Владикавказский математический журнал
Январь–март, 2002, Том 4, Выпуск 1

УДК **517.98**

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВ КАНТОРОВИЧА ПОСРЕДСТВОМ БУЛЕВОЗНАЧНЫХ МОДЕЛЕЙ

А. Е. Гутман, Д. Б. Рябко

В данной работе введено понятие внешнего сечения поливерсума (функционального представления булевозначного универсума) и получено новое функциональное представление K-пространств и векторных решеток в виде внешних сечений. В частности, построен изоморфизм между произвольной векторной решеткой и внешним подмножеством поля вещественных чисел соответствующего булевозначного универсума.
В рамках нового функционального представления найдены аналоги основных понятий и фактов теории векторных решеток. В том числе, установлено, какие из рассматриваемых свойств K-пространств имеют «поточечные критерии».

1. Введение

В работе [2] для произвольного булевозначного универсума предложен удобный функциональный аналог — непрерывный поливерсум, представляющий собой непрерывное расслоение (над некоторым экстремально несвязным компактом Q), слоями которого являются классические модели теории множеств. При этом булевозначный универсум представляется в виде класса непрерывных сечений поливерсума — непрерывных функций, сопоставляющих каждой точке компакта Q элемент соответствующего слоя.

В данной статье введено понятие непрерывного внешнего сечения, в определенном смысле обобщающее понятие сечения. Значением внешнего сечения в точке компакта Q является не элемент, а подмножество соответствующего слоя поливерсума. Таким образом, внешнее сечение поливерсума, как и сам поливерсум, является непрерывным расслоением, множество непрерывных сечений которого называется его спуском.

Спуски внешних сечений, обладающих определенными свойствами, являются векторными решетками. Более того, любая векторная решетка оказывается изоморфной спуску подходящего внешнего сечения.

С помощью представления булевозначного универсума в виде поливерсума в работе [3] введено понятие бесконечной близости элементов нормированного пространства (и, в частности, вещественных чисел) внутри слоя поливерсума и предложены аналоги некоторых теорем инфинитезимального анализа, касающиеся вещественных чисел. В том числе, установлено, что каждое ограниченное число λ имеет стандартную часть $^\circ\lambda$ — единственное стандартное число, бесконечно близкое к λ.

Понятие стандартной части позволяет получить явное описание изоморфизма между спусками внешних сечений поливерсума и подрешетками пространства $C_\infty(Q)$, представляющего собой общий вид расширенного K-пространства. А именно, каждая подрешетка $C_\infty(Q)$ совпадает с решеткой функций $q \mapsto {}^\circ u(q)$, где u — элементы спуска некоторого внешнего сечения поливерсума.

Новое функциональное представление позволяет упрощать доказательства многих утверждений о K-пространствах и векторных решетках с помощью перехода к их «поточечным» аналогам. В данной работе формализовано понятие поточечного критерия для произвольного свойства векторной решетки и установлено, какие из рассматриваемых свойств имеют поточечные критерии.

Необходимые сведения из нестандартного анализа см. [4–6].

2. Предварительные сведения

Компакт называется экстремально несвязным, если замыкание любого его открытого подмножества открыто. На протяжении всего текста Q — экстремально несвязный компакт. Символом $\mathrm{Clop}(Q)$ обозначают совокупность всех открыто-замкнутых подмножеств Q, а символом $\mathrm{Clop}(q)$ — совокупность всех открыто-замкнутых подмножеств Q, содержащих точку $q \in Q$.

Точка топологического пространства называется σ-изолированной (или P-точкой), если пересечение любого счетного множества ее окрестностей является окрестностью этой точки.

Пусть D — всюду плотное подмножество Q и $f\colon D \to R$ — непрерывная функция. Будем говорить, что функция f *имеет предел* $\lambda \in R$ в точке $q \in Q$, если для любой открытой окрестности V точки λ найдется открытая окрестность U точки q такая, что $f[U] \subset V$. Благодаря непрерывности f наше определение предела отличается от классического лишь тем, что значения функции в изолированных точках объявляются ее пределами в этих точках. Рассмотрим множество $\overline{D}$ всех точек $q \in Q$, в которых функция f имеет предел, и обозначим этот предел через $\bar{f}(q)$. Функция $\bar{f}\colon \overline{D} \to R$, очевидно, является продолжением f. Известно, что функция $\bar{f}$ непрерывна и определена на котощем подмножестве Q, (см. [1, Теорема 1.1.1]). Функцию $\bar{f}$ называют *максимальным расширением* f. Определенная на всюду плотном подмножестве Q функция называется *расширенной*, если она совпадает со своим максимальным расширением.

Множество расширенных функций обозначают символом $C_\infty(Q)$. Заметим, что любая функция $f \in C_\infty(Q)$ имеет продолжение $\overline{f} \in C(Q, \overline{\mathbb{R}})$. Две функции $f, g \in C_\infty(Q)$ равны в том и только том случае, когда они равны на всюду плотном подмножестве Q.

Подробные сведения о расширенных функциях можно найти в [1, §1.1].

В произвольной булевой алгебре символ $\perp$ обозначает отношение дизъюнктности: $a \perp b \Leftrightarrow a \wedge b = 0$. Семейство элементов булевой алгебры называется *дизъюнктным*, если любые два его элемента попарно дизъюнктны.

Теорема (принцип исчерпывания). *Пусть B — полная булева алгебра. Тогда для всякого семейства $(a_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов B существует такое дизъюнктное семейство $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$, что $b_\xi \leqslant a_\xi$ для всех $\xi \in \Xi$ и $\sup_{\xi\in\Xi} a_\xi = \sup_{\xi\in\Xi} b_\xi$.*

Доказательство последней теоремы можно найти, например, в [7, теорема 20.2].

Теорема Стоуна — Огасавары [8, 9]. *Пусть B — полная булева алгебра и Q — совокупность всех ультрафильтров в B. Для каждого элемента $b \in B$ обозначим множество $\{q \in Q : b \in q\}$ через $\hat{b}$. Множество $\{\hat{b} : b \in B\}$ является базой некоторой топологии на Q, относительно которой Q является экстремально несвязным компактом.*

Кроме того, отображение $b \mapsto \hat{b}$ осуществляет булев изоморфизм между алгебрами B и $\mathrm{Clop}(Q)$

Компакт Q, построенный в формулировке последней теоремы, называется *стоуновским компактом* булевой алгебры B.

Всюду ниже под векторной решеткой мы понимаем решеточно упорядоченное векторное пространство. При этом, если явно не оговорено противное, все рассматриваемые векторные решетки предполагаются архимедовыми.

В векторной решетке E элементы e и f называются *дизъюнктными*, если $|e| \wedge |f| = 0$. Дизъюнктное дополнение $\{e \in E : e \perp f \text{ для всех } f \in F\}$ множества $F \subset E$ обозначается через $F^{\perp}$. Подмножество векторной решетки, имеющее вид $F^{\perp\perp}$ для некоторого $F \subset E$, называется *полосой*. Подмножество $F \subset E$ является полосой тогда и только тогда, когда $F^{\perp\perp} = F$. Полосы вида $\{e\}^{\perp\perp}$, где $e \in E$, называются *главными*. Полосы векторной решетки образуют полную булеву алгебру. Элемент $1 \in E$ называется *слабой порядковой единицей*, если $1 \geqslant 0$ и $\{1\}^{\perp\perp} = E$, и *сильной порядковой единицей*, если для каждого элемента $e \in E$ существует число $\lambda \in \mathbb{R}$ такое, что $|e| \leqslant \lambda 1$ то элемент $1 \in E$.

Линейный оператор $\pi\colon E \to E$ называется *порядковым проектором*, если $\pi^2 = \pi$ и $0 \leqslant \pi e \leqslant e$ для всех положительных элементов $e \in E$. Множество всех порядковых проекторов векторной решетки E обозначается символом $\mathrm{Pr}(E)$. Образ любого порядкового проектора является полосой. Каждый порядковый проектор однозначно определяется своим образом. Порядковые проекторы векторной решетки E образуют булеву алгебру. В пространстве $C_\infty(Q)$ для любого порядкового проектора π найдется единственное множество $P \in \mathrm{Clop}(Q)$ такое, что $\pi f = \chi_P f$ для всех $f \in C_\infty(Q)$, где χ_P — характеристическая функция множества P. Соответствие $\pi \mapsto P$ является изоморфизмом между булевыми алгебрами $\mathrm{Pr}\big(C_\infty(Q)\big)$ и $\mathrm{Clop}(Q)$.

Множество $F \subset E$ назовем *конечно-циклическим*, если для любых элементов $f_1, \dots, f_n \in F$ и для любых попарно дизъюнктных порядковых проекторов $\pi_1, \dots, \pi_n \in \mathrm{Pr}(E)$ элемент $\pi_1 f_1 + \dots + \pi_n f_n$ принадлежит F.

Тот факт, что сеть $(e_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ монотонно убывает и $\inf_{\alpha \in \mathrm{A}} = e$, коротко обозначают формулой $e_\alpha {\downarrow} e$. Говорят, что сеть $(e_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ *o-сходится* к элементу $e \in E$ и пишут $e = o\text{-}\lim_{\alpha \in \mathrm{A}} e_\alpha$, если в E найдется сеть $(f_\beta)_{\beta \in \mathrm{B}}$ такая, что $\forall \beta \in \mathrm{B}\ \exists \overline{\alpha} \in \mathrm{A}\ \forall \alpha \geqslant \overline{\alpha}\ |e_\alpha \Leftrightarrow e| \leqslant f_\beta$. Если в роли сети $(f_\beta)_{\beta \in \mathrm{B}}$ выступает последовательность $(f/n)_{n \in \mathbb{N}}$ для некоторого $f \geqslant 0$, то говорят, что сеть $(e_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ *r-сходится* к элементу $e \in E$ (с регулятором f) и пишут $e = r\text{-}\lim_{\alpha \in \mathrm{A}} e_\alpha$.

Векторное подпространство $F \subset E$ называют *(порядковым) идеалом* векторной решетки E, если для любых $f \in F$ и $e \in E$ из $|e| \leqslant |f|$ следует $e \in F$. Идеал F называют *главным* (порожденным элементом $e \in F$) если для любого элемента $f \in F$ верно $|f| \leqslant n|e|$ для некоторого числа $n \in \mathbb{N}$. Идеал F называют *фундаментом*, если $F^{\perp\perp} = E$.

Пространством Канторовича или *K-пространством* называется векторная решетка, в которой любое ограниченное сверху (снизу) подмножество имеет точную верхнюю (нижнюю) границу. *Расширенным K-пространством* называется K-пространство, в котором любое дизъюнктное подмножество ограничено. Любое K-пространство является фундаментом некоторого (единственного с точностью до изоморфизма) расширенного K-пространства. Любое расширенное K-пространство изоморфно пространству $C_\infty(Q)$, где Q — стоуновский компакт булевой алгебры полос данного пространства.

Символом $\mathbb{V}$ мы обозначаем класс всех множеств и предполагаем, что $\mathbb{V}$ является моделью ZFC (а точнее, NBG; см., например, [4, § 1.3]).

Пусть ${}^{Q}V \subset Q \times \mathbb{V}$ — класс-соответствие, на котором задана некоторая топология (см. [2, 1.2]). Класс всех открыто-замкнутых подмножеств ${}^{Q}V$ обозначается через $\mathrm{Clop}({}^{Q}V)$. Для каждой точки $q \in Q$ класс

$$
{}^{Q}V \cap \big(\{q\} \times \mathbb{V}\big) = \big\{(q, x) : (q, x) \in {}^{Q}V\big\}
$$

обозначают символом ${}^{q}\mathbb{V}$. Соответствие ${}^{Q}V$ называют *непрерывным расслоением* над Q, а класс ${}^{q}\mathbb{V}$ — *слоем* расслоения ${}^{Q}V$ в точке q. Функцию $u\colon D \to {}^{Q}V$ называют *сечением* расслоения ${}^{Q}V$ над множеством $D \subset Q$, если $u(q) \in {}^{q}\mathbb{V}$ для всех $q \in D$. Под *непрерывным сечением* расслоения ${}^{Q}V$ понимается сечение, являющееся непрерывной функцией. Для любого подмножества $D \subset Q$ символом $C(D, {}^{Q}V)$ обозначается класс всех непрерывных сечений ${}^{Q}V$ над D.

Как установлено в [2, предложения 2.3 и 2.5], если выполнены условия

(1) $\forall\, q \in Q \quad \forall\, x \in {}^{q}\mathbb{V} \quad \exists\, u \in C(Q, {}^{Q}V) \quad u(q) = x$;

(2) $\forall\, u \in C(Q, {}^{Q}V) \quad \forall\, A \in \mathrm{Clop}(Q) \quad u(A) \in \mathrm{Clop}({}^{Q}V)$,

то непрерывное расслоение ${}^{Q}V$ обладает следующими свойствами:

(i) топология ${}^{Q}V$ хаусдорфова;

(ii) для любых $u \in C(Q, {}^{Q}V)$ и $q \in Q$ множество $\big\{u(A) : A \in \mathrm{Clop}(q)\big\}$ является базой окрестностей точки $u(q)$;

(iii) все элементы $C(Q, {}^{Q}V)$ являются открытыми и замкнутыми отображениями;

(iv) топология ${}^{Q}V$ экстремально несвязна.

В дальнейшем мы предполагаем, что для каждой точки $q \in Q$ класс ${}^{q}\mathbb{V}$ является алгебраической системой сигнатуры $\{\in\}$. Для произвольной формулы $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ сигнатуры $\{\in\}$ и сечений $u_1, \dots, u_n$ расслоения ${}^{Q}V$ символом $\{\varphi(u_1, \dots, u_n)\}$ обозначают множество

$$
\big\{q \in \operatorname{dom} u_1 \cap \dots \cap \operatorname{dom} u_n : {}^{q}\mathbb{V} \models \varphi\big(u_1(q), \dots, u_n(q)\big)\big\}.
$$

Для любого элемента $x \in \mathbb{U}$, где $\mathbb{U}$ — классическая или булевозначная (см. [4]) алгебраическая система сигнатуры $\{\in\}$, спуском x называется класс $x{\downarrow} = \{y \in \mathbb{U} : \mathbb{U} \models y \in x\}$. Если в системе $\mathbb{U}$ истинна аксиома экстенсиональности, то для всех $x, y \in \mathbb{U}$ равенства $x{\downarrow} = y{\downarrow}$ и $x = y$ равносильны. Далее нас в основном будут интересовать случаи $\mathbb{U} = {}^{q}\mathbb{V}$ и $\mathbb{U} = C(Q, {}^{Q}\mathbb{V})$. Для произвольного сечения $u \in C(Q, {}^{Q}V)$ класс $\bigcup_{q \in Q} u(q){\downarrow}$ называется *распаковкой* сечения u и обозначатся символом $\llcorner u \lrcorner$. Непрерывное расслоение ${}^{Q}V$ называется *(непрерывным) поливерсумом* над Q, если в каждом слое ${}^{q}\mathbb{V}$ ($q \in Q$) истинны аксиомы экстенсиональности и регулярности и, кроме того, в дополнение к (1) и (2) выполнены следующие условия:

(3) $\forall\, u \in C(Q, {}^{Q}V) \quad \llcorner u \lrcorner \in \mathrm{Clop}({}^{Q}V)$;

(4) $\forall\, X \in \mathrm{Clop}({}^{Q}V) \quad \exists\, u \in C(Q, {}^{Q}V) \quad \llcorner u \lrcorner = X$.

Для произвольных сечений $u, v \in C(Q, {}^{Q}V)$ множества $\{u = v\}$ и $\{u \in v\}$ открыто-замкнуты (см. [2, 3.3]), что позволяет ввести в рассмотрение две класс-функции

$$
\|\cdot = \cdot\|,\ \|\cdot \in \cdot\| \colon\ C(Q, {}^{Q}V) \times C(Q, {}^{Q}V) \to \mathrm{Clop}(Q),
$$

полагая $\|u = v\| = \{u = v\}$ и $\|u \in v\| = \{u \in v\}$. Несложно убедиться в том, что тройка $\big(C(Q, {}^{Q}V), \|\cdot = \cdot\|, \|\cdot \in \cdot\|\big)$ представляет собой отделимую $\mathrm{Clop}(Q)$-значную алгебраическую систему. Как показано в [2, теорема 4.10], класс непрерывных сечений поливерсума представляет собой общий вид булевозначного универсума. Точнее, если Q —

стоуновский компакт полной булевой алгебры B, то класс $C(Q, {}^{Q}V)$ непрерывных сечений поливерсума ${}^{Q}V$ над Q является булевозначным универсумом над $\mathrm{Clop}(Q)$, и для любого булевозначного универсума $\mathbb{U}$ над B существует поливерсум ${}^{Q}V$ над Q, класс $C(Q, {}^{Q}V)$ непрерывных сечений которого изоморфен $\mathbb{U}$.

Подробные сведения о непрерывных расслоениях и непрерывном поливерсуме имеются в [2].

Всюду далее ${}^{Q}\mathbb{V}$ — непрерывный поливерсум. В этом параграфе мы фиксируем слой ${}^{q}\mathbb{V}$ в точке $q \in Q$. (Заметим, что ${}^{q}\mathbb{V}$ представляет собой модель ZFC.)

Условимся обозначать символами $\mathbb{R}$ и $\mathbb{N}$ множества вещественных и натуральных чисел ($0 \notin \mathbb{N}$), а символами $\mathcal{R}$ и $\mathcal{N}$ — элементы $C(Q, {}^{Q}\mathbb{V})$, являющиеся в $C(Q, {}^{Q}\mathbb{V})$ указанными множествами. Введем также обозначения ${}^{q}\mathbb{R} = \mathcal{R}(q)$, ${}^{q}\mathbb{N} = \mathcal{N}(q)$, и для числа $\alpha \in \mathbb{R}$ символом ${}^{q}\alpha$ будем обозначать элемент $\alpha^{\wedge}(q) \in {}^{q}\mathbb{V}$, где $(\cdot)^{\wedge}$ — каноническое вложение $\mathbb{V}$ в $C(Q, {}^{Q}\mathbb{V})$ (см. [4, 2.2.7]). Если элемент X является внутри ${}^{q}\mathbb{V}$ полем или упорядоченным множеством, то на $X{\downarrow}$ можно естественным образом ввести операции поля или, соответственно, отношение порядка. Например, для $\alpha, \beta \in {}^{q}\mathbb{R}{\downarrow}$ сумма $\alpha + \beta$ определяется как такой элемент $\gamma \in {}^{q}\mathbb{R}{\downarrow}$, что ${}^{q}\mathbb{V} \models (\gamma = \alpha + \beta)$.

Легко проверить, что спуск поля является полем. Множество ${}^{q}\mathbb{R}{\downarrow}$ является также векторной решеткой (вообще говоря, не архимедовой).

При классическом подходе к определению вещественных чисел (в виде дедекиндовых сечений) для любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ элемент ${}^{q}\alpha \in {}^{q}\mathbb{V}$ является числом внутри ${}^{q}\mathbb{V}$, т. е. ${}^{q}\alpha \in {}^{q}\mathbb{R}{\downarrow}$. Функция ${}^{q}(\cdot)\colon \mathbb{R} \to {}^{q}\mathbb{R}{\downarrow}$ инъективна и сохраняет отношение порядка и операции сложения и умножения. Кроме того, $\mathbb{N}^{\wedge}(q) = {}^{q}\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}^{\wedge}(q) \subset {}^{q}\mathbb{R}$ внутри ${}^{q}\mathbb{V}$.

Условимся в дальнейшем отождествлять элементы $\alpha \in \mathbb{R}$ и ${}^{q}\alpha \in {}^{q}\mathbb{R}{\downarrow}$ и тем самым считать, что $\mathbb{R} \subset {}^{q}\mathbb{R}{\downarrow}$.

Элементы ${}^{q}\mathbb{R}{\downarrow}$ называют *внутренними числами*. Внутреннее число λ называется *стандартным*, если существует такое число $\alpha \in \mathbb{R}$ что ${}^{q}\alpha = \lambda$. Таким образом, с учетом принятого соглашения мы отождествляем стандартные числа и элементы $\mathbb{R}$.

Ограниченным числом называют внутреннее число, модуль которого меньше некоторого стандартного числа, и символом $\mathcal{O}({}^{q}\mathbb{R})$ обозначают множество всех ограниченных чисел. Числа, не являющиеся ограниченными, называются *бесконечно большими*.

Внутреннее число λ называется *бесконечно малым*, если $|\lambda| < \alpha$ для любого стандартного числа $\alpha > 0$. Символом $o({}^{q}\mathbb{R})$ обозначают множество бесконечно малых внутренних чисел. Говорят, что два внутренних числа *бесконечно близки*, если их разность бесконечно мала. Отношение бесконечной близости является отношением эквивалентности на множестве внутренних чисел. Условимся обозначать символом $[\lambda]$ класс эквивалентности, содержащий внутреннее число λ.

Для любого ограниченного числа λ существует единственное стандартное число α, бесконечно близкое к λ (см. [3, предложение 3]). Число α называют *стандартной частью* λ и обозначают через ${}^{\circ}\lambda$.

Замечание 1. Легко проверить, что для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $\lambda, \mu \in {}^{q}\mathbb{R}{\downarrow}$ справедливо равенство ${}^{\circ}(\alpha\lambda + \beta\mu) = \alpha\,{}^{\circ}\lambda + \beta\,{}^{\circ}\mu$.

В [3] показано, что нестандартные числа есть только в слоях поливерсума, соответствующих не σ-изолированным точкам. В той же работе содержатся подробные сведения о внутренних числах.

Аналогично тому, как на множестве ${}^{q}\mathbb{R}{\downarrow}$ были введены операции поля, зададим на множестве $\mathcal{R}{\downarrow}$ операции векторного пространства над $\mathbb{R}$ и отношение порядка. В частности, для $u, v \in \mathcal{R}{\downarrow}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ суммой $\alpha u + \beta v$ является такой элемент $w \in \mathcal{R}{\downarrow}$, что $C(Q, {}^Q\mathbb{V}) \models (w = \alpha^\wedge u + \beta^\wedge v)$. Очевидно, $\mathcal{R}{\downarrow}$ является векторной решеткой, в которой, например, супремумом $u \vee v$ элементов $u, v \in \mathcal{R}{\downarrow}$ является такой элемент $w \in \mathcal{R}{\downarrow}$, что $C(Q, {}^Q\mathbb{V}) \models u \vee v$. Заметим, что введенные на $\mathcal{R}{\downarrow}$ операции и отношение порядка являются поточечными, т. е. например, $(\alpha u + \beta v)(q) = \alpha u(q) + \beta v(q)$ для всех $q \in Q$, где $u, v \in \mathcal{R}{\downarrow}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, а неравенство $u \leqslant v$ равносильно $u(q) \leqslant v(q)$ для всех $q \in Q$.

Кроме того, на $\mathcal{R}{\downarrow}$ можно ввести операцию умножения по аналогии с тем как это было сделано для ${}^q\mathbb{R}{\downarrow}$. В результате записи $\alpha^\wedge u$ и αu, где $\alpha \in \mathbb{R}$ и $u \in \mathcal{R}{\downarrow}$, обозначают одно и то же сечение.

3. Изоморфизм между $\mathcal{R}{\downarrow}$ и $C_\infty(Q)$

Стандартной частью сечения $u \in \mathcal{R}{\downarrow}$ назовем $\mathbb{R}$-значную функцию ${}^\circ u$, определенную на множестве $\operatorname{dom} {}^\circ u$ тех точек $q \in Q$, в которых внутреннее число $u(q)$ ограничено, полагая $({}^\circ u)(q) = {}^\circ\big(u(q)\big)$ для всех $q \in \operatorname{dom} {}^\circ u$.

Сечение $u \in \mathcal{R}{\downarrow}$ назовем *ограниченным (на множестве $D \subset Q$)*, если для любой точки $q \in Q$ $(q \in D)$ внутреннее число $u(q)$ ограничено. Множество ограниченных сечений из $\mathcal{R}{\downarrow}$ обозначим символом $\mathcal{O}(\mathcal{R}{\downarrow})$. Нетрудно проверить, что множество $\mathcal{O}(\mathcal{R}{\downarrow})$ является векторной подрешеткой $\mathcal{R}{\downarrow}$.

Лемма 1. *Сечение $u \in \mathcal{R}{\downarrow}$ ограничено в том и только том случае, когда существует такое число $\alpha \in \mathbb{R}$, что $|u| \leqslant \alpha^\wedge$.*

$\lhd$ Пусть сечение $u \in \mathcal{R}{\downarrow}$ ограничено. Для любой точки $q \in Q$ найдется число $\alpha_q \in \mathbb{R}$, такое что $|u(q)| \leqslant {}^q(\alpha_q)$. Множество $\{\||u| \leqslant \alpha_q^\wedge\| : q \in Q\}$ является открытым покрытием компакта Q. Выберем из этого покрытия конечное подпокрытие $\||u| \leqslant \alpha_{q_1}^\wedge\|, \dots, \||u| \leqslant \alpha_{q_n}^\wedge\|$, и положим $\alpha = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \alpha_i$. Ясно, что $|u| \leqslant \alpha^\wedge$. Обратная импликация очевидна. $\rhd$

Предложение 1. *Для любого сечения $u \in \mathcal{R}{\downarrow}$ функция ${}^\circ u$ принадлежит $C_\infty(Q)$.*

$\lhd$ Покажем, что $\operatorname{dom} {}^\circ u$ — всюду плотное подмножество Q. Пусть сечение $N \in \mathcal{R}{\downarrow}$ является в $C(Q, {}^Q\mathbb{V})$ целой частью числа u. Тогда

$$
\begin{aligned}
Q &= \|N \in \mathcal{N}\| = \|N \in \mathbb{N}^\wedge\| \\
&= \operatorname{cl} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{q \in Q : N(q) = n^\wedge(q)\} \\
&\subset \operatorname{cl} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{q \in Q : N(q) \leqslant n^\wedge(q)\} \\
&= \operatorname{cl} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{q \in Q : u(q) \leqslant n^\wedge(q)\} = \operatorname{cl} \operatorname{dom} {}^\circ u.
\end{aligned}
$$

Далее, покажем, что функция ${}^\circ u$ определена на открытом множестве и непрерывна. Для любых $q \in \operatorname{dom} {}^\circ u$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}$ имеют место неравенства

$$({}^\circ u(q) \Leftrightarrow \tfrac{\varepsilon}{2})^\wedge(q) < u(q) < ({}^\circ u(q) + \tfrac{\varepsilon}{2})^\wedge(q).$$

Следовательно, множество

$$P(q, \varepsilon) = \|({}^\circ u(q) \Leftrightarrow \tfrac{\varepsilon}{2})^\wedge < u < ({}^\circ u(q) + \tfrac{\varepsilon}{2})^\wedge\|$$

является окрестностью точки q, откуда следует, что область определения ${}^{\circ}u$ открыта. Кроме того,

$$ {}^{\circ}u\big(P(q,\varepsilon)\big) \subset \big({}^{\circ}u(q) \Leftrightarrow \varepsilon, {}^{\circ}u(q) + \varepsilon\big), $$

а значит, функция ${}^{\circ}u$ непрерывна.

Для любых $q \in Q \setminus \operatorname{dom} {}^{\circ}u$ и $n \in \mathbb{N}$ окрестность $P(q,n) = \|u > n^{\wedge}\|$ точки q удовлетворяет соотношению ${}^{\circ}u\big(P(q,n)\big) \geqslant n$. Следовательно, функция ${}^{\circ}u$ не имеет предела в любой точке вне своей области определения и, тем самым, совпадает со своим максимальным расширением. $\rhd$

Лемма 2. *Для любых $u_1, u_2 \in \mathcal{R}{\downarrow}$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ имеет место равенство ${}^{\circ}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 {}^{\circ}u_1 + \alpha_2 {}^{\circ}u_2$.*

$\lhd$ Согласно замечанию 1 для всех $q \in \operatorname{dom} {}^{\circ}u_1 \cap \operatorname{dom} {}^{\circ}u_1$ выполнено соотношение ${}^{\circ}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)(q) = \alpha_1 {}^{\circ}u_1(q) + \alpha_2 {}^{\circ}u_2(q)$. Остается заметить, что по предложению 1 все рассматриваемые функции являются элементами $C_{\infty}(Q)$. $\rhd$

Лемма 3. *Пусть $u_1, u_2 \in \mathcal{R}{\downarrow}$. Тогда $u_1 \leqslant u_2 \Leftrightarrow {}^{\circ}u_1 \leqslant {}^{\circ}u_2$ (в частности, $u_1 = u_2 \Leftrightarrow {}^{\circ}u_1 = {}^{\circ}u_2$).*

$\lhd$ Положим $u = u_2 \Leftrightarrow u_1$. С учетом леммы 2 достаточно показать, что $u \geqslant 0 \Leftrightarrow {}^{\circ}u \geqslant 0$.

Сначала докажем эквивалентность равенств $u = 0$ и ${}^{\circ}u = 0$. Первое равенство, очевидно, влечет второе. Покажем обратное. Пусть ${}^{\circ}u = 0$. Обозначим символом P множество $\|u \neq 0\|$ и предположим вопреки доказываемому, что $P \neq \varnothing$. Определим сечение v следующим образом: $v(q) = {}^{q}1/u(q)$ при $q \in P$ и $v(q) = {}^{q}1$ при $q \in Q \setminus P$. Очевидно, что сечение v непрерывно. По предложению 1 сечение v ограничено на всюду плотном подмножестве Q и, следовательно, в некоторой точке $q \in P$. Поскольку внутреннее число ${}^{q}1/u(q)$ ограничено, ${}^{\circ}u(q) \neq 0$, что противоречит равенству ${}^{\circ}u = 0$.

Теперь покажем, что ${}^{\circ}u > 0 \Leftrightarrow u > 0$. Импликация «$\Rightarrow$» очевидна. По доказанному выше $u > 0$ влечет ${}^{\circ}u \neq 0$. Осталось заметить, что из $u > 0$ вытекает ${}^{\circ}u \geqslant 0$. $\rhd$

Предложение 2. *Для любой функции $f \in C_{\infty}(Q)$ существует единственное сечение $u \in \mathcal{R}{\downarrow}$ такое, что ${}^{\circ}u = f$.*

$\lhd$ Единственность следует из леммы 3. Докажем существование.

Функцию $g \in C_{\infty}(Q)$ назовем ступенчатой, если найдутся последовательность попарно различных чисел $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и разбиение единицы $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ в алгебре $\operatorname{Clop}(Q)$ такие, что $g|_{P_n} = \alpha_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Для такой функции g определим сечение ${}^{\bullet}g$ как перемешивание сечений $\alpha_n^{\wedge}$ с весами P_n, $n \in \mathbb{N}$ (см. [4, 2.3.1, 2.5.3]). Очевидно, ${}^{\bullet}g \in \mathcal{R}{\downarrow}$ и ${}^{\circ}({}^{\bullet}g) = g$. Символом $St(Q)$ обозначим множество всех ступенчатых функций.

Далее, пусть $f \in C_{\infty}(Q)$. Без ограничения общности можно считать, что $f \geqslant 0$. Как легко видеть, найдется такая функция $h \in St(Q)$, для которой $f \leqslant h$. Обозначим через $S(f)$ множество $\{{}^{\bullet}g : g \in St(Q),\ 0 \leqslant g \leqslant f\}$. Это множество сечений ограничено сверху сечением ${}^{\bullet}h$, а снизу — нулевым сечением. Следовательно, $C(Q, {}^{Q}\mathbb{V}) \models \big(S(f){\uparrow} \subset [0, {}^{\bullet}h]\big)$. Пусть $u \in \mathcal{R}{\downarrow}$ — такое сечение, что $u = \sup\big(S(f){\uparrow}\big)$ внутри $C(Q, {}^{Q}\mathbb{V})$. Установим равенство ${}^{\circ}u = f$.

Предположим сначала, что ${}^{\circ}u(q) < f(q)$ для некоторой точки $q \in \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}({}^{\circ}u)$. Обозначим $\big(f(q) + {}^{\circ}u(q)\big)/2$ через x. Так как функции f и ${}^{\circ}u$ непрерывны, найдется такое множество $P \in \operatorname{Clop}(q)$, что ${}^{\circ}u(p) < x < f(p)$ для всех $p \in P$. Определим сечение v следующим образом: $v(p) = x^{\wedge}(p)$ при $p \in P$ и $v(p) = {}^{p}0$ в противном случае.

Ясно, что $v \in S(f)$ и тем самым $u \geqslant v$. С другой стороны, $\|u < v\| \neq \varnothing$, поскольку $P \subset \|u < v\|$.

Итак, $f \leqslant {}^{\circ}u$. Предположим теперь, что найдется точка $p \in \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}({}^{\circ}u)$ для которой верно ${}^{\circ}u(p) > f(p)$. Пусть $x = ({}^{\circ}u(p) + f(p))/2$. Найдется такое множество $P \in \operatorname{Clop}(p)$, что ${}^{\circ}u(q) > x > f(q)$ для всех точек $q \in P$. Определим сечение u' следующим образом: $u'(q) = x^{\wedge}(q)$ при $q \in P$ и $u'(q) = u(q)$ при $q \notin P$. Тогда $u' \geqslant v$ для всех $v \in S(f)$, и, следовательно, $C(Q, {}^{Q}\mathbb{V}) \models u' \geqslant \sup\big(S(f){\uparrow}\big) = u$. С другой стороны, $u' < u$.

Таким образом, функции ${}^{\circ}u$ и f совпадают на всюду плотном множестве, а значит, ${}^{\circ}u = f$. $\rhd$

Теорема 1. (1) *Функция $u \mapsto {}^{\circ}u$ осуществляет изоморфизм векторной решетки $\mathcal{R}{\downarrow}$ на расширенное K-пространство $C_{\infty}(Q)$.*

(2) *Функция $u \mapsto {}^{\circ}u$ осуществляет изоморфизм векторной решетки $\mathcal{O}(\mathcal{R}{\downarrow})$ на K-пространство $C(Q)$.*

$\lhd$ Из предложений 1 и 2 следует, что функция $u \mapsto {}^{\circ}u$ осуществляет биекцию между $\mathcal{R}{\downarrow}$ и $C_{\infty}(Q)$; леммы 2 и 3 гарантируют, что функция $u \mapsto {}^{\circ}u$ и обратная к ней сохраняют операции векторного пространства и отношение порядка. Кроме того, из лемм 1 и 3 следует, что ограниченные сечения соответствуют ограниченным функциям. $\rhd$

Следствие 1. (1) *Векторная решетка $\mathcal{R}{\downarrow}$ является расширенным K-пространством.*

(2) *Векторная решетка $\mathcal{O}(\mathcal{R}{\downarrow})$ является K-пространством ограниченных элементов.*

Первая часть этого утверждения представляет собой известную теорему Гордона (см., например, [4, 5.2.2]).

Функцию, обратную к $u \mapsto {}^{\circ}u$, действующую из $C_{\infty}(Q)$ на $\mathcal{R}{\downarrow}$, обозначим через $f \mapsto {}^{\bullet}f$.

4. Описание свойств K-пространств в терминах внешних сечений

Пусть $D \in \operatorname{Clop}(Q)$. Функцию $s\colon D \to \mathbb{V}$ назовем *внешним сечением*, если $s(q) \subset {}^{q}\mathbb{V}$ для любой точки $q \in D$. Внешнее сечение $s\colon Q \to \mathbb{V}$ назовем *внешним подмножеством* $\mathcal{R}$, если $s(q) \subset {}^{q}\mathbb{R}{\downarrow}$ для всех $q \in Q$.

Пусть $s\colon D \to \mathbb{V}$ — внешнее сечение. Символом $s{\downarrow}$ обозначим множество $\{u \in C(D, \mathbb{V}^{Q}) : u(q) \in s(q)$ для всех $q \in D\}$. Ясно, что если s — внешнее подмножество $\mathcal{R}$, то $s{\downarrow} \subset \mathcal{R}{\downarrow}$.

Внешнее сечение s будем называть *непрерывным в точке* $q \in \operatorname{dom} s$, если для любого элемента $x \in s(q)$ найдутся множество $P \in \operatorname{Clop}(q)$ и сечение $u \in s|_{P}{\downarrow}$ такие, что $u(q) = x$. Внешнее подмножество $\mathcal{R}$ будем называть *непрерывным*, если оно непрерывно во всех точках компакта Q. Множество внешних подмножеств $\mathcal{R}$ условимся обозначать символом $S_{\sim}(\mathcal{R})$, а множество непрерывных внешних подмножеств $\mathcal{R}$ — символом $C_{\sim}(\mathcal{R})$. Кроме того, обозначим через $S(\mathcal{R})$ множество всех внешних подмножеств $\mathcal{R}$, непустых в каждой точке компакта Q, а символом $C(\mathcal{R})$ — множество $C_{\sim}(\mathcal{R}) \cap S(\mathcal{R})$.

Лемма 4. *Внешнее подмножество $s \in S(\mathcal{R})$ непрерывно тогда и только тогда, когда для любых $q \in Q$ и $x \in s(q)$ найдется сечение $u \in s{\downarrow}$ такое, что $u(q) = x$.*

$\lhd$ Пусть s непрерывно, $q \in Q$ и $x \in s(q)$. Положим $x_q = x$ и для каждой точки $p \in Q \backslash \{q\}$ выберем произвольный элемент $x_p \in s(p)$. Для каждой точки $p \in Q$ найдутся множество $P_p \in \mathrm{Clop}(p)$ и сечение $u_p \in s|_{P_p}{\downarrow}$ такие, что $u_p(p) = x_p$. Множество $\{P_p \colon p \in Q\}$ представляет собой открытое покрытие компакта Q. Из этого покрытия выберем конечное подпокрытие $\{P_{p_1}, \dots, P_{p_n}\}$, которое, уменьшив при необходимости его элементы, превратим в разбиение единицы $\{P'_{p_1}, \dots, P'_{p_n}\}$ в алгебре $\mathrm{Clop}(Q)$. Определим сечение $v \in \mathcal{R}{\downarrow}$ следующим образом: $u(p) = u_{p_i}(p)$ для $p \in P'_{p_i}$, $i = 1, \dots, n$. Ясно, что $v \in s{\downarrow}$ и $v(q) = x$.

Обратное утверждение очевидно. $\rhd$

Для произвольного $s \in C(\mathcal{R})$ положим $s\bar{\downarrow} = \{{}^\circ u : u \in s{\downarrow}\}$. Заметим, что $s\bar{\downarrow} \subset C_\infty(Q)$ по теореме 1.

Для $s \in C(\mathcal{R})$ обозначим множество $\bigl\{q \in Q : s(q) = \{{}^q 0\}\bigr\}$ символом $\{s = 0\}$, а его дополнение — символом $\{s \neq 0\}$. Аналогично обозначим через $\{s \subset o\}$ множество $\{q \in Q : s(q) \subset o({}^q\mathbb{R})\}$, а его дополнение — через $\{s \not\subset o\}$. Заметим, что

$$\{s \neq 0\} = \{q \in Q : u(q) \neq {}^q 0 \text{ для некоторого } u \in s{\downarrow}\},$$
$$\{s \not\subset o\} = \{q \in Q : {}^\circ u(q) \neq 0 \text{ для некоторого } u \in s{\downarrow}\}.$$

Лемма 5. *Для любого $s \in C(\mathcal{R})$ множество $\{s \neq 0\}$ открыто.*

$\lhd$ Пусть $q \in \{s \neq 0\}$. Рассмотрим сечение $u \in s{\downarrow}$, для которого $u(q) \neq {}^q 0$. Тогда открытая окрестность $\|u \neq 0^\wedge\|$ точки q является подмножеством $\{s \neq 0\}$. $\rhd$

Лемма 6. *Для любого $s \in C(\mathcal{R})$ множество $\{s \not\subset o\}$ открыто и всюду плотно в $\{s \neq 0\}$.*

$\lhd$ Сначала покажем, что множество $\{s \not\subset o\}$ открыто. Пусть $q \in \{s \not\subset o\}$. Рассмотрим сечение $u \in s{\downarrow}$, для которого ${}^\circ u(q) \neq 0$ и число $\varepsilon \in \mathbb{R}$ такое, что $|u(q)| > {}^q\varepsilon$. Тогда множество $\||u| > \varepsilon^\wedge\|$ является открытой окрестностью точки q, содержащейся в $\{s \not\subset o\}$.

Далее, покажем, что множество $\{s \not\subset o\}$ всюду плотно в $\{s \neq 0\}$. Пусть это не верно, т. е. существует непустое открытое множество $P \subset \{s \neq 0\} \backslash \{s \not\subset o\}$. Любое сечение $u \in s{\downarrow}$ принимает на множестве P только бесконечно малые значения. Используя предложение 1 и лемму 3, легко установить, что для любого сечения $u \in \mathcal{R}{\downarrow}$ множество $W = \{q \in Q : u(q) \neq 0 \text{ и } {}^\circ u(q) = 0\}$ замкнуто и нигде не плотно в Q. С другой стороны, для некоторой (и даже для любой) точки $q \in P$ найдется сечение $u \in s{\downarrow}$ такое, что $u(q) \neq 0$. Тогда непустое открытое множество $\{p \in P : u(p) \neq 0\}$ содержится в W, что невозможно. $\rhd$

Множество сечений $U \subset C(Q, {}^Q\mathbb{V})$ назовем *конечно-циклическим*, если оно замкнуто относительно конечных перемешиваний.

Предложение 3. *Пусть $U \subset C(Q, {}^Q\mathbb{V})$ — конечно-циклическое множество сечений, $u_1, \dots, u_k \in C(Q, {}^Q\mathbb{V})$, P — непустое замкнутое подмножество Q и $\varphi(t, t_1, \dots, t_k)$ — произвольная формула теории множеств. Если верно утверждение*

$$\forall p \in P \ \exists u \in U \ {}^p\mathbb{V} \models \varphi\bigl(u(p), u_1(p), \dots, u_k(p)\bigr),$$

то

$$\exists u \in U \ \forall p \in P \ {}^{p}\mathbb{V} \models \varphi\big(u(p), u_1(p), \ldots, u_k(p)\big).$$

$\lhd$ Для каждой точки $p \in P$ обозначим символом u_p произвольный элемент U, для которого ${}^{p}\mathbb{V} \models \varphi\big(u_p(p), u_1(p), \ldots, u_k(p)\big)$. Множество

$$\big\{Q_p = \|\varphi\big(u_p, u_1, \ldots, u_k)\| : p \in P\big\}$$

является открыто-замкнутым покрытием компакта P. Выберем из него конечное подпокрытие $Q_{p_1}, \ldots, Q_{p_n}$, $n \in \mathbb{N}$, и положим $v_i = u_{p_i}$, $i = 1, \ldots, n$. По принципу исчерпывания найдется такое дизъюнктное открыто-замкнутое покрытие $Q'_1, \ldots, Q'_n$ компакта P, что $Q'_i \subset Q_{p_i}$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Положим $Q'_0 = Q \setminus \bigcup_{i=1}^{n} Q'_i$ и возьмем произвольное сечение $v_0 \in U$. Обозначим через u перемешивание сечений v_i с весами Q'_i, $i = 0, \ldots, n$. Так как множество U конечно-циклическое, сечение u принадлежит U и является искомым. $\rhd$

Следствие 2. *Пусть $E \subset C_\infty(Q)$ — конечно-циклическое множество функций, $u_1, \ldots, u_k \in C(Q, {}^{Q}\mathbb{V})$, P — непустое замкнутое подмножество Q и $\varphi(t, t_1, \ldots, t_k)$ — произвольная формула теории множеств. Если верно утверждение*

$$\forall p \in P \ \exists e \in E \ {}^{p}\mathbb{V} \models \varphi\big({}^{\bullet}e(p), u_1(p), \ldots, u_k(p)\big),$$

то

$$\exists e \in E \ \forall p \in P \ {}^{p}\mathbb{V} \models \varphi\big({}^{\bullet}e(p), u_1(p), \ldots, u_k(p)\big).$$

Теорема 2. *Множество $E \subset C_\infty(Q)$ является конечно-циклическим тогда и только тогда, когда $E = s\bar{\downarrow}$ для некоторого $s \in C(\mathcal{R})$.*

$\lhd$ Очевидно, для любого $s \in C(\mathcal{R})$ множество $s\bar{\downarrow}$ является конечно-циклическим.

Пусть теперь множество $E \subset C_\infty(Q)$ является конечно-циклическим. Для каждой точки $q \in Q$ положим $s(q) = \{{}^{\bullet}e(q) : e \in E\}$. Очевидно, что $s \in C(\mathcal{R})$. Кроме того,

$$\begin{aligned}
s{\downarrow} &= \{u \in \mathcal{R}{\downarrow} : \forall q \in Q \ u(q) \in s(q)\}\\
&= \{u \in \mathcal{R}{\downarrow} : \forall q \in Q \ \exists e \in E \ u(q) = {}^{\bullet}e(q)\}\\
&= \{u \in \mathcal{R}{\downarrow} : \exists e \in E \ \forall q \in Q \ u(q) = {}^{\bullet}e(q)\} \quad \text{(по следствию 2)}\\
&= \{u \in \mathcal{R}{\downarrow} : \exists e \in E \ u = {}^{\bullet}e\}\\
&= \{{}^{\bullet}e : e \in E\},
\end{aligned}$$

т. е. $s\bar{\downarrow} = E$. $\rhd$

Ясно, что для любого конечно-циклического множества $E \subset C_\infty(Q)$ непрерывное внешнее подмножество $s \in C(\mathcal{R})$, фигурирующее в формулировке теоремы 2, единственно. Условимся обозначать это внешнее подмножество символом $E\underline{\uparrow}$. Очевидно, для любого конечно-циклического множества $E \subset C_\infty(Q)$ имеет место равенство $E = E\underline{\uparrow}\bar{\downarrow}$.

Следующее утверждение является прямым следствием лемм 3 и 4.

Предложение 4. *Для конечно-циклических подмножеств E_1 и E_2 пространства $C_\infty(Q)$ следующие утверждения эквивалентны:*

(а) *$E_1 \subset E_2$;*

(б) *$E_1{\underline{\uparrow}}(q) \subset E_2{\underline{\uparrow}}(q)$ для всех $q \in Q$;*

(в) *$E_1{\underline{\uparrow}}{\downarrow} \subset E_2{\underline{\uparrow}}{\downarrow}$.*

Напомним, что для произвольной точки $q \in Q$ множество ${}^q\mathbb{R}{\downarrow}$ является (вообще говоря, неархимедовой) векторной решеткой.

Лемма 7. *Пусть $q \in Q$ и $I \subset {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$ — идеал ${}^q\mathbb{R}{\downarrow}$. Тогда либо $I \subset o({}^q\mathbb{R})$, либо $\mathcal{O}({}^q\mathbb{R}) \subset I$.*

$\lhd$ Достаточно заметить, что если идеал ${}^q\mathbb{R}{\downarrow}$ содержит не бесконечно малое число, то он содержит все ограниченные числа. $\rhd$

Теорема 3. *Конечно-циклическое множество $E \subset C_\infty(Q)$ является идеалом $C_\infty(Q)$ в том и только том случае, когда для любой точки $q \in Q$ множество $E{\underline{\uparrow}}(q)$ является идеалом ${}^q\mathbb{R}{\downarrow}$.*

$\lhd$ Положим $s = E{\underline{\uparrow}}$.

Если E — идеал $C_\infty(Q)$, то по теореме 1 множество $s{\downarrow}$ является идеалом $\mathcal{R}{\downarrow}$. Докажем, что в этом случае $s(q)$ — идеал ${}^q\mathbb{R}{\downarrow}$ для любой точки $q \in Q$. Согласно лемме 4 для произвольных элементов $x, y \in s(q)$ найдутся сечения $u, v \in s{\downarrow}$ такие, что $u(q) = x$, $v(q) = y$. Для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ сечение $\alpha u + \beta v$ принадлежит $s{\downarrow}$, и, следовательно, $\alpha x + \beta y \in s(q)$. Таким образом, $s(q)$ — векторное подпространство ${}^q\mathbb{R}{\downarrow}$. Аналогично устанавливается, что $s(q)$ является также и векторной подрешеткой ${}^q\mathbb{R}{\downarrow}$. Далее, пусть $x \in s(q)$, $y \in {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$ и $|y| \leqslant |x|$. Существуют сечения $u \in s{\downarrow}$ и $v \in \mathcal{R}{\downarrow}$, для которых $u(q) = x$ и $v(q) = y$. Ясно, что сечение $w = |u| \wedge |v|$ принадлежит $s{\downarrow}$, а значит, $y \in s(q)$, так как $|y| = w(q)$. Итак, $s(q)$ — идеал ${}^q\mathbb{R}{\downarrow}$.

Теперь докажем обратное утверждение. Для произвольных сечений $u, v \in s{\downarrow}$ и чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ справедливо соотношение $(\alpha u + \beta v)(q) = \alpha u(q) + \beta v(q) \in s(q)$, для всех $q \in Q$, а значит, $\alpha u + \beta v \in s{\downarrow}$. Аналогичным образом если $u \in s{\downarrow}$, $v \in \mathcal{R}{\downarrow}$ и $|v| \leqslant |u|$, то $v \in s{\downarrow}$. Таким образом, $s{\downarrow}$ — идеал $\mathcal{R}{\downarrow}$, а следовательно, E — идеал $C_\infty(Q)$. $\rhd$

Заметим, что любой идеал векторной решетки является конечно-циклическим множеством.

Теорема 4. *Идеал $E \subset C_\infty(Q)$ является фундаментом $C_\infty(Q)$ в том и только том случае, когда множество $\{E{\underline{\uparrow}} \neq 0\}$ всюду плотно в Q.*

$\lhd$ Положим $s = E{\underline{\uparrow}}$. Пусть множество $\{s \neq 0\}$ всюду плотно в Q. Возьмем произвольное ненулевое сечение $u \in \mathcal{R}{\downarrow}$. Множество $\|u \neq 0\|$ непусто, а значит, непусто и множество $\{q \in Q : u(q) \neq 0^\wedge\} \cap \{s \neq 0\}$. Следовательно, $u \notin s{\downarrow}^\perp$. Таким образом, $s{\downarrow}^\perp = \{0\}$, откуда вытекает, что $s{\downarrow}$ — фундамент $\mathcal{R}{\downarrow}$. (Множество $s{\downarrow}$ является идеалом $\mathcal{R}{\downarrow}$ по теореме 1.)

Обратное утверждение очевидно. $\rhd$

Следствие 3. *Конечно-циклическое множество $E \subset C_\infty(Q)$ является фундаментом $C_\infty(Q)$ в том и только том случае, когда для любой точки $q \in Q$ множество $E{\underline{\uparrow}}(q)$ является идеалом ${}^q\mathbb{R}{\downarrow}$ и множество $\{E{\underline{\uparrow}} \neq 0\}$ всюду плотно в Q.*

Теорема 5. *Пусть E — конечно-циклическая векторная подрешетка $C_\infty(Q)$. В E есть слабая порядковая единица тогда и только тогда, когда множество $\{E{\underline{\uparrow}} \neq 0\}$ замкнуто (а значит, открыто-замкнуто согласно лемме 5).*

$\lhd$ Положим $s = E{\underline{\uparrow}}$.

Пусть в $s{\downarrow}$ есть слабая порядковая единица u. Очевидно, $\|u \neq 0\| \subset \{s \neq 0\}$. Для доказательства замкнутости множества $\{s \neq 0\}$ достаточно установить равенство $\|u \neq 0\| = \{s \neq 0\}$. Предположим вопреки доказываемому, что разность $\{s \neq 0\} \setminus \|u \neq 0\|$ содержит некоторую точку q. Тогда найдется сечение $v \in s{\downarrow}$, для которого $v(q) \neq 0$ и $\|v \neq 0\| \cap \|u \neq 0\| = \varnothing$. Последнее противоречит тому, что u является слабой порядковой единицей $s{\downarrow}$.

Обратно, пусть множество $\{s \neq 0\}$ замкнуто. Для любой точки $q \in \{s \neq 0\}$ найдется сечение $u_q \in s{\downarrow}$ такое, что $u(q) \neq 0$. По предложению 3 существует сечение $u \in s{\downarrow}$ удовлетворяющее неравенству $u(q) \neq 0$ для всех $q \in \{s \neq 0\}$. Ясно, что сечение u является в $s{\downarrow}$ слабой порядковой единицей. $\triangleright$

Лемма 8. *Пусть $s \in C(\mathcal{R})$. Сечение $u \in \mathcal{R}{\downarrow}$ принадлежит $s{\downarrow}^{\perp\perp}$ тогда и только тогда, когда $\|u \neq 0\| \subset \mathrm{cl}\{s \neq 0\}$.*

$\triangleleft$ Пусть $u \in s{\downarrow}^{\perp\perp}$. Если $u(q) \neq 0$ для некоторой точки $q \in Q \setminus \mathrm{cl}\{s \neq 0\}$, то найдется множество $P \in \mathrm{Clop}(q)$ такое, что $P \subset \{s = 0\} \cap \|u \neq 0\|$. Тогда $P \subset \|v = 0\|$ для любого сечения $v \in s{\downarrow}$. Следовательно, $P \subset \|v = 0\|$ для всех $v \in s{\downarrow}^{\perp\perp}$, а значит, $u(q) = 0$. Противоречие.

Пусть теперь $\|u \neq 0\| \subset \mathrm{cl}\{s \neq 0\}$. Рассмотрим произвольное сечение $v \in s{\downarrow}^{\perp}$. Предположим вопреки доказываемому, что множество $P = \|u \neq 0\| \cap \|v \neq 0\|$ не пусто. Очевидно, $P \in \mathrm{Clop}(Q)$. Кроме того, $P \subset \{s = 0\}$ и $P \subset \mathrm{cl}\{s \neq 0\}$. Противоречие. $\triangleright$

Теорема 6. *Идеал E пространства $C_\infty(Q)$ является его полосой тогда и только тогда, когда множество $\{E{\underset{\bar{}}{\uparrow}} \neq 0\}$ замкнуто и для каждой точки $q \in Q$ верно $E{\underset{\bar{}}{\uparrow}}(q) = \{{}^q0\}$ или $E{\underset{\bar{}}{\uparrow}}(q) = {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$.*

$\triangleleft$ Положим $s = E{\underset{\bar{}}{\uparrow}}$.

Пусть $s{\downarrow}$ — полоса $\mathcal{R}{\downarrow}$. Зафиксируем произвольную точку $q \in \{s \neq 0\}$ и покажем, что $s(q) = {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$. Найдется сечение $u \in s{\downarrow}$ такое, что $u(q) \neq 0$. Пусть y — произвольный элемент ${}^q\mathbb{R}{\downarrow}$ и $v \in \mathcal{R}{\downarrow}$ — такое сечение, что $v(q) = y$. Определим сечение $w \in \mathcal{R}{\downarrow}$ следующим образом: $w(p) = v(p)$ при $p \in \|u \neq 0\|$ и $w(p) = 0$ в противном случае. Ясно, что $w \in s{\downarrow}^{\perp\perp} = s{\downarrow}$ и $w(q) = y \in s(q)$. Таким образом, $s(q) = {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$. Замкнутость множества $\{s \neq 0\}$ вытекает из теоремы 5.

Обратно, пусть $s(q) = {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$ для всех $q \in \{s \neq 0\}$ и множество $\{s \neq 0\}$ замкнуто. Покажем, что $s{\downarrow}^{\perp\perp} \subset s{\downarrow}$. Пусть $u \in s{\downarrow}^{\perp\perp}$ и $q \in Q$. Если $u(q) = {}^q0$, то, очевидно, $u(q) \in s(q)$. Если же $u(q) \neq {}^q0$, то $s(q) \neq \{{}^q0\}$ согласно лемме 8, а значит, $s(q) = {}^q\mathbb{R}{\downarrow} \ni u(q)$. $\triangleright$

Предложение 5. *Если идеал E пространства $C_\infty(Q)$ имеет сильную порядковую единицу, то множество $\{E{\underset{\bar{}}{\uparrow}} \neq 0\}$ замкнуто и $E{\underset{\bar{}}{\uparrow}}(q)$ является главным идеалом ${}^q\mathbb{R}{\downarrow}$ для всех $q \in Q$.*

$\triangleleft$ Положим $s = E{\underset{\bar{}}{\uparrow}}$. Пусть $u \in s{\downarrow}$ — сильная порядковая единица пространства $s{\downarrow}$. Поскольку u является также и слабой порядковой единицей $s{\downarrow}$, множество $\{s \neq 0\}$ замкнуто в силу теоремы 5. Осталось заметить, что для каждой точки $q \in Q$ множество $s(q)$ является главным идеалом ${}^q\mathbb{R}{\downarrow}$, порожденным $u(q)$. $\triangleright$Из приведенной ниже теоремы 7 вытекает, что обратное утверждение не верно.

Предложение 6. *Пусть E — идеал $C_\infty(Q)$. Элемент $e \in E$ является сильной порядковой единицей в E тогда и только тогда, когда ${}^\bullet e$ является поточечной сильной порядковой единицей в $E{\underset{\bar{}}{\uparrow}}{\downarrow}$, т. е. ${}^\bullet e(q)$ — сильная порядковая единица в $E{\underset{\bar{}}{\uparrow}}(q)$ для всех $q \in Q$.*

$\lhd$ Положим $s = E\underline{\uparrow}$. Очевидно, сильная порядковая единица в $s{\downarrow}$ является также и поточечной сильной порядковой единицей.

Покажем обратное. Пусть $u \in s{\downarrow}$ — поточечная сильная порядковая единица. Для произвольного сечения $v \in s{\downarrow}$ и любой точки $q \in Q$ найдется число $n_q \in \mathbb{N}$, такое, что $|v(q)| \leqslant n_q|u(q)|$. Множество $\bigl\{\||v| \leqslant n_q|u|\| : q \in Q\bigr\}$ является открытым покрытием компакта Q. Выберем из него конечное подпокрытие $\bigl\{\||v| \leqslant n_{q_1}|u|\|, \dots, \||v| \leqslant n_{q_k}|u|\|\bigr\}$, $k \in \mathbb{N}$, и положим $n = \max\{n_{q_1}, \dots, n_{q_k}\}$. Очевидно, $|v| \leqslant n|u|$. $\rhd$

5. Поточечные критерии

Установленные в предыдущих параграфах результаты позволяют упрощать доказательства многих утверждений о K-пространствах с помощью перехода к их «поточечным» аналогам. Рассмотрим подробнее, в каких случаях это возможно.

Пусть множества $\mathcal{E}$ и Φ — произвольные множества конечно-циклических подмножеств пространства $C_\infty(Q)$. Будем говорить, что *на множестве $\mathcal{E}$ есть поточечный критерий принадлежности множеству* Φ, если найдется семейство множеств $\varphi_q \subset \mathcal{P}({}^q\mathbb{R}{\downarrow})$, $q \in Q$, удовлетворяющее следующему условию:

$$\forall E \in \mathcal{E}\ \bigl(E \in \Phi \Leftrightarrow\ \forall q \in Q\ E\underline{\uparrow}(q) \in \varphi_q\bigr). \tag{$*$}$$

Условие $(*)$ будем называть *поточечным критерием принадлежности* Φ, а семейство $(\varphi_q)_{q\in Q}$ — *реализацией* этого критерия.

Замечание 2. Пусть множества $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_0$ и Φ — некоторые множества конечно-циклических подмножеств пространства $C_\infty(Q)$, причем $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$. Тогда если на множестве $\mathcal{E}$ есть поточечный критерий принадлежности Φ, то тот же критерий будет и поточечным критерием принадлежности Φ на множестве $\mathcal{E}_0$.

Лемма 9. *Не существует последовательности $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ открыто-замкнутых подмножеств Q такой, что в пересечении $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_n$ есть ровно одна не σ-изолированная точка.*

$\lhd$ Пусть есть такая последовательность $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, и пусть q — единственная не σ-изолированная точка множества $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_n$. Тогда имеется строго убывающая последовательность открыто-замкнутых множеств $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такая, что $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_n = \{q\}$ и $W_n \subset P_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Далее, найдется функция $f \in C(Q)$ такая, что $f|_{W_{2k}\setminus W_{2k-1}} = 0$ и $f|_{W_{2k+1}\setminus W_{2k}} = 1$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Как легко видеть, $q \in \operatorname{cl}\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(W_{2k}\setminus W_{2k-1})$ и $q \in \operatorname{cl}\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(W_{2k+1}\setminus W_{2k})$, что противоречит существованию предела функции f в точке q. $\rhd$

Теорема 7. *Пусть экстремально несвязный компакт Q бесконечен. Тогда на множестве фундаментов $C_\infty(Q)$ нет поточечного критерия существования сильной порядковой единицы.*

$\lhd$ Допустим, что на множестве фундаментов $C_\infty(Q)$ есть поточечный критерий существования сильной порядковой единицы, и $(\varphi_q)_{q\in Q}$ — его реализация, т. е. для произвольного фундамента $E \subset C_\infty(Q)$ в E есть сильная порядковая единица тогда и только тогда, когда $E\underline{\uparrow}(q) \in \varphi_q$ для всех $q \in Q$.

Определим $s_1 \in C(\mathcal{R})$, полагая $s_1(q) = \mathcal{O}({}^q\mathbb{R})$, $q \in Q$. Тогда $s_1\bar{\downarrow} = C(Q)$ — фундамент $C_\infty(Q)$, имеющий сильную порядковую единицу. Нетрудно проверить, что из бесконечности компакта Q следует существование в нем по крайней мере одной не σ-изолированной точки q_0. По предположению $\mathcal{O}({}^{q_0}\mathbb{R}) \in \varphi_{q_0}$.

Пусть $u \in \mathcal{R}{\downarrow}$ — ненулевое в каждой точке сечение такое, что $u(q_0)$ — бесконечно большое число. Для каждой точки $q \in Q$ положим внешнее сечение s_2 в точке q равным главному идеалу ${}^q\mathbb{R}{\downarrow}$, порожденному внутренним числом $u(q)$. Ясно, что $s_2 \in C(\mathcal{R})$ и $s_2\bar{\downarrow}$ — фундамент $C_\infty(Q)$ (см. следствие 3). По предложению 6 в $s_2\bar{\downarrow}$ есть сильная порядковая единица — функция ${}^\circ u$. Следовательно, $s_2(q) \in \varphi_q$ для всех $q \in Q$. Обозначим через P_0 множество тех точек $q \in Q$, в которых внутреннее число $u(q)$ бесконечно большое. По построению $q_0 \in P_0$.

Положим $s(q_0) = s_1(q_0) = \mathcal{O}({}^{q_0}\mathbb{R})$ и $s(q) = s_2(q)$ при $q \neq q_0$. Ясно, что $s \in C(\mathcal{R})$ и $s\bar{\downarrow}$ — фундамент $C_\infty(Q)$ в силу следствия 3. По построению $s(q) \in \varphi_q$ для всех $q \in Q$, а следовательно, в $s\bar{\downarrow}$ есть сильная порядковая единица f. Для всех $q \in P_0 \backslash \{q_0\}$ внутреннее число ${}^\bullet f(q)$ бесконечно большое. Более того, множество тех точек $q \in Q$, в которых внутреннее число ${}^\bullet f(q)$ бесконечно большое, равно $P_0 \backslash \{q_0\}$. Поскольку ${}^\bullet f(q_0) \in \mathcal{O}({}^{q_0}\mathbb{R})$, найдется число $k \in \mathbb{N}$ такое, что ${}^\bullet f(q_0) < {}^{q_0}k$. Тогда $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \big(\|u > n^\wedge\| \cap \|{}^\bullet f < k^\wedge\|\big) = \{q_0\}$, что противоречит лемме 9. $\triangleright$

Следующее утверждение вытекает из теоремы 7 с учетом замечания 2.

Следствие 4. *Пусть экстремально несвязный компакт Q бесконечен. Тогда на множестве идеалов $C_\infty(Q)$ нет поточечного критерия существования сильной порядковой единицы.*

Теорема 8. (а) *На множестве фундаментов $C_\infty(Q)$ есть поточечный критерий существования слабой единицы: в фундаменте $E \subset C_\infty(Q)$ есть слабая порядковая единица тогда и только тогда, когда $E\underline{\uparrow}(q) \neq \{{}^q0\}$ для всех $q \in Q$ $\big($т. е. поточечный критерий реализуется семейством множеств $\varphi_q = \mathcal{P}({}^q\mathbb{R}{\downarrow}) \backslash \{\{{}^q0\}\}$, $q \in Q\big)$.*

(б) *Если экстремально несвязный компакт Q бесконечен, то на множестве идеалов $C_\infty(Q)$ нет поточечного критерия существования слабой порядковой единицы.*

$\triangleleft$ (а) Очевидное следствие теорем 4 и 5.

(б) Пусть, вопреки доказываемому, упомянутый критерий существует, и $(\varphi_q)_{q\in Q}$ — его реализация. Для каждой точки $q \in Q$ положим $s_1(q) = {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$ и $s_2(q) = \{{}^q0\}$. Очевидно, $s_1, s_2 \in C(\mathcal{R})$ и $s_1\bar{\downarrow}, s_2\bar{\downarrow}$ — идеалы $C_\infty(Q)$, в каждом из которых есть слабая порядковая единица. Следовательно, $s_1(q), s_2(q) \in \varphi_q$ для всех $q \in Q$. Легко проверить, что из бесконечности компакта Q следует существование в нем по крайней мере одной не изолированной точки q_0. Положим $s(q_0) = s_2(q_0)$ и $s(q) = s_1(q)$ при $q \in Q \backslash \{q_0\}$. Поскольку $s(q) \in \varphi_q$ для всех $q \in Q$, в пространстве $s\bar{\downarrow}$ есть слабая порядковая единица e. Тогда ${}^\bullet e(q_0) = 0$ и, следовательно, найдется окрестность P точки q_0 такая, что ${}^\bullet e(q) = 0$ для всех $q \in P$. С другой стороны, $P \neq \{q_0\}$, а значит, имеется сечение $v \in s{\downarrow}$, для которого $\|v \neq 0\| \cap P \neq \varnothing$. Противоречие. $\triangleright$

Теорема 9. *На множестве идеалов $C_\infty(Q)$ есть поточечный критерий принадлежности множеству фундаментов в том и только том случае, когда множество изолированных точек компакта Q всюду плотно в Q. Критерий следующий: идеал $E \subset C_\infty(Q)$ является фундаментом тогда и только тогда, когда $E\underline{\uparrow}(q) \in \varphi_q$ для всех $q \in Q$, где $\varphi_q = \{{}^q\mathbb{R}{\downarrow}\}$, если точка q изолирована, и $\varphi_q = \mathcal{P}({}^q\mathbb{R}{\downarrow})$ в противном случае.*

$\triangleleft$ Напомним, что в слоях ${}^q\mathbb{V}$, соответствующих $(\sigma$-)изолированным точкам Q нет нестандартных (в частности, бесконечно больших) внутренних чисел. Таким образом, если точка q (σ-)изолирована, то в силу леммы 7 любой идеал векторной решетки ${}^{q}\mathbb{R}{\downarrow}$ либо совпадает с ${}^{q}\mathbb{R}{\downarrow}$, либо равен $\{{}^{q}0\}$.

Пусть множество изолированных точек Q всюду плотно в Q. Очевидно, если E — фундамент $C_\infty(Q)$, то для любой изолированной точки $q \in Q$ верно $E\underline{\uparrow}(q) \neq \{{}^{q}0\}$, и, следовательно, $E\underline{\uparrow}(q) = {}^{q}\mathbb{R}{\downarrow}$. Обратно, пусть E — идеал $C_\infty(Q)$ и $E\underline{\uparrow}(q) = {}^{q}\mathbb{R}{\downarrow}$ для каждой изолированной точки $q \in Q$. Поскольку множество изолированных точек всюду плотно в Q, для произвольного ненулевого сечения $u \in \mathcal{R}{\downarrow}$ найдется изолированная точка $q \in \|u \neq 0\|$, а значит существует сечение $v \in E\underline{\uparrow}{\downarrow}$ такое, что $v(q) \neq 0$ и, следовательно, $v \not\perp u$.

Предположим теперь, что имеется непустое множество $P \in \mathrm{Clop}(Q)$, в котором нет изолированных точек, и на множестве идеалов $C_\infty(Q)$ есть поточечный критерий принадлежности множеству фундаментов $C_\infty(Q)$, реализуемый семейством $(\varphi_q)_{q\in Q}$. Для каждой точки $p \in P$ положим $s_p(p) = \{{}^{p}0\}$ и $s_p(q) = {}^{q}\mathbb{R}{\downarrow}$ при $q \in Q\backslash\{p\}$. Ясно, что $s_p \in C(\mathcal{R})$ и $s_p\overline{\downarrow}$ — фундамент $C_\infty(Q)$ для всех $p \in P$. Следовательно, $s_p(p) \in \varphi_p$ для каждой точки $p \in P$. Кроме того, очевидно, ${}^{q}\mathbb{R}{\downarrow} \in \varphi_q$ для всех $q \in Q$. Положим $s(p) = s_p(p) = \{{}^{p}0\}$ при $p \in P$ и $s(q) = {}^{q}\mathbb{R}{\downarrow}$ при $q \in Q\backslash P$. Как легко видеть, $s \in C(\mathcal{R})$ и $s\overline{\downarrow}$ — идеал $C_\infty(Q)$, не являющийся фундаментом. С другой стороны, $s(q) \in \varphi_q$ для всех $q \in Q$. $\rhd$

Теорема 10. *Если экстремально несвязный компакт Q бесконечен, то на множестве идеалов $C_\infty(Q)$ нет поточечного критерия принадлежности множеству полос $C_\infty(Q)$.*

$\lhd$ Предположим, что такой критерий есть и $(\varphi_q)_{q\in Q}$ — его реализация. Очевидно, $\{{}^{q}0\} \in \varphi_q$ для всех $q \in Q$. Из бесконечности компакта Q следует существование открытого множества $P \subset Q$ такого, что $\mathrm{cl}\, P \neq P$. Положим $s_1(q) = {}^{q}\mathbb{R}{\downarrow}$ для всех точек $q \in \mathrm{cl}\, P$ и $s_1(q) = \{{}^{q}0\}$ в остальных точках. Ясно, что $s_1 \in C(\mathcal{R})$ и по теореме 6, $s_1\overline{\downarrow}$ — полоса $C_\infty(Q)$. Следовательно, $s_1(q) \in \varphi_q$ для всех $q \in Q$. Положим $s(q) = s_1(q) = {}^{q}\mathbb{R}{\downarrow}$ при $q \in P$ и $s(q) = \{{}^{q}0\}$ в остальных точках. Очевидно, $s \in C(\mathcal{R})$, $\{s \neq 0\} = P \neq \mathrm{cl}\, P = \mathrm{cl}\{s \neq 0\}$, и по теореме 6 множество $s\overline{\downarrow}$ не является полосой пространства $C_\infty(Q)$. С другой стороны, $s(q) \in \varphi_q$ для всех $q \in Q$. $\rhd$

В заключение приведем таблицу условий существования поточечных критериев для рассмотренных нами множеств и свойств.

Таблица. Существование поточечных критериев

Свойство \ Множество	Множество конечно-циклических множеств	Множество идеалов	Множество фундаментов
Быть идеалом	Есть критерий (теорема 3)	Критерий тривиален	
Быть фундаментом	Есть критерий тогда и только тогда, когда множество изолированных точек Q всюду плотно в Q (теорема 9)		Критерий тривиален
Иметь сильную порядковую единицу	Есть критерий тогда и только тогда, когда компакт Q конечен (теорема 7, следствие 4)		
Иметь слабую порядковую единицу	Есть критерий тогда и только тогда, когда компакт Q конечен (теорема 8)		Есть критерий (теорема 8)
Быть полосой	Нет критерия (теорема 10)		

Литература

1. *Гутман А. Е.* Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Тр. Ин-та математики СО РАН.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1995.—Т. 29: Линейные операторы, согласованные с порядком.—С. 63–211.
2. *Гутман А. Е., Лосенков Г. А.* Функциональное представление булевозначного универсума // Мат. труды.—1998.—Т. 1, № 1, С. 54–77.
3. *Гутман А. Е., Рябко Д. Б.* Нестандартная оболочка нормированного пространства в булевозначном универсуме // Мат. труды.—2001.—Т. 4, № 2.—С. 42–52.
4. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Нестандартные методы анализа.—Новосибирск: Наука, 1990.—344 с.
5. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Булевозначный анализ.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1999.—383 с.
6. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Инфинитезимальный анализ. Ч. 1, Ч. 2.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2001.—317 с.+216 с.
7. *Сикорский Р.* Булевы алгебры.—М.: Мир, 1969.—375 с.
8. *Ogasawara T.* Theory of vector lattices // J. Sci. Hirosima Univ., Ser. A.—1942.—V. 12.—P. 37–100; 1944.—V. 13.—P. 41–161.
9. *Stone M. H.* Applications of the theory of Boolean rings to general topology // Trans. Amer. Math. Soc.—1937.—V. 41.—P. 375–481.

Новосибирск *Статья поступила 4 февраля 2002 г.*