*Глава 2*

# Функциональное представление булевозначного универсума

**А. Е. Гутман, Г. А. Лосенков**

В основе методов булевозначного анализа лежит рассмотрение нестандартных моделей теории множеств с многозначной истинностью. Точнее говоря, истинность высказывания в таких моделях принимает значения в некоторой полной булевой алгебре.

В настоящее время булевозначный анализ представляет собой достаточно мощную теорию, изобилующую многочисленными глубокими результатами и имеющую разнообразные приложения, главным образом, в теории множеств. Применительно к функциональному анализу методы булевозначного анализа нашли весьма удачное применение в таких областях, как теория векторных решеток и решеточно нормированных пространств, теория положительных и мажорируемых операторов, теория алгебр фон Неймана, выпуклый анализ, теория векторных мер.

Современные методы булевозначного анализа в силу самой своей природы сопряжены с довольно громоздкой техникой логического характера. Можно сказать, что с прагматической точки зрения рядового пользователя-аналитика эта техника в значительной степени отвлекает от вполне конкретной цели — воспользоваться достижениями булевозначного анализа для решения той или иной аналитической задачи.

Поскольку в функциональном анализе наиболее привычным объектом исследования являются разнообразные пространства функций, возникает естественное желание иметь дело не с абстрактной булевозначной системой, а с ее функциональным аналогом — моделью, элементы которой являются функциями, а основные логические операции вычисляются «поточечно». Примером такой модели является класс $\mathbb{V}^Q$ всех функций, определенных на фиксированном непустом множестве $Q$ и действующих в класс $\mathbb{V}$ всех множеств. Значениями истинности в модели $\mathbb{V}^Q$ являются всевозможные подмножества $Q$, причем истинность $[\![\varphi(u_1,\dots,u_n)]\!]$ высказывания $\varphi(t_1,\dots,t_n)$ на функциях $u_1,\dots,u_n \in \mathbb{V}^Q$ вычисляется следующим образом:

$$[\![\varphi(u_1,\dots,u_n)]\!] = \big\{q \in Q:\ \varphi\big(u_1(q),\dots,u_n(q)\big)\big\}.$$

В настоящей работе предлагается решение поставленной выше задачи. С этой целью вводится и исследуется новое понятие непрерывного поливерсума, представляющего собой непрерывное расслоение моделей теории множеств. Показывается, что класс непрерывных сечений поливерсума является булевозначной алгебраической системой, удовлетворяющей всем основным принципам булевозначного анализа, а также устанавливается, что любая такая булевозначная алгебраическая система может быть представлена в виде класса сечений подходящего непрерывного поливерсума.

## 2.1. Предварительные сведения

**2.1.1.** Пусть $X$ и $Y$ — топологические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется *открытым*, если оно удовлетворяет любому из следующих эквивалентных условий:

**(1)** для всякого открытого подмножества $A \subset X$ образ $f(A)$ открыт в $Y$;

**(2)** для всякой точки $x \in X$ и любой ее окрестности $A \subset X$ образ $f(A)$ является окрестностью точки $f(x)$ в $Y$;

**(3)** $f^{-1}(\operatorname{cl} B) \subset \operatorname{cl} f^{-1}(B)$ для любого подмножества

Заметим, что равенство $f^{-1}(\operatorname{cl} B) = \operatorname{cl} f^{-1}(B)$ имеет место для всех подмножеств $B \subset Y$ тогда и только тогда, когда отображение $f$ непрерывно и открыто.

Отображение $f : X \to Y$ называется *замкнутым*, если оно удовлетворяет любому из следующих эквивалентных условий:

**(1)** для всякого замкнутого подмножества $A \subset X$ образ $f(A)$ замкнут в $Y$;

**(2)** $\operatorname{cl} f(A) \subset f(\operatorname{cl} A)$ для любого подмножества $A \subset X$.

Равенство $\operatorname{cl} f(A) = f(\operatorname{cl} A)$ выполняется для любого подмножества $A \subset X$ тогда и только тогда, когда отображение $f : X \to Y$ непрерывно и замкнуто.

**2.1.2.** Пусть $X$ — некоторый класс. Подкласс $\tau \subset \mathscr{P}(X)$ назовем *топологией* на $X$, если

**(1)** $\cup\tau = X$;

**(2)** $U \cap V \in \tau$ для всех $U, V \in \tau$;

**(3)** $\cup\mathscr{U} \in \tau$ для любого подмножества $\mathscr{U} \subset \tau$.

Класс $X$, наделенный топологией, мы, как обычно, будем называть *топологическим пространством.*

Все основные топологическое понятия (такие, как окрестность точки, замкнутое множество, внутренность, замыкание, непрерывная функция, хаусдорфовость и т. п.) вводятся аналогично тому, как это делается для топологии на множестве. Заметим однако, что не все классические подходы к определению этих понятий сохраняют свою формальную силу в случае класс-топологии. Например, из двух определений замкнутого множества:

**(а)** как подмножества $X$, дополнение которого принадлежит $\tau$,
**(б)** как подмножества $X$, дополнение которого с каждой своей точкой содержит элемент $\tau$,

следует выбрать второе.

Определяя замыкание множества $A$ как наименьшее замкнутое подмножество $X$, содержащее $A$, мы подвергаем себя определенному риску: некоторые множества могут не иметь замыкания. Однако эта проблема отсутствует, если топология $\tau$ хаусдорфова: в этом случае каждое множество будет иметь замыкание. (Действительно, в случае хаусдорфовой топологии каждый сходящийся фильтр имеет единственный предел, а значит, совокупность всех пределов сходящихся фильтров над данным множеством окажется множеством, а не собственным классом.)

Символом $\mathrm{Clop}(X)$ обозначается класс всех открыто-замкнутых подмножеств $X$ (т. е. подмножеств, являющихся одновременно открытыми и замкнутыми). В дальнейшем запись $U \sqsubset X$ будет означать, что $U \in \mathrm{Clop}(X)$. Для класса $\{U \sqsubset X : \ x \in U\}$ мы будем использовать обозначение $\mathrm{Clop}(x)$.

Топология называется *экстремально несвязной*, если замыкание всякого открытого множества является открытым множеством.

Большинство необходимых нам сведений о топологических пространствах можно найти, например, в [1, 2].

**2.1.3.** Пусть $B$ — полная булева алгебра. Тройка $(\mathfrak{U}, [\![\cdot = \cdot]\!], [\![\cdot \in \cdot]\!])$ называется *булевозначной алгебраической системой* над $B$ (или $B$*-значной алгебраической системой*), если классы $[\![\cdot = \cdot]\!]$ и $[\![\cdot \in \cdot]\!]$ являются класс-функциями из $\mathfrak{U} \times \mathfrak{U}$ в $B$, обладающими следующими свойствами:

**(1)** $[\![u = u]\!] = \mathbb{1}$;
**(2)** $[\![u = v]\!] = [\![v = u]\!]$;
**(3)** $[\![u = v]\!] \wedge [\![v = w]\!] \leqslant [\![u = w]\!]$;
**(4)** $[\![u = v]\!] \wedge [\![v \in w]\!] \leqslant [\![u \in w]\!]$;
**(5)** $[\![u = v]\!] \wedge [\![w \in v]\!] \leqslant [\![w \in u]\!]$

для всех $u, v, w \in \mathfrak{U}$.

Класс-функции $[\![\cdot = \cdot]\!]$ и $[\![\cdot \in \cdot]\!]$ называются булевозначными ($B$-значными) *оценками истинности* равенства и принадлежности.

Вместо $(\mathfrak{U}, [\![\cdot = \cdot]\!], [\![\cdot \in \cdot]\!])$ мы обычно будем писать просто $\mathfrak{U}$ и в случае необходимости снабжать символы булевозначных оценок истинности индексом $[\![\cdot = \cdot]\!]_{\mathfrak{U}}$ и $[\![\cdot \in \cdot]\!]_{\mathfrak{U}}$.

Булевозначная система $\mathfrak{U}$ называется *отделимой*, если для любых $u, v \in \mathfrak{U}$ из $[\![u = v]\!] = \mathbb{1}$ следует $u = v$.

**2.1.4.** Рассмотрим булевозначные алгебраические системы $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ над полными булевыми алгебрами $B$ и $C$ и предположим, что между алгебрами $B$ и $C$ имеется булев изоморфизм $\jmath : B \to C$. *Изоморфизмом булевозначных алгебраических систем* $\mathfrak{U}$ *и* $\mathfrak{V}$*, согласованным с изоморфизмом* $\jmath$, называется биективная класс-функция $\imath : \mathfrak{U} \to \mathfrak{V}$, удовлетворяющая соотношениям

$$\jmath([\![u_1 = u_2]\!]_{\mathfrak{U}}) = [\![\imath(u_1) = \imath(u_2)]\!]_{\mathfrak{V}},$$
$$\jmath([\![u_1 \in u_2]\!]_{\mathfrak{U}}) = [\![\imath(u_1) \in \imath(u_2)]\!]_{\mathfrak{V}}$$

для всех $u_1, u_2 \in \mathfrak{U}$. Говорят, что булевозначные системы *изоморфны*, если между ними существует изоморфизм.

В том случае, когда $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — булевозначные алгебраические системы над одной и той же алгеброй $B$, всякий изоморфизм $\imath : \mathfrak{U} \to \mathfrak{V}$ по умолчанию предполагается ассоциированным с тождественным изоморфизмом:

$$[\![u_1 = u_2]\!]_{\mathfrak{U}} = [\![\imath(u_1) = \imath(u_2)]\!]_{\mathfrak{V}}, \quad [\![u_1 \in u_2]\!]_{\mathfrak{U}} = [\![\imath(u_1) \in \imath(u_2)]\!]_{\mathfrak{V}}.$$

При необходимости подчеркнуть это обстоятельство, мы будем называть такой изоморфизм *$B$-изоморфизмом* и называть соответствующие системы *$B$-изоморфными.*

**2.1.5.** Всюду, употребляя запись вида $\varphi(t_1, \dots, t_n)$, мы по умолчанию предполагаем, что $\varphi$ — формула теоретико-множественной сигнатуры, все свободные переменные которой попадают в список $(t_1, \dots, t_n)$.

Произвольный набор $(u_1, \dots, u_n)$ элементов системы $\mathfrak{U}$ называется *означиванием* списка переменных $(t_1, \dots, t_n)$. Рекурсией по сложности формулы определяется (булевозначная) истинность

$$[\![\varphi(u_1, \dots, u_n)]\!]$$

любой формулы $\varphi(t_1,\dots,t_n)$ относительно произвольного означивания $(u_1,\dots,u_n)$ переменных $(t_1,\dots,t_n)$. Если формула $\varphi$ атомарна, т. е. имеет вид $t_1 = t_2$ или $t_1 \in t_2$, то ее истинность относительно означивания $(u_1,u_2)$ полагается равной $[\![u_1 = u_2]\!]$ и $[\![u_1 \in u_2]\!]$ соответственно. Истинность же формул большей сложности определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
[\![\varphi(u_1,\dots,u_n)\,\&\,\psi(u_1,\dots,u_n)]\!] &:= [\![\varphi(u_1,\dots,u_n)]\!] \wedge [\![\psi(u_1,\dots,u_n)]\!],\\
[\![\varphi(u_1,\dots,u_n) \vee \psi(u_1,\dots,u_n)]\!] &:= [\![\varphi(u_1,\dots,u_n)]\!] \vee [\![\psi(u_1,\dots,u_n)]\!],\\
[\![\varphi(u_1,\dots,u_n) \to \psi(u_1,\dots,u_n)]\!] &:= [\![\varphi(u_1,\dots,u_n)]\!] \Rightarrow [\![\psi(u_1,\dots,u_n)]\!],\\
[\![\neg\varphi(u_1,\dots,u_n)]\!] &:= [\![\varphi(u_1,\dots,u_n)]\!]^{\perp},\\
[\![(\forall t)\,\varphi(t,u_1,\dots,u_n)]\!] &:= \bigwedge_{u\in\mathfrak{U}} [\![\varphi(u,u_1,\dots,u_n)]\!],\\
[\![(\exists t)\,\varphi(t,u_1,\dots,u_n)]\!] &:= \bigvee_{u\in\mathfrak{U}} [\![\varphi(u,u_1,\dots,u_n)]\!],
\end{aligned}$$

где символ $b^{\perp}$ обозначает дополнение $b$ в булевой алгебре $B$. Говорят, что формула $\varphi(t_1,\dots,t_n)$ *истинна* в алгебраической системе $\mathfrak{U}$ относительно означивания $(u_1,\dots,u_n)$, если имеет место равенство $[\![\varphi(u_1,\dots,u_n)]\!] = \mathbb{1}$. В этом случае пишут $\mathfrak{U} \models \varphi(u_1,\dots,u_n)$.

**2.1.6. *Предложение.*** *Если $\varphi(t_1,\dots,t_n)$ доказуема в исчислении предикатов, то $[\![\varphi(u_1,\dots,u_n)]\!] = \mathbb{1}$ для всех $u_1,\dots,u_n \in \mathfrak{U}$.*

$\triangleleft$ Несложно убедиться в том, что все аксиомы исчисления предикатов истинны в системе $\mathfrak{U}$, а правила вывода сохраняют истинность. Последнее означает, что выводимость формулы $\varphi$ в исчислении предикатов из формул $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ обеспечивает неравенство $[\![\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n]\!] \leqslant [\![\varphi]\!]$. $\triangleright$

Из последнего предложения следует, что для любой формулы $\varphi(t,t_1,\dots,t_n)$ и любых элементов $u,v,w_1,\dots,w_n \in \mathfrak{U}$ имеет место неравенство $[\![u = v]\!] \wedge [\![\varphi(u,w_1,\dots,w_n)]\!] \leqslant [\![\varphi(v,w_1,\dots,w_n)]\!]$.

**2.1.7.** Пусть $u \in \mathfrak{U}$ таково, что $\mathfrak{U} \models u \neq \varnothing$. *Спуском* элемента $u$ называется класс $\{v \in \mathfrak{U} :\ \mathfrak{U} \models v \in u\}$, который будет обозначаться символом $u{\downarrow}$.

**2.1.8.** Пусть $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство элементов $\mathfrak{U}$ и $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство элементов алгебры $B$. Элемент $u \in \mathfrak{U}$ называется *подъемом* семейства $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ относительно $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$, если

$$[\![v \in u]\!] = \bigvee_{\xi\in\Xi} b_\xi \wedge [\![v = u_\xi]\!]$$

для всех $v \in \mathfrak{U}$.

Пусть $\mathscr{U}$ — подмножество $\mathfrak{U}$. Элемент $\overline{u} \in \mathfrak{U}$ называется *подъемом* множества $\mathscr{U}$, если $[\![v \in \overline{u}]\!] = \bigvee_{u\in\mathscr{U}} [\![v = u]\!]$ для всех $v \in \mathfrak{U}$, т. е. $\overline{u}$ является подъемом семейства $(u)_{u\in\mathscr{U}}$ с единичными весами.

Предположим, что $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — антицепь в алгебре $B$. Элемент $u \in \mathfrak{U}$ называется *перемешиванием* семейства $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ относительно семейства $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$, если $[\![u = u_\xi]\!] \geqslant b_\xi$ для всех $\xi \in \Xi$ и $[\![u = \varnothing]\!] \geqslant (\bigvee_{\xi\in\Xi} b_\xi)^\perp$.

Если система $\mathfrak{U}$ отделима и в ней истинна аксиома экстенсиональности, то подъем (перемешивание) любого семейства $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ относительно семейства (антицепи) $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ определяется единственным образом. В этом случае, если подъем (перемешивание) существует, мы будем обозначать его символом $\operatorname{asc}_{\xi\in\Xi} b_\xi u_\xi$ (соответственно $\operatorname{mix}_{\xi\in\Xi} b_\xi u_\xi$). Для подъема множества $\mathscr{U} \subset \mathfrak{U}$ используется обозначение $\mathscr{U}\!\uparrow$.

**2.1.9.** В булевозначном анализе особую роль играют три основных принципа — принцип максимума, принцип перемешивания и принцип подъема. Это связано с тем, что в алгебраических системах, удовлетворяющих этим принципам, появляется возможность с помощью ранее имеющихся элементов конструировать новые.

В этом пункте мы сформулируем упомянутые принципы и исследуем взаимосвязь между ними, оставив в стороне их проверку для конкретных алгебраических систем.

Пусть $B$ — полная булева алгебра и $\mathfrak{U}$ — $B$-значная алгебраическая система.

***Принцип максимума.*** *Для любой формулы $\varphi(t, t_1, \dots, t_n)$ и элементов $u_1, \dots, u_n \in \mathfrak{U}$ существует такой элемент $u \in \mathfrak{U}$, что*

$$[\![(\exists t)\, \varphi(t, u_1, \dots, u_n)]\!] = [\![\varphi(u, u_1, \dots, u_n)]\!].$$

***Принцип перемешивания.*** *Для всякого семейства $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов $\mathfrak{U}$ и любой антицепи $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в алгебре $B$ существует перемешивание $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ относительно $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$.*

**Принцип подъема.** *Справедливы следующие утверждения:*

**(1)** *Для всякого семейства $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов $\mathfrak{U}$ и любого семейства $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов алгебры $B$ существует подъем $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ относительно $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$.*

**(2)** *Для любого элемента $u\in\mathfrak{U}$ существуют семейство $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов $\mathfrak{U}$ и семейство $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов алгебры $B$ такие, что $u$ является подъемом $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ относительно $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$.*

**2.1.10. Теорема.** *Если $B$-значная алгебраическая система $\mathfrak{U}$ удовлетворяет принципу перемешивания, то она также удовлетворяет и принципу максимума.*

$\lhd$ Рассмотрим формулу $\varphi(t,t_1,\dots,t_n)$, обозначим через $\vec{u}$ набор произвольных элементов $u_1,\dots,u_n\in\mathfrak{U}$ и положим $b=[\![(\exists t)\,\varphi(t,\vec{u})]\!]$. По определению булевозначной истинности $b=\bigvee_{v\in\mathfrak{U}}[\![\varphi(v,\vec{u})]\!]$. Благодаря принципу исчерпывания найдутся антицепь $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в алгебре $B$ и семейство $(v_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов $\mathfrak{U}$ такие, что $\bigvee_{\xi\in\Xi}b_\xi=b$ и $b_\xi\leqslant[\![\varphi(v_\xi,\vec{u})]\!]$. По условию теоремы существует перемешивание $v\in\mathfrak{U}$ семейства $(v_\xi)_{\xi\in\Xi}$ относительно антицепи $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$. В частности, $[\![v=v_\xi]\!]\geqslant b_\xi$. В силу предложения 2.1.6 имеют место неравенства $[\![\varphi(v,\vec{u})]\!]\geqslant[\![v=v_\xi]\!]\wedge[\![\varphi(v_\xi,\vec{u})]\!]\geqslant b_\xi$. Следовательно, $[\![\varphi(v,\vec{u})]\!]\geqslant\bigvee_{\xi\in\Xi}b_\xi=b$. Неравенство $[\![\varphi(v,\vec{u})]\!]\leqslant b$ очевидно. $\rhd$

**2.1.11. Теорема.** *Пусть $B$-значная алгебраическая система $\mathfrak{U}$ удовлетворяет принципу подъема и в $\mathfrak{U}$ истинна аксиома экстенсиональности. Тогда для $\mathfrak{U}$ справедлив принцип перемешивания.*

$\lhd$ Пусть $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство элементов $\mathfrak{U}$ и $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — антицепь в алгебре $B$. По условию теоремы для всякого $\xi\in\Xi$ найдутся семейство $(u_\xi^\alpha)_{\alpha\in A(\xi)}$ элементов $\mathfrak{U}$ и семейство $(b_\xi^\alpha)_{\alpha\in A(\xi)}$ элементов алгебры $B$ такие, что

$$[\![v\in u_\xi]\!]=\bigvee_{\alpha\in A(\xi)}b_\xi^\alpha\wedge[\![v=u_\xi^\alpha]\!]\quad\text{для всех } v\in\mathfrak{U}.$$

Рассмотрим множество $\Gamma=\{(\xi,\alpha):\ \xi\in\Xi,\ \alpha\in A(\xi)\}$ и для каждой пары $\gamma=(\xi,\alpha)\in\Gamma$ положим $c_\gamma=b_\xi\wedge b_\xi^\alpha$ и $v_\gamma=u_\xi^\alpha$. Пусть $u\in\mathfrak{U}$ — подъем семейства $(v_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ относительно $(c_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$. Непосредственный подсчет с привлечением определений дает следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
[\![v \in u]\!] = \bigvee_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma \wedge [\![v = v_\gamma]\!] = \\
= \bigvee_{\xi\in\Xi} \bigvee_{\alpha\in A(\xi)} b_\xi \wedge b_\xi^\alpha \wedge [\![v = u_\xi^\alpha]\!] = \\
= \bigvee_{\xi\in\Xi} b_\xi \wedge [\![v \in u_\xi]\!].
\end{aligned}
$$

Покажем, что $u$ является перемешиванием семейства $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ относительно $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$.

Сначала установим неравенство $[\![u = u_\xi]\!] \geqslant b_\xi$. В силу истинности аксиомы экстенсиональности достаточно показать $\big([\![v \in u]\!] \Leftrightarrow [\![v \in u_\xi]\!]\big) \geqslant b_\xi$ или, что то же самое, $b_\xi \wedge [\![v \in u]\!] = b_\xi \wedge [\![v \in u_\xi]\!]$. Поскольку $b_\xi \wedge b_\eta = \mathbb{0}$ при $\xi \neq \eta$, мы имеем

$$
b_\xi \wedge [\![v \in u]\!] = \bigvee_{\eta\in\Xi} b_\xi \wedge b_\eta \wedge [\![v \in u_\eta]\!] = b_\xi \wedge [\![v \in u_\xi]\!].
$$

Покажем теперь, что $[\![u \neq \varnothing]\!] \leqslant \bigvee_{\xi\in\Xi} b_\xi$. Действительно,

$$
[\![u \neq \varnothing]\!] = [\![(\exists t)\, t \in u]\!] = \bigvee_{v\in\mathfrak{U}} [\![v \in u]\!] =
$$

$$
= \bigvee_{v\in\mathfrak{U}} \bigvee_{\xi\in\Xi} b_\xi \wedge [\![v \in u_\xi]\!] \leqslant \bigvee_{\xi\in\Xi} b_\xi. \ \rhd
$$

**2.1.12. *Теорема.*** *Если $B$-значная алгебраическая система $\mathfrak{U}$ удовлетворяет принципам максимума и подъема, то она также удовлетворяет и принципу перемешивания.*

$\lhd$ Пусть $\varnothing^\wedge \in \mathfrak{U}$ — подъем пустого подмножества $\mathfrak{U}$. Легко проверить, что $[\![\varnothing^\wedge = \varnothing]\!] = \mathbb{1}$. (Здесь, как и всюду в дальнейшем, запись $u = \varnothing$ означает $(\forall t)\, t \notin u$.)

Рассмотрим семейство $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов $\mathfrak{U}$ и антицепь $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в алгебре $B$. Положим $b = (\bigvee_{\xi\in\Xi} b_\xi)^\perp$. Определим семейство $(v_\xi)_{\xi\in\Xi'}$ и разбиение единицы $(c_\xi)_{\xi\in\Xi'}$ следующим образом: $\Xi' = \Xi \cup \{\Xi\}$, $v_\xi = u_\xi$, $c_\xi = b_\xi$ при $\xi \in \Xi$ и $v_\Xi = \varnothing^\wedge$, $c_\Xi = b$. Пусть $u \in \mathfrak{U}$ — подъем семейства $(v_\xi)_{\xi\in\Xi'}$ относительно $(c_\xi)_{\xi\in\Xi'}$. Легко понять, что

$\llbracket u \neq \varnothing \rrbracket = \mathbb{1}$. Действительно, $\llbracket v_\xi \in u \rrbracket \geqslant c_\xi$ при $\xi \in \Xi'$, откуда следует, что

$$\llbracket u \neq \varnothing \rrbracket = \bigvee_{v \in \mathfrak{U}} \llbracket v \in u \rrbracket \geqslant \bigvee_{\xi \in \Xi'} c_\xi = \mathbb{1}.$$

Таким образом, $\llbracket (\exists t)\, t \in u \rrbracket = \mathbb{1}$. Согласно принципу максимума найдется такой элемент $v \in \mathfrak{U}$, что $\llbracket v \in u \rrbracket = \mathbb{1}$. Тогда по определению подъема

$$c_\xi \;=\; \mathbb{1} \wedge \mathbb{c}_\xi \;=\; \bigvee_{\eta \in \Xi'} \mathbb{c}_\eta \wedge \llbracket \mathbb{v} = \mathbb{v}_\eta \rrbracket \wedge \mathbb{c}_\xi \;=\; \llbracket \mathbb{v} = \mathbb{v}_\xi \rrbracket \wedge \mathbb{c}_\xi$$

и, стало быть, $\llbracket v = v_\xi \rrbracket \geqslant c_\xi$ для всех $\xi \in \Xi'$. В частности, при $\xi \in \Xi$ имеем $\llbracket v = u_\xi \rrbracket \geqslant b_\xi$. Кроме того, в силу леммы 2.1.6 выполнены следующие соотношения:

$$\Big(\bigvee_{\xi \in \Xi} b_\xi\Big)^{\perp} \leqslant \llbracket v = \varnothing^\wedge \rrbracket \;=\; \llbracket v = \varnothing^\wedge \rrbracket \wedge \llbracket \varnothing^\wedge = \varnothing \rrbracket \;\leqslant\; \llbracket v = \varnothing \rrbracket.$$

Следовательно, $v$ является перемешиванием семейства $(u_\xi)_{\xi \in \Xi}$ относительно антицепи $(b_\xi)_{\xi \in \Xi}$. $\triangleright$

**2.1.13.** Пусть $B$ — полная булева алгебра и $\mathfrak{U}$ — $B$-значная алгебраическая система. Система $\mathfrak{U}$ называется *булевозначным универсумом над $B$ ($B$-значным универсумом)*, если она удовлетворяет следующим трем условиям:

**(1)** система $\mathfrak{U}$ отделима;

**(2)** $\mathfrak{U}$ удовлетворяет принципу подъема;

**(3)** в $\mathfrak{U}$ истинны аксиомы экстенсиональности и регулярности.

***Теорема*** [7]**.** *Для любой полной булевой алгебры $B$ существует $B$-значный универсум, причем единственный с точностью до $B$-изоморфизма.*

Подробное изложение теорий булевых алгебр и булевозначных алгебраических систем имеется в [3–6].

## 2.2. Понятие непрерывного расслоения

**2.2.1.** Пусть $Q$ — произвольное непустое множество и $V^Q \subset Q \times \mathbb{V}$ — класс-соответствие. (Здесь и далее $\mathbb{V}$ обозначает класс всех множеств.) Для каждой точки $q \in Q$ класс

$$\{q\} \times V^Q(q) = V^Q \cap \big(\{q\} \times \mathbb{V}\big) = \big\{(q,x) : \ (q,x) \in V^Q\big\}$$

обозначим символом $V^q$. Очевидно, $V^p \cap V^q = \varnothing$ при $p \neq q$. Соответствие $V^Q$ будем называть *расслоением* над $Q$, а класс $V^q$ — *слоем* расслоения $V^Q$ в точке $q$.

Пусть $D \subset Q$. Функцию $u : D \to V^Q$ называют *сечением* расслоения $V^Q$ над множеством $D$, если $u(q) \in V^q$ для всех $q \in D$. Класс всех сечений $V^Q$ над $D$ обозначают символом $S(D, V^Q)$. Сечения, определенные на $Q$, называют *глобальными*. Если $X$ — подмножество $V^Q$, то символом $S(D, X)$ обозначают множество всех сечений расслоения $X$ над $D$.

Точку $q \in Q$ назовем *проекцией элемента* $x \in V^Q$ и обозначим символом $\mathrm{pr}(x)$, если $x \in V^q$. *Проекцией множества* $X \subset V^Q$ будем называть совокупность $\big\{\mathrm{pr}(x) : \ x \in X\big\}$ и обозначать ее символом $\mathrm{pr}(X)$.

**2.2.2.** Предположим теперь, что $Q$ — топологическое пространство и на классе $V^Q \subset Q \times \mathbb{V}$ задана некоторая топология. В этом случае мы будем называть $V^Q$ *непрерывным расслоением* над $Q$.

Под *непрерывным сечением* расслоения $V^Q$ понимается сечение, являющееся непрерывной функцией. Для любого подмножества $D \subset Q$ символом $C(D, V^Q)$ обозначается класс всех непрерывных сечений $V^Q$ над $D$. Аналогичным образом, если $X$ — подмножество $V^Q$, то символом $C(D, X)$ обозначается совокупность всех непрерывных сечений $X$ над $D$. Очевидно, $C(D, X) = C(D, V^Q) \cap S(D, X)$.

Всюду в дальнейшем мы считаем, что $Q$ — экстремально несвязный компакт, и предполагаем выполненными следующие условия:

**(1)** $\forall\, q \in Q \quad \forall\, x \in V^q \quad \exists\, u \in C(Q, V^Q) \quad u(q) = x$;

**(2)** $\forall\, u \in C(Q, V^Q) \quad \forall\, A \sqsubset Q \quad u(A) \sqsubset V^Q$.

**2.2.3. *Предложение.*** *Непрерывное расслоение $V^Q$ обладает следующими свойствами:*

**(1)** *топология $V^Q$ хаусдорфова;*

**(2)** *для любых* $u \in C(Q, V^Q)$ *и* $q \in Q$ *семейство* $\{u(A) : A \in \mathrm{Clop}(q)\}$ *является базой окрестностей точки* $u(q)$;

**(3)** *все элементы* $C(Q, V^Q)$ *являются открытыми и замкнутыми отображениями (см. 2.1.1).*

$\lhd$ Пусть $x$ и $y$ — различные элементы $V^Q$. Положим $p = \mathrm{pr}(x)$ и $q = \mathrm{pr}(y)$. В силу 2.2.2 (1) найдутся сечения $u, v \in C(Q, V^Q)$ такие, что $u(p) = x$ и $v(q) = y$.

Предположим сначала, что $p = q$. В силу 2.2.2 (2) множество $A = \{q \in Q : \ u(q) \neq v(q)\} = Q \backslash u^{-1}(v(Q))$ открыто-замкнуто. Тогда $u(A)$ и $v(A)$ — непересекающиеся окрестности точек $x$ и $y$.

Пусть теперь $p \neq q$. В этом случае существуют $A, B \sqsubset Q$ такие, что $A \cap B = \varnothing$, $p \in A$ и $q \in B$. Тогда $u(A)$ и $v(B)$ — непересекающиеся окрестности точек $x$ и $y$.

Утверждение (2) с очевидностью вытекает из 2.2.2 (2).

Утверждение (3) эквивалентно 2.2.2 (2) в силу того обстоятельства, что $\mathrm{Clop}(Q)$ является базой как открытой, так и замкнутой топологии в $Q$. $\rhd$

**2.2.4. Лемма.** *Подмножество* $X \subset V^Q$ *открыто-замкнуто тогда и только тогда, когда* $u^{-1}(X) \sqsubset Q$ *для всех* $u \in C(Q, V^Q)$.

$\lhd$ В пояснении нуждается лишь достаточность. Рассмотрим произвольный элемент $x \in V^Q$. Пусть сечение $u \in C(Q, V^Q)$ и точка $q \in Q$ таковы, что $u(q) = x$.

Предположим сначала, что $x \in X$. Поскольку множество $A = u^{-1}(X)$ открыто-замкнуто, $u(A)$ — окрестность $x$, содержащаяся в $X$. В силу произвольности $x$ заключаем, что множество $X$ открыто.

Если же $x \notin X$, то, воспользовавшись открыто-замкнутостью множества $A = Q \backslash u^{-1}(X)$, заключаем, что $u(A)$ — окрестность $x$, не пересекающаяся с $X$. Произвольность $x$ позволяет сделать вывод, что множество $X$ замкнуто. $\rhd$

**2.2.5. Предложение.** *Топология* $V^Q$ *экстремально несвязна.*

$\lhd$ Пусть $X$ — открытое подмножество $V^Q$. В силу хаусдорфовости топологии $V^Q$ замыкание $\mathrm{cl}\, X$ является множеством, а не собственным классом (см. 2.1.2). При этом для всякого сечения $u \in C(Q, V^Q)$ множество $u^{-1}(\mathrm{cl}\, X) = \mathrm{cl}\, u^{-1}(X)$ открыто-замкнуто. В силу леммы 2.2.4 множество $\mathrm{cl}\, X$ открыто. $\rhd$

**2.2.6. Лемма.** *Для любого подмножества $X \subset V^Q$ выполнены следующие равенства:*

$$X = \bigcup_{u \in C(Q, V^Q)} u\big(u^{-1}(X)\big),$$

$$\operatorname{int} X = \bigcup_{u \in C(Q, V^Q)} u\big(\operatorname{int} u^{-1}(X)\big),$$

$$\operatorname{cl} X = \bigcup_{u \in C(Q, V^Q)} u\big(\operatorname{cl} u^{-1}(X)\big).$$

$\lhd$ Очевидное следствие 2.2.2 (1) и открытости всех непрерывных сечений. $\rhd$

**2.2.7. Лемма.** *Подклассы $X, Y \subset V^Q$ совпадают тогда и только тогда, когда $u^{-1}(X) = u^{-1}(Y)$ для всех $u \in C(Q, V^Q)$.*

$\lhd$ Возьмем произвольно $q \in Q$, $x \in V^q$ и рассмотрим сечение $u \in C(Q, V^Q)$ такое, что $u(q) = x$. Если $x \in X$, то $q \in u^{-1}(X) = u^{-1}(Y)$ и, следовательно, $x = u(q) \in Y$. Обратное включение устанавливается аналогично. $\rhd$

**2.2.8. Предложение.** *Сечение $u \in S(D, V^Q)$, определенное на открытом подмножестве $D \subset Q$, непрерывно тогда и только тогда, когда $\operatorname{im} u$ — открытое подмножество $V^Q$.*

$\lhd$ Предположим, что сечение $u$ непрерывно. Для всякого $q \in D$ подберем сечение $u_q \in C(Q, V^Q)$ такое, что $u_q(q) = u(q)$. Множество $D_q = \big\{p \in D : \ u(p) = u_q(p)\big\} = u^{-1}(\operatorname{im} u_q)$ открыто в $D$, а значит, и в $Q$. Поэтому образ $u(D_q) = u_q(D_q)$ открыт в силу открытости глобальных непрерывных сечений. Очевидно, $D = \bigcup_{q \in D} D_q$, так как $q \in D_q$. Стало быть, множество

$$\operatorname{im} u = u(D) = u\Bigg(\bigcup_{q \in D} D_q\Bigg) = \bigcup_{q \in D} u(D_q)$$

является открытым.

Предположим теперь, что $\operatorname{im} u$ — открытое множество. Рассмотрим произвольную точку $q \in D$ и подберем сечение $u_q \in C(Q, V^Q)$ такое, что $u(q) = u_q(q)$. Множество $\big\{p \in D : \ u(p) = u(p)\big\} = u^{-1}(\operatorname{im} u)$ открыто и является окрестностью точки $q$, откуда следует непрерывность сечения $u$ в точке $q$. $\rhd$

**2.2.9. Лемма.** *Для любого подмножества $X \subset V^Q$ выполнены следующие соотношения:*

**(1)** $\operatorname{pr}(\operatorname{cl} X) \subset \operatorname{cl} \operatorname{pr}(X)$;

**(2)** $\operatorname{pr}(\operatorname{int} X) \subset \operatorname{int} \operatorname{pr}(X)$.

$\triangleleft$ Рассмотрим произвольное сечение $u \in C(Q, V^Q)$. В силу свойств замыкания мы имеем $u^{-1}(\operatorname{cl} X) = \operatorname{cl} u^{-1}(X) \subset \operatorname{cl} \operatorname{pr}(X)$, откуда благодаря равенству $\operatorname{pr}(X) = \bigcup_{u \in C(Q,V^Q)} u^{-1}(X)$ следует включение $\operatorname{pr}(\operatorname{cl} X) \subset \operatorname{cl} \operatorname{pr}(X)$.

Соотношение (2) устанавливается аналогично. $\triangleright$

## 2.3. Непрерывный поливерсум

**2.3.1.** Рассмотрим непустое множество $Q$ и расслоение $V^Q \subset Q \times \mathbb{V}$. Предположим, что для каждой точки $q \in Q$ класс $V^q$ является алгебраической системой сигнатуры $\{\in\}$.

Для произвольной формулы $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ и сечений $u_1, \dots, u_n$ расслоения $V^Q$ символом $\{\varphi(u_1, \dots, u_n)\}$ будем обозначать множество

$$\bigl\{q \in \operatorname{dom} u_1 \cap \dots \cap \operatorname{dom} u_n : \ V^q \models \varphi\bigl(u_1(q), \dots, u_n(q)\bigr)\bigr\}.$$

Для любого элемента $x \in V^q$ положим $x{\downarrow} = \{y \in V^q : \ V^q \models y \in x\}$. Очевидно, если в системе $V^q$ истинна аксиома экстенсиональности, то для всех $x, y \in V^q$ равенства $x{\downarrow} = y{\downarrow}$ и $x = y$ равносильны. Если $X$ — подмножество $V^Q$, то символом $\sqcup X$ обозначается объединение $\bigcup_{x \in X} x{\downarrow}$.

Всюду в дальнейшем предполагается, что $Q$ — экстремально несвязный компакт и $V^Q$ — непрерывное расслоение над $Q$.

Для произвольного сечения $u \in C(Q, V^Q)$ класс $\bigcup_{q \in Q} u(q){\downarrow}$ мы будем называть *распаковкой* сечения $u$ и обозначать символом $\llcorner u \lrcorner$.

**2.3.2.** Непрерывное расслоение $V^Q$ назовем *непрерывным поливерсумом* над $Q$, если в каждом слое $V^q$ $(q \in Q)$ истинны аксиомы экстенсиональности и регулярности и, кроме того, выполнены следующие условия:

**(1)** $\forall\, q \in Q \quad \forall\, x \in V^q \quad \exists\, u \in C(Q, V^Q) \quad u(q) = x$;

**(2)** $\forall\, u \in C(Q, V^Q) \quad \forall\, A \in \operatorname{Clop}(Q) \quad u(A) \in \operatorname{Clop}(V^Q)$;

**(3)** $\forall\, u \in C(Q, V^Q) \quad \llcorner u \lrcorner \in \operatorname{Clop}(V^Q)$;

**(4)** $\forall\, X \in \operatorname{Clop}(V^Q) \quad \exists\, u \in C(Q, V^Q) \quad \llcorner u \lrcorner = X$.

**2.3.3.** Для произвольных сечений $u, v \in C(Q, V^Q)$ равенства $\{u = v\} = u^{-1}(\operatorname{im} v)$ и $\{u \in v\} = u^{-1}(\llcorner v \lrcorner)$ обеспечивают открыто-замкнутость множеств $\{u = v\}$ и $\{u \in v\}$, что позволяет нам ввести в рассмотрение две класс-функции $[\![ \cdot = \cdot ]\!], [\![ \cdot \in \cdot ]\!] : C(Q, V^Q) \times C(Q, V^Q) \to \operatorname{Clop}(Q)$, полагая $[\![ u = v ]\!] = \{u = v\}$ и $[\![ u \in v ]\!] = \{u \in v\}$.

Несложно убедиться в том, что тройка

$$\big(C(Q, V^Q),\ [\![ \cdot = \cdot ]\!],\ [\![ \cdot \in \cdot ]\!]\big)$$

представляет собой отделимую $\operatorname{Clop}(Q)$-значную алгебраическую систему (см. 2.1.3).

Из определения непрерывного поливерсума 2.3.2 (4) следует существование непрерывного сечения $\varnothing^\wedge$, удовлетворяющего условию $\llcorner \varnothing^\wedge \lrcorner = \varnothing$. Очевидно, такое сечение единственно. Кроме того, легко заметить, что $V^q \models \varnothing^\wedge(q) = \varnothing$ для всех $q \in Q$, $[\![ \varnothing^\wedge = \varnothing ]\!] = Q$, а также $[\![ u = \varnothing^\wedge ]\!] = [\![ u = \varnothing ]\!]$ для всех $u \in C(Q, V^Q)$.

**2.3.4. *Лемма.*** *Для любого подмножества $X \subset V^Q$ имеют место следующие соотношения:*

**(1)** *если $X \sqsubset V^Q$, то $\operatorname{pr}(X) \sqsubset Q$;*

**(2)** *если множество $X$ открыто, то $\operatorname{pr}(\operatorname{cl} X) = \operatorname{cl} \operatorname{pr}(X)$.*

$\lhd$ (1): Если $X \sqsubset V^Q$, то найдется сечение $u \in C(Q, V^Q)$ такое, что $\bigsqcup \operatorname{im} u = \llcorner u \lrcorner = X$. Очевидно, $\operatorname{pr}\big(\bigsqcup \operatorname{im} u\big) = [\![ u \neq \varnothing ]\!]$, откуда следует открыто-замкнутость $\operatorname{pr}(X)$.

(2): Пусть $X$ — открытое подмножество $V^Q$. Тогда замыкание $\operatorname{cl} X$ открыто-замкнуто, как и его проекция $\operatorname{pr}(\operatorname{cl} X)$. Очевидное включение $\operatorname{pr}(X) \subset \operatorname{pr}(\operatorname{cl} X)$ влечет $\operatorname{cl} \operatorname{pr}(X) \subset \operatorname{pr}(\operatorname{cl} X)$. Обратное включение установлено в 2.2.9. $\rhd$

Замечание. Следующие вопросы пока остаются открытыми.

**(1)** Верно ли, что из замкнутости подмножества $X \subset V^Q$ следует замкнутость его проекции $\operatorname{pr}(X) \subset Q$?

**(2)** Справедливо ли равенство $\operatorname{pr}(\operatorname{cl} X) = \operatorname{cl} \operatorname{pr}(X)$ для любого (не обязательно открытого) подмножества $X \subset V^Q$?

**2.3.5.** *Носителем* сечения $u \in S(D, V^Q)$, определенного на $D \subset Q$, называется множество $\operatorname{supp} u = \big\{q \in D :\ V^q \models u(q) \neq \varnothing\big\}$. Очевидно, $\operatorname{supp} u = \{u \neq \varnothing\} = \{u \neq \varnothing^\wedge\}$. Таким образом, если $u \in C(Q, V^Q)$, то $\operatorname{supp} u$ — открыто-замкнутое множество.

Пусть $u$ — непрерывное сечение $V^Q$ и $D$ — подмножество $\operatorname{supp} u$. Символом $C(D,u)$ обозначается класс

$$\bigl\{v \in C(D, V^Q) :\ (\forall q \in D)\ V^q \models v(q) \in u(q)\bigr\}.$$

Очевидно, $C(D,u) = C(D, \llcorner u \lrcorner)$.

*Спуском* сечения $u$ будем называть класс $C(\operatorname{supp} u, u)$ и обозначать его символом $u{\downarrow}$. Легко заметить, что $u{\downarrow} = C(\operatorname{supp} u, \llcorner u \lrcorner)$. Очевидно, в случае $\{u \neq \varnothing\} = Q$ спуск сечения $u$ представляет собой спуск $u$ как элемента булевозначной алгебраической системы (см. 2.1.7).

**2.3.6. *Предложение.*** *Для любых $X \sqsubset V^Q$ и $u \in C(Q, V^Q)$ следующие утверждения эквивалентны:*

**(1)** $\llcorner u \lrcorner = X$;
**(2)** $u(q){\downarrow} = X \cap V^q$ *для всех* $q \in Q$;
**(3)** $\operatorname{supp} u = \operatorname{pr}(X)$ *и* $u{\downarrow} = C\bigl(\operatorname{pr}(X), X\bigr)$;
**(4)** $[\![v \in u]\!] = v^{-1}(X)$ *для всех* $v \in C(Q, V^Q)$.

$\lhd$ (1)$\to$(3): Достаточно лишь заметить, что $\operatorname{supp} u = [\![u \neq \varnothing]\!] = \operatorname{pr}(\llcorner u \lrcorner)$, и воспользоваться равенством $u{\downarrow} = C(\operatorname{supp} u, \llcorner u \lrcorner)$.

(3)$\to$(2): Положим $A = \operatorname{supp} u$. Легко понять, что $X \cap V^q = \varnothing = u(q){\downarrow}$ для всех $q \in Q \backslash A$.

Для произвольной точки $q \in A$ найдутся $x \in u(q){\downarrow}$ и $v_q \in C(Q, V^Q)$ такие, что $v_q(q) = x$. Пусть $B_q = [\![v_q \in u]\!]$. Семейство $(B_q)_{q \in A}$ образует открытое покрытие компакта $A$, поэтому из него можно выбрать подпокрытие $(B_q)_{q \in F}$, где $F$ — конечное подмножество $A$. По принципу исчерпывания найдется антицепь $(C_q)_{q \in F}$ такая, что $C_q \subset B_q$ для $q \in F$ и $\bigcup_{q \in F} C_q = \bigvee_{q \in F} C_q = \bigvee_{q \in F} B_q = A$. Построим сечение $v \in S(A, V^Q)$, для каждой точки $p \in A$ полагая $v(p) = v_q(p)$, где $q$ такой (единственный) элемент $F$, что $p \in C_q$. Сечение $v$ непрерывно, поскольку $v = v_q$ на $C_q$ $(q \in F)$. Легко заметить, что $v \in u{\downarrow} = C(A, X)$.

Пусть $q$ — произвольный элемент $A$.

Рассмотрим $x \in u(q){\downarrow}$, подберем сечение $w \in C(Q, V^Q)$ такое, что $w(q) = x$, и построим сечение $\overline{w} \in S(A, V^Q)$ следующим образом:

$$\overline{w}(p) = \begin{cases} w(p), & \text{если } p \in [\![w \in u]\!], \\ v(p), & \text{если } p \in A \backslash [\![w \in u]\!]. \end{cases}$$

Очевидно, сечение $\overline{w}$ непрерывно, и $\overline{w} \in u{\downarrow} = C(A, X)$, откуда следует, что $x = \overline{w}(q) \in X$ в силу включения $q \in [\![w \in u]\!]$.

Пусть теперь $x \in X \cap V^q$. Как и раньше, подберем сечение $w \in C(Q, V^Q)$ такое, что $w(q) = x$. Рассмотрим сечение $\overline{w} \in S(A, V^Q)$, определенное следующим образом:

$$\overline{w}(p) = \begin{cases} w(p), & \text{если } p \in w^{-1}(X), \\ v(p), & \text{если } p \in A \backslash w^{-1}(X). \end{cases}$$

Из очевидных соотношений $\overline{w} \in C(A, X) = u{\downarrow}$ и $q \in w^{-1}(X)$ вытекает, что $x = w(q) = \overline{w}(q) \in u(q){\downarrow}$.

(2)→(4): Рассмотрим произвольное сечение $v \in C(Q, V^Q)$. Если $q \in [\![v \in u]\!] = v^{-1}(\llcorner u \lrcorner)$, то $v(q) \in \llcorner u \lrcorner$ и, следовательно, $v(q) \in u(q){\downarrow} = X \cap V^q$, т. е. $q \in v^{-1}(X)$.

Если же $q \in v^{-1}(X)$, то $v(q) \in X \cap V^q = u(q){\downarrow}$, а значит, $V^q \models v(q) \in u(q)$ и $q \in [\![v \in u]\!]$.

(4)→(1): Заметим, что $v^{-1}(\llcorner u \lrcorner) = [\![v \in u]\!] = v^{-1}(X)$ для всех $v \in C(Q, V^Q)$. Поэтому согласно лемме 2.2.7 имеет место равенство $X = \llcorner u \lrcorner$. ▷

Для каждого множества $X \sqsubset V^Q$ сечение $u$, удовлетворяющее условиям (1)–(4), очевидно, единственно. Это сечение мы будем называть *упаковкой* множества $X$ и обозначать символом $\ulcorner X \urcorner$.

Несложно убедиться в справедливости следующего утверждения.

***Предложение.*** *Пусть $X$ — открытое подмножество $V^Q$. Сечение $\overline{u} \in C(Q, V^Q)$ совпадает с $\ulcorner \mathrm{cl}\, X \urcorner$ тогда и только тогда, когда $\overline{u}$ является поточечно наименьшим среди сечений $u \in C(Q, V^Q)$, удовлетворяющих включению $X \cap V^q \subset u(q){\downarrow}$ для всех $q \in Q$.*

**2.3.7. *Лемма.*** *Если $u \in C(Q, V^Q)$ и $A \in \mathrm{Clop}(Q)$, то $\sqcup u(A) \in \mathrm{Clop}(V^Q)$.*

◁ Для любого сечения $v \in C(Q, V^Q)$ множество $v^{-1}\big(\sqcup\, u(A)\big) = A \cap [\![v \in u]\!]$ открыто-замкнуто, откуда в силу 2.2.4 следует открыто-замкнутость множества $\sqcup u(A)$. ▷

**2.3.8. *Предложение.*** *Любое непрерывное сечение $V^Q$, определенное на открытом или замкнутом подмножестве $Q$, продолжается до глобального непрерывного сечения.*

$\lhd$ Пусть $A \subset Q$ и $u \in C(A, V^Q)$. Для каждой точки $q \in A$ найдутся сечение $u_q \in C(Q, V^Q)$ и множество $B_q \sqsubset Q$ такие, что $q \in B_q$ и $u_q = u$ на $B_q \cap A$.

Предположим, что множество $A$ открыто. Не нарушая общности, мы можем считать, что $B_q \subset A$. Рассмотрим открытое множество $X = \bigcup_{q \in Q} u(q){\downarrow} = \bigcup_{q \in A} \sqcup u_q(B_q)$ и покажем, что $(\mathrm{cl}\, X) \cap V^q = u(q){\downarrow}$ для всех $q \in A$. Проверим лишь включение $(\mathrm{cl}\, X) \cap V^q \subset u(q){\downarrow}$ (обратное включение вытекает из очевидных свойств замыкания). Пусть $x \in (\mathrm{cl}\, X) \cap V^q$. Найдется сечение $v \in C(Q, V^Q)$ такое, что $v(q) = x$. Очевидно, для всякой окрестности $B \sqsubset Q$ точки $q$ пересечение $v(B) \cap X$ непусто и, стало быть, найдется такая точка $p \in B \cap B_q$, что $v(p) \in u(p){\downarrow}$. С другой стороны, $u(p) = u_q(p)$ и, следовательно, $v(B) \cap \sqcup u_q(B_q) \neq \varnothing$. Множество $\sqcup u_q(B_q)$ замкнуто, и поэтому $x \in \sqcup u_q(B_q)$, откуда следует, что $x \in u_q(q){\downarrow} = u(q){\downarrow}$. Положим $\overline{u} = \ulcorner \mathrm{cl}\, X \urcorner$. Из установленного выше вытекает равенство $\overline{u}(q){\downarrow} = u(q){\downarrow}$ для всех $q \in A$. Таким образом, $\overline{u}$ — искомое глобальное продолжение сечения $u$.

Предположим теперь, что множество $A$ замкнуто. Семейство $(B_q)_{q \in A}$ образует открытое покрытие компакта $A$, а значит, из этого покрытия можно выбрать подпокрытие $(B_q)_{q \in F}$, где $F$ — конечное подмножество $A$. Без ограничения общности можно предполагать, что $\bigcup_{q \in F} B_q = Q$. По принципу исчерпывания найдется антицепь $(C_q)_{q \in F}$ такая, что $C_q \subset B_q$ для всех $q \in F$ и $\bigcup_{q \in F} C_q = Q$. Построим сечение $\overline{u} \in S(Q, V^Q)$, для каждой точки $p \in Q$ полагая $\overline{u}(p) = u_q(p)$, где $q$ — такой (единственный) элемент $F$, что $p \in C_q$. Сечение $\overline{u}$ непрерывно, поскольку $\overline{u} = u_q$ на $C_q$ $(q \in F)$. Очевидно, $\overline{u} = u$ на $A$. $\rhd$

***Следствие.*** *Если $A$ — открытое или замкнутое подмножество $Q$, то $C(A, V^Q) = \{u|_A : u \in C(Q, V^Q)\}$.*

***Принцип продолжения.*** *Для любого сечения $u \in C(A, V^Q)$, определенного на открытом подмножестве $A \subset Q$, существует единственное сечение $\overline{u} \in C(\mathrm{cl}\, A, V^Q)$, продолжающее $u$.*

$\lhd$ Согласно предложению 2.3.8 существует такое сечение $u_1 \in C(Q, V^Q)$, что $u_1 = u$ на $A$. Положим $\overline{u} = u_1|_{\mathrm{cl}\, A}$.

Единственность построенного продолжения очевидна. $\rhd$

Сечение $\overline{u}$, фигурирующее в формулировке принципа продолжения, будем называть *замыканием* сечения $u$ и обозначать символом $\operatorname{ext}(u)$.

**2.3.9.** Несложно убедиться в справедливости следующего утверждения.

***Теорема.*** *Рассмотрим семейство $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ глобальных непрерывных сечений $V^Q$, антицепь $(B_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в алгебре $\operatorname{Clop}(Q)$ и положим $B = (\bigvee_{\xi\in\Xi} B_\xi)^\perp$. Тогда непрерывное сечение*

$$u = \operatorname{ext}\left(\bigcup_{\xi\in\Xi} u_\xi|_{B_\xi} \ \cup \ \varnothing^\wedge|_B\right)$$

*является перемешиванием $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ относительно $(B_\xi)_{\xi\in\Xi}$. В частности, для булевозначной алгебраической системы $C(Q, V^Q)$ справедлив принцип перемешивания.*

***Следствие.*** *Булевозначная алгебраическая система $C(Q, V^Q)$ удовлетворяет принципу максимума.*

**2.3.10. *Теорема о поточечной истинности.*** *Для любой формулы $\varphi(t_1,\dots,t_n)$ и произвольных сечений $u_1,\dots,u_n \in C(Q,V^Q)$ имеет место равенство*

$$[\![\varphi(u_1,\dots,u_n)]\!] = \big\{q\in Q:\ V^q \models \varphi\big(u_1(q),\dots,u_n(q)\big)\big\}. \qquad (*)$$

$\lhd$ Доказательство проводится индукцией по сложности формулы $\varphi$.

Если формула $\varphi$ атомарна, т. е. имеет вид $t_1 \in t_2$ или $t_1 = t_2$, то равенство $(*)$ вытекает из определения оценок истинности $[\![\cdot = \cdot]\!]$ и $[\![\cdot \in \cdot]\!]$.

Допустим, для формул меньшей сложности теорема доказана. Мы ограничимся рассмотрением лишь того случая, когда формула $\varphi$ имеет вид $(\exists t_0)\ \psi(t_0,\vec{t})$.

Если $V^q \models (\exists t_0)\ \psi\big(t_0,\vec{u}(q)\big)$, то найдется такой элемент $x \in V^q$, что $V^q \models \psi\big(x,\vec{u}(q)\big)$. Подберем сечение $u_0 \in C(Q,V^Q)$, удовлетворяющее равенству $u_0(q) = x$. По предположению индукции $q \in [\![\psi(u_0,\vec{u})]\!] \subset [\![(\exists t_0)\ \psi(t_0,\vec{u})]\!]$, что доказывает включение $\supset$ в соотношении $(*)$.

Покажем обратное включение. Пусть $q \in [\![(\exists t_0)\ \psi(t_0,\vec{u})]\!]$. По принципу максимума найдется непрерывное сечение $u_0$ такое, что $[\![\psi(u_0,\vec{u})]\!] = [\![(\exists t_0)\ \psi(t_0,\vec{u})]\!]$. Тогда по предположению индукции $V^q \models \psi\big(u_0(q),\vec{u}(q)\big)$ и, значит, $V^q \models (\exists t_0)\ \psi\big(t_0,\vec{u}(q)\big)$. $\rhd$

**2.3.11. *Лемма.*** *Для любого подмножества $X \subset V^Q$ имеют место следующие соотношения:*

**(1)** $\sqcup \operatorname{cl} X \subset \operatorname{cl} \sqcup X$;

**(2)** $\sqcup \operatorname{int} X \subset \operatorname{int} \sqcup X$;

**(3)** *если $X \in \operatorname{Clop}(V^Q)$, то $\sqcup X \in \operatorname{Clop}(V^Q)$;*

**(4)** *если множество $X$ открыто, то $\sqcup X$ — открытое подмножество $V^Q$;*

**(5)** *если множество $X$ открыто, то $\sqcup \operatorname{cl} X = \operatorname{cl} \sqcup X$.*

$\lhd$ (1): Пусть $x \in \sqcup \operatorname{cl} X$. Тогда $x \in y{\downarrow}$ для некоторого $y \in \operatorname{cl} X$. Рассмотрим сечения $u, v \in C(Q, V^Q)$ такие, что $u(q) = x$ и $v(q) = y$, где $q = \operatorname{pr}(x)$. Для всякого $A \in \operatorname{Clop}(q)$ выполнено $v(A) \cap X \neq \varnothing$. Положим $B = A \cap [\![u \in v]\!] \sqsubset Q$. Поскольку $q \in B$, найдется такая точка $p \in B$, что $v(p) \in X$. Очевидно, $u(p) \in v(p){\downarrow} \subset \sqcup X$ и, стало быть, $u(A) \cap \sqcup X \neq \varnothing$. Следовательно, $x \in \operatorname{cl} \sqcup X$.

(2): Предположим, что $x \in \sqcup \operatorname{int} X$, и рассмотрим $y \in \operatorname{int} X$ и $u, v \in C(Q, V^Q)$ такие, что $x \in y{\downarrow}$, $u(q) = x$ и $v(q) = y$, где $q = \operatorname{pr}(x)$. Ясно, что множество $B = v^{-1}(X) \cap [\![u \in v]\!]$ является окрестностью $q$, а значит, $u(B)$ — окрестность $x$. Кроме того, $u(p) \in v(p){\downarrow} \subset \sqcup X$ для всех $p \in B$, т. е. $u(B) \subset \sqcup X$. Стало быть, $x \in \operatorname{int} \sqcup X$.

(3): Согласно лемме 2.2.4 достаточно рассмотреть произвольное сечение $v \in C(Q, V^Q)$ и показать, что множество $v^{-1}(\sqcup X)$ открыто-замкнуто. Пусть $u = \ulcorner X \urcorner$. Очевидно, $v(q) \in \sqcup X$ тогда и только тогда, когда $V^q \models \big(\exists t \in u(q)\big)\, v(q) \in t$. По теореме о поточечной истинности $v^{-1}(X) = \big\{q \in Q :\ V^q \models \big(\exists t \in u(q)\big)\ v(q) \in t\big\} = [\![(\exists t \in u)\ v \in t]\!]$ и, следовательно, $v^{-1}(X) \sqsubset Q$.

(4): Тривиальным образом следует из (2).

(5): Пусть множество $X$ открыто. Тогда его замыкание $\operatorname{cl} X$ открыто-замкнуто, и согласно (3) множество $\sqcup \operatorname{cl} X$ также является открыто-замкнутым. Очевидное соотношение $\sqcup X \subset \sqcup \operatorname{cl} X$ влечет $\operatorname{cl} \sqcup X \subset \sqcup \operatorname{cl} X$. Обратное включение справедливо в силу (1). $\rhd$

Замечание. Следующие вопросы пока остаются открытыми.

**(1)** Верно ли, что из замкнутости подмножества $X \subset V^Q$ следует замкнутость $\sqcup X \subset V^Q$?

**(2)** Справедливо ли равенство $\sqcup \operatorname{cl} X = \operatorname{cl} \sqcup X$ для любого (не обязательно открытого) подмножества $X \subset V^Q$?

**2.3.12. *Теорема.*** *Булевозначная система $C(Q, V^Q)$ удовлетворяет принципу подъема.*

$\lhd$ Пусть $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство глобальных непрерывных сечений $V^Q$ и $(B_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство открыто-замкнутых подмножеств $Q$. Рассмотрим открыто-замкнутое множество $X = \operatorname{cl}\bigcup_{\xi\in\Xi} u_\xi(B_\xi)$ и положим $u = \ulcorner X \urcorner$. Покажем, что построенное таким образом сечение $u \in C(Q, V^Q)$ является подъемом $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ относительно $(B_\xi)_{\xi\in\Xi}$. Действительно, для любого сечения $v \in C(Q, V^Q)$ имеют место следующие соотношения:

$$[\![v \in u]\!] = v^{-1}(\llcorner u \lrcorner) = v^{-1}\Bigg(\operatorname{cl}\bigcup_{\xi\in\Xi} u_\xi(B_\xi)\Bigg) = \operatorname{cl} v^{-1}\Bigg(\bigcup_{\xi\in\Xi} u_\xi(B_\xi)\Bigg) =$$

$$= \operatorname{cl}\bigcup_{\xi\in\Xi} v^{-1}\big(u_\xi(B_\xi)\big) = \operatorname{cl}\bigcup_{\xi\in\Xi} B_\xi \cap [\![v = u_\xi]\!] = \bigvee_{\xi\in\Xi} B_\xi \wedge [\![v = u_\xi]\!].$$

Рассмотрим теперь произвольное сечение $u \in C(Q, V^Q)$ и покажем, что оно является подъемом некоторого семейства элементов $C(Q, V^Q)$ относительно подходящего семейства элементов $\operatorname{Clop}(Q)$. Пусть $X = \llcorner u \lrcorner$. Для каждого $x \in X$ подберем такое сечение $u_x \in C(Q, V^Q)$, что $x \in \operatorname{im} u_x$. Положим $B_x = [\![u_x \in u]\!] = u_x^{-1}(X)$. Очевидно, $x \in u_x(B_x) \subset X$ для всех $x \in X$, откуда следует, что $X = \bigcup_{x\in X} u_x(B_x) = \operatorname{cl}\bigcup_{x\in X} u_x(B_x)$. Аналогично тому, как это сделано в первой части доказательства, можно установить равенство $[\![v \in u]\!] = \bigvee_{x\in X} B_x \wedge [\![v = u_x]\!]$ для всех $v \in C(Q, V^Q)$. Таким образом, $u$ — подъем семейства $(u_x)_{x\in X}$ относительно $(B_x)_{x\in X}$. $\rhd$

**2.3.13.** Пусть $D \subset Q$ и $\mathscr{U}$ — подмножество $S(D, V^Q)$. Для каждой точки $q \in D$ обозначим символом $\mathscr{U}(q)$ совокупность $\{u(q) : u \in \mathscr{U}\}$.

***Предложение.*** *Пусть $\mathscr{U}$ — непустое подмножество $C(D, V^Q)$, где $D \sqsubset Q$. Следующие свойства сечения $\overline{u} \in C(Q, V^Q)$ эквивалентны:*

**(1)** $\overline{u} = \ulcorner \operatorname{cl}\bigcup_{u\in\mathscr{U}} \operatorname{im} u \urcorner$;
**(2)** $[\![v \in \overline{u}]\!] = \operatorname{cl}\big\{q \in D : v(q) \in \mathscr{U}(q)\big\}$ *для всех* $v \in C(Q, V^Q)$;
**(3)** $[\![v \in \overline{u}]\!] = \operatorname{cl}\bigcup_{u\in\mathscr{U}} \{v = u\}$ *для всех* $v \in C(Q, V^Q)$;
**(4)** $\overline{u}{\downarrow} = \Big\{ \operatorname{ext}\big(\bigcup_{u\in\mathscr{U}} u|_{D_u}\big) : (D_u)_{u\in\mathscr{U}}$ *— разбиение единицы в алгебре* $\operatorname{Clop}(D)\Big\}$;
**(5)** $\overline{u}{\downarrow} = C(D, \operatorname{cl}\bigcup_{u\in\mathscr{U}} \operatorname{im} u)$;

**(6)** *сечение* $\overline{u}$ *является поточечно наименьшим среди сечений* $\tilde{u} \in C(Q, V^Q)$, *удовлетворяющих включению* $\mathscr{U}(q) \subset \tilde{u}(q){\downarrow}$ *для всех* $q \in D$.

$\lhd$ (1)$\to$(2): Положим $X = \bigcup_{u \in \mathscr{U}} \operatorname{im} u$. Тогда $\llcorner \overline{u} \lrcorner = \operatorname{cl} X$ и поэтому $[\![ v \in \overline{u} ]\!] = v^{-1}(\llcorner u \lrcorner) = v^{-1}(\operatorname{cl} X) = \operatorname{cl} v^{-1}(X)$ для любого сечения $v \in C(Q, V^Q)$. Несложно убедиться в том, что $X = \bigcup_{q \in D} \mathscr{U}(q)$, а также установить эквивалентность включений $v(q) \in \mathscr{U}(q)$ и $q \in v^{-1}\big(\bigcup_{q \in D} \mathscr{U}(q)\big)$.

(2)$\to$(3): Достаточно показать, что множества $\big\{q \in D : \ v(q) \in \mathscr{U}(q)\big\}$ и $\bigcup_{u \in \mathscr{U}} \{v = u\}$ совпадают для всех $v \in C(Q, V^Q)$. Возьмем произвольную точку $q \in D$.

Если $v(q) \in \mathscr{U}(q)$, то для некоторого элемента $u \in \mathscr{U}$ выполнено $v(q) = u(q)$ и, следовательно, $q \in \{v = u\}$.

Если же $q \in \bigcup_{u \in \mathscr{U}} \{v = u\}$, то для подходящего $u \in \mathscr{U}$ имеет место включение $q \in \{v = u\}$, а значит, $v(q) = u(q) \in \mathscr{U}(q)$.

(3)$\to$(4): Рассмотрим произвольный элемент $v \in C(D, V^Q)$ и определим сечение $\overline{v} \in C(Q, V^Q)$ следующим образом:

$$\overline{v}(q) = \begin{cases} v(q), & \text{если } q \in D, \\ \varnothing^{\wedge}(q), & \text{если } q \notin D. \end{cases}$$

Пусть $v \in \overline{u}{\downarrow}$. Тогда $D = \{v \in \overline{u}\} \subset [\![ \overline{v} \in \overline{u} ]\!] = \operatorname{cl} \bigcup_{u \in \mathscr{U}} \{\overline{v} = u\} \subset D$. Для всех $u \in \mathscr{U}$ множество $\{\overline{v} = u\} = u^{-1}(\operatorname{im} \overline{v})$ открыто-замкнуто. Согласно принципу исчерпывания найдется антицепь $(D_u)_{u \in \mathscr{U}}$ в алгебре $\operatorname{Clop}(Q)$ такая, что $D_u \subset \{\overline{v} = u\}$ и

$$\bigvee_{u \in \mathscr{U}} D_u = \operatorname{cl} \bigcup_{u \in \mathscr{U}} \{\overline{v} = u\} = D.$$

Очевидно, сечение $w = \bigcup_{u \in \mathscr{U}} u|_{D_u}$ непрерывно, множество $\operatorname{dom} w$ открыто, $D = \operatorname{cl} \operatorname{dom} w$ и $\{w = v\} = \{w = \overline{v}\} = \operatorname{dom} w$. Ясно, что $\operatorname{ext}(w) \in C(D, V^Q)$ и $\{\operatorname{ext}(w) = v\} = D$. Поэтому $\operatorname{ext}(w) = v$ и, таким образом, справедливо включение $\subset$.

Установим обратное включение. Пусть $(D_u)_{u \in \mathscr{U}}$ — разбиение единицы в алгебре $\operatorname{Clop}(D)$ и $v = \operatorname{ext}(\bigcup_{u \in \mathscr{U}} u|_{D_u})$. Покажем, что $v \in \overline{u}{\downarrow}$. Поскольку $\operatorname{dom} v = D$, достаточно установить включение $\operatorname{im} v \subset \llcorner \overline{u} \lrcorner$. Очевидно, $u(D_u) \subset \llcorner \overline{u} \lrcorner$ для всех $u \in \mathscr{U}$ и, следовательно,

$\bigcup_{u\in\mathscr{U}} u(D_u) \subset \llcorner\overline{u}\lrcorner$. Заметим, что $\operatorname{im} v = \operatorname{cl}\bigcup_{u\in\mathscr{U}} u(D_u)$, а значит, $\operatorname{im} v \subset \llcorner\overline{u}\lrcorner$.

(4)→(5): Положим $X = \operatorname{cl}\bigcup_{u\in\mathscr{U}} \operatorname{im} u$. Пусть $(D_u)_{u\in\mathscr{U}}$ — разбиение единицы в алгебре $\operatorname{Clop}(D)$ и $v = \operatorname{ext}(\bigcup_{u\in\mathscr{U}} u|_{D_u})$. Очевидно, $\operatorname{dom} v = D$. Покажем, что $\operatorname{im} v \subset X$. Из включения $u(D_u) \subset X$ следует $\bigcup_{u\in\mathscr{U}} u(D_u) \subset X$, откуда с учетом равенства $\operatorname{im} v = \operatorname{cl}\bigcup_{u\in\mathscr{U}} u(D_u)$ вытекает требуемое соотношение $\operatorname{im} v \subset X$. Таким образом, $\overline{u}{\downarrow} \subset C(D, X)$.

Для доказательства обратного включения рассмотрим произвольное сечение $v \in C(D, X)$ и покажем, что $v = \operatorname{ext}\left(\bigcup_{u\in\mathscr{U}} u|_{D_u}\right)$ для некоторого разбиения единицы $(D_u)_{u\in\mathscr{U}}$ в алгебре $\operatorname{Clop}(D)$. Очевидно, $v^{-1}(X) = D$. Поскольку сечение $v$ открыто, справедливо равенство $D = \operatorname{cl} v^{-1}(\bigcup_{u\in\mathscr{U}} \operatorname{im} u)$. Множество $A = v^{-1}(\bigcup_{u\in\mathscr{U}} \operatorname{im} u)$ открыто и плотно в $D$.

С каждым элементом $u \in \mathscr{U}$ свяжем открыто-замкнутое множество $C_u = \{v = u\} = v^{-1}(\operatorname{im} u)$. Из очевидного равенства $A = \bigcup_{u\in\mathscr{U}} C_u$ следует, что $\bigvee_{u\in\mathscr{U}} C_u = D$. Согласно принципу исчерпывания найдется разбиение единицы $(D_u)_{u\in\mathscr{U}}$ в алгебре $\operatorname{Clop}(D)$ такое, что $D_u \subset C_u$ для всех $u \in \mathscr{U}$. Положим $w = \bigcup_{u\in\mathscr{U}} u|_{D_u}$. Ясно, что для каждого $u \in \mathscr{U}$ имеют место равенства $w|_{D_u} = u|_{D_u} = v|_{D_u}$, так как $D_u \subset \{v = u\}$. Следовательно, по принципу продолжения $\operatorname{ext}(w) = v$, что доказывает требуемое включение.

(5)→(1): Достаточно заметить, что $D = \operatorname{pr}(\operatorname{cl}\bigcup_{u\in\mathscr{U}} \operatorname{im} u)$, и воспользоваться предложением 2.3.6 (3).

Эквивалентность (1) и (6) очевидна. $\triangleright$

Сечение $\overline{u}$, фигурирующее в условии предложения, очевидно, единственно. Мы будем называть это сечение *подъемом* множества $\mathscr{U}$ и обозначать символом $\mathscr{U}{\uparrow}$.

Заметим, что в случае $\mathscr{U} \subset C(Q, V^Q)$ условие (3) можно записать в следующем виде:

$$[\![v \in \overline{u}]\!] = \bigvee_{u\in\mathscr{U}} [\![v = u]\!] \ \text{ для всех } \ v \in C(Q, V^Q).$$

Таким образом, если $\mathscr{U}$ — непустое подмножество $C(Q, V^Q)$, то понятие подъема $\mathscr{U}$ совпадает с одноименным понятием, введенным в 2.1.8.

## 2.4. Функциональное представление булевозначного универсума

На протяжении всего параграфа мы предполагаем, что $Q$ — экстремально несвязный компакт и $\mathfrak{U}$ — булевозначный универсум над $\mathrm{Clop}(Q)$.

**2.4.1.** Для дальнейшей работы нам понадобится понятие фактор-класса $X/{\sim}$, где $X$ — (собственный) класс, а $\sim$ — отношение эквивалентности на $X$. Традиционное определение фактор-класса, вводимое для того случая, когда $X$ является множеством, не всегда переносится на случай собственного класса, поскольку элементы $X$, эквивалентные данному $x \in X$, могут, вообще говоря, образовывать собственный класс. Это препятствие преодолимо с помощью следующего факта.

***Теорема Фреге — Рассела — Скотта.*** *Для любого отношения эквивалентности $\sim$ на классе $X$ существует функция $F : X \to \mathbb{V}$ такая, что*

$$F(x) = F(y) \leftrightarrow x \sim y \quad \textit{для всех } x, y \in X. \tag{$*$}$$

В качестве $F$ можно взять функцию, определенную следующим образом:

$$F(x) = \big\{ y \in X : \ y \sim x \ \& \ (\forall z \in X)\big(z \sim x \to \operatorname{rank}(y) \leqslant \operatorname{rank}(z)\big)\big\}.$$

Такую функцию $F$ принято называть *канонической проекцией* отношения эквивалентности $\sim$. Соотношение $(*)$ позволяет рассматривать $F(x)$ как аналог класса эквивалентности, содержащего элемент $x \in X$. В связи с этим мы будем обозначать $F(x)$ символом ${\sim}(x)$.

**2.4.2.** Для каждой точки $q \in Q$ введем отношение эквивалентности $\sim_q$ на классе $\mathfrak{U}$ следующим образом:

$$u \sim_q v \ \leftrightarrow \ q \in [\![u = v]\!].$$

Рассмотрим расслоение $V^Q = \big\{\big(q, {\sim_q}(u)\big) : \ q \in Q, \ u \in \mathfrak{U}\big\}$ и условимся обозначать пару $\big(q, {\sim_q}(u)\big)$ символом $\widehat{u}(q)$. Очевидно, для каждого элемента $u \in \mathfrak{U}$ отображение $\widehat{u} : q \mapsto \widehat{u}(q)$ представляет собой сечение расслоения $V^Q$. Заметим, что для всякого $x \in V^Q$ существуют

$u \in \mathfrak{U}$ и $q \in Q$ такие, что $\widehat{u}(q) = x$. Кроме того, равенство $\widehat{u}(q) = \widehat{v}(q)$ выполнено тогда и только тогда, когда $q \in [\![u = v]\!]$.

Превратим каждый слой $V^q$ расслоения $V^Q$ в алгебраическую систему сигнатуры $\{\in\}$, полагая

$$V^q \models x \in y \;\leftrightarrow\; q \in [\![u \in v]\!],$$

где элементы $u, v \in \mathfrak{U}$ таковы, что $\widehat{u}(q) = x$ и $\widehat{v}(q) = y$. Легко убедиться в том, что приведенное определение корректно. Действительно, если $\widehat{u}_1(q) = x$ и $\widehat{v}_1(q) = y$ для какой-либо другой пары элементов $u_1, v_1$, то включения $q \in [\![u \in v]\!]$ и $q \in [\![u_1 \in v_1]\!]$ эквивалентны.

Несложно убедиться в том, что класс $\{\widehat{u}(A) : \ u \in \mathfrak{U}, \ A \sqsubset Q\}$ образует базу некоторой открытой топологии на $V^Q$, что позволяет нам рассматривать $V^Q$ как непрерывное расслоение.

**2.4.3. *Теорема.*** *Имеют место утрверждения:*

**(1)** *Расслоение $V^Q$ является непрерывным поливерсумом.*

**(2)** *Отображение $u \mapsto \widehat{u}$ осуществляет изоморфизм между булевозначными универсумами $\mathfrak{U}$ и $C(Q, V^Q)$.*

Доказательство последней теоремы разобьем на несколько этапов.

**2.4.4. *Лемма.*** *Если $u \in \mathfrak{U}$ и $A \sqsubset Q$, то $\widehat{u}(A) \sqsubset V^Q$.*

$\lhd$ Для каждого элемента $x \in V^Q \backslash \widehat{u}(A)$ найдутся $v \in \mathfrak{U}$ и $q \in Q$ такие, что $x = \widehat{v}(q)$.

Если $q \in A$, то $\widehat{u}(q) \neq x = \widehat{v}(q)$, $q \in [\![u \neq v]\!]$, и поэтому множество $\widehat{v}([\![u \neq v]\!])$ является окрестностью точки $x$, не пересекающейся с $\widehat{u}(A)$. Если же $q \notin A$, то окрестность $\widehat{v}(Q \backslash A)$ точки $x$ не пересекается с $\widehat{u}(A)$. $\rhd$

**2.4.5. *Лемма.*** *Классы $\{\widehat{u} : \ u \in \mathfrak{U}\}$ и $C(Q, V^Q)$ совпадают.*

$\lhd$ Рассмотрим произвольный элемент $u \in \mathfrak{U}$ и покажем, что сечение $\widehat{u}$ непрерывно. Если $v \in \mathfrak{U}$ и $A \sqsubset Q$, то множество $\widehat{u}^{-1}\big(\widehat{v}(A)\big) = A \cap [\![u = v]\!]$ открыто. Произвольность $v$ и $A$ позволяет заключить, что $\widehat{u} \in C(Q, V^Q)$.

Установим обратное включение. Пусть $f \in C(Q, V^Q)$. Для каждой точки $q \in Q$ подберем такой элемент $u_q \in \mathfrak{U}$, что $\widehat{u}_q(q) = f(q)$, и положим

$$A_q := \{p \in Q : \ \widehat{u}_q(p) = f(p)\} = f^{-1}\big(\widehat{u}(Q)\big) \sqsubset Q.$$

Таким образом, $(A_q)_{q\in Q}$ — открытое покрытие компакта $Q$, а значит, из него можно выбрать подпокрытие $(A_q)_{q\in F}$, где $F$ — конечное подмножество $Q$. По принципу исчерпывания найдется антицепь $(B_q)_{q\in F}$ такая, что $B_q \subset A_q$ для всех $q \in B$ и $\bigcup_{q\in F} B_q = Q$. Поскольку булевозначная алгебраическая система $\mathfrak{U}$ удовлетворяет принципу перемешивания, у нас есть возможность рассмотреть элемент $u = \mathrm{mix}_{q\in F} B_q u_q \in \mathfrak{U}$. Несложно убедиться в том, что $\widehat{u} = f$. $\triangleright$

**2.4.6. Лемма.** *Топология $V^Q$ экстремально несвязна.*

$\triangleleft$ Вытекает из лемм 2.4.4 и 2.4.5 и предложения 2.2.5. $\triangleright$

**2.4.7. Лемма.** *Отображение $(u \mapsto \widehat{u}) : \mathfrak{U} \to C(Q, V^Q)$ является биекцией, причем для всех $u, v \in \mathfrak{U}$ выполнены равенства*

$$
\begin{aligned}
[\![u = v]\!]_{\mathfrak{U}} &= [\![\widehat{u} = \widehat{v}]\!]_{C(Q,V^Q)},\\
[\![u \in v]\!]_{\mathfrak{U}} &= [\![\widehat{u} \in \widehat{v}]\!]_{C(Q,V^Q)}.
\end{aligned}
$$

$\triangleleft$ Легко заметить, что для всех $u, v \in \mathfrak{U}$ и $q \in Q$ имеют место соотношения

$$
\begin{aligned}
V^q \models \widehat{u}(q) \in \widehat{v}(q) &\ \leftrightarrow\ q \in [\![u \in v]\!],\\
V^q \models \widehat{u}(q) = \widehat{v}(q) &\ \leftrightarrow\ q \in [\![u = v]\!].
\end{aligned}
$$

Тем самым требуемые равенства установлены. В лемме 2.4.6 показана сюръективность отображения $u \mapsto \widehat{u}$. Нам остается обосновать его инъективность. Пусть элементы $u, v \in \mathfrak{U}$ таковы, что $\widehat{u} = \widehat{v}$. Тогда $[\![u = v]\!] = [\![\widehat{u} = \widehat{v}]\!] = Q$, откуда в силу отделимости системы $\mathfrak{U}$ следует равенство $u = v$. $\triangleright$

Таким образом, тройка $\big(C(Q, V^Q), [\![\cdot = \cdot]\!], [\![\cdot \in \cdot]\!]\big)$ представляет собой булевозначную алгебраическую систему над $\mathrm{Clop}(Q)$, изоморфную $\mathfrak{U}$, а значит, $C(Q, V^Q)$ является булевозначным универсумом над $\mathrm{Clop}(Q)$.

**2.4.8. Лемма.** *Если $u \in C(Q, V^Q)$, то $\llcorner u \lrcorner$ — открыто-замкнутое подмножество $V^Q$.*

$\triangleleft$ Пусть $u \in C(Q, V^Q)$. Поскольку $C(Q, V^Q)$ удовлетворяет принципу подъема, мы имеем $u = \mathrm{asc}_{\xi\in\Xi} B_\xi u_\xi$ для некоторого семейства $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}$ непрерывных сечений $V^Q$ и семейства $(B_\xi)_{\xi\in\Xi}$ открыто-замкнутых подмножеств $Q$. Для всякого $v \in C(Q, V^Q)$ имеют место соотношения

$$v^{-1}\Bigl(\operatorname{cl}\bigcup_{\xi\in\Xi} u_\xi(B_\xi)\Bigr) = \operatorname{cl}\bigcup_{\xi\in\Xi} v^{-1}\bigl(u_\xi(B_\xi)\bigr) = \operatorname{cl}\bigcup_{\xi\in\Xi} B_\xi \cap [\![v = u_\xi]\!] =$$

$$= \bigvee_{\xi\in\Xi} B_\xi \wedge [\![v = u_\xi]\!] = [\![v \in u]\!] = v^{-1}(\llcorner u \lrcorner).$$

Таким образом, согласно лемме 2.2.7 установлено равенство

$$\llcorner u \lrcorner = \operatorname{cl}\bigcup_{\xi\in\Xi} u_\xi(B_\xi).$$

Множество $\bigcup_{\xi\in\Xi} u_\xi(B_\xi)$ открыто, поэтому в силу леммы 2.4.6 класс $\llcorner u \lrcorner$ является открыто-замкнутым множеством. $\rhd$

**2.4.9. Лемма.** *Для любого подмножества $X \sqsubset V^Q$ существует такое сечение $u \in C(Q, V^Q)$, что $\llcorner u \lrcorner = X$.*

$\lhd$ С каждым элементом $x \in X$ свяжем сечение $u_x \in C(Q, V^Q)$ такое, что $x \in \operatorname{im} u_x$. Очевидно, множество $B_x = u_x^{-1}(X)$ открыто-замкнуто. Рассмотрим подъем $u = \operatorname{asc}_{x\in X} B_x u_x$ и установим равенство $\llcorner u \lrcorner = X$. Поскольку $x \in u_x(B_x) \subset X$ для всех $x \in X$, мы имеем $X = \bigcup_{x\in X} u_x(B_x) = \operatorname{cl}\bigcup_{x\in X} u_x(B_x)$. Для произвольного сечения $v \in C(Q, V^Q)$ справедливы соотношения

$$v^{-1}(X) = \bigcup_{x\in X} v^{-1}\bigl(u_x(B_x)\bigr) =$$

$$= \operatorname{cl}\bigvee_{x\in X} B_x \wedge [\![v = u_x]\!] = [\![v \in u]\!] = v^{-1}(\llcorner u \lrcorner).$$

Согласно лемме 2.2.7 требуемое равенство установлено. $\rhd$

**2.4.10. Лемма.** *Для любой формулы $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ и произвольных сечений $u_1, \dots, u_n \in C(Q, V^Q)$ имеет место равенство*

$$[\![\varphi(u_1, \dots, u_n)]\!] = \bigl\{q \in Q :\ V^q \models \varphi\bigl(u_1(q), \dots, u_n(q)\bigr)\bigr\}.$$

$\lhd$ Доказательство леммы в точности повторяет доказательство теоремы 2.3.10 о поточечной истинности. $\rhd$

Из последней леммы следует, что в каждом слое истинны аксиомы экстенсиональности и регулярности. Таким образом, теорема 2.4.3 полностью доказана.

В заключение сформулируем теорему, объединяющую основные результаты параграфов 2.3 и 2.4.

**Теорема.** *Пусть $Q$ — стоуновский компакт полной булевой алгебры $B$.*

**(1)** *Класс $C(Q,V^Q)$ непрерывных сечений поливерсума $V^Q$ над $Q$ является булевозначным универсумом.*

**(2)** *Для любого булевозначного универсума $\mathfrak{U}$ над $B$ существует непрерывный поливерсум $V^Q$ над $Q$, класс $C(Q,V^Q)$ непрерывных сечений которого изоморфен $\mathfrak{U}$.*

## Литература


**1.** Архангельский А. В., Пономарёв В. И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях.—М.: Наука, 1974.

**2.** Бурбаки Н. Общая топология.—М.: Наука, 1968.

**3.** Владимиров Д. А. Булевы алгебры.—М.: Наука, 1969.

**4.** Гордон Е. И., Морозов С. Ф. Булевозначные модели теории множеств.—Горький: Изд.-во Горьковского гос. ун-та, 1982.

**5.** Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Нестандартные методы анализа.—Новосибирск: Наука, 1990.

**6.** Сикорский Р. Булевы алгебры.—М.: Мир, 1969.

**7.** Solovay R. and Tennenbaum S. Iterated Cohen extensions and Souslin's problem // Ann. Math.—1972.—V. 94, No. 2.—P. 201–245.