ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2002, том 384, № 2, с. 153–155

МАТЕМАТИКА

УДК 517.98

КРИТЕРИЙ ПОЛНОТЫ НЕСТАНДАРТНОЙ ОБОЛОЧКИ НОРМИРОВАННОГО ПРОСТРАНСТВА В БУЛЕВОЗНАЧНОМ УНИВЕРСУМЕ

© 2002 г. **А. Е. Гутман, Д. Б. Рябко**

Представлено академиком Ю.Г. Решетняком 24.12.2001 г.

Поступило 09.01.2002 г.

В данной работе некоторые результаты инфинитезимального анализа, касающиеся нормированных пространств и поля вещественных чисел, перенесены на функциональное представление булевозначного универсума. В частности, для произвольного поливерсума над Q доказана равносильность следующих условий: точка $q \in Q$ не σ-изолированна, слой поливерсума над точкой q является счетно-насыщенным, нестандартная оболочка любого нормированного пространства в слое поливерсума над точкой q полна.

Одним из важнейших понятий, возникающих в инфинитезимальном анализе применительно к теории нормированных пространств, является понятие нестандартной оболочки нормированного пространства – множества его ограниченных элементов, факторизованного по отношению бесконечной близости (см., например, [3]).

В работе [1] для произвольного булевозначного универсума предложен удобный функциональный аналог – класс сечений соответствующего непрерывного поливерсума. Такая функциональная модель позволяет, в частности, ввести в рассмотрение понятие бесконечной близости элементов нормированного пространства внутри слоя поливерсума и тем самым открыть дополнительную возможность для синтеза методов инфинитезимального и булевозначного анализа.

В связи с этим естественно возникает вопрос о переносе основных результатов классического инфинитезимального анализа на булевозначный универсум. В рамках затронутой нами проблематики одним из ключевых является вопрос о полноте нестандартной оболочки нормированного пространства внутри слоя поливерсума.

Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской Академии наук, Новосибирск

Новосибирский государственный университет

В данной работе получен положительный ответ на поставленный вопрос в случае, когда точка компакта, соответствующая рассматриваемому слою, не является σ-изолированной. Полноту нестандартной оболочки удалось доказать благодаря установленному в этой же работе критерию счетной насыщенности слоя поливерсума.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть Q – экстремально несвязный компакт. Предположим, что точкам $q \in Q$ сопоставлены некоторые попарно непересекающиеся классы ${}^{q}\mathbb{V}$, являющиеся моделями ZFC. Через ${}^{Q}\mathbb{V}$ обозначают объединение $\bigcup\limits_{q \in Q} {}^{q}\mathbb{V}$, при этом класс ${}^{q}\mathbb{V}$ называют слоем ${}^{Q}\mathbb{V}$ в точке $q \in Q$. Пусть на ${}^{Q}\mathbb{V}$ задана некоторая класс-топология (см. [1]). Непрерывную функцию u: $Q \to {}^{Q}\mathbb{V}$ называют непрерывным сечением ${}^{Q}\mathbb{V}$, если $u(q) \in {}^{q}\mathbb{V}$ для всех $q \in Q$. Символом $C(Q, {}^{Q}\mathbb{V})$ обозначается класс всех непрерывных сечений ${}^{Q}\mathbb{V}$.

На ${}^{Q}\mathbb{V}$ накладываются некоторые дополнительные условия, в частности, обеспечивающие открыто-замкнутость множества

$$\{q \in Q: {}^{q}\mathbb{V} \models \varphi(u_1(q), u_2(q), \ldots, u_n(q))\}$$

для произвольной формулы $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ сигнатуры теории множеств и сечений $u_1, u_2, \ldots, u_n \in C(Q, {}^{Q}\mathbb{V})$. Это множество называют истинностью $\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ в $C(Q, {}^{Q}\mathbb{V})$ и обозначают символом $\|\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n)\|$. При соблюдении упомянутых условий класс ${}^{Q}\mathbb{V}$ называется (непрерывным) поливерсумом над Q.

Строгое и полное изложение основных фактов о непрерывном поливерсуме имеется в [1], где, в частности, показано, что класс непрерывных сечений поливерсума представляет собой общий вид булевозначного универсума.

Условимся обозначать символами $\mathbb{R}$ и $\mathbb{N}$ множества вещественных и натуральных чисел ($0 \notin \mathbb{N}$), а символами $\mathcal{R}$ и $\mathcal{N}$ – элементы $C(Q, {}^{Q}\mathbb{V})$, являющиеся в $C(Q, {}^{Q}\mathbb{V})$ указанными множествами. Введем также обозначения ${}^{q}\mathbb{R} = \mathcal{R}(q)$, ${}^{q}\mathbb{N} = \mathcal{N}(q)$ и для числа $\alpha \in \mathbb{R}$ символом ${}^{q}\alpha$ обозначим элемент $\alpha^{\wedge}(q) \in {}^{q}\mathbb{V}$, где $(\cdot)^{\wedge}$ – каноническое вложение $\mathbb{V}$ в $C(Q, {}^{Q}\mathbb{V})$ (см. [2]). Кроме того, через ${}^{q}\varnothing$ обозначим элемент $\varnothing^{\wedge}(q) \in {}^{q}\mathbb{V}$.

Для любого элемента $X \in {}^{q}\mathbb{V}$ спуском X называется класс $X{\downarrow} := \{x \in {}^{q}\mathbb{V}\colon {}^{q}\mathbb{V} \models x \in X\}$. Для всех $X, Y \in {}^{q}\mathbb{V}$ равенства $X{\downarrow} = Y{\downarrow}$ и $X = Y$ равносильны.

Если элемент $X \in {}^{q}\mathbb{V}$ является внутри ${}^{q}\mathbb{V}$ полем или упорядоченным множеством, то на $X{\downarrow}$ можно естественным образом ввести операции поля или соответственно отношение порядка. Например, для $\alpha, \beta \in {}^{q}\mathbb{R}{\downarrow}$ сумма $\alpha + \beta$ определяется как такой элемент $\gamma \in {}^{q}\mathbb{R}{\downarrow}$, что ${}^{q}\mathbb{V} \models (\gamma = \alpha + \beta)$. Спуск поля является полем. Если элемент $X \in {}^{q}\mathbb{V}$ является внутри ${}^{q}\mathbb{V}$ векторным пространством над полем $F \in {}^{q}\mathbb{V}$, то $X{\downarrow}$ окажется векторным пространством над полем $F{\downarrow}$. Для любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ элемент ${}^{q}\alpha \in {}^{q}\mathbb{V}$ является числом внутри ${}^{q}\mathbb{V}$, т.е. ${}^{q}\alpha \in {}^{q}\mathbb{R}{\downarrow}$. Функция ${}^{q}(\cdot)\colon \mathbb{R} \to {}^{q}\mathbb{R}{\downarrow}$ инъективна и сохраняет отношение порядка и операции сложения и умножения. Кроме того, $\mathbb{N}^{\wedge}(q) = {}^{q}\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}^{\wedge}(q) \subset {}^{q}\mathbb{R}$ внутри ${}^{q}\mathbb{V}$.

Условимся в дальнейшем отождествлять элементы $\alpha \in \mathbb{R}$ и ${}^{q}\alpha \in {}^{q}\mathbb{R}{\downarrow}$ и тем самым считать, что $\mathbb{R} \subset {}^{q}\mathbb{R}{\downarrow}$.

Пусть P – элемент ${}^{q}\mathbb{V}$, являющийся внутри ${}^{q}\mathbb{V}$ отношением (т. е. множеством пар). Рассмотрим следующее свойство последовательности $(x_n)_{n \in N}$ элементов $(\mathrm{dom}P){\downarrow}$: если для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется элемент $y_n \in {}^{q}\mathbb{V}$ такой, что

$$ {}^{q}\mathbb{V} \models ((x_1, y_n), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n) \in P), $$

то существует элемент $y \in {}^{q}\mathbb{V}$, для которого

$$ {}^{q}\mathbb{V} \models ((x_n, y) \in P) \text{ при всех } n \in \mathbb{N}. $$

Отношение P называется счетно-насыщенным, если любая последовательность элементов $(\mathrm{dom}P){\downarrow}$ обладает указанным выше свойством. Говорят, что слой ${}^{q}\mathbb{V}$ является счетно-насыщенным, если любое отношение в ${}^{q}\mathbb{V}$ счетно-насыщенно.

Точка топологического пространства называется σ-изолированной, если пересечение любого счетного множества ее окрестностей является окрестностью этой точки.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Класс ${}^{q}\mathbb{V}$ является счетно-насыщенным тогда и только тогда, когда точка $q \in Q$ не σ-изолированна.*

Условимся называть элементы ${}^{q}\mathbb{R}{\downarrow}$ внутренними числами. Внутреннее число λ назовем стандартным, если существует такое число $\alpha \in \mathbb{R}$, что ${}^{q}\alpha = \lambda$. Заметим, что с учетом принятого ранее соглашения (о включении $\mathbb{R} \subset {}^{q}\mathbb{R}{\downarrow}$) мы отождествляем стандартные числа и элементы $\mathbb{R}$. Ограниченным числом назовем внутреннее число, модуль которого меньше некоторого стандартного числа, и обозначим символом $\mathbb{O}({}^{q}\mathbb{R})$ множество всех ограниченных чисел. Числа, не являющиеся ограниченными, будем называть бесконечно большими. Внутреннее число λ назовем бесконечно малым, если $|\lambda| < \alpha$ для любого стандартного числа $\alpha > 0$. Будем говорить, что два внутренних числа бесконечно близки, если их разность бесконечно мала. Отношение бесконечной близости обозначим символом $\approx$. Это отношение является отношением эквивалентности на множестве внутренних чисел. Условимся обозначать символом $[\lambda]$ класс эквивалентности, содержащий внутреннее число λ.

Предложение 1. *Для любого ограниченного числа λ существует единственное стандартное число, бесконечно близкое к λ.*

Таким образом, отображение $\alpha \mapsto [\alpha]$ осуществляет биекцию $\mathbb{R}$ на $\mathbb{O}({}^{q}\mathbb{R})/{\approx}$. Для любого ограниченного числа λ бесконечно близкое к нему стандартное число назовем стандартной частью λ и обозначим через ${}^{\circ}\lambda$.

Пусть $X \in {}^{q}\mathbb{V}$ – нормированное пространство над ${}^{q}\mathbb{R}$ внутри ${}^{q}\mathbb{V}$. Элемент $x \in X{\downarrow}$ назовем ограниченным, если его норма внутри ${}^{q}\mathbb{V}$ является ограниченным числом. Обозначим символом $\mathbb{O}(X)$ множество всех ограниченных элементов $X{\downarrow}$. Элементы $x, y \in X{\downarrow}$ будем называть бесконечно близкими и писать $x \approx y$, если норма их разности внутри ${}^{q}\mathbb{V}$ бесконечно мала. Отношение бесконечной близости представляет собой отношение эквивалентности на множестве $X{\downarrow}$. Класс эквивалентности, содержащий элемент $x \in X{\downarrow}$, условимся обозначать через $[x]$. Обозначим фактор-множество $\mathbb{O}(X)/{\approx}$ символом $\mathbf{X}$ и положим

$$ \mathbf{x} + \mathbf{y} = [x + y], \quad \lambda\mathbf{x} = [\lambda x], \quad \|\mathbf{x}\| = {}^{\circ}\|x\| $$

для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, где x и y – произвольные представители классов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ и $\|x\|$ – норма элемента x внутри ${}^{q}\mathbb{V}$. Легко показать, что введенные операции определены корректно и превращают $\mathbf{X}$ в нормированное пространство над $\mathbb{R}$, которое мы будем обозначать символом $\hat{X}$ и называть нестандартной оболочкой нормированного пространства X.

Т е о р е м а 2. *Пусть точка $q \in Q$ не является σ-изолированной и $X \in {}^q\mathbb{V}$ – нормированное пространство внутри ${}^q\mathbb{V}$. Тогда нормированное пространство $\hat{X}$ полно.*

Если точка $q \in Q$ является σ-изолированной, то в ${}^q\mathbb{V}$ все вещественные числа стандартны. Это означает, что в случае σ-изолированной точки q справедливы равенства ${}^q\mathbb{R}{\downarrow} = \mathbb{R}$ и ${}^q\mathbb{N} = \mathbb{N}{\downarrow}$ (с учетом принятого ранее соглашения о включении $\mathbb{R} \subset {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$).

П р е д л о ж е н и е 2. *Пусть $q \in Q$ – σ-изолированная точка. Тогда найдется элемент $X \in {}^q\mathbb{V}$, являющийся внутри ${}^q\mathbb{V}$ нормированным пространством, для которого нормированное пространство $\hat{X}$ неполно.*

В заключение сформулируем теорему, объединяющую основные результаты данной работы.

Т е о р е м а 3. *Пусть ${}^q\mathbb{V}$ – слой в точке $q \in Q$ непрерывного поливерсума над экстремально несвязным компактом Q. Следующие утверждения эквивалентны*:

(а) *точка q не σ-изолированна*;

(б) *модель ${}^q\mathbb{V}$ является счетно-насыщенной*;

(в) *нестандартная оболочка любого нормированного пространства внутри ${}^q\mathbb{V}$ полна.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гутман А. Е., Лосенков Г. А.* // Мат. тр. 1998. Т. 1. № 1. С. 54–77.
2. *Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С.* Нестандартные мтеоды анализа. Новосибирск: Наука, 1990.
3. *Hurd A.E., Loeb P.A.* An Introduction to Nonstandard Real Analysis. Orlando (Fla): Acad. Press, 1985.