Владикавказский математический журнал
Июль–сентябрь, 2004, Том 6, Выпуск 3

УДК **517.98**

ОПИСАНИЕ ГЛАВНЫХ КОМПОНЕНТ, ПОРОЖДЕННЫХ ОПЕРАТОРАМИ, СОХРАНЯЮЩИМИ ДИЗЪЮНКТНОСТЬ

А. Е. Гутман, Д. С. Феофанов

К семидесятипятилетию
Юрия Григорьевича Решетняка

В данной работе изучаются главные компоненты в пространствах операторов, действующих в векторных решетках и решеточно нормированных пространствах. При этом внимание сосредоточено на компонентах, порожденных операторами, сохраняющими дизъюнктность. Основными результатами являются критерии принадлежности оператора компоненте, порожденной данным оператором. Каждый из установленных критериев дает аналитическое описание рассматриваемой компоненты.

Одной из важнейших проблем теории положительных и мажорируемых операторов является аналитическое описание операторных компонент. Насколько нам известно, общее решение этой проблемы до сих пор не найдено и исследования ведутся в основном в направлении поиска описаний компонент в различных частных случаях. В данной работе приводятся некоторые новые результаты, касающиеся аналитического описания главных компонент для случая операторов, сохраняющих дизъюнктность.

Понятие компоненты в векторной решетке E вводится следующим образом. Для произвольного множества $D \subset E$ определяется дизъюнктное дополнение $D^{\perp} = \{e \in E : \ e \perp d \ \text{ для всех } \ d \in D\}$, где $\perp$ — отношение дизъюнктности ($e \perp d \Leftrightarrow |e| \wedge |d| = 0$). Компонентой, порожденной D, называется множество $(D^{\perp})^{\perp}$ (более коротко обозначаемое символом $D^{\perp\perp}$). Главной компонентой называется компонента, порожденная одноэлементным множеством. Аналогичные понятия и обозначения вводятся для случая решеточно нормированных пространств.

В настоящей статье рассматриваются главные компоненты в пространствах операторов. При этом внимание сосредоточено на компонентах, порожденных операторами, сохраняющими дизъюнктность.

Следующая таблица схематично изображает основные результаты данной работы.

T	A	$\lvert T\rvert \in \{A\}^{\perp\perp}$	Теорема
$T : E \to F$	$A \in \mathcal{DPO}$	$T = g \circ A$	2.1
$T : E \to \mathcal{V}$	$A \in \mathcal{DPO}$	$T = g \circ A$	2.2
$T : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$	$A \in \mathcal{DPO}, A \geqslant 0$	$T = g \circ A_{\mathcal{U}}$	2.3
$T : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$	$A = W \circ S \circ w$	$T = \widehat{W} \circ S_{\mathcal{U}} \circ w$	2.4
$T : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$	$A \in \mathcal{DPO}$	$T = \bigoplus_{\xi \in \Xi} \widehat{W}_{\xi} \circ (\rho_{\xi} S)_{\mathcal{U}_{\xi}} \circ w_{\xi}$	2.5
$T : E(\mathcal{X}) \to F(\mathcal{Y})$	$Ae = W\big((we) \bullet s\big)$	$Tu = \widehat{W} \ \overline{\otimes} \ \big((wu) \bullet s\big)$	3.7
$T : E(\mathcal{X}) \to F(\mathcal{Y})$	$A \in \mathcal{DPO}$	$Tu = \widehat{W} \, \overline{\otimes} \ \bigoplus_{\xi \in \Xi} (w_{\xi} u \bullet s)\vert_{Q_{\xi}}$	3.8

В первой колонке таблицы указаны пространства, в которых действует оператор T (здесь E и F — K-пространства, $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ — пространства Банаха — Канторовича, $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — просторные банаховы расслоения), во второй колонке описан вид оператора A (здесь $\mathcal{DPO}$ — класс регулярных операторов, сохраняющих дизъюнктность), в третьей колонке приведены представления оператора T, равносильные соотношению $|T| \in \{A\}^{\perp\perp}$, а в четвертой колонке перечислены номера соответствующих теорем.

1. Вспомогательные сведения о пространствах Банаха — Канторовича и мажорируемых операторах

Основные определения и факты, касающиеся векторных решеток, решеточно нормированных пространств и мажорируемых операторов, можно найти в [1, 4, 6]. Прекрасным источником сведений в интересующей нас области является монография [5].

На протяжении всего текста мы будем использовать терминологию и обозначения из [2], причем иногда без явных ссылок и указания первоисточников. Соответствующие приоритетные ссылки можно найти в [5].

Пусть E и F — векторные решетки. Линейный оператор $T : E \to F$ называется *положительным*, если $Te \geqslant 0$ для всех положительных $e \in E$, и *регулярным*, если существуют такие положительные операторы $T_1, T_2 : E \to F$, что $T = T_1 - T_2$. Совокупность всех регулярных операторов из E в F обозначается символом $M(E, F)$.

1.1. *Теорема Рисса — Канторовича.* *Если E — векторная решетка и F — K-пространство, то $M(E, F)$ является K-пространством. При этом для любого порядково ограниченного подмножества $\mathcal{T} \subset M(E, F)$ и любого положительного элемента $e \in E$ имеют место следующие соотношения:*

$$(\sup \mathcal{T})e = \sup\{T_1e_1 + \dots + T_ne_n : T_i \in \mathcal{T},\ e_i \in E^+,\ e_1 + \dots + e_n = e,\ n \in \mathbb{N}\},$$
$$(\inf \mathcal{T})e = \inf\{T_1e_1 + \dots + T_ne_n : T_i \in \mathcal{T},\ e_i \in E^+,\ e_1 + \dots + e_n = e,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

В частности, если F — K-пространство, то $M(E, F)$ является векторной решеткой, что позволяет говорить о компонентах в $M(E, F)$.

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ — решеточно нормированные пространства (РНП) над векторными решетками E и F соответственно. Говорят, что положительный оператор $S : E \to F$ является *мажорантой* линейного оператора $T : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, если $|Tu| \leqslant S|u|$ для всех $u \in \mathcal{U}$. Оператор, имеющий мажоранту, называется *мажорируемым*. Совокупность всех мажорируемых операторов из $\mathcal{U}$ в $\mathcal{V}$ обозначается символом $M(\mathcal{U}, \mathcal{V})$.

Напомним, что пространством Банаха — Канторовича (ПБК) называется d-разложимое o-полное РНП над K-пространством.

По умолчанию все РНП в этой работе рассматриваются над K-пространствами и в отсутствие соответствующих явных указаний предполагаются d-разложимыми.

1.2. *Теорема* [2; 1.6.9], [5; 4.1.2, 4.2.6]**.** *Пусть* $\mathcal{U}$ — РНП *над* E, *а* $\mathcal{V}$ — РНП *над* F.

(1) *Каждый мажорируемый оператор $T : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ имеет наименьшую мажоранту (относительно порядка в $M(E, F)$), обозначаемую символом $|T|$.*

(2) *Если* $\mathcal{V}$ — ПБК, *то отображение $|\cdot| : T \mapsto |T|$ представляет собой разложимую $M(E, F)$-значную норму на $M(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, в паре с которой $M(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ является* ПБК.

Последняя теорема дает основание для рассмотрения компонент в $M(\mathcal{U}, \mathcal{V})$.

Пусть G — расширенное K-пространство, E и F — фундаменты G, $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ — РНП над E и F соответственно. Линейный оператор $T : E \to F$ называют *нерасширяющим*, если для любых $e \in E$ и $g \in G$ из $e \perp g$ следует $Te \perp g$. Линейный оператор $T : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$

называют *нерасширяющим*, если для любых $u \in \mathcal{U}$ и $g \in G$ из $|u| \perp g$ следует $|Tu| \perp g$. Ограниченные нерасширяющие операторы называют *ортоморфизмами*, а их совокупность обозначают символом $\mathrm{Orth}(\mathcal{U},\mathcal{V})$. Вместо $\mathrm{Orth}(\mathcal{U},\mathcal{U})$ пишут $\mathrm{Orth}(\mathcal{U})$.

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ — РНП. *Тенью* оператора $T : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ называется отображение $h : \mathrm{Pr}(\mathcal{U}) \to \mathrm{Pr}(\mathcal{V})$, определенное формулой $h(\pi) = \sup_{u\in\mathcal{U}} \langle T\pi u\rangle$. (Здесь и ниже $\mathrm{Pr}(\mathcal{U})$ — булева алгебра порядковых проекторов РНП $\mathcal{U}$, а $\langle u\rangle$ — порядковый проектор на компоненту, порожденную элементом u.)

Пусть $\mathcal{U}$ — РНП над E, не обязательно d-разложимое. Под *d-разложимой оболочкой* $\mathcal{U}$ понимают минимальное d-разложимое РНП, содержащее $\mathcal{U}$ как подпространство с индуцированной нормой. Для d-разложимой оболочки $\mathcal{U}$ принято обозначение $d_{\mathrm{fin}}\mathcal{U}$.

Пусть E и F — K-пространства, $\mathcal{U}$ — РНП над E, $A : E \to F$ — решеточный гомоморфизм. Рассмотрим векторное подпространство $\mathcal{U}_0 := \{u \in \mathcal{U} : A|u| = 0\}$. Класс эквивалентности из $\mathcal{U}/\mathcal{U}_0$, содержащий элемент $u \in \mathcal{U}$, обозначается символом $A_{\mathcal{U}}u$. Легко убедится в том, что $\mathcal{U}/\mathcal{U}_0$ представляет собой (вообще говоря, не d-разложимое) РНП над F относительно нормы $|A_{\mathcal{U}}u| := A|u|$. В этом случае d-разложимая оболочка РНП $\mathcal{U}/\mathcal{U}_0$ называется *нормативным преобразованием* $\mathcal{U}$ посредством A и обозначается символом $A\mathcal{U}$. Линейный оператор $A_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to A\mathcal{U}$ называется *оператором нормативного преобразования* $\mathcal{U}$ посредством A.

Пусть $\overline{E}$ и F — K-пространства, E — идеал $\overline{E}$, $\mathcal{U}$ — ПБК над E, $S : \overline{E} \to F$ — решеточный гомоморфизм. Условимся обозначать символом $S\mathcal{U}$ нормативное преобразование $\mathcal{U}$ посредством $S|_E$, а символом $S_{\mathcal{U}}$ — оператор нормативного преобразования $\mathcal{U}$ посредством $S|_E$.

1.3. Теорема Кутателадзе [2; 6.2.19], [5; 3.3.4 (1)]**.** *Пусть E — векторная решетка и F — K-пространство. Положительный оператор $T : E \to F$ сохраняет дизъюнктность тогда и только тогда, когда для любого оператора $S : E \to F$, удовлетворяющего неравенствам $0 \leqslant S \leqslant T$, найдется ортоморфизм $g \in \mathrm{Orth}(F)$ такой, что $0 \leqslant g \leqslant \mathrm{id}_F$ и $S = g \circ T$, где $\mathrm{id}_F : F \to F$ — тождественный оператор.*

1.4. Теорема [2; 6.1.8], [5; 5.3.8]**.** *Пусть $\mathcal{U}$ — РНП над E, $\mathcal{V}$ — РНП над F, $\mathcal{U}_0$ — аппроксимирующее векторное подпространство $\mathcal{U}$, $T_0 : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{V}$ — линейный оператор, $S : E \to F$ — o-непрерывный положительный оператор, сохраняющий дизъюнктность. Предположим, что $|T_0u_0| \leqslant S|u_0|$ для всех $u_0 \in \mathcal{U}_0$. Тогда существует единственное линейное продолжение $T : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ оператора T_0 такое, что $|Tu| \leqslant S|u|$ для всех $u \in \mathcal{U}$.*

1.5. Предложение [2; 6.2.13], [5; 5.1.9 (1)]**.** *Пусть E и F — фундаменты K-пространства G, а $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ — РНП над E и F соответственно, причем РНП $\mathcal{U}$ порядково полно. Линейный оператор $T : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ является ортоморфизмом тогда и только тогда, когда он мажорируем и его наименьшая мажоранта $|T| : E \to F$ является ортоморфизмом.*

1.6. Предложение [2; 6.2.14], [5; 3.3.2 (2)]**.** *Любой ортоморфизм, действующий из ПБК в РНП, o-непрерывен.*

1.7. Следствие [2; 6.2.16], [5; 3.3.2 (4)]**.** *Пусть E и F — фундаменты K-пространства G, и $\mathcal{V}$ — РНП над F. Если два ортоморфизма $S, T \in \mathrm{Orth}(E,\mathcal{V})$ совпадают на некотором подмножестве $E_0 \subset E$, то они совпадают на $E_0^{\perp\perp}$.*

Говорят, что линейный оператор $T : E \to F$ является *оператором взвешенного сдвига*, если существуют фундаменты $E' \subset mE$ и $F' \subset mF$, ортоморфизмы $w : E \to E'$ и $W : F' \to F$ и оператор сдвига $S : E' \to F'$ такие, что $T = W \circ S \circ w$. Композиция $W \circ S \circ w$ называется *WSW-представлением* T, а операторы W, S и w называются *внешним весом*, *сдвигом* и *внутренним весом* представления $W \circ S \circ w$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "w"'] & F \\ E' \arrow[r, "S"] & F' \arrow[u, "W"'] \end{tikzcd}$$

2. Описание главных компонент в терминах ортоморфизмов

В данном параграфе дается описание главных операторных компонент на «абстрактном» языке — в терминах РНП, операторов сдвига и ортоморфизмов.

2.1. *Теорема.* *Пусть E и F — K-пространства, $A : E \to F$ — регулярный оператор, сохраняющий дизъюнктность, и $T : E \to F$ — произвольный регулярный оператор. Включение $T \in \{A\}^{\perp\perp}$ выполняется тогда и только тогда, когда существует такой элемент $g \in \mathrm{Orth}(F, mF)$, что $T = g \circ A$.*

$\lhd$ Следует из утверждения [5; 3.3.5 (4)], основанного на теореме 1.3. $\rhd$

2.2. *Теорема.* *Пусть E и F — K-пространства, $\mathcal{V}$ — ПБК над F, $A : E \to F$ — оператор, сохраняющий дизъюнктность, $T : E \to \mathcal{V}$ — мажорируемый оператор и $|T| : E \to F$ — точная мажоранта T. Включение $|T| \in \{A\}^{\perp\perp}$ выполняется тогда и только тогда, когда существует такой ортоморфизм $g \in \mathrm{Orth}(F, m\mathcal{V})$, что $T = g \circ A$.*

$\lhd$ $\Rightarrow$: В силу теоремы 2.1 существует такой ортоморфизм $\bar{g} \in \mathrm{Orth}(F, mF)$, что $|T| = \bar{g} \circ A$. Сначала определим оператор g_0 на образе A формулой $g_0(Ae) := Te$. Покажем корректность этого определения. Действительно, пусть e_1 и e_2 — такие элементы E, что $Ae_1 = Ae_2$. Покажем, что в этом случае $Te_1 = Te_2$. Поскольку A — гомоморфизм, выполняется равенство $0 = A(e_1 - e_2) = A|e_1 - e_2|$. Тогда имеют место соотношения

$$|Te_1 - Te_2| = |T(e_1 - e_2)| \leqslant |T||e_1 - e_2| = \bar{g}A|e_1 - e_2| = 0.$$

Таким образом, определение g_0 на $\mathrm{im}(A)$ корректно.

Докажем теперь, что $|g_0(Ae)| \leqslant \bar{g}|Ae|$ для всех $e \in E$. Возьмем произвольный элемент $e \in E$. Тогда

$$|g_0(Ae)| = |Te| \leqslant |T||e| = \bar{g}A|e| = \bar{g}|Ae|.$$

Поскольку $\bar{g}$ — ортоморфизм, он сохраняет дизъюнктность. Из 1.6 вытекает, что оператор $\bar{g}$ o-непрерывен, а значит, по теореме 1.4 существует единственное линейное продолжение g оператора g_0 на $\{\mathrm{im}(A)\}^{\perp\perp}$ с сохранением неравенства $|g(f)| \leqslant \bar{g}(|f|)$ для всех $f \in \{\mathrm{im}(A)\}^{\perp\perp}$. По теореме 1.5 оператор g является ортоморфизмом.

$\Leftarrow$: Пусть $T = g \circ A$, где $g \in \mathrm{Orth}(F, m\mathcal{V})$. Тогда, очевидно, выполняется неравенство $|T| \leqslant |g| \circ A$. В силу теоремы 2.1 имеет место включение $|T| \in \{A\}^{\perp\perp}$. $\rhd$

2.3. *Теорема.* *Пусть E и F — K-пространства, $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ — ПБК над E и F соответственно, $A : E \to F$ — решеточный гомоморфизм, $A\mathcal{U}$ — нормативное преобразование $\mathcal{U}$ посредством A, $A_{\mathcal{U}}$ — соответствующий оператор нормативного преобразования, $T : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ — мажорируемый оператор, $|T| : E \to F$ — его точная мажоранта. Включение $|T| \in \{A\}^{\perp\perp}$ выполняется тогда и только тогда, когда существует такой элемент $g \in \mathrm{Orth}(A\mathcal{U}, m\mathcal{V})$, что $T = g \circ A_{\mathcal{U}}$.*

$\lhd$ $\Rightarrow$: Опираясь на 2.1, мы можем утверждать, что существует оператор $\bar{g} \in \mathrm{Orth}(F, mF)$, для которого $|T| = \bar{g} \circ A$. Сначала определим оператор g_0 на $A_{\mathcal{U}}[\mathcal{U}]$ формулой $g_0(A_{\mathcal{U}}u) := Tu$. Поясним корректность этого определения. Действительно, пусть u_1 и u_2 — такие элементы $\mathcal{U}$, что $A_{\mathcal{U}}u_1 = A_{\mathcal{U}}u_2$. Покажем, что в этом случае $Tu_1 = Tu_2$. Действительно,

$$|T(u_1 - u_2)| \leqslant |T||u_1 - u_2| = \bar{g}A|u_1 - u_2| = \bar{g}|A_{\mathcal{U}}(u_1 - u_2)| = 0.$$

Таким образом, определение g_0 на $\mathrm{im}(A)$ корректно.

Убедимся, что $|g_0 A_{\mathcal{U}}u| \leqslant \bar{g}|A_{\mathcal{U}}u|$. В самом деле,

$$|g_0 A_{\mathcal{U}}u| = |Tu| \leqslant |T||u| = \bar{g}A|u| = \bar{g}|A_{\mathcal{U}}u|.$$

Установим равенство $\{A_{\mathcal{U}}[\mathcal{U}]\}^{\perp\perp} = A\mathcal{U}$. Из [2; 1.4.6] следует, что любой элемент $A\mathcal{U} = d_{\mathrm{fin}} A_{\mathcal{U}}[\mathcal{U}]$ представляется в виде $\sum_{i=1}^{n} \rho_i w_i$, где $\{\rho_i : i = 1, \ldots, n\}$ — разбиение единицы в $\mathrm{Pr}(E)$, w_i — элементы $A_{\mathcal{U}}[\mathcal{U}]$. Пусть $\sum_{i=1}^{n} \rho_i w_i \in \{A_{\mathcal{U}}[\mathcal{U}]\}^{\perp}$. Тогда для любого элемента $w_0 \in A_{\mathcal{U}}[\mathcal{U}]$ выполняются равенства

$$0 = \left|\sum_{i=1}^{n} \rho_i w_i\right| \wedge |w_0| = \left(\sum_{i=1}^{n} \rho_i |w_i|\right) \wedge |w_0|.$$

Поскольку $\rho_i w_i \perp \rho_j w_j$ при $i \neq j$, мы имеем $\rho_i w_i \perp w_0$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$. В качестве w_0 можно взять w_i. Из $\rho_i w_i \perp w_i$ вытекает $\rho_i w_i = 0$, а значит, $\sum_{i=1}^{n} \rho_i w_i = 0$. Таким образом, $\{A_{\mathcal{U}}[\mathcal{U}]\}^{\perp\perp} = A\mathcal{U}$.

По теореме 1.4 существует единственное линейное продолжение $\widetilde{g}$ оператора g_0 на $\{A_{\mathcal{U}}[\mathcal{U}]\}^{\perp\perp}$ с сохранением неравенства $|\widetilde{g}w| \leqslant \bar{g}|w|$. По предложению 1.5 оператор $\widetilde{g}$ является ортоморфизмом. Легко убедится в том, что оператор $g := \langle A_{\mathcal{U}}[\mathcal{U}]\rangle \circ \widetilde{g}$ является искомым ортоморфизмом.

$\Leftarrow$: Предположим, что $T = g \circ A_{\mathcal{U}}$, где $g \in \mathrm{Orth}(A\mathcal{U}, m\mathcal{V})$. Тогда имеет место неравенство $|T| \leqslant |g| \circ A$. Действительно, для любого $u \in \mathcal{U}$

$$|Tu| = |gA_{\mathcal{U}}u| \leqslant |g||A_{\mathcal{U}}u| = |g|A|u|.$$

Тогда в силу 2.1 выполняется включение $|T| \in \{A\}^{\perp\perp}$. $\triangleright$

2.4. Пусть E — K-пространство. Заметим, что для любого $w \in \mathrm{Orth}(E, mE)$ существует единственный элемент $\frac{1}{w} \in \mathrm{Orth}(\mathrm{im}(w), E)$ такой, что $w \circ \frac{1}{w} = \langle w\rangle$.

Теорема. *Пусть E и F — K-пространства, $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ —* ПБК *над E и F соответственно, $A : E \to F$ — оператор взвешенного сдвига, $W \circ S \circ w$ — его WSW-представление, где $w \geqslant 0$. Положим $\mathcal{U}' = \{u \in m\mathcal{U} : |u| \in E'\}$, где $E' = \mathrm{dom}(S)$. Мажорируемый оператор $T : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ удовлетворяет условию $|T| \in \{A\}^{\perp\perp}$ тогда и только тогда, когда $T = \widehat{W} \circ S_{\mathcal{U}'} \circ w$ для некоторого элемента $\widehat{W} \in \mathrm{Orth}(S\mathcal{U}', m\mathcal{V})$ такого, что $|\widehat{W}| \in \{W\}^{\perp\perp}$.*

$\triangleleft \Rightarrow$: Согласно теореме [2; 6.1.1] существует элемент $f \in \mathrm{Orth}(F, F)$ такой, что $f \circ f = |f| = \mathrm{id}_F$ и $W = f \circ |W|$. Без ограничения общности можно считать, что $E' = \mathrm{im}(w)$. Определим оператор $B : E' \to F$ следующей формулой: $B = f \circ A \circ \frac{1}{w}$. В пространстве $M(E, F)$ имеет место цепочка равенств

$$A \circ \frac{1}{w} \circ w = W \circ S \circ w \circ \frac{1}{w} \circ w = W \circ S \circ w,$$

которая, в свою очередь, влечет справедливость представления $B \circ w = f \circ W \circ S \circ w$. Следовательно, $B = f \circ W \circ S = f \circ f \circ |W| \circ S = |W| \circ S$. Заметим, что согласно последнему равенству B является решеточным гомоморфизмом.

Определим оператор $\widetilde{W} : S_{\mathcal{U}'}[\mathcal{U}'] \to B_{\mathcal{U}'}[\mathcal{U}']$ формулой $\widetilde{W}(S_{\mathcal{U}'}u) = B_{\mathcal{U}'}u$. (Корректность этого определения очевидна.)

В силу теоремы 2.1 включение $|T| \in \{A\}^{\perp\perp} = \{f \circ A\}^{\perp\perp}$ влечет равенство $|T| = g \circ f \circ A$ для подходящего ортоморфизма $g \in \mathrm{Orth}(F, mF)$. Для всех $u' \in \mathcal{U}'$ имеем

$$\left|T\frac{1}{w}u'\right| \leqslant |T|\left|\frac{1}{w}u'\right| = \left(|T| \circ \frac{1}{w}\right)|u'|.$$

Значит, оператор $|T| \circ \frac{1}{w}$ является мажорантой для $T \circ \frac{1}{w}$. По теореме 2.1, используя равенство $|T| \circ \frac{1}{w} = g \circ f \circ A \circ \frac{1}{w}$, получаем включение $|T \circ \frac{1}{w}| \in \{f \circ A \circ \frac{1}{w}\}^{\perp\perp} = \{B\}^{\perp\perp}$.

Из теоремы 2.3 следует, что $T \circ \frac{1}{w} = \widetilde{g} \circ B_{\mathcal{U}'} = \widetilde{g} \circ \widetilde{W} \circ S_{\mathcal{U}'}$ для подходящего элемента $\widetilde{g} \in \mathrm{Orth}(B\mathcal{U}', m\mathcal{V})$. Для всех $u' \in \mathcal{U}'$ имеем

$$|\widetilde{g}\widetilde{W} S_{\mathcal{U}'} u'| = |\widetilde{g} B_{\mathcal{U}'} u'| = |\widetilde{g} \circ f \circ W \circ S||u'| = |\widetilde{g}|W|S_{\mathcal{U}'} u'|_{S\mathcal{U}'}.$$

Итак, ортоморфизм $|\widetilde{g}| \circ W$ — мажоранта для $\widetilde{g} \circ \widetilde{W}$. Поскольку $S_{\mathcal{U}'}[\mathcal{U}']$ — аппроксимирующее векторное подпространство $S\mathcal{U}'$, а $|\widetilde{g}| \circ W$, будучи ортоморфизмом, является порядково непрерывным оператором, по следствию [2; 6.1.8] оператор $\widetilde{g} \circ \widetilde{W}$ можно продолжить до оператора $\widehat{W} : S\mathcal{U}' \to m\mathcal{V}$ с сохранением оценки $|\widehat{W} v| \leqslant |\widetilde{g}|W|v|_{S\mathcal{U}'}$. Заметим, что из последнего неравенства с учетом теоремы 2.1 вытекает включение $|\widehat{W}| \in \{W\}^{\perp\perp}$.

Таким образом, мы пришли к равенству $T \circ \frac{1}{w} = \widehat{W} \circ S_{\mathcal{U}'}$. Для завершения доказательства остается убедиться в справедливости формулы $T = T \circ \frac{1}{w} \circ w$. Рассмотрим произвольный элемент $u \in \mathcal{U}$ и положим $v := u - \frac{1}{w} wu$. Тогда

$$|Tv| \leqslant |T||v| = gfA|v| = gfWSw|v| = gWS|wu - w\frac{1}{w}wu| = 0,$$

и, следовательно, $Tu = Tv + T(u - v) = T\frac{1}{w}wu$.

$\Leftarrow$: Пусть $\widehat{W}$ — такой элемент $\mathrm{Orth}(S\mathcal{U}', m\mathcal{V})$, что $|\widehat{W}| \in \{W\}^{\perp\perp}$ и $T = \widehat{W} \circ S_{\mathcal{U}'} \circ w$. Тогда

$$|Tu| = |\widehat{W} S_{\mathcal{U}'} wu| \leqslant |\widehat{W}||S_{\mathcal{U}'} wu| = |\widehat{W}|S|wu| \leqslant |\widehat{W}|Sw|u|$$

для любого $u \in \mathcal{U}$, а значит, $|T| \leqslant |\widehat{W}|Sw$.

Используя соотношение $|\widehat{W}| \in \{W\}^{\perp\perp}$ по теореме 2.1 мы приходим к неравенству $|T| \leqslant g \circ |W| \circ S \circ w$, где g — подходящий элемент $\mathrm{Orth}(F, mF)$. С другой стороны, $|W| \circ S \circ w = |A|$ согласно замечанию [2; 6.4.1]. Вновь привлекая теорему 2.1, окончательно получаем $|T| \in \{A\}^{\perp\perp}$. $\triangleright$

Теорему 2.4 можно проиллюстрировать следующим образом. Если диаграмма

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "A"] \arrow[dr, "w"'] & F \arrow[r, hook] & mF \\ & E' \arrow[r, "S"'] & mF \arrow[u, "W"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна, то существует такой элемент $\widehat{W} \in \mathrm{Orth}(S\mathcal{U}', m\mathcal{V})$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "w"'] & \mathcal{V} \arrow[r, hook] & m\mathcal{V} \\ & \mathcal{U}' \arrow[r, "S_{\mathcal{U}'}"'] & S\mathcal{U}' \arrow[u, "\widehat{W}"'] \end{tikzcd}$$

также коммутативна.

Ниже мы установим аналогичный результат для случая произвольного ограниченного оператора, сохраняющего дизъюнктность. Для этого напомним сначала следующую теорему.

2.5. *Теорема* [2; 6.4.5], [5; 5.3.7]**.** *Пусть $A : E \to F$ — регулярный оператор, сохраняющий дизъюнктность. Тогда существует такое разбиение единицы $(\rho_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в алгебре $\mathrm{Pr}(F)$, что для каждого $\xi \in \Xi$ композиция $\rho_\xi \circ A$ является оператором взвешенного сдвига.*

Более того, оператор A *разлагается в сильно дизъюнктную сумму* $A = \bigoplus_{\xi\in\Xi} W\circ\rho_\xi S\circ w_\xi$, *где* $W \in \mathrm{Orth}(mF, mF)$, S *— сдвиг оператора* A, $w_\xi \in \mathrm{Orth}(E, mE)$, $w_\xi \geqslant 0$. *При этом* $\rho_\xi \circ A = W \circ \rho_\xi S \circ w_\xi$ *для всех* $\xi \in \Xi$.

2.6. *Теорема.* *Пусть* E *и* F *—* K*-пространства,* $\mathcal{U}$ *и* $\mathcal{V}$ *— ПБК над* E *и* F *соответственно,* $A : E \to F$ *— ограниченный оператор, сохраняющий дизъюнктность, и* $A = \bigoplus_{\xi\in\Xi} W\circ\rho_\xi S\circ w_\xi$ *— его представление из теоремы 2.5. Положим* $\mathcal{U}_\xi = \{u \in m\mathcal{U} : |u| \in \mathrm{im}(w)_\xi\}$. *Мажорируемый оператор* $T : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ *удовлетворяет условию* $|T| \in \{A\}^{\perp\perp}$ *тогда и только тогда, когда*

$$T = \bigoplus_{\xi\in\Xi} \widehat{W}_\xi \circ (\rho_\xi S)_{\mathcal{U}_\xi} \circ w_\xi,$$

где $\widehat{W}_\xi$ *— элементы* $\mathrm{Orth}\Big((\rho_\xi S)\mathcal{U}_\xi, m\mathcal{V}\Big)$ *такие, что* $|\widehat{W}_\xi| \in \{W\}^{\perp\perp}$.

$\lhd$ $\Rightarrow$: Поскольку $\rho_\xi|T| \in \{\rho_\xi A\}^{\perp\perp}$, привлекая теорему 2.4, мы приходим к равенству $\rho_\xi T = \widehat{W}_\xi \circ (\rho_\xi S)_{\mathcal{U}_\xi} \circ w_\xi$, где $\widehat{W}_\xi$ — элемент $\mathrm{Orth}\Big((\rho_\xi S)\mathcal{U}_\xi, m\mathcal{V}\Big)$ такой, что $|\widehat{W}_\xi| \in \{W\}^{\perp\perp}$.

$\Leftarrow$: Положим

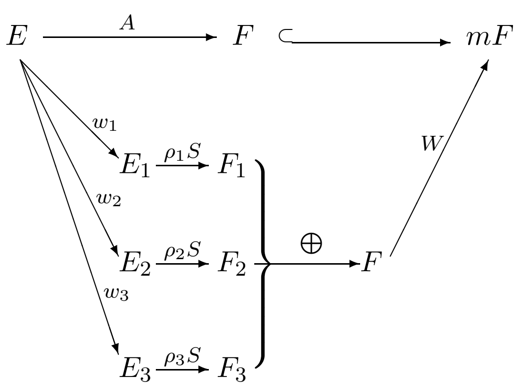
$$T = \bigoplus_{\xi\in\Xi} \widehat{W}_\xi \circ (\rho_\xi S)_{\mathcal{U}_\xi} \circ w_\xi,$$

где $\widehat{W}_\xi$ — элементы $\mathrm{Orth}\Big((\rho_\xi S)\mathcal{U}_\xi, m\mathcal{V}\Big)$ такие, что $|\widehat{W}_\xi| \in \{W\}^{\perp\perp}$. Тогда $|T| \leqslant \bigoplus_{\xi\in\Xi} |\widehat{W}_\xi| \circ \rho_\xi S \circ w_\xi$. Для каждого $\xi \in \Xi$ из соотношения $|\widehat{W}_\xi| \in \{W\}^{\perp\perp}$ и теоремы 2.1 следует, что $|\widehat{W}_\xi| = g_\xi \circ W$ для подходящего ортоморфизма $g_\xi \in \mathrm{Orth}(mF)$ и, следовательно,

$$|T| \leqslant \bigoplus_{\xi\in\Xi} g_\xi \circ W \circ \rho_\xi S \circ w_\xi = \bigoplus_{\xi\in\Xi} g_\xi \circ \rho_\xi \circ W \circ \rho_\xi S \circ w_\xi = g \circ A,$$

где $g = \bigoplus_{\xi\in\Xi} g_\xi \circ \rho_\xi$. Вновь используя теорему 2.1, получаем $|T| \in \{A\}^{\perp\perp}$. $\rhd$

Теорему 2.6 можно проиллюстрировать следующим образом. Если диаграмма



коммутативна, то существует такие элементы $\widehat{W}_\xi \in \mathrm{Orth}((\rho_\xi S)\mathcal{U}_\xi, m\mathcal{V})$, что диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{U} \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "w_1"] \arrow[ddr, "w_2"] \arrow[dddr, "w_3"] & & \mathcal{V} \arrow[rr, hook] & & m\mathcal{V} \\
& \mathcal{U}_1 \arrow[r, "(\rho_1 S)_{\mathcal{U}_1}"] & (\rho_1 S)\mathcal{U}_1 \arrow[r, "\widehat{W}_1"] & m\mathcal{V} & \\
& \mathcal{U}_2 \arrow[r, "(\rho_2 S)_{\mathcal{U}_2}"] & (\rho_2 S)\mathcal{U}_2 \arrow[r, "\widehat{W}_2"] & m\mathcal{V} \arrow[uur, "\oplus"'] & \\
& \mathcal{U}_3 \arrow[r, "(\rho_3 S)_{\mathcal{U}_3}"] & (\rho_3 S)\mathcal{U}_3 \arrow[r, "\widehat{W}_3"] & m\mathcal{V} &
\end{tikzcd}
$$

также коммутативна.

3. Описание главных компонент в терминах операторных сечений

В данном параграфе дается описание главных операторных компонент на «реализационном» языке — в терминах сечений банаховых расслоений, операторов замены переменных и операторных сечений. Формулируемые здесь теоремы 3.7 и 3.8 легко вывести из результатов параграфа 2 с помощью соответствующих реализационных теорем (см. [2; §§ 3.4, 6.5]). Для удобства некоторые из используемых результатов сформулированы явно в данном параграфе.

Всюду ниже P и Q — произвольные экстремально несвязные компакты.

3.1. *Предложение* [2; 6.5.4], [5; 3.3.2 (9)]**.** *Пусть E и F — фундаменты в $C_\infty(Q)$. Отображение $W : E \to F$ является ортоморфизмом тогда и только тогда, когда существует такая функция $w \in C_\infty(Q)$, что $We = we$ для всех $e \in E$. Для любого ортоморфизма W такая функция w единственна.*

Соотношение $We = we$ называется *реализацией* ортоморфизма W посредством функции w.

3.2. Через $C_0(Q, P)$ обозначим множество всех непрерывных функций $s : Q_0 \to P$, определенных на открыто-замкнутых подмножествах $Q_0 \subset Q$.

Предложение. *Отображение $h : \mathrm{Clop}(P) \to \mathrm{Clop}(Q)$ является кольцевым гомоморфизмом тогда и только тогда, когда существует такая функция $s \in C_0(Q, P)$, что $h(U) = s^{-1}[U]$ для всех $U \in \mathrm{Clop}(P)$. Для любого гомоморфизма h такая функция s единственна.*

Соотношение $h(U) = s^{-1}[U]$ называется *реализацией* кольцевого гомоморфизма h посредством функции s.

Для произвольных функций $s \in C_0(Q, P)$ и $e \in C_\infty(P)$ функция $e \bullet s : Q \to \overline{\mathbb{R}}$ определяется следующим образом:

$$
(e \bullet s)(q) := \begin{cases} e\big(s(q)\big), & \text{если } q \in \mathrm{dom}(s), \\ 0, & \text{если } q \in Q \setminus \mathrm{dom}(s). \end{cases}
$$

3.3. *Предложение* [2; 6.5.7], [5; 5.4.2 (2)]**.** *Пусть E — фундамент в $C_\infty(P)$ и F — фундамент в $C_\infty(Q)$. Отображение $S : E \to F$ является оператором сдвига тогда и только тогда, когда существует такая функция $s \in C_0(Q, P)$, что $Se = e \bullet s$ для всех $e \in E$.*

3.4. *Теорема* [2; 6.5.12], [5; 5.4.5]. *Пусть E — фундамент $C_\infty(P)$, F — фундамент $C_\infty(Q)$ и $T : E \to F$ — регулярный оператор, сохраняющий дизъюнктность. Рассмотрим реализацию $h(U) = s^{-1}[U]$ тени h оператора T посредством функции $s \in C_0(Q, P)$. Тогда существуют семейство $(w_\xi)_{\xi\in\Xi}$ положительных функций из $C_\infty(P)$, удовлетворяющих условию $1/w_\xi \in E$ для всех $\xi \in \Xi$, дизъюнктное семейство $(Q_\xi)_{\xi\in\Xi}$ элементов $\mathrm{Clop}(Q)$ и функция $W \in C_\infty(Q)$ такие, что $\mathrm{supp}\, W = \mathrm{cl} \bigcup_{\xi\in\Xi} Q_\xi = \mathrm{dom}(s) = \mathrm{supp}\, \mathrm{im}(T)$ и*

$$Te = W \bigoplus_{\xi\in\Xi} (w_\xi e \bullet s)|_{Q_\xi} \quad (e \in E).$$

Последнее соотношение назовем *реализацией* оператора T посредством s, w_ξ и W_ξ.

3.5. Если $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — просторные непрерывные банаховы расслоения (НБР) над Q, $u \in C_\infty(Q, \mathcal{X})$ и $w \in C_\infty\big(Q, B(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\big)$, то сечение $\mathrm{ext}(w \otimes u) \in C_\infty(Q, \mathcal{Y})$ обозначается через $w \mathbin{\overline{\otimes}} u$.

Предложение [2; 6.5.13], [5; 5.4.6]. *Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — просторные* НБР *над Q, E и F — фундаменты в $C_\infty(Q)$. Отображение $W : E(\mathcal{X}) \to F(\mathcal{Y})$ является ортоморфизмом тогда и только тогда, когда существует такое сечение $w \in C_\infty\big(Q, B(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\big)$, что*

$$Wu = w \mathbin{\overline{\otimes}} u$$

для всех $u \in E(\mathcal{X})$. Для любого ортоморфизма W такое сечение w единственно. Более того, $|W|(e) = |w|e$ для всех $e \in E$.

Соотношение $Wu = w \mathbin{\overline{\otimes}} u$ называется *реализацией* ортоморфизма W посредством сечения w.

3.6. Если $\mathcal{X}$ — банахово расслоение над P, то для любого отображения $s : Q \to P$ композиция $\mathcal{X} \circ s$ представляет собой банахово расслоение над Q. Кроме того, если u — сечение расслоения $\mathcal{X}$ над $D \subset P$, то $u \circ s$ — сечение $\mathcal{X} \circ s$ над $s^{-1}[D]$. Для произвольного множества $\mathcal{U}$ сечений $\mathcal{X}$ символом $\mathcal{U} \circ s$ мы обозначаем совокупность сечений $\{u \circ s : u \in \mathcal{U}\}$ расслоения $\mathcal{X} \circ s$.

Пусть $\mathcal{X}$ — банахово расслоение над P и s — функция, определенная на подмножестве Q и действующая в P. Расслоение $\mathcal{X} \circ s$, дополненное нулевыми слоями в точках $Q \setminus \mathrm{dom}(s)$, мы будем обозначать символом $\mathcal{X} \bullet s$. Точнее говоря, слои банахова расслоения $\mathcal{X} \bullet s$ над Q определяются формулой

$$(\mathcal{X} \bullet s)(q) := \begin{cases} \mathcal{X}\big(s(q)\big), & \text{если } q \in \mathrm{dom}(s), \\ \{0\}, & \text{если } q \in Q \setminus \mathrm{dom}(s). \end{cases}$$

Если u — сечение расслоения $\mathcal{X}$ над $D \subset P$, то символом $u \bullet s$ обозначается сечение

$$(u \bullet s)(q) := \begin{cases} u\big(s(q)\big), & \text{если } q \in s^{-1}[D], \\ 0, & \text{если } q \in Q \setminus \mathrm{dom}(s) \end{cases}$$

расслоения $\mathcal{X} \bullet s$ над $s^{-1}[D] \cup (Q \setminus \mathrm{dom}(s))$. Для произвольного множества $\mathcal{U}$ сечений $\mathcal{X}$ символом $\mathcal{U} \bullet s$ мы обозначаем совокупность сечений $\{u \bullet s : u \in \mathcal{U}\}$ расслоения $\mathcal{X} \bullet s$.

Расслоение $\mathcal{X} \bullet s$ рассматривается как НБР над Q с непрерывной структурой $C(P, \mathcal{X}) \bullet s$. Символом $\overline{\mathcal{X} \bullet s}$ обозначается просторная оболочка расслоения $\mathcal{X} \bullet s$.

Предложение [2; 6.5.17], [5; 5.4.8 (3)]. *Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — просторные* НБР *над P и Q, E и F — фундаменты в $C_\infty(P)$ и $C_\infty(Q)$ соответственно. Отображение $S : E(\mathcal{X}) \to$*

$F(\mathcal{Y})$ является оператором сдвига тогда и только тогда, когда существуют функция $s \in C_0(Q, P)$ и изометрическое вложение i расслоения $\mathcal{X} \bullet s$ в $\mathcal{Y}$ такие, что

$$Su = i \otimes (u \bullet s)$$

для всех $u \in E(\mathcal{X})$. В этом случае $|S|e = e \bullet s$ для всех $e \in E$.

Приведенные выше результаты позволяют получить следующие реализационные аналоги теорем 2.5 и 2.6.

3.7. Теорема. *Пусть E и F — фундаменты в $C_\infty(P)$ и $C_\infty(Q)$, $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — просторные* НБР *над P и Q, $A : E \to F$ — оператор взвешенного сдвига, $Ae = W\big((we) \bullet s\big)$ — WSW-представление оператора A, где $w \in C_\infty(P)$, $W \in C_\infty(Q)$ и $s \in C_0(Q, P)$. Пусть, кроме того, $T : E(\mathcal{X}) \to F(\mathcal{Y})$ — мажорируемый оператор и $|T| : E \to F$ — его точная мажоранта. Оператор T удовлетворяет условию $|T| \in \{A\}^{\perp\perp}$ тогда и только тогда, когда существует такой элемент $\widehat{W} \in C_\infty\big(Q, B(\overline{\mathcal{X} \bullet s}, \mathcal{Y})\big)$, что $\operatorname{supp} \widehat{W} \subset \operatorname{supp} W$ и для всех $u \in E(\mathcal{X})$ выполняется равенство $Tu = \widehat{W} \mathbin{\overline{\otimes}} \big((wu) \bullet s\big)$.*

3.8. Теорема. *Предположим, что E и F — фундаменты в $C_\infty(P)$ и $C_\infty(Q)$, $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — просторные* НБР *над P и Q, $A : E \to F$ — ограниченный оператор, сохраняющий дизъюнктность. Пусть*

$$Ae = W \bigoplus_{\xi \in \Xi} (w_\xi e \bullet s)|_{Q_\xi} \quad (e \in E)$$

— представление оператора A из теоремы 3.4, *$T : E(\mathcal{X}) \to F(\mathcal{Y})$ — мажорируемый оператор и $|T| : E \to F$ — его точная мажоранта. Оператор T удовлетворяет условию $|T| \in \{A\}^{\perp\perp}$ тогда и только тогда, когда существует такое сечение $\widehat{W}$ из пространства $C_\infty\big(Q, B(\overline{\mathcal{X} \bullet s}, \mathcal{Y})\big)$, что $\operatorname{supp} \widehat{W} \subset \operatorname{supp} W$ и для всех $u \in E(\mathcal{X})$ выполняется равенство*

$$Tu = \widehat{W} \mathbin{\overline{\otimes}} \bigoplus_{\xi \in \Xi} (w_\xi u \bullet s)|_{Q_\xi}.$$

Литература

1. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств.—М.: Физматгиз, 1961.—407 с.
2. *Гутман А. Е.* Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Линейные операторы, согласованные с порядком.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1995.—С. 63–211.
3. *Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.—М.-Л.: Гостехиздат, 1950.—548 с.
4. *Кусраев А. Г.* Линейные операторы в решеточно нормированных пространствах // Исследования по геометрии «в целом» и математическому анализу.—Новосибирск: Наука, 1987.—С. 84–123.
5. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
6. *Кусраев А. Г., Стрижевский В. З.* Решеточно нормированные пространства и мажорируемые операторы // Исследования по геометрии и математическому анализу.—Новосибирск: Наука, 1987.—С. 132–158.

Статья поступила 12 августа 2004 г.

Гутман Александр Ефимович, д. ф.-м. н.
г. Новосибирск, Институт математики СО РАН им. С. Л. Соболева
E-mail: `gutman@math.nsc.ru`

Феофанов Дмитрий Сергеевич
г. Новосибирск, Новосибирский госуниверситет