О ПОРЯДКОВО ПОЛНЫХ СИГМА-АЛГЕБРАХ

Гутман А.Е., Сотников А.И.

Институт математики СО РАН,
научная лаборатория теории вероятностей и ее приложений ТывГУ

Пусть (X,Σ) – произвольное измеримое пространство. Будем говорить, что *множество* $E \subset X$ *разделяет точки* $x, y \in X$ (или *точки* x *и* y *разделяются множеством* E), если либо $x \in E$ и $y \notin E$, либо $x \notin E$ и $y \in E$. Точки $x, y \in X$ будем называть Σ*-разделимыми*, если x и y разделяются некоторым элементом Σ. Точки, не являющиеся Σ-разделимыми, будем называть Σ-*неразделимыми*. Очевидно, точки $x, y \in X$ Σ-неразделимы тогда и только тогда, когда $\delta_x = \delta_y$.

Ясно, что отношение Σ-неразделимости является отношением эквивалентности. Фактор-классы множества X по отношению Σ-неразделимости будем называть *комками* пространства (X,Σ). Очевидно, что измеримые комки пространства (X,Σ) это в точности атомы булевой алгебры Σ.

Замечание 1. Отметим, что комок не обязан быть измеримым множеством. Действительно, пусть $X = [0,1]$. Рассмотрим неизмеримое по Лебегу множество $C \subset X$ и положим

$$\Sigma = \{E \in \mathrm{L} : E \supset C \text{ или } E \cap C = \varnothing\},$$

где L – σ-алгебра измеримых по Лебегу подмножеств X. Очевидно, что (X,Σ) – измеримое пространство и C – его неизмеримый комок.

Подмножество $Y \subset X$ назовем Σ*-согласованным*, если Y не разделяет Σ-неразделимые точки. Иными словами, подмножество X является Σ-согласованным тогда и только тогда, оно является объединением некоторого множества комков.

Определение 2. Измеримое пространство (X,Σ) назовем *атомным*, если все комки (X,Σ) измеримы (т.е являются атомами) или, что то же самое, объединение всех атомов Σ совпадает с X.

Как легко видеть, если (X,Σ) – атомное измеримое пространство, то Σ – атомная булева алгебра. Обратное утверждение неверно. Действительно, как легко видеть, измеримое пространство (X,Σ), построенное в замечании 1, не является атомным, однако Σ – атомная булева алгебра.

Предложение 3. Следующие свойства измеримого пространства (X,Σ) равносильны:

(1) (X,Σ) – атомное измеримое пространство и Σ – полная булева алгебра;

(2) Σ-согласованные подмножества X измеримы;

(3) $\Sigma=\{\bigcup_{i\in J}X_i : J\subset I\}$ для некоторого разбиения $(X_i)_{i\in I}$ множества X.

$\lhd$ Импликации $(3)\Longrightarrow(2)$ и $(3)\Longrightarrow(1)$ очевидны. Для доказательства импликации $(2)\Longrightarrow(3)$ достаточно взять в качестве $(X_i)_{i\in I}$ – семейство всех атомов пространства (X,Σ).

Докажем, импликацию $(1)\Longrightarrow(3)$. Пусть $(X_i)_{i\in I}$ – семейство всех атомов Σ.

Рассмотрим $E\in\Sigma$ и положим $J=\{i\in I : X_i\subset E\}$. Допустим, что $E\neq\bigcup_{i\in J}X_i$. Тогда существует точка $x\in E\setminus\bigcup_{j\in J}X_j$. Поскольку $\bigcup_{i\in J}X_i=X$, точка x принадлежит X_i для некоторого $i\in I\setminus J$, а значит, X_i не содержится в E, но имеет с E общую точку, что противоречит Σ-согласованности множества E.

Пусть теперь J – произвольное подмножество I. В силу полноты булевой алгебры Σ существует $E=\sup_{j\in J}X_j\in\Sigma$. Воспользовавшись первой частью доказательства импликации $(1)\Longrightarrow(3)$, легко установить, что $E=\bigcup_{i\in J}X_j$, а значит, $\bigcup_{i\in J}X_i\in\Sigma$. $\rhd$

Определение 4. Измеримое пространство, обладающее одним из свойств (1), (2) или (3), сформулированных в предложении 3, будем называть *дискретным*.

Ниже будет показано (см., теорема 6), что системе аксиом ZFC не противоречит предположение о том, что любое измеримое пространство (X,Σ) с порядково полной атомной σ-алгеброй Σ – дискретно.

Говорят, что множество X имеет измеримую мощность, если на алгебре $\mathsf{P}(X)$ всех подмножеств X существует счетно-аддитивная мера $\delta\colon \mathsf{P}(X)\to\{0,1\}$ такая, что $\delta(X)=1$ и $\delta(\{x\})=0$ для всех $x\in X$ (см. [2, гл. 9, §[3]).

Лемма 5. Пусть Σ – атомная порядково полная σ-алгебра. Обозначим через Y множество всех атомов Σ. Тогда для любой последовательности множеств $\mathsf{E}_n\subset\mathsf{Y}$ ($n\in N$) справедливо равенство:

$$\sup\nolimits_\Sigma\bigcap_{n\in N}\mathsf{E}_n=\bigcap_{n\in N}\sup\nolimits_\Sigma\mathsf{E}_n.$$

$\lhd$ Очевидно, что $\sup_\Sigma\bigcap_{n\in N}\mathsf{E}_n\subset\sup_\Sigma\mathsf{E}_m$ для всех $m\in N$, а значит

$$\sup_\Sigma \bigcap_{n\in N} \mathsf{E}_n \subset \bigcap_{n\in N} \sup_\Sigma \mathsf{E}_n$$

Пусть A – атом Σ и $A \subset \sup_\Sigma \mathsf{E}_n$ для всех $n \in N$. Очевидно, что $A \in \mathsf{E}_n$ для всех $n \in N$. Следовательно, $A \in \bigcap_{n\in N} \mathsf{E}_n$, а значит, $\sup_\Sigma \bigcap_{n\in N} \mathsf{E}_n \supset A$. Таким, образом $\sup_\Sigma \bigcap_{n\in N} \mathsf{E}_n = \bigcap_{n\in N} \sup_\Sigma \mathsf{E}_n$. $\triangleright$

Теорема 6. Множество X измеримой мощности, тогда и только тогда когда, существует такая порядково полная атомная σ-алгебра Σ, что измеримое пространство (X, Σ) не дискретно.

$\triangleleft$ Необходимость. Пусть $\delta: \mathsf{P}(X) \to \{0,1\}$ – ненулевая двузначная счетно-аддитивная мера, такая что $\delta(\{x\}) = 0$ всех $x \in X$. Пусть $x_\infty \in X$. Положим

$$\Sigma_0 = \{E \subset X : x_\infty \notin E, \delta(E) = 0\}$$
$$\Sigma_1 = \{E \subset X : x_\infty \in E, \delta(E) = 1\}$$

Покажем, что $\Sigma = \Sigma_0 \bigcup \Sigma_1$ искомая порядково полная атомная σ-алгебра.

(1) Если $E \in \Sigma_0$ тогда $X \setminus E \in \Sigma_1$, если $E \in \Sigma_1$ тогда $X \setminus E \in \Sigma_0$. Следовательно, $X \setminus E \in \Sigma$ для всех $E \in \Sigma$.

(2) Пусть $(E_n)_{n\in N} \subset \Sigma$. Если $E_i \in \Sigma_1$ для всех $i \in N$ тогда $\bigcap E_n \in \Sigma_1$, а следовательно $\bigcap E_n \in \Sigma$. Если существует номер $i \in N$, что $E_i \in \Sigma_0$, значит $\bigcap E_n \in \Sigma_0$, а следовательно $\bigcap E_n \in \Sigma$.

(3) Для каждой точки $y \in X$ $(y \neq x_\infty)$, $\delta(\{y\}) = 0$, а значит $\{y\} \in \Sigma$. Очевидно, что для любого непустого множества $E \in \Sigma$, $E \bigcap (X \setminus \{x_\infty\}) \neq \varnothing$, следовательно Σ атомная σ-алгебра множеств.

(4) Пусть $(E_\xi)_{\xi\in\Xi} \in \Sigma$. Положим

$$E := \begin{cases} \bigcup_{\xi\in\Xi} E_\xi \cup \{x_\infty\}, \text{если } \delta(\bigcup_{\xi\in\Xi} E_\xi) = 1 \\ \bigcup_{\xi\in\Xi} E_\xi, \qquad \text{если } \delta(\bigcup_{\xi\in\Xi} E_\xi) = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что E верхняя грань совокупности $(E_\xi)_{\xi\in\Xi}$. Пусть $F \in \Sigma$ произвольная верхняя грань. Покажем, что $E \subset F$. Допустим, что $\delta(\bigcup_{\xi\in\Xi} E_\xi) = 1$. Так как $\bigcup_{\xi\in\Xi} E_\xi \subset F$, то $\delta(F) = 1$, а следовательно $x_\infty \in F$. Значит $E = \bigcup_{\xi\in\Xi} E_\xi \cup \{x_\infty\}$ и тем самым булева алгебра Σ порядково полна.

Достаточность. Пусть $G \subset X$ неизмеримый комок. Обозначим, для удобства, через Y множество всех атомов Σ. Покажем, что Y имеет измеримую мощность. С учетом того, что мощность X больше мощности Y вытекает, что X имеет также измеримую мощность (см. [2]).

Положим, $\delta : \mathsf{P}(\mathsf{Y}) \to \{0,1\}$ определяемую по следующему правилу:

$$\delta(\mathsf{E}) := \begin{cases} 1, & \text{если } G \subset \sup_\Sigma \mathsf{E} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Несложно проверить, $\delta(Y)=1$ и $\delta(\{y\})=1$ для всех $y\in Y$. Пусть $E_n \subset Y$ и $\delta(E_n)=1$ для всех $n\in N$. С учетом леммы 5 имеем $\sup_\Sigma \bigcap_{n\in N} E_n = \bigcap_{n\in N} \sup_\Sigma E_n \supset G$. Следовательно, $\delta(\bigcap_{n\in N} E_n)=1$. Значит δ счетно-аддитивная мера. ▷

Известно, что первый измеримый кардинал сильно недостижим (см. [2, гл. 9, §4]), и более того, предположение о полном отсутствии измеримых кардиналов не противоречит системе аксиом ZFC (см., [1, §13]). Иными словами, можно считать, что в «обозримой» части универсума, требование дискретности измеримого пространства (X,Σ) эквивалентно условию порядковой полноты и атомности σ-алгебры Σ.

Литература

1. Йех Т. Теория множеств и метод форсинга. М.: Мир, 1973.
2. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970.