О ПОРЯДКОВО ПОЛНЫХ СИГМА-АЛГЕБРАХ

Гутман А. Е., Сотников А. И.

Институт математики СО РАН,
научная лаборатория теории вероятностей и ее приложений ТывГУ

Пусть (X, Σ) — произвольное измеримое пространство, т. е. Σ — σ-алгебра подмножеств X. Будем говорить, что *множество $E \subset X$ разделяет точки $x, y \in X$* (или *точки x, y разделяются множеством E*), если либо $x \in E$ и $y \notin E$, либо $x \notin E$ и $y \in E$. Точки $x, y \in X$ будем называть Σ-*разделимыми*, если x и y разделяются некоторым элементом Σ. Точки, не являющиеся Σ-разделимыми, будем называть Σ-*неразделимыми*. Очевидно, $x, y \in X$ Σ-неразделимы тогда и только тогда, когда меры Дирака δ_x и δ_y совпадают на Σ.

Ясно, что отношение Σ-неразделимости является отношением эквивалентности. Фактор-классы множества X по отношению Σ-неразделимости будем называть *комками* пространства (X, Σ). Очевидно, что измеримые комки пространства (X, Σ) это в точности атомы булевой алгебры Σ.

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что комок не обязан быть измеримым множеством. Действительно, пусть $X = [0, 1]$. Рассмотрим неизмеримое по Лебегу множество $C \subset X$ и положим

$$\Sigma = \{E \in \mathcal{L}(X) : \ E \supset C \text{ или } E \cap C = \varnothing\},$$

где $\mathcal{L}(X)$ — σ-алгебра измеримых по Лебегу подмножеств X. Очевидно, что (X, Σ) — измеримое пространство и C — его неизмеримый комок.

Подмножество $Y \subset X$ назовем Σ-*согласованным*, если Y не разделяет Σ-неразделимые точки. Иными словами, подмножество X является Σ-согласованным тогда и только тогда, оно является объединением некоторого множества комков.

Определение 2. Измеримое пространство (X, Σ) назовем *атомным*, если все его комки измеримы (т. е. являются атомами) или, что то же самое, $\cup\Sigma_{\mathrm{A}} = X$, где Σ_{A} — множество всех атомов Σ.

Как легко видеть, если (X, Σ) — атомное измеримое пространство, то Σ — атомная булева алгебра. Обратное утверждение неверно. Действительно, измеримое пространство (X, Σ), построенное в замечании 1, не является атомным, в то время как Σ — атомная булева алгебра.

Предложение 3. *Следующие свойства измеримого пространства* (X, Σ) *равносильны*:

(1) (X, Σ) — *атомное измеримое пространство и* Σ — *полная булева алгебра*;

(2) *все* Σ*-согласованные подмножества* X *измеримы*;

(3) $\Sigma = \left\{\bigcup_{j\in J} X_j : J \subset I\right\}$ *для некоторого разбиения* $(X_i)_{i\in I}$ *множества* X.

$\lhd$ Импликации (3) $\Rightarrow$ (2) и (3) $\Rightarrow$ (1) очевидны. Для доказательства импликации (2) $\Rightarrow$ (3) достаточно взять в качестве $(X_i)_{i\in I}$ семейство всех комков пространства (X, Σ).

Докажем, импликацию (1) $\Rightarrow$ (3). Пусть $(X_i)_{i\in I}$ — семейство всех атомов Σ.

Рассмотрим $E \in \Sigma$ и положим $J = \{i \in I : X_i \subset E\}$. Допустим, что $E \neq \bigcup_{j\in J} X_j$. Тогда существует точка $x \in E \setminus \bigcup_{j\in J} X_j$. Поскольку $\bigcup_{i\in I} X_i = X$, точка x принадлежит X_i для некоторого $i \in I \setminus J$, а значит, X_i не содержится в E, но имеет с E общую точку, что противоречит Σ-согласованности множества E.

Пусть теперь J — произвольное подмножество I. В силу полноты булевой алгебры Σ существует $E = \sup_{j\in J} X_j \in \Sigma$. Воспользовавшись первой частью доказательства импликации (1) $\Rightarrow$ (3), легко установить, что $E = \bigcup_{j\in J} X_j$, а значит, $\bigcup_{j\in J} X_j \in \Sigma$. $\rhd$

Определение 4. Измеримое пространство, обладающее одним из свойств (1), (2) или (3), сформулированных в предложении 3, будем называть *дискретным*.

Ниже будет показано (см. теорему 6), что аксиомам ZFC не противоречит предположение о том, что любое измеримое пространство (X, Σ) с полной атомной σ-алгеброй Σ является дискретным.

Говорят, что множество X имеет измеримую мощность, если на алгебре $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств X существует счетно-аддитивная мера $\delta\colon \mathcal{P}(X) \to \{0, 1\}$ такая, что $\delta(X) = 1$ и $\delta(\{x\}) = 0$ для всех $x \in X$ (см. [2, гл. 9, § 3].

Лемма 5. *Если* σ*-алгебра* Σ *является полной атомной булевой алгеброй, то для любой последовательности* $\mathcal{E}_n \subset \Sigma_{\mathrm{A}}$ $(n \in \mathbb{N})$ *справедливо равенство*

$$\sup\nolimits_\Sigma \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{E}_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \sup\nolimits_\Sigma \mathcal{E}_n.$$

◁ Очевидно, $\sup_\Sigma \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{E}_n \subset \sup_\Sigma \mathcal{E}_m$ для всех $m \in \mathbb{N}$, а значит

$$\sup_\Sigma \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{E}_n \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \sup_\Sigma \mathcal{E}_n.$$

Пусть $A \in \Sigma_\mathrm{A}$ и пусть $A \subset \sup_\Sigma \mathcal{E}_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что $A \in \mathcal{E}_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $A \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{E}_n$ и поэтому $\sup_\Sigma \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{E}_n \supset A$. Таким образом, $\sup_\Sigma \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{E}_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \sup_\Sigma \mathcal{E}_n$. ▷

Теорема 6. *Множество X имеет измеримую мощность тогда и только тогда, когда существует такая полная атомная σ-алгебра Σ, что измеримое пространство (X, Σ) не дискретно.*

◁ Необходимость. Пусть $\delta\colon \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}$ — счетно-аддитивная мера такая, что $\delta(X) = 1$ и $\delta(\{x\}) = 0$ всех $x \in X$. Пусть $x_\infty \in X$. Положим

$$\Sigma_0 = \big\{E \subset X : x_\infty \notin E,\ \delta(E) = 0\big\},$$
$$\Sigma_1 = \big\{E \subset X : x_\infty \in E,\ \delta(E) = 1\big\}.$$

Покажем, что $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1$ — искомая полная атомная σ-алгебра.

Если $E \in \Sigma_0$, то $X \backslash E \in \Sigma_1$, а если $E \in \Sigma_1$, то $X \backslash E \in \Sigma_0$. Следовательно, $X \backslash E \in \Sigma$ для всех $E \in \Sigma$.

Пусть $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$. Если $E_n \in \Sigma_1$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \Sigma_1$ и, следовательно, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \Sigma$. Если же $E_m \in \Sigma_0$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, то $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \Sigma_0$ и вновь $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \Sigma$.

Таким образом, Σ является σ-алгеброй подмножеств X.

Для каждой точки $x \in X \backslash \{x_\infty\}$ мы имеем $\delta(\{x\}) = 0$, а значит, $\{x\} \in \Sigma$. Кроме того, $E \cap (X \backslash \{x_\infty\}) \neq \varnothing$ для любого непустого множества $E \in \Sigma$. Следовательно, $\Sigma_\mathrm{A} = \big\{\{x\} : x \in X \backslash \{x_\infty\}\big\}$ и Σ — атомная булева алгебра. В частности, измеримое пространство (X, Σ) не является дискретным, так как $\cup \Sigma_\mathrm{A} = X \backslash \{x_\infty\} \neq X$.

Пусть $\mathcal{E} \subset \Sigma$. Положим

$$E = \begin{cases} \cup\mathcal{E} \cup \{x_\infty\}, & \text{если } \delta(\cup\mathcal{E}) = 1, \\ \cup\mathcal{E}, & \text{если } \delta(\cup\mathcal{E}) = 0, \end{cases}$$

и покажем, что $E = \sup_\Sigma \mathcal{E}$. Очевидно, $E \in \Sigma$ — верхняя грань $\mathcal{E}$. Рассмотрим произвольную верхнюю грань $F \in \Sigma$ множества $\mathcal{E}$. В случае $\delta(\cup\mathcal{E}) = 0$ включение $E \subset F$ очевидно. Если же $\delta(\cup\mathcal{E}) = 1$, то в силу $\cup\mathcal{E} \subset F$ мы имеем $\delta(F) = 1$, откуда $x_\infty \in F$ и, следовательно, $E = \cup\mathcal{E} \cup \{x_\infty\} \subset F$. Таким образом, булева алгебра Σ является полной.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $G \subset X$ — неизмеримый комок. Покажем, что Σ_{A} имеет измеримую мощность. Поскольку $|X| \geqslant |\Sigma_{\mathrm{A}}|$, множество X также имеет измеримую мощность (см. [2]).

Определим функцию $\delta\colon \mathcal{P}(\Sigma_{\mathrm{A}}) \to \{0,1\}$ следующим правилом:

$$\delta(\mathcal{E}) = \begin{cases} 1, & \text{если } G \subset \sup_{\Sigma} \mathcal{E}, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Как легко видеть, δ является мерой, причем $\delta(\Sigma_{\mathrm{A}}) = 1$ и $\delta(\{A\}) = 0$ для всех $A \in \Sigma_{\mathrm{A}}$. Пусть $\mathcal{E}_n \subset \Sigma_{\mathrm{A}}$ и $\delta(\mathcal{E}_n) = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. С учетом леммы 5 мы имеем $\sup_{\Sigma} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{E}_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\Sigma} \mathcal{E}_n \supset G$, а значит, $\delta(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{E}_n) = 1$. Следовательно, мера δ является счетно-аддитивной. $\triangleright$

Как известно, первый измеримый кардинал сильно недостижим (см. [2, гл. 9, § 3]) и, если теория ZFC непротиворечива, предположение об отсутствии измеримых кардиналов не противоречит аксиомам ZFC (см., [1, § 13]). Следовательно, в «обозримой» части универсума, требование дискретности измеримого пространства (X, Σ) эквивалентно условию полноты и атомности σ-алгебры Σ.

Литература

1. *Йех Т. Теория множеств и метод форсинга.* М.: Мир, 1973.
2. *Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств.* М.: Мир, 1970.