:*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} (g_n \circ A) = \Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} g_n\Big) \circ A.$$

◄ Поскольку последовательность $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ограничена в $\mathrm{Orth}(F, mF)$, существует $\sup_{n\in\mathbb{N}} g_n \in \mathrm{Orth}(F, mF)$. Как известно, для всех $e \in E^+$

$$\begin{aligned}\Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} g_n\Big)(Ae) &= \sup\Big\{\sum_{i=1}^{n} g_i\rho_i Ae : (\rho_i) \text{ — разбиение единицы в } \mathrm{Pr}(F),\ n \in \mathbb{N}\Big\} \\ &= \sup\Big\{\Big(\sum_{i=1}^{n} \rho_i g_i\Big)Ae : (\rho_i) \text{ — разбиение единицы в } \mathrm{Pr}(F),\ n \in \mathbb{N}\Big\}.\end{aligned}$$

Последовательность (g_n) возрастает, а значит, в предыдущем выражении в качестве (ρ_i) можно взять $(0,0,\dots,0,1)$; супремум при этом не изменится:

$$\Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} g_n\Big)(Ae) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\,(g_nAe). \tag{1}$$

Пусть h — тень A. Тогда

$$\begin{aligned}
&\sup_{n\in\mathbb{N}}\,(g_n\circ A)e \\
&\qquad= \sup\big\{g_1A\pi_1e+\dots+g_nA\pi_ne : \\
&\qquad\qquad\qquad (\pi_i) \text{ — разбиение единицы в } \mathrm{Pr}(E),\ n\in\mathbb{N}\big\} \\
&\qquad= \sup\big\{g_1h(\pi_1)Ae+\dots+g_nh(\pi_n)Ae : \\
&\qquad\qquad\qquad (\pi_i) \text{ — разбиение единицы в } \mathrm{Pr}(E),\ n\in\mathbb{N}\big\} \\
&\qquad= \sup\big\{g_nh(1)Ae : n\in\mathbb{N}\big\} \quad \big(\text{поскольку } (g_n) \text{ возрастает}\big) \\
&\qquad= \sup_{n\in\mathbb{N}}(g_nAe) \\
&\qquad= \Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} g_n\Big)\circ A\,e \quad \big(\text{в силу (1)}\big). \quad \blacktriangleright
\end{aligned}$$

2.3. Лемма. *Пусть E, F — K-пространства, $A\colon E\to F$ — решеточный гомоморфизм такой, что $\{\operatorname{im} A\}^{\perp\perp}=F$, и пусть $T\colon E\to F$ — положительный оператор. Предположим, что $T\in\{A\}^{\perp\perp}$. Тогда существует такой положительный элемент $g\in\mathrm{Orth}(F,mF)$, что $T=g\circ A$.*

◀ Как известно, включение $T\in\{A\}^{\perp\perp}$ означает

$$T=\sup_{n\in\mathbb{N}}\,(T\wedge nA). \tag{2}$$

Очевидно, что оператор nA является решеточным гомоморфизмом и удовлетворяет неравенствам $0\leqslant T\wedge nA\leqslant nA$.

По теореме Кутателадзе (см. 1.3) существует ортоморфизм $g_n \in \mathrm{Orth}(F)$ такой, что $0 \leqslant g_n \leqslant \mathrm{id}_F$ и $T \wedge nA = g_n \circ (nA)$.

В силу (2) получаем

$$T = \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n \circ (nA) = \sup_{n\in\mathbb{N}} (ng_n \circ A). \tag{3}$$

Положим $\bar{g}_n := ng_n$ и докажем, что последовательность $(\bar{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ограничена в $\mathrm{Orth}(mF)$. Пусть это не так. Воспользуемся леммой 2.1 применительно к последовательности $(\bar{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Пусть $f \in \mathrm{Orth}(mF)$ — элемент, существование которого гарантирует лемма, и k — произвольное натуральное число. Положим $\widetilde{g}_n := \bar{g}_n \wedge kf$. Последовательность $(\widetilde{g}_n)$ ограничена в $\mathrm{Orth}(mF)$. Отметим также, что $\widetilde{g}_n \leqslant \bar{g}_n$, а значит,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} (\widetilde{g}_n \circ A) \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} (\bar{g}_n \circ A). \tag{4}$$

Привлекая лемму 2.2 применительно к последовательности $(\widetilde{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, получаем

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} (\widetilde{g}_n \circ A) = \Bigl(\sup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{g}_n\Bigr) \circ A. \tag{5}$$

Используя (3), (4) и (5), приходим к соотношениям

$$T \geqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} (\widetilde{g}_n \circ A) = \Bigl(\sup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{g}_n\Bigr) \circ A = kf \circ A.$$

Ортоморфизм f не является тождественно нулевым на компоненте $\{\mathrm{im}\, A\}^{\perp\perp}$. Из теоремы 1.7 следует, что f отличен от нуля на некотором элементе Ae, где $e \in E^+$. Таким образом, $Te \geqslant k(f \circ Ae)$, где $f \circ Ae \neq 0$, а число $k \in \mathbb{N}$ — произвольно.

Из полученного противоречия следует, что последовательность $(\bar{g}_n)$ ограничена в $\mathrm{Orth}(mF)$. По построению последовательность $(\bar{g}_n)$ возрастает. Следовательно, мы оказались в условиях леммы 2.2 применительно к последовательности $(\bar{g}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Значит,

$$T = \sup_{n\in\mathbb{N}} (\bar{g}_n \circ A) = \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \bar{g}_n\right) \circ A.$$

Поскольку $\mathrm{Orth}(mF)$ является K-пространством, в пространстве $\mathrm{Orth}(mF)$ существует $\sup_{n\in\mathbb{N}} \bar{g}_n =: \bar{g}$. Сужение $g := \bar{g}|_F$ является искомым ортоморфизмом. ▶

2.4. Лемма. *Пусть E, F — K-пространства, $A\colon E \to F$ — решеточный гомоморфизм и $T\colon E \to F$ — положительный оператор. Включение $T \in \{A\}^{\perp\perp}$ выполняется тогда и только тогда, когда существует такой положительный элемент $g \in \mathrm{Orth}(F, mF)$, что $T = g \circ A$.*

◀ *Достаточность.* Обозначим $\{\mathrm{im}\, A\}^{\perp\perp}$ через F_0. Докажем, что значения T лежат в F_0. Условие $T \in \{A\}^{\perp\perp}$ означает равенство

$$T = \sup_{n\in\mathbb{N}} (T \wedge nA). \tag{6}$$

Положим $T_n := T \wedge nA$. Ясно, что значения T_n лежат в F_0, поскольку $T_n \leqslant nA$. Применяя теорему 1.1 и равенство (6), получаем

$$Te = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} T_i e_i :\ n \in \mathbb{N},\ e_i \in E^+,\ \sum_{i=1}^{n} e_i = e\right\} \tag{7}$$

для всех $e \in E^+$. Последовательность $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ возрастает по построению, а значит, формулу (7) можно переписать в виде

$$Te = \sup\{T_n e : n \in \mathbb{N}\}.$$

Таким образом, от супремума операторов мы перешли к супремуму элементов K-пространства F_0 и тем самым доказали, что $\operatorname{im} T \subset F_0$. По теореме 2.3 существует такой элемент $g_0 \in \operatorname{Orth}(F_0, mF_0)$, что $T = g_0 \circ A$. Искомый ортоморфизм g определим как $g_0 \circ \langle F_0 \rangle$.

Необходимость. Пусть выполняется равенство $T = g \circ A$, где $0 \leqslant g \in \operatorname{Orth}(F, mF)$. Докажем включение $T \in \{A\}^{\perp\perp}$. Положим $g_n = n \cdot \mathrm{id}_{mF} \wedge g$, $n \in \mathbb{N}$. Отметим, что $g_n \circ A \in \{A\}^{\perp\perp}$. Последовательность $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ограничена ортоморфизмом g; следовательно, в силу леммы 2.2 выполняется равенство

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} (g_n \circ A) = \Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} g_n\Big) \circ A = T.$$

Операторы в левой части последнего равенства принадлежат $\{A\}^{\perp\perp}$, а значит, этим свойством обладает и оператор T. ▶

Лемму 2.4 нельзя усилить, потребовав существование нужного ортоморфизма g в $\operatorname{Orth}(F)$, что подтверждает следующий пример.

Пример. Положим $E := s_{\mathrm{fin}}$, $F := l_\infty$, и пусть A — тождественное вложение E в F. Ортоморфизм $g \in \operatorname{Orth}(mF)$ определим формулой

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_1, 2x_2, 3x_3, \dots, nx_n, \dots).$$

Пусть оператор $T\colon E \to F$ действует как сужение g на E. Очевидно, что $T = g \circ A$, а значит, $T \in \{A\}^{\perp\perp}$. Тем не менее нет такого ортоморфизма $\bar{g} \in \operatorname{Orth}(F)$, что $T = \bar{g} \circ A$.

2.5. Лемма. *Пусть E, F — K-пространства, $A\colon E \to F$ — решеточный гомоморфизм и $T\colon E \to F$ — регулярный оператор. Включение $T \in \{A\}^{\perp\perp}$ выполняется тогда и только тогда, когда существует такой элемент $g \in \operatorname{Orth}(F, mF)$, что $T = g \circ A$.*

◀ *Достаточность.* Пусть T^+ и T^- — положительная и отрицательная части оператора T. Из включения $T \in \{A\}^{\perp\perp}$ следует, что $T^+, T^- \in \{A\}^{\perp\perp}$. Согласно лемме 2.4 существуют $g_1, g_2 \in \operatorname{Orth}(F, mF)$ такие, что $T^+ = g_1 \circ A$, $T^- = g_2 \circ A$. Следовательно, $T = (g_1 - g_2) \circ A$.

Необходимость. Пусть $T = g \circ A$ для некоторого элемента $g \in \operatorname{Orth}(F, mF)$. Положим $T_1 = g^+ \circ A$, $T_2 = g^- \circ A$. Из леммы 2.4 вытекает, что $T_1, T_2 \in \{A\}^{\perp\perp}$, а значит, $T = T_1 - T_2 \in \{A\}^{\perp\perp}$. ▶

2.6. Следующее утверждение вытекает, например, из [2: теорема 6.1.1].

Предложение. *Пусть E — векторная решетка, F — K-пространство и пусть $T\colon E \to F$ — регулярный оператор, сохраняющий дизъюнктность. Тогда существует ортоморфизм $f \in \operatorname{Orth}(F)$ такой, что $f \circ f = |f| = \mathrm{id}_F$ и $T = f \circ |T|$.*

Теорема. *Пусть E, F — K-пространства, $A\colon E \to F$ — регулярный оператор, сохраняющий дизъюнктность, и пусть $T\colon E \to F$ — произвольный регулярный оператор. Включение $T \in \{A\}^{\perp\perp}$ выполняется тогда и только тогда, когда существует такой элемент $g \in \operatorname{Orth}(F, mF)$, что $T = g \circ A$.*

◀ Как известно, оператор $|A|$ является решеточным гомоморфизмом. Из сформулированного выше предложения следует, что $A = g_1 \circ |A|$ для некоторого элемента $g_1 \in \mathrm{Orth}(F)$, удовлетворяющего условию $g_1 \circ g_1 = \mathrm{id}_F$.

Достаточность. Поскольку $T \in \{A\}^{\perp\perp} = \{|A|\}^{\perp\perp}$, применение леммы 2.5 дает равенство $T = g_2 \circ |A|$ для некоторого элемента $g_2 \in \mathrm{Orth}(F, mF)$. Следовательно

$$T = g_2 \circ |A| = g_2 \circ g_1 \circ g_1 \circ |A| = g_2 \circ g_1 \circ A.$$

Необходимость. Пусть выполняется равенство $T = g \circ A$ для некоторого элемента $g \in \mathrm{Orth}(F, mF)$. Тогда $T = g \circ A = g \circ g_1 \circ |A|$, откуда с учетом леммы 2.5 следует включение $T \in \{|A|\}^{\perp\perp} = \{A\}^{\perp\perp}$. ▶

2.7. Теорема. *Пусть E и F — K-пространства, $\mathcal{V}$ — ПБК над F, $A\colon E \to F$ — оператор, сохраняющий дизъюнктность, $T\colon E \to \mathcal{V}$ — мажорируемый оператор и пусть $\boldsymbol{|}T\boldsymbol{|}\colon E \to F$ — точная мажоранта T. Включение $\boldsymbol{|}T\boldsymbol{|} \in \{A\}^{\perp\perp}$ выполняется тогда и только тогда, когда существует такой ортоморфизм $g \in \mathrm{Orth}(F, m\mathcal{V})$, что $T = g \circ A$.*

◀ *Достаточность.* В силу теоремы 2.6 существует такой ортоморфизм $\bar{g} \in \mathrm{Orth}(F, mF)$, что $\boldsymbol{|}T\boldsymbol{|} = \bar{g} \circ A$. Сначала определим оператор g_0 на образе A формулой $g_0(Ae) := Te$. Покажем корректность этого определения. Действительно, пусть e_1 и e_2 — такие элементы E, что $A(e_1) = A(e_2)$. Покажем, что в этом случае $Te_1 = Te_2$. Поскольку A — гомоморфизм, выполняется равенство $0 = A(e_1 - e_2) = A|e_1 - e_2|$. Тогда имеют место соотношения

$$\boldsymbol{|}Te_1 - Te_2\boldsymbol{|} = \Big\boldsymbol{|}T(e_1 - e_2)\Big\boldsymbol{|} \leqslant \boldsymbol{|}T\boldsymbol{|}|e_1 - e_2| = \bar{g}A|e_1 - e_2| = 0.$$

Таким образом, определение g_0 на $\mathrm{im}\, A$ корректно.

Докажем теперь, что $\bigl|g_0(Ae)\bigr| \leqslant \bar{g}|Ae|$ для всех $e \in E$. Возьмем произвольный элемент $e \in E$. Тогда

$$\bigl|g_0(Ae)\bigr| = |\!|Te|\!| \leqslant |\!|T|\!||e| = \bar{g}A|e| = \bar{g}|Ae|.$$

Поскольку $\bar{g}$ — ортоморфизм, он сохраняет дизъюнктность. Из 1.6 вытекает, что оператор $\bar{g}$ o-непрерывен, а значит, по теореме 1.4 существует единственное линейное продолжение g оператора g_0 на $\{\operatorname{im} A\}^{\perp\perp}$ с сохранением неравенства $\bigl|g(f)\bigr| \leqslant \bar{g}(|f|)$ для всех $f \in \{\operatorname{im} A\}^{\perp\perp}$. По теореме 1.5 оператор g является ортоморфизмом.

Необходимость. Пусть $T = g \circ A$, где $g \in \operatorname{Orth}(F, m\mathcal{V})$. Тогда, очевидно, выполняется неравенство $|\!|T|\!| \leqslant |\!|g|\!| \circ A$. В силу теоремы 2.6 имеет место включение $|\!|T|\!| \in \{A\}^{\perp\perp}$. ▶

2.8. Теорема. *Пусть E и F — K-пространства, $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ — ПБК над E и F соответственно, $A\colon E \to F$ — решеточный гомоморфизм, $A\mathcal{U}$ — нормативное преобразование $\mathcal{U}$ посредством A, $A_{\mathcal{U}}$ — соответствующий оператор нормативного преобразования, $T\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ — мажорируемый оператор, $|\!|T|\!|\colon E \to F$ — его точная мажоранта. Включение $|\!|T|\!| \in \{A\}^{\perp\perp}$ выполняется тогда и только тогда, когда существует такой элемент $g \in \operatorname{Orth}(A\mathcal{U}, m\mathcal{V})$, что $T = g \circ A_{\mathcal{U}}$.*

◀ *Достаточность.* Опираясь на лемму 2.4, мы можем утверждать, что существует оператор $\bar{g} \in \operatorname{Orth}(F, mF)$, для которого $|\!|T|\!| = \bar{g} \circ A$. Сначала определим оператор g_0 на $A_{\mathcal{U}}[\mathcal{U}]$ формулой $g_0(A_{\mathcal{U}}u) := Tu$. Поясним корректность этого определения. Действительно, пусть u_1 и u_2 — такие элементы $\mathcal{U}$, что $A_{\mathcal{U}}u_1 = A_{\mathcal{U}}u_2$. Покажем, что в этом случае

$Tu_1 = Tu_2$. Действительно,

$$\begin{aligned}\big|T(u_1 - u_2)\big| &\leqslant |T||u_1 - u_2| \\ &= \bar{g}A|u_1 - u_2| = \bar{g}\big|A_{\mathcal{U}}(u_1 - u_2)\big| = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, определение g_0 на $\operatorname{im} A$ корректно.

Убедимся, что $|g_0 A_{\mathcal{U}} u| \leqslant \bar{g}|A_{\mathcal{U}} u|$. В самом деле,

$$|g_0 A_{\mathcal{U}} u| = |Tu| \leqslant |T||u| = \bar{g}A|u| = \bar{g}|A_{\mathcal{U}} u|.$$

Установим равенство $\{A_{\mathcal{U}}[\mathcal{U}]\}^{\perp\perp} = A\mathcal{U}$. Из [2: 1.4.6] следует, что любой элемент $A\mathcal{U} = d_{\mathrm{fin}} A_{\mathcal{U}}[\mathcal{U}]$ представляется в виде $\sum_{i=1}^{n} \rho_i w_i$, где $\{\rho_i : i = 1, \ldots, n\}$ — разбиение единицы в $\Pr(E)$, w_i — элементы $A_{\mathcal{U}}[\mathcal{U}]$. Пусть $\sum_{i=1}^{n} \rho_i w_i \in \{A_{\mathcal{U}}[\mathcal{U}]\}^{\perp}$. Тогда для любого элемента $w_0 \in A_{\mathcal{U}}[\mathcal{U}]$ выполняются равенства

$$0 = \left|\sum_{i=1}^{n} \rho_i w_i\right| \wedge |w_0| = \left(\sum_{i=1}^{n} \rho_i |w_i|\right) \wedge |w_0|.$$

Поскольку $\rho_i w_i \perp \rho_j w_j$ при $i \neq j$, мы имеем $\rho_i w_i \perp w_0$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$. В качестве w_0 можно взять w_i. Из $\rho_i w_i \perp w_i$ вытекает $\rho_i w_i = 0$, а значит, $\sum_{i=1}^{n} \rho_i w_i = 0$. Таким образом, $\{A_{\mathcal{U}}[\mathcal{U}]\}^{\perp\perp} = A\mathcal{U}$.

По теореме 1.4 существует единственное линейное продолжение $\widetilde{g}$ оператора g_0 на $\{A_{\mathcal{U}}[\mathcal{U}]\}^{\perp\perp}$ с сохранением неравенства $|\widetilde{g}w| \leqslant \bar{g}|w|$. По предложению 1.5 оператор $\widetilde{g}$ является ортоморфизмом. Легко убедится в том, что оператор $g := \langle A_{\mathcal{U}}[\mathcal{U}]\rangle \circ \widetilde{g}$ является искомым ортоморфизмом.

Необходимость. Предположим, что $T = g \circ A_{\mathcal{U}}$, где $g \in \operatorname{Orth}(A\mathcal{U}, m\mathcal{V})$. Тогда имеет место неравенство $|T| \leqslant |g| \circ A$. Действительно, для любого $u \in \mathcal{U}$

$$|Tu| = |gA_{\mathcal{U}} u| \leqslant |g||A_{\mathcal{U}} u| = |g|A|u|.$$

Тогда в силу 2.4 выполняется включение $|T| \in \{A\}^{\perp\perp}$. ▶

2.9. Пусть E — K-пространство. Заметим, что для любого $w \in \operatorname{Orth}(E, mE)$ существует единственный элемент $\frac{1}{w} \in \operatorname{Orth}(\operatorname{im} w, E)$ такой, что $w \circ \frac{1}{w} = \langle w \rangle$.

Теорема. *Пусть E и F — K-пространства, $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ — ПБК над E и F соответственно, $A\colon E \to F$ — оператор взвешенного сдвига, $W \circ S \circ w$ — его WSW-представление, где $w \geqslant 0$. Положим $\mathcal{U}' = \{u \in m\mathcal{U} : |u| \in E'\}$, где $E' = \operatorname{dom} S$. Мажорируемый оператор $T\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ удовлетворяет условию $|T| \in \{A\}^{\perp\perp}$ тогда и только тогда, когда $T = \widehat{W} \circ S_{\mathcal{U}'} \circ w$ для некоторого $\widehat{W} \in \operatorname{Orth}(S\mathcal{U}', m\mathcal{V})$ такого, что $\left|\widehat{W}\right| \in \{W\}^{\perp\perp}$.*

◄ *Достаточность.* Согласно предложению 2.6 существует элемент $f \in \operatorname{Orth}(F, F)$ такой, что $f \circ f = |f| = \mathrm{id}_F$ и $W = f \circ |W|$. Без ограничения общности можно считать, что $E' = \operatorname{im} w$. Определим оператор $B\colon E' \to F$ следующей формулой: $B = f \circ A \circ \frac{1}{w}$. В пространстве $M(E, F)$ имеет место цепочка равенств

$$A \circ \frac{1}{w} \circ w = W \circ S \circ w \circ \frac{1}{w} \circ w = W \circ S \circ w,$$

которая, в свою очередь, влечет справедливость представления $B \circ w = f \circ W \circ S \circ w$. Следовательно,

$$B = f \circ W \circ S = f \circ f \circ |W| \circ S = |W| \circ S.$$

Заметим, что согласно последнему равенству B является решеточным гомоморфизмом.

Определим оператор $\widetilde{W}\colon S_{\mathcal{U}'}[\mathcal{U}'] \to B_{\mathcal{U}'}[\mathcal{U}']$ формулой $\widetilde{W}(S_{\mathcal{U}'}u) = B_{\mathcal{U}'}u$. (Корректность этого определения очевидна.)

В силу 2.6 включение $|T| \in \{A\}^{\perp\perp} = \{f \circ A\}^{\perp\perp}$ влечет равенство $|T| = g \circ f \circ A$ для подходящего ортоморфизма $g \in \operatorname{Orth}(F, mF)$. Для всех $u' \in \mathcal{U}'$ имеем

$$\left|T\frac{1}{w}u'\right| \leqslant |T|\left|\frac{1}{w}u'\right| = \left(|T| \circ \frac{1}{w}\right)|u'| \,.$$

Значит, оператор $|T| \circ \frac{1}{w}$ является мажорантой для $T \circ \frac{1}{w}$. По теореме 2.6, используя равенство $|T| \circ \frac{1}{w} = g \circ f \circ A \circ \frac{1}{w}$, получаем включение $\left|T \circ \frac{1}{w}\right| \in \{f \circ A \circ \frac{1}{w}\}^{\perp\perp} = \{B\}^{\perp\perp}$. Из теоремы 2.8 следует, что $T \circ \frac{1}{w} = \widetilde{g} \circ B_{\mathcal{U}'} = \widetilde{g} \circ \widetilde{W} \circ S_{\mathcal{U}'}$ для подходящего элемента $\widetilde{g} \in \operatorname{Orth}(B\mathcal{U}', m\mathcal{V})$. Для всех $u' \in \mathcal{U}'$ имеем

$$\left|\widetilde{g}\widetilde{W}S_{\mathcal{U}'}u'\right| = \left|\widetilde{g}B_{\mathcal{U}'}u'\right| = |\widetilde{g} \circ f \circ W \circ S||u'| = |\widetilde{g}|W\left|S_{\mathcal{U}'}u'\right|_{S\mathcal{U}'}.$$

Итак, ортоморфизм $|\widetilde{g}| \circ W$ — мажоранта для $\widetilde{g} \circ \widetilde{W}$. Поскольку $S_{\mathcal{U}'}[\mathcal{U}']$ — аппроксимирующее векторное подпространство $S\mathcal{U}'$, а $|\widetilde{g}| \circ W$, будучи ортоморфизмом, является порядково непрерывным оператором, по следствию [2: 6.1.8] оператор $\widetilde{g} \circ \widetilde{W}$ можно продолжить до оператора $\widehat{W}\colon S\mathcal{U}' \to m\mathcal{V}$ с сохранением оценки $\left|\widehat{W}v\right| \leqslant |\widetilde{g}|W|v|_{S\mathcal{U}'}$. Заметим, что из последнего неравенства с учетом теоремы 2.6 вытекает включение $\left|\widehat{W}\right| \in \{W\}^{\perp\perp}$.

Таким образом, мы пришли к равенству $T \circ \frac{1}{w} = \widehat{W} \circ S_{\mathcal{U}'}$. Для завершения доказательства остается убедиться в справедливости формулы $T = T \circ \frac{1}{w} \circ w$. Рассмотрим произвольный элемент $u \in \mathcal{U}$ и положим $v := u - \frac{1}{w}wu$. Тогда

$$\begin{aligned} |Tv| \leqslant |T||v| = gfA|v| = gfWSw|v| \\ = gWS\left|wu - w\tfrac{1}{w}wu\right| = 0, \end{aligned}$$

и, следовательно, $Tu = Tv + T(u - v) = T\frac{1}{w}wu$.

Необходимость. Пусть элемент $\widehat{W} \in \operatorname{Orth}(S\mathcal{U}', m\mathcal{V})$ таков, что $\left|\widehat{W}\right| \in \{W\}^{\perp\perp}$ и $T = \widehat{W} \circ S_{\mathcal{U}'} \circ w$. Тогда

$$|Tu| = \left|\widehat{W} S_{\mathcal{U}'} wu\right| \leqslant \left|\widehat{W}\right| |S_{\mathcal{U}'} wu| = \left|\widehat{W}\right| S|wu| \leqslant \left|\widehat{W}\right| Sw|u|$$

для всех $u \in \mathcal{U}$, а значит, $|T| \leqslant \left|\widehat{W}\right| Sw$.

Используя соотношение $\left|\widehat{W}\right| \in \{W\}^{\perp\perp}$ по теореме 2.6 мы приходим к неравенству $|T| \leqslant g \circ |W| \circ S \circ w$, где g — подходящий элемент $\operatorname{Orth}(F, mF)$. С другой стороны, $|W| \circ S \circ w = |A|$ согласно замечанию [2: 6.4.1]. Вновь привлекая теорему 2.6, мы окончательно получаем $|T| \in \{A\}^{\perp\perp}$. ▶

Теорему 2.9 можно проиллюстрировать следующим образом. Если диаграмма

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "A"] \arrow[dr, "w"'] & & F \arrow[rr, hook] & & mF \\
& E' \arrow[rr, "S"'] & & mF \arrow[ur, "W"'] &
\end{tikzcd}$$

коммутативна, то существует элемент $\widehat{W} \in \operatorname{Orth}(S\mathcal{U}', m\mathcal{V})$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U} \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "w"'] & & \mathcal{V} \arrow[rr, hook] & & m\mathcal{V} \\
& \mathcal{U}' \arrow[rr, "S_{\mathcal{U}'}"'] & & S\mathcal{U}' \arrow[ur, "\widehat{W}"'] &
\end{tikzcd}$$

также коммутативна.

Ниже мы установим аналогичный результат для случая произвольного ограниченного оператора, сохраняющего дизъюнктность. Для этого напомним сначала следующую теорему.

2.10. Теорема [2: 6.4.5]. *Пусть* $A\colon E \to F$ — *регулярный оператор, сохраняющий дизъюнктность. Тогда существует такое разбиение единицы* $(\rho_\xi)_{\xi\in\Xi}$ *в алгебре* $\mathrm{Pr}(F)$*, что для каждого* $\xi \in \Xi$ *композиция* $\rho_\xi \circ A$ *является оператором взвешенного сдвига. Более того, оператор* A *разлагается в сильно дизъюнктную сумму*

$$A = \bigoplus_{\xi\in\Xi} W \circ \rho_\xi S \circ w_\xi,$$

где $W \in \mathrm{Orth}(mF, mF)$, S — *сдвиг* A, $w_\xi \in \mathrm{Orth}(E, mE)$, $w_\xi \geqslant 0$. *При этом*

$$\rho_\xi \circ A = W \circ \rho_\xi S \circ w_\xi \ \ \text{для всех } \xi \in \Xi.$$

2.11. Теорема. *Пусть* E *и* F — K-*пространства,* $\mathcal{U}$ *и* $\mathcal{V}$ — ПБК *над* E *и* F *соответственно,* $A\colon E \to F$ — *ограниченный оператор, сохраняющий дизъюнктность. Рассмотрим представление*

$$A = \bigoplus_{\xi\in\Xi} W \circ \rho_\xi S \circ w_\xi$$

из теоремы 2.10 *и положим* $\mathcal{U}_\xi = \{u \in m\mathcal{U} : |u| \in \operatorname{im} w_\xi\}$. *Мажорируемый оператор* $T\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ *удовлетворяет условию* $|T| \in \{A\}^{\perp\perp}$ *тогда и только тогда, когда*

$$T = \bigoplus_{\xi\in\Xi} \widehat{W}_\xi \circ (\rho_\xi S)_{\mathcal{U}_\xi} \circ w_\xi,$$

где $\widehat{W}_\xi \in \mathrm{Orth}\Big((\rho_\xi S)\mathcal{U}_\xi, m\mathcal{V}\Big)$ *такие, что* $\Big|\widehat{W}_\xi\Big| \in \{W\}^{\perp\perp}$.

◀ *Достаточность.* Поскольку $\rho_\xi |T| \in \{\rho_\xi A\}^{\perp\perp}$, привлекая теорему 2.9, мы приходим к равенству

$$\rho_\xi T = \widehat{W}_\xi \circ (\rho_\xi S)_{\mathcal{U}_\xi} \circ w_\xi,$$

где $\widehat{W}_\xi \in \mathrm{Orth}\Big((\rho_\xi S)\mathcal{U}_\xi, m\mathcal{V}\Big)$ такой, что $\Big|\widehat{W}_\xi\Big| \in \{W\}^{\perp\perp}$.

Необходимость. Положим

$$T = \bigoplus_{\xi\in\Xi} \widehat{W}_\xi \circ (\rho_\xi S)_{\mathcal{U}_\xi} \circ w_\xi,$$

где $\widehat{W}_\xi \in \mathrm{Orth}\Big((\rho_\xi S)\mathcal{U}_\xi, m\mathcal{V}\Big)$ такие, что $\Big|\widehat{W}_\xi\Big| \in \{W\}^{\perp\perp}$. Тогда

$$|T| \leqslant \bigoplus_{\xi\in\Xi} \Big|\widehat{W}_\xi\Big| \circ \rho_\xi S \circ w_\xi.$$

Для каждого $\xi \in \Xi$ из соотношения $\Big|\widehat{W}_\xi\Big| \in \{W\}^{\perp\perp}$ и теоремы 2.6 следует, что $\Big|\widehat{W}_\xi\Big| = g_\xi \circ W$ для подходящего ортоморфизма $g_\xi \in \mathrm{Orth}(mF)$ и, следовательно,

$$\begin{aligned}
|T| &\leqslant \bigoplus_{\xi\in\Xi} g_\xi \circ W \circ \rho_\xi S \circ w_\xi \\
&= \bigoplus_{\xi\in\Xi} g_\xi \circ \rho_\xi \circ W \circ \rho_\xi S \circ w_\xi \\
&= g \circ A,
\end{aligned}$$

где $g = \bigoplus_{\xi\in\Xi} g_\xi \circ \rho_\xi$. Вновь используя теорему 2.6, получаем $|T| \in \{A\}^{\perp\perp}$. ▶

Теорему 2.11 можно проиллюстрировать следующим образом. Если диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "A"] \arrow[dr, "w_1"] \arrow[ddr, "w_2"] \arrow[dddr, "w_3"] & & F \arrow[rr, hook] & & mF \\
& E_1 \arrow[r, "\rho_1 S"] & F_1 & & \\
& E_2 \arrow[r, "\rho_2 S"] & F_2 \arrow[r, "\oplus"] & F \arrow[uur, "W"] & \\
& E_3 \arrow[r, "\rho_3 S"] & F_3 & &
\end{tikzcd}
$$

коммутативна, то существует такие $\widehat{W}_\xi \in \mathrm{Orth}((\rho_\xi S)\mathcal{U}_\xi, m\mathcal{V})$, что диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{U} \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "w_1"] \arrow[ddr, "w_2"] \arrow[dddr, "w_3"] & & \mathcal{V} \arrow[rr, hook] & & m\mathcal{V} \\
& \mathcal{U}_1 \arrow[r, "(\rho_1 S)_{\mathcal{U}_1}"] & (\rho_1 S)\mathcal{U}_1 \arrow[r, "\widehat{W}_1"] & m\mathcal{V} & \\
& \mathcal{U}_2 \arrow[r, "(\rho_2 S)_{\mathcal{U}_2}"] & (\rho_2 S)\mathcal{U}_2 \arrow[r, "\widehat{W}_2"] & m\mathcal{V} \arrow[uur, "\oplus"'] & \\
& \mathcal{U}_3 \arrow[r, "(\rho_3 S)_{\mathcal{U}_3}"] & (\rho_3 S)\mathcal{U}_3 \arrow[r, "\widehat{W}_3"] & m\mathcal{V} &
\end{tikzcd}
$$

также коммутативна.

3. Описание главных компонент в терминах операторных сечений

В данном параграфе дается описание главных операторных компонент на «реализационном» языке — в терминах сечений банаховых расслоений, операторов замены переменных и операторных сечений. Формулируемые здесь теоремы 3.7 и 3.8 легко вывести из результатов параграфа 2 с помощью соответствующих реализационных теорем (см. [2: §§ 3.4, 6.5]). Для удобства некоторые из используемых результатов сформулированы явно в данном параграфе.

Всюду ниже P, Q — экстремально несвязные компакты.

3.1. Предложение [2: 6.5.4]. *Пусть E и F — фундаменты в $C_\infty(Q)$. Отображение $W\colon E \to F$ является ортоморфизмом тогда и только тогда, когда существует такая функция $w \in C_\infty(Q)$, что*

$$We = we \ \text{ для всех } e \in E.$$

Для любого ортоморфизма W такая функция w единственна.

Соотношение $We = we$ называется *реализацией* ортоморфизма W посредством функции w.

3.2. Через $C_0(Q, P)$ обозначим множество всех непрерывных функций $s\colon Q_0 \to P$, определенных на открыто-замкнутых подмножествах $Q_0 \subset Q$.

Предложение. *Отображение $h\colon \mathrm{Clop}(P) \to \mathrm{Clop}(Q)$ является кольцевым гомоморфизмом тогда и только тогда, когда существует такая функция $s \in C_0(Q, P)$, что*

$$h(U) = s^{-1}[U] \ \text{ для всех } U \in \mathrm{Clop}(P).$$

Для любого гомоморфизма h такая функция s единственна.

Соотношение $h(U) = s^{-1}[U]$ называют *реализацией* кольцевого гомоморфизма h посредством функции s.

Для произвольных функций $s \in C_0(Q, P)$ и $e \in C_\infty(P)$ функция $e \bullet s\colon Q \to \overline{\mathbb{R}}$ определяется следующим образом:

$$(e \bullet s)(q) := \begin{cases} e\big(s(q)\big), & \text{если } q \in \operatorname{dom} s, \\ 0, & \text{если } q \in Q \backslash \operatorname{dom} s. \end{cases}$$

3.3. Предложение [2: 6.5.7]**.** *Пусть E — фундамент в $C_\infty(P)$ и F — фундамент в $C_\infty(Q)$. Отображение $S\colon E \to F$ является оператором сдвига тогда и только тогда, когда существует такая функция $s \in C_0(Q, P)$, что*

$$Se = e \bullet s \quad \text{для всех } e \in E.$$

3.4. Теорема [2: 6.5.12]**.** *Пусть E — фундамент $C_\infty(P)$, F — фундамент $C_\infty(Q)$ и $T\colon E \to F$ — регулярный оператор, сохраняющий дизъюнктность. Рассмотрим реализацию $h(U) = s^{-1}[U]$ тени h оператора T посредством функции $s \in C_0(Q, P)$. Тогда существуют семейство $(w_\xi)_{\xi \in \Xi}$ положительных функций из $C_\infty(P)$, удовлетворяющих условию*

$$1/w_\xi \in E \quad \text{для всех } \xi \in \Xi,$$

дизъюнктное семейство $(Q_\xi)_{\xi \in \Xi}$ элементов $\operatorname{Clop}(Q)$ и функция $W \in C_\infty(Q)$ такие, что

$$\operatorname{supp} W = \operatorname{cl} \bigcup_{\xi \in \Xi} Q_\xi = \operatorname{dom} s = \operatorname{supp} \operatorname{im} T$$

и

$$Te = W \bigoplus_{\xi \in \Xi} (w_\xi e \bullet s)|_{Q_\xi} \quad (e \in E). \tag{8}$$

Соотношение (8) назовем *реализацией* оператора T посредством s, w_ξ и W_ξ.

3.5. Если $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — просторные непрерывные банаховы расслоения (НБР) над Q, $u \in C_\infty(Q, \mathcal{X})$ и $w \in C_\infty\big(Q, B(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\big)$, то сечение $\operatorname{ext}(w \otimes u) \in C_\infty(Q, \mathcal{Y})$ обозначается через $w \overline{\otimes}\, u$.

Предложение [2: 6.5.13]**.** *Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — просторные* НБР *над Q, E и F — фундаменты в $C_\infty(Q)$. Отображение $W\colon E(\mathcal{X}) \to F(\mathcal{Y})$ является ортоморфизмом тогда и только тогда, когда существует такое сечение $w \in C_\infty\big(Q, B(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\big)$, что*

$$Wu = w \overline{\otimes}\, u \ \ \text{для всех } u \in E(\mathcal{X}).$$

Для любого ортоморфизма W такое сечение w единственно. Более того,

$$|W|(e) = |w|e \ \ \text{для всех } e \in E.$$

Соотношение $Wu = w \overline{\otimes}\, u$ называется *реализацией* ортоморфизма W посредством сечения w.

3.6. Если $\mathcal{X}$ — банахово расслоение над P, то для любого отображения $s\colon Q \to P$ композиция $\mathcal{X} \circ s$ представляет собой банахово расслоение над Q. Кроме того, если u — сечение расслоения $\mathcal{X}$ над $D \subset P$, то $u \circ s$ — сечение $\mathcal{X} \circ s$ над $s^{-1}[D]$.

Для произвольного множества $\mathcal{U}$ сечений $\mathcal{X}$ символом $\mathcal{U} \circ s$ мы обозначаем совокупность сечений $\{u \circ s : u \in \mathcal{U}\}$ расслоения $\mathcal{X} \circ s$.

Пусть $\mathcal{X}$ — банахово расслоение над P и s — функция, определенная на подмножестве Q и действующая в P. Расслоение $\mathcal{X} \circ s$, дополненное нулевыми слоями в точках

$Q\backslash\operatorname{dom} s$, мы будем обозначать символом $\mathcal{X} \bullet s$. Точнее говоря, слои банахова расслоения $\mathcal{X} \bullet s$ над Q определяются формулой

$$(\mathcal{X} \bullet s)(q) := \begin{cases} \mathcal{X}\big(s(q)\big), & \text{если } q \in \operatorname{dom} s, \\ \{0\}, & \text{если } q \in Q\backslash\operatorname{dom} s. \end{cases}$$

Если u — сечение расслоения $\mathcal{X}$ над $D \subset P$, то символом $u \bullet s$ обозначается сечение

$$(u \bullet s)(q) := \begin{cases} u\big(s(q)\big), & \text{если } q \in s^{-1}[D], \\ 0, & \text{если } q \in Q\backslash\operatorname{dom} s \end{cases}$$

расслоения $\mathcal{X} \bullet s$ над $s^{-1}[D] \cup (Q\backslash\operatorname{dom} s)$. Для произвольного множества $\mathcal{U}$ сечений $\mathcal{X}$ символом $\mathcal{U} \bullet s$ мы обозначаем совокупность сечений $\{u \bullet s : u \in \mathcal{U}\}$ расслоения $\mathcal{X} \bullet s$.

Расслоение $\mathcal{X}\bullet s$ рассматривается как НБР над Q с непрерывной структурой $C(P, \mathcal{X})\bullet s$. Символом $\overline{\mathcal{X} \bullet s}$ обозначается просторная оболочка расслоения $\mathcal{X} \bullet s$.

Предложение [2: 6.5.17]**.** *Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — просторные* НБР *над P и Q, E и F — фундаменты в $C_\infty(P)$ и $C_\infty(Q)$ соответственно. Отображение $S\colon E(\mathcal{X}) \to F(\mathcal{Y})$ является оператором сдвига тогда и только тогда, когда существуют функция $s \in C_0(Q, P)$ и изометрическое вложение i расслоения $\mathcal{X} \bullet s$ в $\mathcal{Y}$ такие, что*

$$Su = i \otimes (u \bullet s) \ \ \textit{для всех } u \in E(\mathcal{X}).$$

В этом случае

$$|S|e = e \bullet s \ \ \textit{для всех } e \in E.$$

Приведенные выше результаты позволяют получить следующие реализационные аналоги теорем 2.10 и 2.12.

3.7. Теорема. *Пусть E и F — фундаменты в $C_\infty(P)$ и $C_\infty(Q)$, $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — просторные* НБР *над P и Q, $A\colon E\to F$ — оператор взвешенного сдвига, $Ae=W\big((we)\bullet s\big)$ — WSW-представление оператора A, где $w\in C_\infty(P)$, $W\in C_\infty(Q)$ и $s\in C_0(Q,P)$. Пусть, кроме того, $T\colon E(\mathcal{X})\to F(\mathcal{Y})$ — мажорируемый оператор и $|T|\colon E\to F$ — его точная мажоранта. Оператор T удовлетворяет условию*

$$|T|\in\{A\}^{\perp\perp}$$

тогда и только тогда, когда существует такое сечение $\widehat{W}\in C_\infty\big(Q,B(\overline{\mathcal{X}\bullet s},\mathcal{Y})\big)$, что $\operatorname{supp}\widehat{W}\subset\operatorname{supp}W$ *и*

$$Tu=\widehat{W}\;\overline{\otimes}\;\big((wu)\bullet s\big)\quad\text{для всех } u\in E(\mathcal{X}).$$

3.8. Теорема. *Предположим, что E и F — фундаменты в $C_\infty(P)$ и $C_\infty(Q)$, $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — просторные* НБР *над P и Q, $A\colon E\to F$ — ограниченный оператор, сохраняющий дизъюнктность. Пусть*

$$Ae=W\bigoplus_{\xi\in\Xi}(w_\xi e\bullet s)|_{Q_\xi}\quad(e\in E)$$

— представление A из теоремы 3.4, $T\colon E(\mathcal{X})\to F(\mathcal{Y})$ — мажорируемый оператор и $|T|\colon E\to F$ — его точная мажоранта. Оператор T удовлетворяет условию

$$|T|\in\{A\}^{\perp\perp}$$

тогда и только тогда, когда существует такое сечение $\widehat{W}\in C_\infty\big(Q,B(\overline{\mathcal{X}\bullet s},\mathcal{Y})\big)$, что $\operatorname{supp}\widehat{W}\subset\operatorname{supp}W$ *и*

$$Tu=\widehat{W}\,\overline{\otimes}\bigoplus_{\xi\in\Xi}(w_\xi u\bullet s)|_{Q_\xi}\quad\text{для всех } u\in E(\mathcal{X}).$$

Литература

1. *Вулих Б. З.* *Введение в теорию полуупорядоченных пространств.* М.: Физматгиз, 1961.
2. *Гутман А. Е.* Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // *Линейные операторы, согласованные с порядком.* Новосибирск: Институт математики, 1995. С. 63–211.
3. *Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.* *Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.* М.-Л.: Физматгиз, 1950.
4. *Кусраев А. Г.* *Векторная двойственность и ее приложения.* Новосибирск: Наука, 1985.
5. *Кусраев А. Г.* Линейные операторы в решеточно нормированных пространствах // *Исследование по геометрии «в целом» и математическому анализу.* Новосибирск: Наука, 1987. С. 84–123.
6. *Кусраев А. Г., Стрижевский В. З.* Решеточно нормированные пространства и мажорируемые операторы // *Исследование по геометрии и математическому анализу.* Новосибирск: Наука, 1987. С. 132–158.