Глава 3

Сопряженные банаховы расслоения

А. Е. Гутман, А. В. Коптев

Расслоения традиционно используются в математическом анализе для исследования разнообразных алгебраических систем. Техника расслоений применяется при изучении банаховых пространств, банаховых решеток, C^*-алгебр, банаховых модулей и др(см., например, [9, 11, 12, 17–19]). Реализация некоторых объектов функционального анализа в виде пространств сечений соответствующих расслоений послужила основой для самостоятельных теорий. Одна из таких теорий, изложенная в работах [3, 13–16], посвящена понятию непрерывного банахова расслоения (НБР) и его приложениям к исследованию решеточно нормированных пространств (РНП). В рамках этой теории, в частности, получено представление произвольного РНП в виде пространства сечений подходящего НБР.

В определенном смысле, НБР над топологическим пространством Q формально отражает интуитивное представление о семействе банаховых пространств $(X_q)_{q\in Q}$, непрерывно изменяющихся от точки к точке пространства Q. Точнее говоря, банахово расслоение $\mathscr{X}$ над Q представляет собой отображение, сопоставляющее каждой точке $q \in Q$ банахово пространство $\mathscr{X}(q)$, называемое слоем $\mathscr{X}$ в точке q. При этом расслоение $\mathscr{X}$ снабжается дополнительной топологической структурой, позволяющей говорить о непрерывности сечений этого расслоения — функций u, определенных на подмножествах Q и принимающих значения $u(q) \in \mathscr{X}(q)$ для всех $q \in \operatorname{dom} u$. Понятие сечения можно считать обобщением понятия вектор-функции: если X — банахово пространство, то X-значные функции являются сечениями банахова расслоения, все слои которого равны X.

Во многих вопросах анализа существенную роль играет теория двойственности, одним из основных объектов которой является сопряженное пространство (см; например, [5]). Наличие функциональной реализации исходного пространства посредством сечений некоторого расслоения предоставляет возможность построения аналогичной реализации для сопряженного пространства. В частности, задача реализации сопряженного РНП приводит к понятию сопряженного банахова расслоения.

Вопрос о том, какое НБР $\mathscr{X}'$ следует считать сопряженным к данному расслоению $\mathscr{X}$ (затронутый, например, в работах [3, 12–14, 20]), тесно связан с понятием гомоморфизма. Гомоморфизм v непрерывного банахова расслоения $\mathscr{X}$ над Q представляет собой функционально-значное отображение $v : q \mapsto v(q) \in \mathscr{X}(q)'$, переводящее любое непрерывное сечение u расслоения $\mathscr{X}$ в непрерывную вещественную функцию $\langle u|v\rangle : q \mapsto \langle u(q)|v(q)\rangle$. Определяя сопряженное НБР $\mathscr{X}'$, естественно руководствоваться следующими двумя требованиями: во-первых, гомоморфизмы должны быть непрерывными сечениями расслоения $\mathscr{X}'$ и, во-вторых, все непрерывные сечения $\mathscr{X}'$ должны быть гомоморфизмами.

Для случая просторных расслоений над экстремально несвязными компактами проблема определения сопряженного НБР решена в работе [3] (см. также [13]). Однако подход к определению понятия сопряженного расслоения, примененный в этой работе, существенно опирается на специфические свойства просторных расслоений и экстремально несвязных компактов и по этой причине не может быть распространен на более широкий класс расслоений. Естественное стремление расширить круг приложений теории двойственности приводит к проблеме построения сопряженного НБР для произвольного банахова расслоения над произвольным топологическим пространством. Исследование этой проблемы и составляет основу данной главы, где, в том числе, дано определение сопряженного расслоения, удовлетворяющего сформулированным выше требованиям, и предложен ряд необходимых и достаточных условий для существования сопряженного расслоения.

В параграфе 3.1 собраны вспомогательные результаты, касающиеся топологических и банаховых пространств, а также функций, действующих в этих пространствах.

Параграф 3.2 посвящен исследованию понятия гомоморфизма банаховых расслоений. Здесь, в частности, предложено описание гомоморфизмов для широкого класса расслоений и исследован вопрос о непрерывности поточечной нормы гомоморфизма.

Вопрос о возможности реализовать пространство всех гомоморфизмов из НБР $\mathscr{X}$ в НБР $\mathscr{Y}$ в виде пространства непрерывных сечений некоторого банахова расслоения приводит к понятию операторного расслоения $B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. В параграфе 3.3 предложен ряд необходимых и достаточных условий существования такого расслоения.

В параграфе 3.4 введено и исследовано понятие сопряженного банахова расслоения, которое представляет собой частный случай операторного расслоения (рассмотренного в предыдущем параграфе). Сформулированное здесь определение сопряженного расслоения обобщает определение, данное в работе [3], где рассмотрен случай просторного банахова расслоения над экстремально несвязным компактом. В той же работе, в частности, установлено, что сопряженным расслоением обладает всякое просторное НБР. В общем же случае сопряженное расслоение существует далеко не всегда. Тем не менее отмеченное обобщение оправдывается появлением новых классов НБР, которые имеют сопряженные. В параграфе 3.4 приведены разнообразные необходимые и достаточные условия существования сопряженного расслоения, установлены нормативные соотношения двойственности между расслоениями $\mathscr{X}$ и $\mathscr{X}'$, а также исследованы вопросы существования второго сопряженного расслоения и вложения банахова расслоения во второе сопряженное.

Одним из естественных шагов при изучении понятия сопряженного расслоения является рассмотрение слабо непрерывных сечений (т. е˙ сечений, непрерывных относительно двойственности между исходным и сопряженным расслоениями). Понятие слабо непрерывного сечения вводится и исследуется в параграфе 3.5. Здесь, в частности, обсуждается вопрос о непрерывности слабо непрерывных сечений для различных классов банаховых расслоений, а также предлагаются условия совпадения пространства слабо непрерывных сечений постоянного банахова расслоения и пространства слабо непрерывных вектор-функций со значениями в соответствующем слое.

Говоря о банаховых расслоениях, мы следуем терминологии и обозначениям, принятым в [3] (см˙ также [13]). В частности, мы различаем понятия банахова расслоения и непрерывного банахова расслоения и используем подход к определению непрерывности сечений, связанный с понятием непрерывной структуры. Все необходимые сведения, касающиеся теории банаховых расслоений, можно найти в работах [3, 9, 12–16].

Если $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — НБР над топологическим пространством Q, то символом $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ мы обозначаем множество всех Q-гомоморфизмов из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$ $\big($обозначаемое в [3] через $\mathrm{Hom}_Q(\mathscr{X},\mathscr{Y})\big)$. Символ $\mathrm{Hom}_D(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, как обычно, используется для обозначения множества D-гомоморфизмов из $\mathscr{X}|_D$ в $\mathscr{Y}|_D$, где $D \subset Q$. Вместо «Q-гомоморфизм» мы говорим просто «гомоморфизм».' Аналогичное соглашение принимается в отношении терминов «Q-изометрическое вложение» и «Q-изометрия».

В отличие от [3] мы используем символ X_Q для обозначения постоянного банахова расслоения со слоем X над топологическим пространством Q. Символом $\mathscr{R}$ обозначается постоянное НБР со слоем $\mathbb{R}$ над рассматриваемым топологическим пространством.

Если u — определенное на $A \subset Q$ сечение расслоения $\mathscr{X}$ над Q, а v — определенное на $B \subset Q$ отображение, удовлетворяющее соотношению $v(q) \in \mathscr{X}(q)'$, $q \in B$, то символом $\langle u|v\rangle$ обозначается функция, действующая из $A \cap B$ в $\mathbb{R}$ по правилу $\langle u|v\rangle(q) = \langle u(q)|v(q)\rangle$.

Под компактом мы, как обычно, понимаем компактное хаусдорфово топологическое пространство. Все рассматриваемые в дальнейшем векторные пространства предполагаются заданными над полем $\mathbb{R}$.

3.1. Вспомогательные результаты

В этом параграфе собраны используемые в дальнейшем факты, касающиеся топологических и банаховых пространств, а также функций, действующих в этих пространствах. Приведенные здесь результаты являются вспомогательными и не затрагивают понятия банахова расслоения.

3.1.1. Лемма. *Пусть x и y — элементы единичной сферы некоторого нормированного пространства X. Тогда один из отрезков $[x, y]$ или $[x, -y]$ целиком лежит вне открытого шара радиуса $1/2$ с центром в нуле, т. е.*

$$\inf_{\lambda\in[0,1]} \|\lambda x + (1-\lambda)y\| \geqslant 1/2 \quad \text{\textit{или}} \quad \inf_{\lambda\in[0,1]} \|\lambda x + (1-\lambda)(-y)\| \geqslant 1/2.$$

$\lhd$ Допустим, имеются векторы $u = \lambda x + (1-\lambda)(-y)$ и $v = \mu x + (1-\mu)y$ такие, что $\|u\| < 1/2$ и $\|v\| < 1/2$. Очевидно, $0 < \lambda, \mu < 1$ и $x \neq \pm y$. Кроме того, векторы u и v линейно независимы. Значит, $x = \alpha u + \beta v$ и $y = \gamma u + \delta v$ для некоторых $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Из линейной независимости (u, v) и (x, y) и равенств

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \lambda & \lambda-1 \\ \mu & 1-\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

следует, что

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda-1 \\ \mu & 1-\mu \end{pmatrix}^{-1},$$

т. е. $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda+\mu-2\lambda\mu} \begin{pmatrix} 1-\mu & 1-\lambda \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix}.$

Неравенства

$$1 = \|x\| \leqslant |\alpha|\|u\| + |\beta|\|v\| < \frac{|\alpha| + |\beta|}{2},$$
$$1 = \|y\| \leqslant |\gamma|\|u\| + |\delta|\|v\| < \frac{|\gamma| + |\delta|}{2}$$

позволяют заключить, что

$$\frac{1}{|\alpha| + |\beta|} + \frac{1}{|\gamma| + |\delta|} < 1,$$

т. е. $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| + |\delta| < (|\alpha| + |\beta|)(|\gamma| + |\delta|)$. Как легко видеть, $\lambda + \mu - 2\lambda\mu > \lambda^2 + \mu^2 - 2\lambda\mu \geqslant 0$. Кроме того, $|\alpha| + |\beta| = (2 - \lambda - \mu)/(\lambda + \mu - 2\lambda\mu)$ и $|\gamma| + |\delta| = (\lambda + \mu)/(\lambda + \mu - 2\lambda\mu)$, откуда

$$\frac{2}{\lambda + \mu - 2\lambda\mu} < \frac{2 - \lambda - \mu}{\lambda + \mu - 2\lambda\mu}\,\frac{\lambda + \mu}{\lambda + \mu - 2\lambda\mu}.$$

Следовательно, $2(\lambda + \mu - 2\lambda\mu) < 2(\lambda + \mu) - (\lambda + \mu)^2$ и, наконец, $(\lambda - \mu)^2 < 0$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. $\triangleright$

3.1.2. Напомним, что последовательность (x_n) элементов банахова пространства X называется *слабо фундаментальной*, если для любой слабой окрестности нуля $U \subset X$ существует номер $\bar{n} \in \mathbb{N}$ такой, что $x_n - x_m \in U$ для всех $n, m \geqslant \bar{n}$, или, что то же самое, для любого функционала $x' \in X'$ числовая последовательность $\langle x_n | x' \rangle$ фундаментальна.

Следующее утверждение сформулировано, например, в [21, утверждение 1 (SP1)].

Лемма. *Если банахово пространство X обладает свойством Шура, то всякая слабо фундаментальная последовательность в X сходится по норме.*

$\triangleleft$ Рассмотрим не фундаментальную по норме последовательность $(x_n) \subset X$ и покажем, что она не является слабо фундаментальной. Существуют число $\varepsilon > 0$ и строго возрастающая последовательность $(n_k) \subset \mathbb{N}$ такие, что $\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\| > \varepsilon$ для всех нечетных $k \in \mathbb{N}$. Поскольку последовательность $(x_{n_k} - x_{n_{k+1}})$ не сходится к нулю по норме и пространство X обладает свойством Шура, для некоторого функционала $x' \in X'$ числовая последовательность $\langle x_{n_k} - x_{n_{k+1}} \,|\, x' \rangle$ не стремится к нулю. Таким образом, подпоследовательность (x_{n_k}), а значит, и исходная последовательность (x_n) не являются слабо фундаментальными. $\rhd$

3.1.3. Лемма. *Если X — бесконечномерное сепарабельное банахово пространство, то всякое бесконечномерное банахово подпространство X' содержит слабо* сходящуюся к нулю последовательность функционалов, имеющих единичную норму.*

$\lhd$ Пусть Y — бесконечномерное банахово подпространство X'. Рассмотрим последовательность (y_n) элементов единичной сферы Y такую, что $\|y_i - y_j\| \geqslant 1/2$ при $i \neq j$ (см., например, [6, 8.4.2]). Согласно [10, XIII] из (y_n) можно выделить подпоследовательность (y_{n_m}), слабо* сходящуюся к некоторому элементу $y \in X'$. Ясно, что $y \in Y$. Для каждого номера $m \in \mathbb{N}$ положим $z_m := y_{n_m} - y$. Пусть $\varepsilon > 0$ и (z_{m_k}) — такая подпоследовательность (z_m), что $\|z_{m_k}\| > \varepsilon$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда $(z_{m_k} \,/\, \|z_{m_k}\|)$ — искомая последовательность. $\rhd$

3.1.4. Лемма. *Для любого бесконечномерного банахова пространства X существуют слабо сходящаяся к нулю сеть $(x_\alpha)_{\alpha \in \aleph} \subset X$ и сходящаяся к нулю по норме сеть $(x'_\alpha)_{\alpha \in \aleph} \subset X'$ такие, что $\langle x_\alpha | x'_\alpha \rangle = 1$ для всех $\alpha \in \aleph$.*

$\lhd$ В качестве $\aleph$ рассмотрим множество всех конечных подмножеств пространства X', упорядоченное по включению.

Зафиксируем $\alpha = \{x'_1, \dots, x'_n\} \in \aleph$ и, используя бесконечномерность пространства X, рассмотрим элемент $x_\alpha \in \bigcap_{i=1}^n \ker x'_i$ с нормой $\|x_\alpha\| = n$. Затем подберем функционал $x'_\alpha \in X'$, удовлетворяющий равенствам $\langle x_\alpha | x'_\alpha \rangle = 1$ и $\|x'_\alpha\| = 1/n$.

Очевидно, сеть $(x'_\alpha)_{\alpha \in \aleph}$ сходится к нулю по норме. Покажем, что сеть $(x_\alpha)_{\alpha \in \aleph}$ слабо сходится к нулю. Пусть U — произвольная слабая окрестность нуля в X. Подберем функционалы $x'_1, \dots, x'_n \in X'$ так, чтобы $\bigcap_{i=1}^n \ker x'_i \subset U$. Тогда $x_\alpha \in \bigcap_{i=1}^n \ker x'_i \subset U$ для всех $\alpha \in \aleph$, $\alpha \geqslant \{x'_1, \dots, x'_n\}$. $\rhd$

3.1.5. Пусть X — банахово пространство. Подмножество $F \subset X'$ называется *тотальным* (или *разделяющим*), если для любого ненулевого элемента $x \in X$ найдется функционал $x' \in F$ такой, что $\langle x | x' \rangle \neq 0$.

В каждом из следующих случаев пространство X' содержит счетное тотальное подмножество:

(1) *X — сепарабельное банахово пространство;*

(2) *банахово пространство X изоморфно сопряженному к сепарабельному банахову пространству.*

$\lhd$ (1): Рассмотрим всюду плотное в X множество $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. С каждым номером $n \in \mathbb{N}$ свяжем такой функционал $x'_n \in X'$, что $\|x'_n\| = 1$ и $\langle x_n | x'_n \rangle = \|x_n\|$. Тогда для произвольного ненулевого элемента $x \in X$ найдется номер $n \in \mathbb{N}$, для которого $\|x - x_n\| \leqslant \|x\|/3$ и, следовательно,

$$|\langle x|x'_n\rangle| \geqslant |\langle x_n|x'_n\rangle| - |\langle x_n - x \mid x'_n\rangle| \geqslant$$
$$\geqslant \|x_n\| - \|x\|/3 \geqslant \|x\| - \|x\|/3 - \|x\|/3 > 0.$$

(2): Не нарушая общности, можно считать, что $X = Y'$, где Y — сепарабельное банахово пространство. Остается заметить, что образ счетного всюду плотного подмножества Y при каноническом вложении Y в Y'' является тотальным. $\rhd$

3.1.6. *Лемма.* *Пусть X — банахово пространство. Предположим, что пространство X' не содержит счетного тотального множества. Тогда существует упорядоченное направленное по возрастанию множество $\aleph$, счетные подмножества которого обладают верхними гранями, и существуют слабо сходящаяся к нулю сеть $(x_\alpha)_{\alpha\in\aleph} \subset X$ и ограниченная слабо* сходящаяся к нулю сеть $(x'_\alpha)_{\alpha\in\aleph} \subset X'$ такие, что $\langle x_\alpha | x'_\alpha\rangle = 1$ для всех $\alpha \in \aleph$.*

$\lhd$ Обозначим через $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ множества всех счетных подмножеств X и X', упорядоченные по включению. Положим $\aleph := \mathscr{F} \times \mathscr{G}$ и снабдим $\aleph$ покоординатным порядком. Очевидно, что счетные подмножества $\aleph$ обладают верхними гранями.

Пусть $\alpha = (F, G) \in \aleph$. Мы подберем элементы $x_\alpha \in X$ и $x'_\alpha \in X'$, удовлетворяющие следующим условиям:

(1) $\langle x_\alpha | g\rangle = 0$ для всех $g \in G$;

(2) $\langle f | x'_\alpha\rangle = 0$ для всех $f \in F$;

(3) $\langle x_\alpha | x'_\alpha\rangle = \|x'_\alpha\| = 1$.

Рассмотрим всюду плотное подмножество $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ единичной сферы пространства $\operatorname{cl}\operatorname{lin} F$. Для каждого номера $n \in \mathbb{N}$ подберем функционал $f'_n \in X'$, удовлетворяющий равенствам

$$\|f'_n\| = \langle f_n | f'_n\rangle = 1.$$

Поскольку в X' нет счетного тотального множества, найдется элемент $x \in X$ такой, что $\langle x|f'_n\rangle = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $\langle x|g\rangle = 0$ для всех $g \in G$ и $\|x\| = 1$. При этом $\|x - f_n\| = \|x - f_n\|\|f'_n\| \geqslant |\langle x - f_n|f'_n\rangle| = \langle f_n|f'_n\rangle = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$, откуда $x \notin \operatorname{cl}\operatorname{lin} F$, так как $\|x\| = 1$ и множество $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ плотно в единичной сфере пространства $\operatorname{cl}\operatorname{lin} F$. Теперь возьмем функционал $x'_\alpha \in X'$, удовлетворяющий соотношениям $\|x'_\alpha\| = 1$, $\langle x|x'_\alpha\rangle \neq 0$ и $x'_\alpha \equiv 0$ на F. Наконец, положим $x_\alpha = \frac{x}{\langle x|x'_\alpha\rangle}$. Понятно, что элементы x_α и x'_α удовлетворяют условиям (1)–(3).

Слабая сходимость к нулю сети (x_α) вытекает из следующих рассуждений. Если $x' \in X'$, то $\langle x_\alpha|x'\rangle = 0$ для любого элемента $\alpha = (F, G) \geqslant (\{0\}, \{x'\})$, так как $\langle x_\alpha|g\rangle = 0$ для всех $g \in G$ и $x' \in G$. Аналогично проверяется слабая* сходимость к нулю сети (x'_α). $\triangleright$

3.1.7. Пусть (x_n) — последовательность элементов некоторого банахова пространства X.

Лемма. *Следующие утверждения равносильны:*

(а) *для любой последовательности $(x'_n) \subset X'$ и любого элемента $x' \in X'$ из слабой* сходимости $x'_n \to x'$ следует, что $\langle x_n|x'_n\rangle \to 0$;*

(б) *для любой последовательности $(x'_m) \subset X'$ и любого элемента $x' \in X'$ из слабой* сходимости $x'_m \to x'$ следует, что $\langle x_n|x'_m\rangle \to 0$ при $n, m \to \infty$;*

(в) *последовательность (x_n) слабо сходится к нулю, и, кроме того, $\langle x_n|x'_n\rangle \to 0$ для любой слабо* сходящейся к нулю последовательности $(x'_n) \subset X'$;*

(г) *последовательность (x_n) слабо сходится к нулю, и, кроме того, $\langle x_n|x'_m\rangle \to 0$ при $n, m \to \infty$ для любой слабо* сходящейся к нулю последовательности $(x'_m) \subset X'$;*

(д) $\sup_{m\in\mathbb{N}} |\langle x_n|x'_m\rangle| \to 0$ *при $n \to \infty$ для любой слабо* сходящейся к нулю последовательности $(x'_m) \subset X'$;*

(е) *для любого оператора $T \in B(X, c_0)$ последовательность (Tx_n) сходится к нулю по норме.*

Доказательство равносильности перечисленных выше утверждений является рутинным и достаточно простым упражнением.

Определение. Последовательность (x_n) назовем *w-w^*-сходящейся* к элементу $x \in X$, если последовательность $(x_n - x)$ удовлетворяет любому из условий (a)–(e) леммы.

Будем говорить, что пространство X обладает *свойством* WS (или *ослабленным свойством Шура*), если любая w-w^*-сходящаяся последовательность его элементов сходится по норме (или, что то же самое, любая w-w^*-сходящаяся к нулю последовательность сходится к нулю по норме).

Перечислим некоторые очевидные факты, касающиеся введенных выше понятий.

Предложение. **(1)** *Всякая сходящаяся по норме последовательность является w-w^*-сходящейся.*

(2) *Любая подпоследовательность w-w^*-сходящейся последовательности также w-w^*-сходится.*

(3) *Если X и Y — банаховы пространства, $T \in B(X, Y)$ и последовательность $(x_n) \subset X$ w-w^*-сходится к $x \in X$, то последовательность (Tx_n) w-w^*-сходится к Tx.*

(4) *Если банахово пространство обладает свойством* WS, *то этим свойством обладает каждое его банахово подпространство.*

(5) *Если банахово пространство обладает свойством* WS, *то этим свойством обладает каждое изоморфное ему банахово пространство.*

(6) *Если банахово пространство содержит изоморфную копию пространства, не обладающего свойством* WS, *то оно само не обладает свойством* WS.

3.1.8. *Лемма.* *Если замкнутый единичный шар пространства X' слабо* секвенциально компактен, то банахово пространство X обладает свойством* WS. *Обратное неверно.*

$\lhd$ Допустим, что X не обладает свойством WS. Тогда существует w-w^*-сходящаяся к нулю последовательность $(x_n) \subset X$, не сходящаяся к нулю по норме. Не ограничивая общности, будем считать, что $\|x_n\| > \varepsilon$ для всех $n \in \mathbb{N}$ при подходящем $\varepsilon > 0$. Используя слабо* секвенциальную компактность единичного шара пространства X', из последовательности функционалов $(x'_n) \subset X'$, удовлетворяющей условиям $\|x'_n\| = 1$ и $\langle x_n | x'_n \rangle > \varepsilon$ для всех $n \in \mathbb{N}$, выберем слабо* сходящуюся подпоследовательность (x'_{n_k}). С другой стороны, $\langle x_{n_k} | x'_{n_k} \rangle > \varepsilon$ для всех $k \in \mathbb{N}$, что противоречит w-w^*-сходимости (x_{n_k}) к нулю.

Контрпримером к обратному утверждению может служить пространство $\ell^1(\mathbb{R})$. Действительно, это пространство обладает свойством Шура, а значит, и свойством WS. С другой стороны, как показано в [10, XIII], единичный шар пространства $\ell^1(\mathbb{R})'$ не является слабо* секвенциально компактным. $\rhd$

Каждое из следующих условий является достаточным для того, чтобы банахово пространство X обладало свойством WS:

(1) X обладает свойством Шура;
(2) X сепарабельно;
(3) X' не содержит копии ℓ^1;
(4) X рефлексивно;
(5) X является подпространством слабо компактно порожденного банахова пространства;
(6) для всякого сепарабельного подпространства $Y \subset X$ пространство Y' сепарабельно.

Первое условие из предложенного списка с очевидностью влечет свойство WS, а все остальные гарантируют слабо* секвенциальную компактность замкнутого единичного шара пространства X' (см. [10, XIII]), что позволяет применить последнюю лемму. Напомним, что банахово пространство Y называют *слабо компактно порожденным*, если оно содержит слабо компактное абсолютно выпуклое подмножество, линейная оболочка которого всюду плотна в Y.

3.1.9. Говорят, что банахово пространство X обладает *свойством Данфорда — Петтиса*, если $\langle x_n | x'_n \rangle \to 0$ для любой слабо сходящейся к нулю последовательности $(x_n) \subset X$ и любой слабо сходящейся к нулю последовательности $(x'_n) \subset X'$.

В параграфе 3.5 при исследовании слабо непрерывных сечений банаховых расслоений раскрывается важная роль вопроса о том, когда банахово пространство обладает следующим свойством, близким к свойству Данфорда — Петтиса.

Определение. Будем говорить, что банахово пространство X обладает *свойством* DP*, если $\langle x_n | x'_n \rangle \to 0$ для любой слабо сходящейся к нулю последовательности $(x_n) \subset X$ и любой слабо* сходящейся к нулю последовательности $(x'_n) \subset X'$.

(Заметим, что аналог свойства DP* для сетей не представляет интереса, поскольку в силу леммы 3.1.4 таким свойством обладают лишь конечномерные пространства.)

Очевидно, X обладает свойством DP* тогда и только тогда, когда множества слабо сходящихся и w-w^*-сходящихся последовательностей в X совпадают.

Банахово пространство X называют *пространством Гротендика* (см. [10, VII, с. 121]), если в X' любая слабо* сходящаяся последовательность сходится слабо. Таковым, например, является всякое рефлексивное пространство.

Легко проверить следующие утверждения.

Лемма. *Пусть X — банахово пространство.*

(1) *Если пространство X обладает свойством Шура, то оно обладает свойством* DP*.

(2) *Если пространство X обладает свойством* DP*, *то оно обладает свойством Данфорда — Петтиса.*

(3) *Пространство X обладает свойствами* WS *и* DP* *тогда и только тогда, когда оно обладает свойством Шура.*

(4) *Для пространства Гротендика свойство* DP* *равносильно свойству Данфорда — Петтиса.*

Стоит отметить, что обратное к утверждению (2) не верно. В самом деле, пространство c_0 не обладает свойством Шура и, будучи сепарабельным, обладает свойством WS, а значит, и свойством DP* в силу (3). Вместе с тем c_0 обладает свойством Данфорда — Петтиса, так как $c_0' \simeq \ell^1$ — пространство со свойством Шура.

Напомним, что пересечение (объединение) последовательности открытых (замкнутых) подмножеств топологического пространства называется *σ-открытым* (*σ-замкнутым*) множеством.

Пусть K — квазиэкстремально несвязный компакт (т. е. компакт, в котором замыкание каждого открытого σ-замкнутого подмножества является открытым). Как известно, ℓ^∞ и $C(K)$ — пространства Гротендика со свойством Данфорда — Петтиса и без свойства Шура (см. [10, VII, Theorem 15, Exercise 1 (ii), XI, Exercise 4 (ii)], а также [8, Theorem 13.13] и [2, теорема V.2.1]).

Следствие. **(1)** *Пространства ℓ^∞ и $C(K)$, где K — квазиэкстремально несвязный компакт, обладают свойством* DP*.

(2) *Банахово пространство, содержащее изоморфную копию ℓ^∞, не обладает свойством* WS.

$\lhd$ Утверждения следствия немедленно следуют из указанных выше свойств пространств ℓ^∞ и $C(K)$, утверждений (4) и (3) последней леммы и предложения 3.1.7 (6). $\rhd$

3.1.10. *Лемма.* *Для произвольного топологического пространства Q равносильны следующие утверждения:*

(а) *все функции в $C(Q)$ локально постоянны;*

(б) *для любой последовательности функций $(f_n) \subset C(Q)$ и любой точки $q \in Q$ существует окрестность q, на которой все функции f_n, $n \in \mathbb{N}$, постоянны;*

(в) *для любой последовательности функций $(f_n) \subset C(Q)$ существует разбиение пространства Q на открыто-замкнутые подмножества такое, что на каждом элементе этого разбиения все функции f_n, $n \in \mathbb{N}$, постоянны.*

$\lhd$ (а)$\to$(б): Достаточно найти окрестность точки q, на которой равны нулю все функции $g_n = |f_n - f_n(q)| \wedge 1$, $n \in \mathbb{N}$. Поскольку сумма $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n/2^n$ является непрерывной функцией и $g(q) = 0$, в силу (а) существует окрестность q, на которой $g \equiv 0$. Понятно, что на этой окрестности равны нулю и все функции g_n, $n \in \mathbb{N}$.

(б)$\to$(в): В силу (б) для каждой точки $q \in Q$ пересечение замкнутых множеств $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{f_n = f_n(q)\}$ является окрестностью любой своей точки, а значит, открыто-замкнуто. Все пересечения такого вида образуют требуемое разбиение пространства Q.

Импликация (в)$\Rightarrow$(а) очевидна. $\rhd$

Определение. Топологическое пространство Q, удовлетворяющее любому из равносильных условий (а)–(в) последней леммы, будем называть *функционально дискретным.*

3.1.11. Точка топологического пространства называется *σ-изолированной* или *P-точкой*, если пересечение любой последовательности окрестностей этой точки снова является ее окрестностью.

Замечание. Хаусдорфово топологическое пространство, содержащее единственную неизолированную точку, является нормальным и бэровским.

Предложение. *Пусть Q — вполне регулярное топологическое пространство.*

(1) *Следующие утверждения равносильны:*

(а) *пространство Q функционально дискретно;*
(б) *все точки Q σ-изолированы;*
(в) *всякое σ-открытое подмножество Q открыто;*
(г) *всякое σ-замкнутое подмножество Q замкнуто.*

(2) *Если пространство Q функционально дискретно, то все счетные подмножества Q замкнуты.*

(3) *Обратное к утверждению (2) не верно.*

$\lhd$ (1): (а)$\to$(б): Рассмотрим произвольную точку $q \in Q$, последовательность (U_n) ее окрестностей и положим $V = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Используя вполне регулярность Q, для каждого номера $n \in \mathbb{N}$ возьмем непрерывную функцию $f_n : Q \to [0,1]$ такую, что $f_n(q) = 0$ и $f_n \equiv 1$ на $Q \backslash U_n$. Сумма $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n/2^n : Q \to [0,1]$ непрерывна и в силу (а) равна нулю в некоторой окрестности U_0 точки q. Поскольку $f > 0$ вне V, окрестность U_0 содержится в V и, следовательно, множество V также является окрестностью точки q.

(б)$\to$(в): В силу (б) пересечение последовательности открытых подмножеств Q является окрестностью каждой своей точки, т. е. открыто.

(в)$\to$(а): В силу (в) для любой функции $f \in C(Q)$ и точки $q \in Q$ пересечение $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{p \in Q : |f(p) - f(q)| < 1/n\}$ является окрестностью точки q, на которой функция f постоянна.

Равносильность двойственных утверждений (в) и (г) очевидна.

(2): Достаточно заметить, что счетные подмножества Q являются σ-замкнутыми, и воспользоваться утверждением (1).

(3): Построим вполне регулярное топологическое пространство Q, все счетные подмножества которого замкнуты, и предъявим функцию из $C(Q)$, не являющуюся локально постоянной.

Превратим отрезок $[0,1]$ в топологическое пространство Q, взяв в качестве базы открытой топологии все подмножества полуинтервала $(0,1]$ и все множества вида $[0,t]\backslash S$, где $t \in (0,1]$ и S — счетное подмножество $(0,1]$. Понятно, что все счетные подмножества Q замкнуты. Поскольку пространство Q является хаусдорфовым и содержит единственную неизолированную точку, оно нормально (см. замечание) и, в частности, вполне регулярно. Как легко видеть, тождественное отображение отрезка $[0,1]$ непрерывно и не постоянно в любой окрестности точки 0. $\rhd$

3.1.12. Напомним, что топологическое пространство называется *счетно компактным*, если из любого счетного открытого покрытия этого пространства можно выделить конечное подпокрытие. Топологическое пространство называется *совершенно нормальным*, если оно нормально и каждое замкнутое в нем множество является σ-открытым.

Предложение. *Пусть Q — вполне регулярное топологическое пространство. При выполнении любого из следующих условий пространство Q содержит незамкнутое счетное подмножество (а следовательно, не является функционально дискретным):*

(1) *Q содержит недискретное счетно компактное подпространство;*
(2) *Q содержит бесконечное компактное подмножество;*
(3) *Q содержит недискретное подмножество, являющееся пространством Фреше — Урысона;*
(4) *Q содержит неустанавливающуюся сходящуюся последовательность;*
(5) *Q содержит неизолированную точку со счетной базой окрестностей.*

Кроме того, совершенно нормальное топологическое пространство является функционально дискретным только в том случае, когда оно дискретно.

$\triangleleft$ Как известно (см., например, [1, гл. III, утверждение 189]), топологическое пространство счетно компактно тогда и только тогда, когда всякое его бесконечное подмножество имеет предельную точку. Воспользовавшись этим критерием, несложно убедиться в достаточности условия (1) для существования незамкнутого счетного подмножества Q. Проверка достаточности условий (2), (4) и (5) не представляет труда. Условие (3) равносильно (4).

Существование не локально постоянной функции на недискретном совершенно нормальном топологическом пространстве следует из теоремы Веденисова (см˙ [7, 1.5.19]). $\triangleright$

3.1.13. Если топологическое пространство Q функционально дискретно и вполне регулярно, то оно не может удовлетворять ни одному из условий 3.1.12 (1)–(5). В частности, если пространство Q не является дискретным, то оно не может быть компактным, удовлетворять первой аксиоме счетности и тем более быть метризуемым. Эти наблюдения существенно ограничивают класс топологических пространств, в который может попасть Q. В связи с этим уместно убедиться в том, что вполне регулярное функционально дискретное топологическое пространство не обязано быть дискретным.

Начнем с того, что для произвольного упорядоченного направленного по возрастанию множества $\aleph$, не имеющего наибольшего элемента, определим недискретное нормальное топологическое пространство $\aleph^\bullet$. В качестве носителя возьмем множество $\overline{\aleph} = \aleph \cup \{\infty\}$, где $\infty \notin \aleph$. Снабдим $\overline{\aleph}$ порядком, считая, что $\aleph$ — упорядоченное подмножество $\overline{\aleph}$, и полагая $\infty > \alpha$ для всех $\alpha \in \aleph$. Базой открытой топологии $\aleph^\bullet$ объявим все подмножества $\aleph$ и все промежутки вида $(\alpha, \infty] := \{\beta \in \overline{\aleph} : \alpha < \beta \leqslant \infty\}$, где $\alpha \in \aleph$. Так как в $\aleph$ нет наибольшего элемента, точка $\infty \in \aleph^\bullet$ не изолирована, а значит, определенная на $\aleph^\bullet$ топология не дискретна. Пространство $\aleph^\bullet$ нормально, поскольку оно, очевидно, хаусдорфово и содержит единственную неизолированную точку (см. замечание 3.1.11).

Замечание. **(1)** В случае, если все счетные подмножества $\aleph$ обладают верхними гранями, всякая непрерывная функция $f : \aleph^\bullet \to \mathbb{R}$ принимает постоянное значение $f(\infty)$ в некоторой окрестности точки ∞. (Например, пересечение $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \big\{|f - f(\infty)| < 1/n\big\}$ является такой окрестностью.)

(2) Для произвольного топологического пространства P непрерывность функции $f : \aleph^\bullet \to P$ равносильна сходимости сети $\big(f(\alpha)\big)_{\alpha\in\aleph}$ к $f(\infty)$.

Пример. Существует функционально дискретное нормальное топологическое пространство, не являющееся дискретным.

Пусть $\aleph$ — упорядоченное направленное по возрастанию множество без наибольшего элемента и все счетные подмножества $\aleph$ обладают верхними гранями. (Таковым является, например, любой несчетный кардинал или упорядоченное по включению множество всех счетных подмножеств некоторого несчетного множества.) Тогда в силу последнего замечания пространство $\aleph^\bullet$ является искомым.

3.1.14. *Лемма.* *Пусть Y — локально выпуклое пространство и (y_n) — последовательность элементов Y, сходящаяся к $y \in Y$. Предположим, что вектор-функция $u : [0, 1] \to Y$ удовлетворяет равенству $u(0) = y$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ отображает отрезок $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ на отрезок $[y_{n+1}, y_n]$ аффинным образом:*

$$u\big(\lambda \tfrac{1}{n+1} + (1-\lambda)\tfrac{1}{n}\big) = \lambda y_{n+1} + (1-\lambda) y_n, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

Тогда функция u непрерывна.

$\lhd$ Очевидно, функция u непрерывна на полуинтервале $(0,1]$. Возьмем произвольную окрестность V элемента $y = u(0)$, затем выпуклую окрестность $W \subset V$ того же элемента и рассмотрим номер n_0, начиная с которого $y_n \in W$. Тогда ввиду выпуклости W справедливо включение $u\big([0, \frac{1}{n_0}]\big) \subset W$. $\rhd$

3.1.15. *Лемма.* *Пусть X — бесконечномерное банахово пространство и Q — топологическое пространство, не являющееся функционально дискретным. Тогда существует слабо* непрерывная функция из Q в X', поточечная норма которой ограничена и разрывна.*

$\lhd$ Согласно теореме Джозефсона — Ниссенцвейга [10, XII] существует слабо* сходящаяся к нулю последовательность (x'_n) элементов единичной сферы пространства X'. Обозначим $y_1 := x'_1$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим

$$y_{n+1} = \begin{cases} x'_{n+1}, & \|\lambda y'_n + (1-\lambda)x'_{n+1}\| \geqslant 1/2 \text{ для всех } \lambda \in [0,1], \\ -x'_{n+1} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, последовательность (y_n) слабо* сходится к нулю, а в силу леммы 3.1.1 каждый отрезок $[y'_{n+1}, y'_n]$, $n \in \mathbb{N}$, лежит вне открытого шара радиуса $1/2$ с центром в нуле. Тогда определенная в лемме 3.1.14 вектор-функция $u : [0,1] \to X'$ (где в качестве Y рассматривается пространство X', снабженное слабой* топологией, и y полагается равным нулю) является слабо* непрерывной. Вместе с тем $\|u\|(0) = 0$ и $\|u\|\big((0,1]\big) \subset [1/2, 1]$.

Теперь рассмотрим функцию $f \in C(Q)$, не постоянную в любой окрестности некоторой точки $q \in Q$, и положим $g = |f - f(q)| \wedge 1$. Ясно, что $g : Q \to [0,1]$, $g(q) = 0$ и $q \in \mathrm{cl}\{g > 0\}$. Следовательно, композиция $u \circ g : Q \to X'$ является искомой вектор-функцией. $\rhd$

3.1.16. Для топологического пространства Q и банахова пространства X символом $C_w(Q,X)$ обозначается совокупность всех слабо непрерывных функций из Q в X.

Лемма. *Пусть X — банахово пространство и Q — функционально дискретное топологическое пространство. Предположим, что в X' существует счетное тотальное подмножество. Тогда $C(Q,X) = C_w(Q,X)$.*

◁ Рассмотрим произвольную вектор-функцию $u \in C_w(Q, X)$. Достаточно показать, что для некоторого разбиения пространства Q на открыто-замкнутые подмножества функция u постоянна на каждом элементе этого разбиения.

Пусть $\{x'_n : n \in \mathbb{N}\}$ — тотальное подмножество X'. Поскольку вектор-функция u слабо непрерывна, $\langle u|x'_n\rangle \in C(Q)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Согласно 3.1.10 (в) существует такое разбиение пространства Q на открыто-замкнутые подмножества, что на каждом элементе этого разбиения постоянны все функции $\langle u|x'_n\rangle$, $n \in \mathbb{N}$. Ввиду тотальности множества $\{x'_n : n \in \mathbb{N}\}$ на каждом элементе этого разбиения постоянна и функция u. ▷

3.2. Гомоморфизмы банаховых расслоений

Данный параграф, как следует из его названия, посвящен исследованию понятия гомоморфизма банаховых расслоений. Некоторые из приведенных здесь фактов представляют самостоятельный интерес, но основная ценность большинства результатов данного параграфа раскрывается позже при изучении операторных банаховых расслоений (см˙§ 3.3, 3.4).

Первая группа результатов (3.2.1–3.2.4) предлагает ряд условий, при выполнении которых непрерывные сечения некоторого банахова расслоения с операторными слоями являются гомоморфизмами.

Разделы 3.2.5–3.2.7 предоставляют неоднократно используемый в дальнейшем удобный способ построения сечений, гомоморфизмов и банаховых расслоений.

В разделах 3.2.8 и 3.2.9 исследуется понятие размерности банахова расслоения. Полученные здесь результаты об областях постоянства размерности, на наш взгляд, представляют самостоятельный интерес.

В 3.2.10 предложено описание гомоморфизмов банаховых расслоений над топологическим пространством, удовлетворяющим первой аксиоме счетности. Этот результат снабжен примерами (см. 3.2.11), которые подтверждают существенность ограничений, накладываемых на рассматриваемое топологическое пространство.

Параграф завершается исследованием вопроса о непрерывности поточечной нормы гомоморфизма, действующего из НБР с постоянной конечной размерностью в произвольное НБР (3.2.12). Ряд примеров (см. 3.2.13) показывает, что постоянство размерности является существенным требованием.

3.2.1. *Предложение.* *Пусть $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ и $\mathscr{Z}$ — НБР над топологическим пространством Q, причем $\mathscr{Z}(q) \subset B\big(\mathscr{X}(q), \mathscr{Y}(q)\big)$ для всех $q \in Q$, и пусть множества сечений $\mathscr{U} \subset C(Q, \mathscr{X})$ и $\mathscr{W} \subset C(Q, \mathscr{Z})$ послойно плотны в $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Z}$ соответственно. Предположим, что для любых $u \in \mathscr{U}$ и $w \in \mathscr{W}$ глобальное сечение $w \otimes u$ расслоения $\mathscr{Y}$ непрерывно. Тогда для всякого подмножества $D \subset Q$ имеет место включение $C(D, \mathscr{Z}) \subset \mathrm{Hom}_D(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$.*

$\lhd$ Зафиксируем произвольное подмножество $D \subset Q$, элементы $\bar{u} \in C(D, \mathscr{X})$, $\bar{w} \in C(D, \mathscr{Z})$ и точку $q \in D$. Нам нужно показать, что сечение $\bar{w} \otimes \bar{u}$ расслоения $\mathscr{Y}$ непрерывно в q. В силу предложения [3, 2.3.2] для этого достаточно доказать полунепрерывность сверху в точке q функции $\|\bar{w} \otimes \bar{u} - v\| : D \to \mathbb{R}$ для любого сечения $v \in C(D, \mathscr{Y})$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $v \in C(D, \mathscr{Y})$. Укажем окрестность точки q, в которой $\|\bar{w} \otimes \bar{u} - v\| < \|\bar{w} \otimes \bar{u} - v\|(q) + \varepsilon$.

Рассмотрим элемент $u \in \mathscr{U}$ такой, что $\|\bar{w}\|(q)\|\bar{u} - u\|(q) < \varepsilon/8$. Непрерывность вещественных функций $\|\bar{u}-u\|$ и $\|\bar{w}\|$ позволяет найти окрестность U_1 точки q, в которой $\|\bar{w}\|\|\bar{u} - u\| \leqslant \varepsilon/4$. Аналогично находятся элемент $w \in \mathscr{W}$ и окрестность U_2 точки q такие, что $\|\bar{w} - w\|(q)\|u\|(q) < \varepsilon/8$ и $\|\bar{w} - w\|\|u\| \leqslant \varepsilon/4$ на U_2. На пересечении $U_1 \cap U_2$ имеют место неравенства $\|\bar{w}\otimes\bar{u} - w\otimes u\| \leqslant \|\bar{w}\otimes\bar{u} - \bar{w}\otimes u\| + \|\bar{w}\otimes u - w\otimes u\| \leqslant \|\bar{w}\|\|\bar{u}-u\| + \|\bar{w}-w\|\|u\| \leqslant \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2$. Аналогичные выкладки дает неравенство $\|\bar{w} \otimes \bar{u} - w \otimes u\|(q) < \varepsilon/4$. Рассмотрим окрестность U_3 точки q, в которой $\|w \otimes u - v\| \leqslant \|w \otimes u - v\|(q) + \varepsilon/4$. Тогда на окрестности $U_1 \cap U_2 \cap U_3$ точки q выполняются соотношения

$$
\begin{aligned}
\|\bar{w} \otimes \bar{u} - v\| &\leqslant \|\bar{w} \otimes \bar{u} - w \otimes u\| + \|w \otimes u - v\| \leqslant \\
&\leqslant \varepsilon/2 + \|w \otimes u - v\|(q) + \varepsilon/4 \leqslant \\
&\leqslant \varepsilon/2 + \|w \otimes u - \bar{w} \otimes \bar{u}\|(q) + \|\bar{w} \otimes \bar{u} - v\|(q) + \varepsilon/4 < \\
&< \varepsilon/2 + \varepsilon/4 + \|\bar{w} \otimes \bar{u} - v\|(q) + \varepsilon/4 = \\
&= \|\bar{w} \otimes \bar{u} - v\|(q) + \varepsilon,
\end{aligned}
$$

что и требовалось установить для доказательства предложения. $\rhd$

3.2.2. *Следствие.* *Пусть $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ и $\mathscr{Z}$ — НБР над топологическим пространством Q, причем $\mathscr{Z}(q) \subset B\big(\mathscr{X}(q), \mathscr{Y}(q)\big)$ в каждой точке $q \in Q$. Предположим, что $C(Q, \mathscr{Z}) \subset \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. Тогда для* *всякого подмножества $D \subset Q$ имеет место включение $C(D, \mathscr{Z}) \subset$ $\mathrm{Hom}_D(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$.*

$\lhd$ Достаточно в предложении 3.2.1 положить $\mathscr{U} = C(Q, \mathscr{X})$ и $\mathscr{W} = C(Q, \mathscr{Z})$. $\rhd$

3.2.3. Следствие. *Для любых банаховых пространств X и Y имеет место включение $C\big(Q, B(X, Y)\big) \subset \mathrm{Hom}(X_Q, Y_Q)$.*

$\lhd$ Достаточно применить предложение 3.2.1, взяв в качестве $\mathscr{U}$ и $\mathscr{W}$ множества постоянных X- и $B(X, Y)$-значных функций. $\rhd$

Один из естественных вопросов, которые могут возникнуть при рассмотрении доказанного следствия, состоит в следующем: в каких случаях имеет место равенство $C\big(Q, B(X, Y)\big) = \mathrm{Hom}(X_Q, Y_Q)$? Этот вопрос исследован в параграфе 3.3.

3.2.4. Следствие. *Пусть $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ и $\mathscr{Z}$ — НБР над Q, причем $\mathscr{Z}(q) \subset B\big(\mathscr{X}(q), \mathscr{Y}(q)\big)$ в каждой точке $q \in Q$. Предположим, что расслоение $\mathscr{Z}$ имеет непрерывную структуру, содержащуюся в пространстве $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. Тогда $C(Q, \mathscr{Z}) \subset \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$.*

$\lhd$ Сформулированный результат можно вывести из предложения 3.2.1, положив $\mathscr{U} = C(Q, \mathscr{X})$ и взяв в качестве $\mathscr{W}$ непрерывную структуру $\mathscr{Z}$, содержащуюся в $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. $\rhd$

3.2.5. В дальнейшем в ряде доказательств будет использован следующий вспомогательный результат.

Лемма. *Пусть Q — вполне регулярное топологическое пространство. Предположим, что $q \in Q$ является предельной точкой счетного дискретного множества $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$, $q_i \neq q_j$ при $i \neq j$.*

(1) *Существует последовательность (W_n) открытых подмножеств Q, удовлетворяющая следующим условиям: $q_n \in W_n$, $\mathrm{cl}\, W_n \cap \mathrm{cl} \bigcup_{k \neq n} W_k = \varnothing$ и $q \notin \mathrm{cl}\, W_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

Если точка q обладает счетной базой окрестностей, то можно дополнительно потребовать, чтобы $\big(\mathrm{cl} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n\big) \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{cl}\, W_n = \{q\}$.

Рассмотрим последовательность функций $(f_n) \subset C(Q)$ таких, что $f_n : Q \to [0, 1]$ и $f_n \equiv 0$ на $Q \setminus W_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть, кроме того, (ε_n) — сходящаяся к нулю числовая последовательность.

(2) *Функция $f : Q \to [0, 1]$, определенная формулой*

$$f(p) = \begin{cases} \varepsilon_n f_n(p), & p \in W_n, \\ 0, & p \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n, \end{cases}$$

является непрерывной.

(3) *Пусть* $\mathscr{X}$ — НБР *над* Q. *Если* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(Q,\mathscr{X})$ *и число* M *таково, что* $\|u_n\| \leqslant M$ *на* W_n *для всех* n *начиная с некоторого номера, то сечение* u *над* Q, *определенное формулой*

$$u(p) = \begin{cases} \varepsilon_n f_n(p) u_n(p), & p \in W_n, \\ 0, & p \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n, \end{cases}$$

является непрерывным.

(4) *Пусть* $\mathscr{X}$ *и* $\mathscr{Y}$ — НБР *над* Q. *Если* $(H_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ *и число* K *таково, что* $\|H_n\| \leqslant K$ *на* W_n *для всех* n *начиная с некоторого номера, то отображение* $H : p \in Q \mapsto H(p) \in B\big(\mathscr{X}(p), \mathscr{Y}(p)\big)$, *определенное формулой*

$$H(p) = \begin{cases} \varepsilon_n f_n(p) H_n(p), & p \in W_n, \\ 0, & p \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n, \end{cases}$$

является гомоморфизмом из $\mathscr{X}$ *в* $\mathscr{Y}$.

(5) *Если* X — *топологическое векторное пространство и последовательность* $(x_n) \subset X$ *сходится к* $x \in X$, *то вектор-функция* $u : Q \to X$, *определенная формулой*

$$u(p) = \begin{cases} f_n(p) x_n + \big(1 - f_n(p)\big) x, & p \in W_n, \\ x, & p \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n, \end{cases}$$

непрерывна.

(6) *Если* X — *банахово пространство и последовательность функционалов* $(x'_n) \subset X'$ *слабо** *сходится к* $x' \in X'$, *то вектор-функция* $H : Q \to X'$, *определенная формулой*

$$H(p) = \begin{cases} f_n(p) x'_n + \big(1 - f_n(p)\big) x', & p \in W_n, \\ x', & p \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n, \end{cases}$$

является гомоморфизмом из X_Q *в* $\mathscr{R}$.

$\lhd$ (1): По индукции для каждого номера $n \in \mathbb{N}$ построим открытые множества $W_n, V_n \subset Q$. Поскольку пространство Q регулярно, точка q_1 и замкнутое множество $\mathrm{cl}\{q_k : k \geqslant 2\}$ разделяются открытыми окрестностями W_1 и V_1 соответственно, причем множества W_1 и V_1 можно подобрать так, чтобы их замыкания не пересекались.

Если W_k и V_k уже выбраны для всех $k \leqslant n$, то множества W_{n+1} и V_{n+1} подберем так, чтобы они содержались в V_n и их замыкания разделяли точку q_{n+1} и замкнутое множество $\mathrm{cl}\{q_k : k \geqslant n+2\}$. Легко видеть, что последовательность (W_n) удовлетворяет требуемым условиям.

Наконец, пусть (U_n) — счетная база открытых окрестностей точки q, причем $U_1 = Q$ и $U_n \supset U_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда при построении последовательностей множеств W_n можно выбирать $W_n \subset U_{k(n)}$, где $k(n) = \max\{k \in \mathbb{N} : q_n \in U_k\}$, что обеспечит требуемое соотношение $\big(\mathrm{cl} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n\big) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}\, W_n = \{q\}$.

(2): Очевидно, функция f является поточечной суммой равномерно сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n f_n$ и, следовательно, непрерывна.

Утверждения (3)–(5) доказываются совершенно аналогично утверждению (2) (при доказательстве (3) и (4) можно воспользоваться предложениями [3, 2.3.6] и [3, 2.4.11] соответственно).

(6): В силу (5) функция H слабо* непрерывна, а значит, $H \otimes u \in C(Q)$ для всех постоянных функций $u : Q \to X$. Остается заметить, что поточечная норма функции H ограничена по построению, и воспользоваться теоремой [3, 2.4.9]. $\triangleright$

3.2.6. *Следствие.* *Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ —* НБР *над вполне регулярным топологическим пространством Q. Предположим, что точка $q \in Q$ является пределом последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ попарно различных элементов Q, не равных q.*

(1) *Пусть $x_n \in \mathscr{X}(q_n)$ $(n \in \mathbb{N})$, $x \in \mathscr{X}(q)$ и в топологическом пространстве $Q \otimes \mathscr{X}$ (см. [3, 2.1.4]) имеет место сходимость $(q_n, x_n) \to (q, x)$ при $n \to \infty$ (если $x = 0$, то эта сходимость равносильна равенству $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$). Тогда существует ограниченное сечение $u \in C(Q, \mathscr{X})$, удовлетворяющее равенствам $u(q_n) = x_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $u(q) = x$.*

(2) *Пусть гомоморфизмы $H_n \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ $(n \in \mathbb{N})$ таковы, что последовательность $(\|\!|H_n|\!\|)_{n\in\mathbb{N}}$ равномерно сходится к нулю. Тогда существует ограниченный гомоморфизм $H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, удовлетворяющий равенствам $H(q_n) = H_n(q_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $H(q) = 0$.*

(3) *Пусть X — топологическое векторное пространство. Предположим, что последовательность $(x_n) \subset X$ сходится к $x \in X$. Тогда существует непрерывная вектор-функция $u : Q \to X$ такая, что $u(q_n) = x_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $u(q) = x$.*

(4) *Пусть X — банахово пространство. Предположим, что последовательность $(x'_n) \subset X'$ слабо* сходится к $x' \in X'$. Тогда существует гомоморфизм $H \in \operatorname{Hom}(X_Q, \mathscr{R})$ такой, что $H(q_n) = x'_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $H(q) = x'$.*

$\lhd$ В пояснении нуждается лишь утверждение (1). При $x = 0$ это утверждение является прямым следствием леммы 3.2.5 (3) и теоремы Дюпре (см. [3, 2.3.5]). Переходя к доказательству общего случая, вновь воспользуемся теоремой Дюпре и рассмотрим ограниченное сечение $v \in C(Q, \mathscr{X})$, принимающее значение x в точке q. Из предложения [3, 2.3.8] следует, что $\|x_n - v(q_n)\| \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда в силу справедливости доказываемого утверждения для случая $x = 0$ существует ограниченное сечение $w \in C(Q, \mathscr{X})$, удовлетворяющее равенствам $w(q_n) = x_n - v(q_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ и $w(q) = 0$. Остается положить $u = v + w$. $\rhd$

3.2.7. *Лемма.* *Пусть $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ — банаховы пространства, Q — вполне регулярное топологическое пространство и $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — разбиение Q такое, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество $U_1 \cup \cdots \cup U_n$ замкнуто. Тогда существует* НБР *$\mathscr{X}$ над Q, удовлетворяющее следующим условиям:*

- **(а)** *$\mathscr{X}\big|_{U_n} \equiv X_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$;*
- **(б)** *если последовательность функционалов $x'_n \in X'_n$ $(n \in \mathbb{N})$ такова, что x'_{n+1} продолжает x'_n и $\|x'_n\| \leqslant 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то отображение H, удовлетворяющее соотношениям $H\big|_{U_n} \equiv x'_n$ $(n \in \mathbb{N})$, принадлежит $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$.*

$\lhd$ Рассмотрим банахово расслоение $\mathscr{X}$, удовлетворяющее условию (а), и определим в нем непрерывную структуру следующим образом. Положим

$$\begin{aligned} &C_0 = C(Q);\\ &C_n = \big\{f \in C(Q) : f \equiv 0 \text{ на } U_1 \cup \cdots \cup U_n\big\}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Как легко видеть, множество сечений

$$\mathscr{C} = \big\{f_1 x_1 + \cdots + f_n x_n : \ f_i \in C_i, \ x_i \in X_i, \ i = 1, \ldots, n, \ n \in \mathbb{N}\big\}$$

расслоения $\mathscr{X}$ является подпространством пространства всех глобальных сечений $\mathscr{X}$. Кроме того, множество $\mathscr{C}$ послойно плотно в $\mathscr{X}$. Действительно, пусть $q \in Q$, $x \in \mathscr{X}(q)$, и пусть число $n \in \mathbb{N}$ таково, что $q \in U_n$. Поскольку пространство Q вполне регулярно, найдется функция $f \in C_{n-1}$ со значением $f(q) = 1$. Таким образом, сечение fx принадлежит $\mathscr{C}$ и проходит через x в точке q. Следовательно, $\mathscr{C}$ — непрерывная структура в $\mathscr{X}$ (в паре с которой мы будем рассматривать $\mathscr{X}$ как НБР).

Пусть отображение H удовлетворяет условию (б). Проверим, что $H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$. В силу теоремы [3, 2.4.9] для этого достаточно показать, что $H \otimes u \in C(Q)$ для всех $u \in \mathscr{C}$. Если $u = f_1 x_1 + \dots + f_n x_n \in \mathscr{C}$, $f_i \in C_i$, $x_i \in X_i$, $i = 1, \dots, n$, то для всех $q \in Q$ имеет место равенство $(H \otimes u)(q) = \langle u(q) | x'_n \rangle$. В свою очередь,

$$\langle u(q) | x'_n \rangle = f_1(q) \langle x_1 | x'_n \rangle + \dots + f_n(q) \langle x_n | x'_n \rangle.$$

Следовательно, функция $H \otimes u$ непрерывна. $\rhd$

3.2.8. Определение. Пусть $\mathscr{X}$ — произвольное банахово расслоение над множеством Q. *Размерностью* $\dim \mathscr{X}$ расслоения $\mathscr{X}$ назовем функцию, ставящую в соответствие каждой точке $q \in Q$ размерность $\dim \mathscr{X}(q)$ слоя $\mathscr{X}(q)$. Будем говорить, что $\mathscr{X}$ *имеет постоянную размерность* n, если $\dim \mathscr{X}(q) = n$ для всех $q \in Q$.

Лемма. *Пусть $\mathscr{X}$ —* НБР *с конечномерными слоями над произвольным топологическим пространством. Для каждого числа $n = 0, 1, 2, \dots$ рассмотрим следующие условия:*

(а) *множество $\{\dim \mathscr{X} = n\}$ открыто;*
(б) *множество $\{\dim \mathscr{X} < n\}$ открыто;*
(в) *множество $\{\dim \mathscr{X} \leqslant n\}$ открыто;*
(г) *множество $\{\dim \mathscr{X} > n\}$ замкнуто;*
(д) *множество $\{\dim \mathscr{X} \geqslant n\}$ замкнуто.*

Если какое-либо из перечисленных условий справедливо для всех $n = 0, 1, 2, \dots$, то для всех $n = 0, 1, 2, \dots$ справедливо каждое из этих условий. В этом случае все множества, упомянутые в условиях (а)–(д), являются открыто-замкнутыми.

$\lhd$ Достаточно заметить, что из [12, 18.1] следует открытость множеств вида $\{\dim \mathscr{X} > n\}$ и $\{\dim \mathscr{X} \geqslant n\}$, а стало быть, замкнутость множеств вида $\{\dim \mathscr{X} < n\}$ и $\{\dim \mathscr{X} \leqslant n\}$. $\rhd$

3.2.9. *Предложение.* (1) *Пусть Q — бэровское топологическое пространство. Тогда для любого* НБР *$\mathscr{X}$ над Q с конечномерными* *слоями объединение* $\bigcup_{n\geqslant 0} \operatorname{int}\{\dim \mathscr{X} = n\}$ *является открытым всюду плотным подмножеством* Q.

(2) *Если пространство* Q *вполне регулярно и для любого* НБР $\mathscr{X}$ *над* Q *с конечномерными слоями* $\bigcup_{n\geqslant 0} \operatorname{int}\operatorname{cl}\{\dim \mathscr{X} = n\}$ *всюду плотно в* Q, *то пространство* Q *является бэровским.*

$\triangleleft$ (1): Чтобы доказать, что указанное объединение является всюду плотным, достаточно для любого непустого открытого множества $U \subset Q$ найти непустое открытое подмножество $W \subset U$, на котором размерность $\mathscr{X}$ постоянна.

Ввиду бэровости пространства Q существует число $n \geqslant 0$ такое, что $V := \operatorname{int}\operatorname{cl}\{\dim \mathscr{X} = n\} \neq \varnothing$. Как несложно вывести из предложения [12, 18.1], множество $\{\dim \mathscr{X} \leqslant n\}$ является замкнутым, откуда следует, что $V \subset \operatorname{cl}\{\dim \mathscr{X} = n\} \subset \{\dim \mathscr{X} \leqslant n\}$, т. е. $\dim \mathscr{X} \leqslant n$ на V. Из включения $V \subset \operatorname{cl}\{\dim \mathscr{X} = n\}$ и открытости множества V следует существование некоторой точки $q \in V \cap \{\dim \mathscr{X} = n\}$. Поскольку множество $\{\dim \mathscr{X} \geqslant n\}$ является открытым, $\dim \mathscr{X} \geqslant n$ на некоторой открытой окрестности $W \subset V$ точки q. Таким образом, размерность $\mathscr{X}$ оказывается постоянной на непустом открытом множестве $W \subset V \subset U$.

(2): Над произвольным не бэровским вполне регулярным пространством Q построим НБР $\mathscr{X}$ с конечномерными слоями такое, что множество $\bigcup_{n\geqslant 0} \operatorname{int}\operatorname{cl}\{\dim \mathscr{X} = n\}$ не является всюду плотным.

Поскольку пространство Q не является бэровским, существуют непустое открытое множество $U \subset Q$ и покрытие $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ этого множества нигде не плотными подмножествами $V_n \subset U$. Положим $U_1 = Q \backslash U$ и $U_{n+1} = \operatorname{cl} V_n \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Понятно, что для каждого номера $n \in \mathbb{N}$ множество U_n нигде не плотно, объединение $U_1 \cup \cdots \cup U_n$ замкнуто и, кроме того, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = Q$.

Рассмотрим последовательность $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ конечномерных банаховых пространств со строго возрастающими размерностями: $\dim X_n < \dim X_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. По лемме 3.2.7 существует НБР $\mathscr{X}$ над Q такое, что $\mathscr{X}\big|_{U_n} \equiv X_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Как легко видеть,

$$\bigcup_{n\geqslant 0} \operatorname{int}\operatorname{cl}\{\dim \mathscr{X} = n\} \; = \; \bigcup_{m\geqslant 0} \operatorname{int}\operatorname{cl} U_m = \operatorname{int} U_1,$$

причем последнее множество не является всюду плотным. $\triangleright$

Следствие. *Если* $\mathscr{X}$ — НБР *с конечномерными слоями над бэровским пространством* Q, *то для любого числа* $m = 0, 1, 2, \ldots$ *имеет место равенство*

$$\operatorname{cl}\{\dim \mathscr{X} \geqslant m\} \ = \ \operatorname{cl} \bigcup_{n \geqslant m} \operatorname{int}\{\dim \mathscr{X} = n\}.$$

$\lhd$ Зафиксируем число $0 \leqslant m \in \mathbb{Z}$. Включение $\supset$ очевидно. Докажем обратное включение. Пусть $q \in Q$ и $\dim \mathscr{X}(q) \geqslant m$. В силу пункта (1) предложения 3.2.9 объединение $\bigcup_{n \geqslant 0} \operatorname{int}\{\dim \mathscr{X} = n\}$ всюду плотно в Q. Поскольку

$$\bigcup_{n<m} \operatorname{int}\{\dim \mathscr{X} = n\} \subset \{\dim \mathscr{X} < m\}$$

и последнее множество замкнуто, точка q принадлежит множеству $\operatorname{cl} \bigcup_{n \geqslant m} \operatorname{int}\{\dim \mathscr{X} = n\}$. Стало быть,

$$\{\dim \mathscr{X} \geqslant m\} \subset \operatorname{cl} \bigcup_{n \geqslant m} \operatorname{int}\{\dim \mathscr{X} = n\},$$

откуда и вытекает доказываемое включение. $\rhd$

3.2.10. Следующее утверждение отличается от [3, 2.4.7] лишь условиями, накладываемыми на топологическое пространство Q.

Теорема. *Пусть* $\mathscr{X}$ *и* $\mathscr{Y}$ — НБР *над вполне регулярным топологическим пространством* Q, *удовлетворяющим первой аксиоме счетности. Отображение* $H : q \in Q \mapsto H(q) \in B\big(\mathscr{X}(q), \mathscr{Y}(q)\big)$ *является гомоморфизмом из* $\mathscr{X}$ *в* $\mathscr{Y}$ *тогда и только тогда, когда* $H \otimes u \in C(Q, \mathscr{Y})$ *для всех* $u \in C(Q, \mathscr{X})$.

$\lhd$ Необходимость следует из теоремы [3, 2.4.4]. В силу той же теоремы для доказательства достаточности остается убедиться в локальной ограниченности отображения H. Допустим, что функция $\|\!|H|\!\|$ не ограничена в любой окрестности некоторой точки $q \in Q$. В таком случае благодаря первой аксиоме счетности найдется стремящаяся к q последовательность (q_n) попарно различных элементов Q такая, что $\|\!|H|\!\|(q_n) > (\|\!|H|\!\|(q) + n)^2$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Для каждого числа $n \in \mathbb{N}$ подберем элемент $x_n \in \mathscr{X}(q_n)$ так, чтобы

$\|H(q_n)x_n\| = \|H(q_n)\|$ и $\|x_n\| \leqslant 2$. По следствию 3.2.6 (1) существует ограниченное сечение $u \in C(Q, \mathscr{X})$, принимающее значения $u(q_n) = \frac{1}{n}x_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $u(q) = 0$. Тогда

$$\|H \otimes u\|(q_n) = \tfrac{1}{n}\|H(q_n)\| \geqslant \tfrac{1}{n}(\|H\|(q) + n)^2 > n,$$

что противоречит непрерывности сечения $H \otimes u$, так как $q_n \to q$ и $(H \otimes u)(q) = 0$. $\rhd$

Замечание. Как видно из приведенного доказательства и доказательства 3.2.5 (3), в последней теореме условие $H \otimes u \in C(Q, \mathscr{Y})$ для всех $u \in C(Q, \mathscr{X})$ можно заменить «более слабым» условием: $H \otimes u \in C(Q, \mathscr{Y})$ для всех элементов u некоторого $C^b(Q)$-подмодуля $C^b(Q, \mathscr{X})$, послойно плотного в $\mathscr{X}$ и замкнутого относительно равномерных пределов. Например, в качестве такого подмодуля можно взять само множество $C^b(Q, \mathscr{X})$.

3.2.11. Теорема 3.2.10 сформулирована для случая топологического пространства Q, удовлетворяющего первой аксиоме счетности. Наименьшим среди рассматриваемых в литературе классов топологических пространств, расширяющих класс пространств с первой аксиомой счетности, обычно является класс пространств Фреше — Урысона (см. [7, 1.6.14]). (Напомним, что топологическое пространство Q называется *пространством Фреше — Урысона*, если для любой точки $q \in Q$ и для любого подмножества $P \subset Q$ из включения $q \in \operatorname{cl} P$ следует существование последовательности элементов P, стремящейся к q.) Убедимся в том, что утверждение теоремы 3.2.10 не сохраняет силу для класса пространств Фреше — Урысона.

Пример. Мы построим топологическое пространство Q, обладающее следующими свойствами:

(а) Q — пространство Фреше — Урысона;
(б) пространство Q нормально;
(в) Q не удовлетворяет первой аксиоме счетности;
(г) Q не является локально псевдокомпактным;
(д) Q — бэровское пространство;
(е) существуют НБР $\mathscr{X}$ над Q с конечномерными слоями и отображение $H : q \in Q \mapsto H(q) \in \mathscr{X}(q)'$ такое, что $H \otimes u \in C(Q)$ для всех $u \in C(Q, \mathscr{X})$, но $H \notin \operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$;

(ж) для любого бесконечномерного банахова пространства X существует отображение $H : Q \to X'$ такое, что $H \otimes u \in C(Q)$ для всех $u \in C(Q, \mathscr{X})$, но $H \notin \operatorname{Hom}(X_Q, \mathscr{R})$.

Рассмотрим множество $Q = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cup \{\infty\}$, где $\infty \notin \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, и снабдим его топологией, объявив все элементы $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ изолированными точками и взяв в качестве окрестностей ∞ все подмножества $U \subset Q$, для которых $\infty \in U$ и

$$(\forall\, m \in \mathbb{N})\ (\exists\, n_m \in \mathbb{N})\ (\forall\, n \geqslant n_m)\ \ (m, n) \in U.$$

Понятно, что

$$C(Q) = \Big\{ f : Q \to \mathbb{R}\ :\ \lim_{n\to\infty} f\big((m,n)\big) = f(\infty) \text{ для всех } m \in \mathbb{N} \Big\}. \quad (1)$$

Проверим, что топологическое пространство Q обладает вышеперечисленными свойствами (а)–(ж).

(а): Достаточно рассмотреть подмножество $P \subset Q$, не содержащее последовательности, стремящейся к ∞, и показать, что $\infty \notin \operatorname{cl} P$. Очевидно, для любого $m \in \mathbb{N}$ найдется номер n_m такой, что $\big\{(m,n) \in P : n \in \mathbb{N}\big\} \subset \{(m,1), \dots, (m, n_m)\}$. Следовательно, точка ∞ отделяется от множества P своей окрестностью $\big\{(m,n) : m \in \mathbb{N},\ n > n_m\big\} \cup \{\infty\}$ и тем самым не принадлежит замыканию P.

(б), (д) Смżамечание 3.1.11.

Свойства (в) и (г) немедленно следуют из установленного ниже свойства (е) и теорем 3.2.10 и [3, 2.4.7] соответственно.

(е): Рассмотрим НБР $\mathscr{X}$ над Q такое, что $\mathscr{X}(q) = \mathbb{R}$ для всех $q \in Q \backslash \{\infty\}$, $\mathscr{X}(\infty) = \{0\}$ и $C(Q, \mathscr{X}) = \{u \in C(Q) : u(\infty) = 0\}$. Отображение H определим равенствами $H(\infty) = 0$ и $H\big((m,n)\big) = m$ для всех $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Легко видеть, что $H \otimes u \in C(Q)$ для произвольного сечения $u \in C(Q, \mathscr{X})$ $\big($см. (1)$\big)$. Тем не менее поточечная норма H не является локально ограниченной, а значит, $H \notin \operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ в силу теоремы [3, 2.4.4].

(ж): Согласно теореме Джозефсона — Ниссенцвейга [10, XII] на единичной сфере пространства X' существует слабо* сходящаяся к нулю последовательность (x'_n). Положим $H(\infty) = 0 \in X'$ и $H\big((m,n)\big) = m x'_n$ для всех $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Тогда $H \otimes u \in C(Q)$ для произвольного сечения $u \in C(Q, X_Q)$. Действительно, для каждого $m \in \mathbb{N}$ имеет место соотношение $\lim_{n\to\infty} (H \otimes u)\big((m,n)\big) = 0$, так как последовательность $\big(H\big((m,n)\big)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ слабо* сходится к нулю и $\|u\big((m,n)\big)-u(\infty)\|\to 0$ при $n\to\infty$. Остается заметить, что поточечная норма H не локально ограничена, и применить теорему [3, 2.4.4].

3.2.12. *Теорема.* *Пусть* НБР $\mathscr{X}$ *над топологическим пространством* Q *имеет постоянную конечную размерность,* $\mathscr{Y}$ *— произвольное* НБР *над* Q *и* $\mathscr{U}$ *— послойно плотное в* $\mathscr{X}$ *подмножество* $C(Q,\mathscr{X})$. *Если отображение* $H : p\in Q\mapsto H(p)\in B\big(\mathscr{X}(p),\mathscr{Y}(p)\big)$ *таково, что* $H\otimes u\in C(Q,\mathscr{Y})$ *для всех* $u\in\mathscr{U}$, *то* $H\in\operatorname{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ *и поточечная норма* $|\!|\!|H|\!|\!|$ *непрерывна.*

$\lhd$ Зафиксируем произвольную точку $q\in Q$ и докажем непрерывность $|\!|\!|H|\!|\!|$ в этой точке. Соотношение

$$\|H(p)\|=\sup\Big\{\Big\|H(p)\Big(\frac{1}{\max\{\|u(p)\|,1\}}\,u(p)\Big)\Big\| : u\in\mathscr{U}\Big\}=$$
$$=\sup\Big\{\Big(\frac{1}{|\!|\!|u|\!|\!|\vee 1}|\!|\!|H\otimes u|\!|\!|\Big)(p) : u\in\mathscr{U}\Big\},$$

справедливое для всех $p\in Q$, обеспечивает полунепрерывность снизу функции $|\!|\!|H|\!|\!|$. Остается доказать, что функция $|\!|\!|H|\!|\!|$ полунепрерывна сверху в точке q. Рассмотрим произвольное число $\varepsilon>0$ и покажем, что в некоторой окрестности U точки q имеет место неравенство $|\!|\!|H|\!|\!|\leqslant|\!|\!|H|\!|\!|(q)+\varepsilon$.

Из конечномерности слоя $\mathscr{X}(q)$ следует существование такого набора сечений $\mathbf{u}=(u_1,\dots,u_n)\subset\operatorname{lin}\mathscr{U}$, что значения $u_1(q),\dots,u_n(q)$ имеют единичную норму и образуют базис $\mathscr{X}(q)$.

Поскольку множество

$$\Lambda=\{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^n : |\!|\!|\boldsymbol{\lambda}\mathbf{u}|\!|\!|(q)=1\}$$

ограничено в $\mathbb{R}^n$, число $\|\Lambda\|_1:=\sup\{|\lambda_1|+\dots+|\lambda_n| : (\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\Lambda\}$ конечно. (Здесь и ниже запись $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{u}$ обозначает сумму $\lambda_1u_1+\dots+\lambda_nu_n$.)

Подберем такое число $\delta\in(0,1)$, что

$$\frac{1}{1-\delta}\big(\delta+|\!|\!|H|\!|\!|(q)\big)<|\!|\!|H|\!|\!|(q)+\varepsilon.$$

В силу [4, лемма 7] существует окрестность U_δ точки q, в которой $1-\delta\leqslant|\!|\!|\boldsymbol{\lambda}\mathbf{u}|\!|\!|\leqslant 1+\delta$ для всех $\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda$.

Без ограничения общности можно считать, что для любого элемента $p \in U_\delta$ набор $\mathbf{u}(p) = \big(u_1(p), \ldots, u_n(p)\big)$ линейно независим (см. [12, 18.1]). В частности, произвольный вектор $x \in \mathscr{X}(p)$ представляется в виде

$$x = \frac{\|x\|}{|\!|\!| \boldsymbol{\lambda}_x \mathbf{u} |\!|\!|(p)} (\boldsymbol{\lambda}_x \mathbf{u})(p)$$

при подходящем $\boldsymbol{\lambda}_x \in \Lambda$. Поскольку сечения $H \otimes u_i$, $i = 1, \ldots, n$, непрерывны, существует окрестность $U \subset U_\delta$ точки q такая, что

$$\|\Lambda\|_1 \max \big\{ \big| |\!|\!| H \otimes u_i |\!|\!|(p) - |\!|\!| H \otimes u_i |\!|\!|(q) \big| \ : \ i = 1, \ldots, n \big\} < \delta$$

для всех $p \in U$. В каждой точке $p \in U$ значение нормы $\|H(p)\|$ достигается на некотором векторе $x(p) \in \mathscr{X}(p)$, $\|x(p)\| = 1$. Поэтому

$$\begin{aligned}
|\!|\!| H |\!|\!|(p) = \|H(p)x(p)\| = \frac{1}{|\!|\!| \boldsymbol{\lambda}_{x(p)} \mathbf{u} |\!|\!|(p)} |\!|\!| H \otimes \big(\boldsymbol{\lambda}_{x(p)} \mathbf{u}\big) |\!|\!|(p) \leqslant \\
\leqslant \frac{1}{1-\delta} \Big(\Big| |\!|\!| H \otimes \big(\boldsymbol{\lambda}_{x(p)} \mathbf{u}\big) |\!|\!|(p) - |\!|\!| H \otimes \big(\boldsymbol{\lambda}_{x(p)} \mathbf{u}\big) |\!|\!|(q) \Big| + \\
+ |\!|\!| H \otimes \big(\boldsymbol{\lambda}_{x(p)} \mathbf{u}\big) |\!|\!|(q) \Big) \leqslant \\
\leqslant \frac{1}{1-\delta} \Big(\|\Lambda\|_1 \max \big\{ \big| |\!|\!| H \otimes u_i |\!|\!|(p) - |\!|\!| H \otimes u_i |\!|\!|(q) \big| : \\
: \ i = 1, \ldots, n \big\} + |\!|\!| H |\!|\!|(q) \Big) \leqslant \\
\leqslant \frac{1}{1-\delta} \big(\delta + |\!|\!| H |\!|\!|(q) \big) < |\!|\!| H |\!|\!|(q) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Включение $H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ теперь следует из непрерывности поточечной нормы H и теоремы [3, 2.4.4]. $\triangleright$

Следствие. *Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ —* НБР *над одним и тем же топологическим пространством. Если расслоение $\mathscr{X}$ имеет постоянную конечную размерность, то поточечная норма любого гомоморфизма из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$ непрерывна.*

3.2.13. Как показывают приведенные ниже примеры, требование постоянства размерности расслоения $\mathscr{X}$ в следствии 3.2.12 является существенным.

Для того, чтобы подчеркнуть разнообразие тех ситуаций, в которых для НБР $\mathscr{X}$ с конечномерными слоями возникает гомоморфизм $H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$, имеющий разрывную норму, мы приведем три различных примера. В первом случае размерность $\mathscr{X}$ равна нулю в единственной точке разрыва функции $\|H\|$ и единице во всех остальных точках, во втором случае размерность $\mathscr{X}$ принимает два различных (возможно, ненулевых) значения, в третьем — размерность $\mathscr{X}$ принимает бесконечное число различных значений, а функция $\|H\|$ разрывна в каждой точке.

Примеры. **(1)** Пусть $Q = [0,1]$. Положим $\mathscr{X}(q) = \mathbb{R}$, если $0 < q \leqslant 1$, и $\mathscr{X}(0) = \{0\}$. В качестве непрерывной структуры $\mathscr{X}$ возьмем множество $\{u \in C[0,1] : u(0) = 0\}$. Тогда поточечная норма гомоморфизма H, принимающего значение $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ на полуинтервале $(0,1]$, не является непрерывной в точке $0 \in Q$. Нетрудно проверить, что в данном случае $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ можно естественным образом отождествить с пространством определенных на отрезке $[0,1]$ вещественных функций, которые ограничены и непрерывны на полуинтервале $(0,1]$ и равны нулю в точке $0 \in Q$. Однако далеко не все такие функции непрерывны на $[0,1]$.

(2) Теперь рассмотрим вполне регулярное пространство Q с неизолированной точкой q. Положим $U_1 = \{q\}$, $U_2 = Q\backslash U_1$, $U_3 = U_4 = \cdots = \varnothing$. Пусть X — конечномерное банахово пространство, X_1 — его собственное подпространство и $X_2 = X_3 = \cdots = X$. Зафиксируем зануляющийся на X_1 функционал $x' \in X'$ такой, что $\|x'\| = 1$, и положим $x'_1 = 0$, $x'_2 = x'_3 = \cdots = x'$. Рассмотрим НБР $\mathscr{X}$, фигурирующее в лемме 3.2.7, и гомоморфизм H, удовлетворяющий условию (б) этой леммы. Ясно, что $\|H\|(q) = 0$ и $\|H\| \equiv 1$ вне $\{q\}$. Таким образом, функция $\|H\|$ не является непрерывной, так как точка q не изолирована.

(3) Пусть $Q = \mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел, снабженное естественной топологией, и пусть $n \mapsto q_n$ — произвольная биекция $\mathbb{N}$ на Q. Положим $U_n = \{q_n\}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и рассмотрим произвольную последовательность банаховых пространств $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ и функционалов x'_n, удовлетворяющих условию 3.2.7 (б). Потребуем дополнительно, чтобы размерности X_n и нормы x'_n строго возрастали. Пусть $\mathscr{X}$ — НБР, фигурирующее в лемме 3.2.7, и H — гомоморфизм, удовлетворяющий условию 3.2.7 (б). Ясно, что слои $\mathscr{X}$ имеют попарно различные размерности, а поточечная норма H разрывна в каждой точке Q.

Авторам неизвестно, является ли в общем случае постоянство размерности расслоения в некоторой окрестности точки q необходимым условием того, что поточечные нормы всех гомоморфизмов непрерывны в этой точке. Доказанная в следующем параграфе теорема 3.3.8 (2) дает положительный ответ на этот вопрос в некотором частном случае.

3.3. Операторное расслоение

В данном параграфе предложен ряд необходимых и достаточных условий существования банахова расслоения $B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, непрерывные сечения которого представляют собой гомоморфизмы из заданного НБР $\mathscr{X}$ в НБР $\mathscr{Y}$. Отдельно рассмотрены случаи произвольных расслоений $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$, расслоений над экстремально несвязными компактами, расслоений с конечномерными слоями, а также случай постоянных НБР и НБР, имеющих постоянную конечную размерность.

3.3.1. Пусть $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ и $\mathscr{Z}$ — НБР над топологическим пространством Q, причем в каждой точке $q\in Q$ слой $\mathscr{Z}(q)$ является банаховым подпространством $B\big(\mathscr{X}(q),\mathscr{Y}(q)\big)$.

Лемма. *Следующие утверждения равносильны:*

(а) $C(Q,\mathscr{Z})=\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$;

(б) $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ *является послойно плотным в* $\mathscr{Z}$ *подмножеством* $C(Q,\mathscr{Z})$ *(иными словами,* $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ *— непрерывная структура расслоения* $\mathscr{Z}$*).*

$\lhd$ Равносильность утверждений (а) и (б) немедленно вытекает из следствия 3.2.4. $\rhd$

Очевидно, расслоение $\mathscr{Z}$, удовлетворяющее условию (а) или (б) леммы, является единственным. Это позволяет нам ввести следующее понятие.

Определение. Банахово расслоение $\mathscr{Z}$, удовлетворяющее условию (а) или (б) леммы (если таковое существует), назовем *операторным расслоением* для НБР $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ и обозначим символом $B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$.

Данное выше определение операторного расслоения обобщает аналогичное понятие, введенное в [3, 3.2.3] для случая расслоений над экстремально несвязным компактом.

3.3.2. Следующий неоднократно используемый в настоящей работе результат дает основной критерий существования операторного расслоения.

Теорема. *Пусть* $\mathscr{X}$ *и* $\mathscr{Y}$ — НБР *над топологическим пространством* Q. *Для существования расслоения* $B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ *необходимо и достаточно, чтобы поточечная норма любого гомоморфизма из* $\mathscr{X}$ *в* $\mathscr{Y}$ *была непрерывна.*

$\lhd$ Необходимость приведенного условия очевидна. Достаточность можно обосновать, используя определение 3.3.1 (б) операторного расслоения. В каждой точке $q \in Q$ слой $B(\mathscr{X},\mathscr{Y})(q)$ является замыканием подпространства $\{H(q) : H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\}$ в пространстве $B\big(\mathscr{X}(q),\mathscr{Y}(q)\big)$. $\rhd$

Согласно следствию [3, 3.2.2] в случае просторного НБР $\mathscr{X}$ над экстремально несвязным компактом Q поточечная норма любого гомоморфизма из $\mathscr{X}$ в произвольное НБР $\mathscr{Y}$ над Q непрерывна. На основе упомянутого следствия доказана теорема [3, 3.2.3], которая утверждает, что в указанном случае существует операторное расслоение $B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$. Это позволяет рассматривать установленный нами критерий 3.3.2 как обобщение теоремы [3, 3.2.3] на случай произвольного НБР над произвольным топологическим пространством.

3.3.3. Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — НБР над экстремально несвязным компактом Q, причем расслоение $\mathscr{Y}$ просторно. Пусть $\overline{\mathscr{X}}$ — просторная оболочка расслоения $\mathscr{X}$. Для произвольного сечения $w \in C\big(Q, B(\overline{\mathscr{X}},\mathscr{Y})\big)$ обозначим символом $w|_{\mathscr{X}}$ поточечное сужение w на слои $\mathscr{X}$, т. е. $\big(w|_{\mathscr{X}}\big)(q) = w(q)|_{\mathscr{X}(q)}$ для всех $q \in Q$.

Лемма. *Отображение* $w \mapsto w|_{\mathscr{X}}$ *является линейной биекцией* $C\big(Q, B(\overline{\mathscr{X}},\mathscr{Y})\big)$ на $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$. *При этом* $\|w|_{\mathscr{X}}\| \leqslant \|w\|$ *и функции* $\|w|_{\mathscr{X}}\|$ *и* $\|w\|$ *совпадают на котощем подмножестве* Q.

$\lhd$ Прежде всего, заметим, что $w|_{\mathscr{X}} \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ для любого сечения $w \in C\big(Q, B(\overline{\mathscr{X}},\mathscr{Y})\big)$. Это следует из теоремы [3, 2.4.7] и соотношения $(w|_{\mathscr{X}}) \otimes u = w \otimes u \in C(Q,\mathscr{Y})$, справедливого для всех $u \in C(Q,\mathscr{X})$.

Как следует из леммы [3, 3.2.10], для любого гомоморфизма $H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ существует единственное сечение $\overline{H} \in C\big(Q, B(\overline{\mathscr{X}},\mathscr{Y})\big)$ такое, что значения $\overline{H}$ продолжают соответствующие значения H;

при этом $\|H\| \leqslant \|\overline{H}\|$ и функции $\|H\|$ и $\|\overline{H}\|$ совпадают на котощем подмножестве Q.

Для завершения доказательства леммы остается заметить, что отображение $w \mapsto w|_{\mathscr{X}}$ является обратным к отображению $H \mapsto \overline{H}$. $\triangleright$

3.3.4. Предложение. *Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — НБР над экстремально несвязным компактом Q и $\overline{\mathscr{X}}$ — просторная оболочка расслоения $\mathscr{X}$. Предположим, что расслоение $\mathscr{Y}$ просторно и существует банахово расслоение $B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$. Тогда НБР $B(\overline{\mathscr{X}},\mathscr{Y})$ и $B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ изометричны, причем изометрией первого расслоения на второе служит отображение, сопоставляющее каждой точке $q \in Q$ оператор сужения $\big(T \mapsto T|_{\mathscr{X}(q)}\big) : B(\overline{\mathscr{X}},\mathscr{Y})(q) \to B(\mathscr{X},\mathscr{Y})(q)$.*

$\triangleleft$ Обозначим через I отображение, фигурирующее в формулировке предложения, т. е. $I(q)T = T|_{\mathscr{X}(q)}$ для всех $q \in Q$. Для всякого сечения $w \in C\big(Q, B(\mathscr{X},\mathscr{Y})\big)$ справедливо равенство $I \otimes w = w|_{\mathscr{X}}$; с другой стороны, согласно лемме 3.3.3 имеет место включение $w|_{\mathscr{X}} \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$. Поэтому в силу равенства $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{Y}) = C\big(Q, B(\mathscr{X},\mathscr{Y})\big)$ и теоремы [3, 2.4.7] отображение I является гомоморфизмом из $B(\overline{\mathscr{X}},\mathscr{Y})$ в $B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$. Таким образом, для доказательства предложения остается зафиксировать произвольную точку $q \in Q$ и показать, что оператор $I(q) : B(\overline{\mathscr{X}},\mathscr{Y})(q) \to B\big(\mathscr{X},\mathscr{Y}\big)(q)$ сохраняет норму и является сюръективным.

Рассмотрим произвольный элемент $T \in B(\overline{\mathscr{X}},\mathscr{Y})(q)$. По теореме Дюпре (см., например, [3, 2.3.5]) существует $w \in C\big(Q, B(\overline{\mathscr{X}},\mathscr{Y})\big)$ со значением $w(q) = T$. Функции $\|w\|$ и $\|I \otimes w\|$ непрерывны и в силу леммы 3.3.3 совпадают на котощем подмножестве Q, а значит, совпадают всюду на Q. Следовательно, $\|I(q)T\| = \|I \otimes w\|(q) = \|w\|(q) = \|T\|$. Сюръективность же оператора $I(q)$ вытекает из сюръективности отображения $(w \mapsto I \otimes w) : C\big(Q, B(\overline{\mathscr{X}},\mathscr{Y})\big) \to C\big(Q, B(\mathscr{X},\mathscr{Y})\big)$ (гарантируемой леммой 3.3.3) и теоремы Дюпре для $B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$. $\triangleright$

3.3.5. Теорема. *Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — НБР над экстремально несвязным компактом Q, причем расслоение $\mathscr{Y}$ просторно. Расслоение $B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ существует тогда и только тогда, когда $\|T|_{\mathscr{X}(q)}\| = \|T\|$ для любой точки $q \in Q$ и любого оператора $T \in B(\overline{\mathscr{X}},\mathscr{Y})(q)$, где $\overline{\mathscr{X}}$ — просторная оболочка расслоения $\mathscr{X}$.*

$\triangleleft$ Необходимость вытекает из предложения 3.3.4. Докажем достаточность. В силу теоремы 3.3.2 для доказательства существования расслоения $B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ достаточно рассмотреть произвольный гомоморфизм $H \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ и показать непрерывность его поточечной нормы. Согласно лемме 3.3.3 существует такое сечение $w \in C\big(Q, B(\overline{\mathscr{X}},\mathscr{Y})\big)$, что $H = w|_{\mathscr{X}}$. Из рассматриваемого нами условия вытекает, что для каждой точки $q \in Q$ справедливы равенства $\|H(q)\| = \|w(q)|_{\mathscr{X}(q)}\| = \|w(q)\|$, т. е. $\|\!|H|\!\| = \|\!|w|\!\|$, откуда $\|\!|H|\!\| \in C(Q)$. $\triangleright$

3.3.6. Предложение. *Если* НБР $\mathscr{X}$ *над топологическим пространством* Q *имеет постоянную конечную размерность, то для любого* НБР $\mathscr{Y}$ *над* Q *существует расслоение* $B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$.

$\triangleleft$ Утверждение предложения вытекает из следствия 3.2.12 и теоремы 3.3.2. $\triangleright$

Примеры 3.2.13 с учетом 3.3.2 показывают, что требование постоянства размерности расслоения в последнем предложении является существенным.

3.3.7. Предложение. *Предположим, что* НБР $\mathscr{X}$ *над вполне регулярным топологическим пространством* Q *имеет постоянную конечную размерность. Тогда для всякого* НБР $\mathscr{Y}$ *над* Q *в каждой точке* $q \in Q$ *имеет место равенство* $B(\mathscr{X},\mathscr{Y})(q) = B\big(\mathscr{X}(q),\mathscr{Y}(q)\big)$. *В частности, если постоянную конечную размерность имеют как* $\mathscr{X}$, *так и* $\mathscr{Y}$, *то этим же свойством обладает* $B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$.

$\triangleleft$ Зафиксируем точку $q \in Q$ и линейный оператор $S \in B\big(\mathscr{X}(q), \mathscr{Y}(q)\big)$. Построим такой гомоморфизм $H \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, что $H(q) = S$; тем самым теорема будет доказана.

Сначала заметим, что если W — замкнутая окрестность q, сечение w над W непрерывно (соответственно локально ограничено) и функция $f \in C(Q)$ зануляется вне W, то глобальное сечение $f * w$, определяемое формулой

$$(f * w)(p) = \begin{cases} f(p)w(p), & p \in W, \\ 0, & p \notin W, \end{cases}$$

непрерывно (соответственно локально ограничено). Поэтому в силу теоремы [3, 2.4.4] для гомоморфизма $G \in \operatorname{Hom}_W(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ отображение

$$H = f * G : p \in Q \mapsto H(p) \in B\big(\mathscr{X}(p), \mathscr{Y}(p)\big)$$

является гомоморфизмом из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$, так как поточечная норма H локально ограничена и $H \otimes u = f * (G \otimes u) \in C(Q, \mathscr{Y})$ для всех $u \in C(Q, \mathscr{X})$.

Принимая во внимание тот факт, что пространство Q вполне регулярно, можно потребовать, чтобы $f(q) = 1$. Тогда $H(q) = G(q)$. Таким образом, для доказательства нашего утверждения достаточно на какой-нибудь замкнутой окрестности W точки q определить гомоморфизм $G \in \mathrm{Hom}_W(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, принимающий значение S в точке q.

В силу [4, следствие 8] найдется такой линейный оператор $T : \mathscr{X}(q) \to C(Q, \mathscr{X})$, что для всех $x \in \mathscr{X}(q)$ выполнено неравенство $\|x\| \leqslant |\!|\!| Tx |\!|\!|$ на некоторой окрестности U точки q. Поскольку для любой точки $p \in U$ оператор $T_p : x \in \mathscr{X}(q) \mapsto (Tx)(p) \in \mathscr{X}(p)$ обратим и размерность расслоения $\mathscr{X}$ постоянна, образ T послойно плотен в $\mathscr{X}$ над U. Согласно теореме Дюпре (см. [3, 2.3.5]) существует набор сечений $\mathscr{V} \subset C(Q, \mathscr{Y})$ такой, что $\{v(q) : v \in \mathscr{V}\}$ — базис подпространства $\mathrm{im}\, S \subset \mathscr{Y}(q)$ на единичной сфере. Теперь, привлекая [4, лемма 7], рассмотрим такой линейный оператор $R : \mathrm{im}\, S \to C(Q, \mathscr{Y})$, что его образ совпадает с линейной оболочкой $\mathscr{V}$ и $|\!|\!| Ry |\!|\!| \leqslant 2\, \|y\|$ для всех $y \in \mathrm{im}\, S$ на некоторой окрестности V точки q. Аналогично тому, как были определены операторы T_p, для каждой точки $r \in V$ введем в рассмотрение линейный оператор $R_r : \mathrm{im}\, S \to \mathscr{Y}(p)$. Понятно, что оператор R_q обратим и $\|R_r\| \leqslant 2$ для всех $r \in V$. Вместе с тем для всех $p \in U$ имеет место оценка $\|T_p^{-1}\| \leqslant 1$.

Наконец, рассмотрим замкнутую окрестность $W \subset U \cap V$ точки q и с каждым элементом $p \in W$ свяжем линейный оператор

$$G(p) = R_p\, R_q^{-1} S\, T_q\, T_p^{-1} : \mathscr{X}(p) \to \mathscr{Y}(p).$$

В силу теоремы [3, 2.4.9] отображение

$$G : p \in W \mapsto G(p) \in B\big(\mathscr{X}(p), \mathscr{Y}(p)\big)$$

представляет собой искомый гомоморфизм, так как $G(q) = S$, $|\!|\!| G |\!|\!| \leqslant 2\, \|R_q^{-1}\|\, \|S\|\, \|T_q\|$ и $G \otimes u \in C(W, \mathscr{Y})$ для всех $u \in \mathrm{im}\, T$. $\triangleright$

3.3.8. Утверждение (1) следующей теоремы при $\mathscr{Y} = \mathscr{R}$ содержит частичный ответ на вопрос Г. Герца [12, Section 19, Problem 1, с. 231].

Теорема. *Пусть $\mathscr{X}$ — это* НБР *с конечномерными слоями над бэровским вполне регулярным топологическим пространством Q и пусть $\mathscr{Y}$ —* НБР *над Q.*

(1) *Для любой точки q открытого всюду плотного в Q множества $\bigcup_{n\geqslant 0} \operatorname{int}\{\dim \mathscr{X} = n\}$ (смпредложение 3.2.9) и любого оператора $T \in B\big(\mathscr{X}(q), \mathscr{Y}(q)\big)$ существует гомоморфизм $H \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ такой, что $H(q) = T$ и $\|H\| \leqslant \|T\|$.*

(2) *Предположим, что точка $q \in Q$ обладает счетной базой окрестностей и расслоение $\mathscr{Y}$ имеет ненулевые слои на всюду плотном множестве. Поточечные нормы всех гомоморфизмов из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$ непрерывны в точке q в том и только в том случае, если размерность $\mathscr{X}$ постоянна в некоторой окрестности q.*

$\lhd$ (1): Пусть $0 \leqslant n \in \mathbb{Z}$, $q \in \operatorname{int}\{\dim \mathscr{X} = n\}$, $U \subset \operatorname{int}\{\dim \mathscr{X} = n\}$ — замкнутая окрестность точки q и $T \in B\big(\mathscr{X}(q), \mathscr{Y}(q)\big)$. Как легко вывести из предложения 3.3.7 и леммы [3, 2.3.9], существует гомоморфизм $G \in \operatorname{Hom}_U(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ такой, что $G(q) = T$ и $\|G\| \leqslant \|T\|$. Поскольку пространство Q вполне регулярно, найдется непрерывная функция $f : Q \to [0, 1]$, удовлетворяющая соотношениям $f(q) = 1$ и $f \equiv 0$ на $Q \backslash U$. Остается положить $H = f{*}G$ (смдоказательство 3.3.7).

(2): Достаточность вытекает из теоремы 3.2.12. Для доказательства необходимости предположим, что в любой окрестности q встречаются точки, в которых размерность $\mathscr{X}$ больше $\dim \mathscr{X}(q) =: m$, и построим гомоморфизм $H \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ с разрывной в q поточечной нормой.

В силу следствия 3.2.9 точка q лежит в замыкании открытого множества $\bigcup_{n>m} \operatorname{int}\{\dim \mathscr{X} = n\}$, и, кроме того, всюду плотное по нашим условиям множество $\{\dim \mathscr{Y} > 0\}$ является открытым. Поскольку точка q обладает счетной базой окрестностей, можно выбрать стремящуюся к q последовательность (q_n) попарно различных элементов пересечения $\bigcup_{n>m} \operatorname{int}\{\dim \mathscr{X} = n\} \cap \{\dim \mathscr{Y} > 0\}$.

Вследствие теоремы Дюпре [3, 2.3.5] существуют ограниченные сечения $u_1, \ldots, u_m \in C(Q, \mathscr{X})$ с линейно независимыми значениями $u_1(q), \ldots, u_m(q)$. Как видно из предложения [12, 18.1], эти сечения поточечно линейно независимы на некоторой открытой окрестности U точки q. Без ограничения общности будем считать, что $q_n \in U$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ неравенство $\dim \mathscr{X}(q_n) > m$ и невырожденность слоя $\mathscr{Y}(q_n)$ позволяют найти оператор $T_n \in B\big(\mathscr{X}(q_n), \mathscr{Y}(q_n)\big)$, что $T_n \equiv 0$ на $\operatorname{lin}\{u_1(q_n), \ldots, u_m(q_m)\}$ и $\|T_n\| = 1$. В силу (1) для каждого номера $n \in \mathbb{N}$ существует гомоморфизм $H_n \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, удовлетворяющий соотношениям $H_n(q_n) = T_n$ и $\|H_n\| \leqslant 1$.

Обозначим через $\mathscr{X}_0$ НБР над U, для которого линейная оболочка $\operatorname{lin}\{u_1|_U, \ldots, u_m|_U\}$ является непрерывной структурой, и положим $\mathscr{Y}_0 = \mathscr{Y}\big|_U$. По теореме 3.2.12 для каждого номера $n \in \mathbb{N}$ отображение $p \in U \mapsto H_n(p)\big|_{\operatorname{lin}\{u_1(p), \ldots, u_m(p)\}} \in B\big(\mathscr{X}_0(p), \mathscr{Y}_0(p)\big)$ имеет непрерывную поточечную норму; поэтому можно подобрать открытую окрестность $V_n \subset U$ точки q_n такую, что $\|H_n(p)\big|_{\operatorname{lin}\{u_1(p), \ldots, u_m(p)\}}\| < 1/n$ для всех $p \in V_n$.

Согласно лемме 3.2.5 (1) существует последовательность (W_n) открытых подмножеств Q, удовлетворяющая следующим условиям: $\operatorname{cl} W_n \cap \operatorname{cl} \bigcup_{k \neq n} W_k = \varnothing$, $q_n \in W_n$ и $\big(\operatorname{cl} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n\big) \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{cl} W_n = \{q\}$. Дополнительно потребуем, чтобы $W_n \subset V_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Кроме того, рассмотрим последовательность непрерывных функций $f_n : Q \to [0, 1]$ таких, что $f_n(q_n) = 1$ и $f_n \equiv 0$ на $Q \setminus W_n$. Для каждой точки $p \in Q$ положим

$$H(p) = \begin{cases} f_n(p) H_n(p), & p \in W_n, \\ 0, & p \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n. \end{cases}$$

Очевидно, $\|H\| \leqslant 1$. Поскольку пространство Q вполне регулярно, множество $N_q = \{u \in C(Q, \mathscr{X}) : u(q) = 0\}$ дополняет линейную оболочку $\operatorname{lin}\{u_1, \ldots, u_m\}$ до послойно плотного в $\mathscr{X}$ подмножества $C(Q, \mathscr{X})$. Покажем, что H является гомоморфизмом из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$, применив к этому подмножеству теорему [3, 2.4.9].

Если $u \in \operatorname{lin}\{u_1, \ldots, u_m\}$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n H_n \otimes u$ сходится равномерно, так как его члены имеют попарно непересекающиеся носители, поточечная норма u ограничена и $\|f_n H_n \otimes u\| \leqslant \frac{1}{n} \|u\|$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, по теореме [3, 2.3.6] сумма $H \otimes u$ указанного ряда является непрерывным сечением.

Пусть теперь $u \in N_q$. Сечение $H \otimes u$ непрерывно на каждом множестве $\operatorname{cl} W_n$, $n \in \mathbb{N}$, поскольку $\operatorname{cl} W_n$ содержится в открытом множестве $Q \setminus \operatorname{cl} \bigcup_{k \neq n} W_k$ и $H \otimes u$ совпадает на этом множестве с непрерывным сечением $f_n H_n \otimes u$. Если точка p принадлежит $\big(\operatorname{cl} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n\big) \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{cl} W_n$, то $p = q$ и сечение $H \otimes u$ непрерывно в этой точке, так как $\|H\| \leqslant 1$, а функция $\|u\|$ непрерывна и равна нулю в q. Наконец, множество $Q \setminus \operatorname{cl} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n$ является открытым, и на нем $\|H \otimes u\| \equiv 0$.

Итак, $H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. Вместе с тем $\|H\|(q) = 0$, $\|H\|(q_n) = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $q_n \to q$; следовательно, функция $\|H\|$ разрывна в точке q. $\triangleright$

3.3.9. *Теорема.* *Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ —* НБР *над бэровским вполне регулярным топологическим пространством Q, удовлетворяющим первой аксиоме счетности. Предположим, что все слои $\mathscr{X}$ конечномерны, а расслоение $\mathscr{Y}$ имеет ненулевые слои на всюду плотном подмножестве Q. Операторное расслоение $B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ существует в том и только в том случае, если для каждого $n = 0, 1, 2, \ldots$ множество $\{\dim \mathscr{X} = n\}$ является открыто-замкнутым.*

$\triangleleft$ Достаточность указанного условия для существования расслоения $B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ вытекает из предложения 3.3.6.

Чтобы доказать необходимость, заметим, что в силу теоремы 3.3.2 и утверждения (2) теоремы 3.3.8 существование расслоения $B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ влечет открытость множеств $\{\dim \mathscr{X} = n\}$ для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$, и воспользуемся леммой 3.2.8. $\triangleright$

3.3.10. Из теоремы 3.3.9 вытекает следующее утверждение.

Следствие. *Пусть $\mathscr{X}$ —* НБР *с конечномерными слоями над связным бэровским вполне регулярным топологическим пространством Q, удовлетворяющим первой аксиоме счетности, и $\mathscr{Y}$ —* НБР *над Q с ненулевыми слоями на всюду плотном подмножестве Q. Тогда существование расслоения $B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ равносильно постоянству размерности $\mathscr{X}$.*

Заметим, что пространство Q, удовлетворяющее условиям следствия, не обязано быть метризуемым. Несложно убедиться в том, что таким неметризуемым пространством является, например, плоскость Немыцкого (см. [7, 1.2.4, 1.4.5, 2.1.10]).

3.3.11. До конца этого параграфа мы главным образом рассматриваем постоянные НБР. Для таких НБР проблема существования расслоения $B(X_Q, Y_Q)$ тесно связана с вопросом о строгости включения $C\big(Q, B(X, Y)\big) \subset \mathrm{Hom}(X_Q, Y_Q)$, затронутым в 3.2.3.

Предложение. *Для банаховых пространств X и Y расслоение $B(X_Q, Y_Q)$ существует тогда и только тогда, когда $C\big(Q, B(X, Y)\big) = \mathrm{Hom}(X_Q, Y_Q)$. Кроме того, если расслоение $B(X_Q, Y_Q)$ существует, то оно равно постоянному* НБР *со слоем $B(X, Y)$.*

◁ Докажем сначала второе утверждение.

Пусть расслоение $B(X_Q, Y_Q)$ существует. Соотношения

$$B(X_Q, Y_Q)(q) \subset B\big(X_Q(q), Y_Q(q)\big) = B(X, Y),$$

справедливые в любой точке $q \in Q$, и

$$C\big(Q, B(X, Y)\big) \subset \operatorname{Hom}(X_Q, Y_Q) = C\big(Q, B(X_Q, Y_Q)\big)$$

позволяют заключить, что каждый слой расслоения $B(X_Q, Y_Q)$ совпадает с пространством $B(X, Y)$. Кроме того, $C\big(Q, B(X, Y)\big)$ является непрерывной структурой как в $B(X, Y)_Q$, так и в $B(X_Q, Y_Q)$, а значит, эти два НБР равны (см. [3, 2.1.8, 2.1.9]). Отсюда сразу следует, что равенство $C\big(Q, B(X, Y)\big) = \operatorname{Hom}(X_Q, Y_Q)$ необходимо для существования $B(X_Q, Y_Q)$. Достаточность очевидна ввиду теоремы 3.3.2. ▷

3.3.12. Следствие. *Пусть X и Y — банаховы пространства, причем пространство X конечномерно. Тогда существует расслоение $B(X_Q, Y_Q)$ и, кроме того, справедливы равенства $B(X_Q, Y_Q) = B(X, Y)_Q$ и $\operatorname{Hom}(X_Q, Y_Q) = C\big(Q, B(X, Y)\big)$.*

◁ Утверждение следствия вытекает из 3.3.2 и 3.3.11. ▷

3.3.13. Теорема. *Пусть X — бесконечномерное банахово пространство и Q — топологическое пространство. Предположим, что для некоторого НБР $\mathscr{Y}$ над Q с ненулевыми слоями существует расслоение $B(X_Q, \mathscr{Y})$. Тогда пространство Q функционально дискретно.*

◁ Допустим, что в $C(Q)$ имеется не локально постоянная функция, и построим гомоморфизм H из X_Q в $\mathscr{Y}$ с разрывной поточечной нормой. Тем самым в силу критерия 3.3.2 теорема будет доказана.

Согласно лемме 3.1.15 существует слабо* непрерывная вектор-функция $w : Q \to X'$, поточечная норма которой ограничена и разрывна. Пусть q — точка разрыва функции $\|w\|$. Рассмотрим сечение $v \in C(Q, \mathscr{Y})$ с ненулевым значением $v(q)$ и определим отображение $H : q \in Q \mapsto H(q) \in B\big(X, \mathscr{Y}(q)\big)$, положив $H(q) : x \in X \mapsto \langle x \mid w(q)\rangle v(q)$ для всех $q \in Q$. Для любого постоянного сечения $u \in C(Q, X_Q)$ имеет место равенство $H \otimes u = \langle u|w\rangle v \in C(Q, \mathscr{Y})$. Кроме того, $\|H\| = \|w\|\|v\|$. Из ограниченности $\|w\|$ следует локальная ограниченность $\|H\|$. Таким образом, $H \in \operatorname{Hom}(X_Q, \mathscr{Y})$ по теореме [3, 2.4.9]. Наконец, поскольку функция $\|w\|$ разрывна в точке q, а функция $\|v\|$ непрерывна и отлична от нуля в этой точке, $\|H\| = \|w\|\|v\| \notin C(Q)$. $\triangleright$

Ниже (см˙ 3.3.16) будет показано, что в последней теореме необходимое условие существования операторного расслоения $B(X_Q, \mathscr{Y})$ (а именно, функциональная дискретность Q) является достаточным в том случае, когда банахово пространство X сепарабельно. В общем же случае рассматриваемое условие достаточным не является (см˙ предложение 3.3.17 применительно к банахову пространству X' и расслоению $\mathscr{Y} = \mathscr{R}$).

3.3.14. *Предложение.* *Пусть X и Y — банаховы пространства, $Y \neq \{0\}$, и пусть Q — топологическое пространство, не являющееся функционально дискретным. Следующие утверждения равносильны:*

(а) *существует банахово расслоение $B(X_Q, Y_Q)$;*
(б) *$B(X,Y)_Q = B(X_Q, Y_Q)$;*
(в) *$\mathrm{Hom}(X_Q, Y_Q) = C\big(Q, B(X,Y)\big)$;*
(г) *банахово пространство X конечномерно.*

$\triangleleft$ Равносильность (а), (б) и (в) доказана в 3.3.11, (г) следует из (а) в силу 3.3.13, (а) вытекает из (г) в силу 3.3.12. $\triangleright$

3.3.15. *Предложение.* *Пусть $\mathscr{X}$ —* НБР *над функционально дискретным топологическим пространством Q. Предположим, что $C(Q, \mathscr{X})$ содержит счетное послойно плотное в $\mathscr{X}$ подмножество. Тогда для любого* НБР *$\mathscr{Y}$ над Q существует расслоение $B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$.*

$\triangleleft$ Пусть $\mathscr{U} \subset C(Q, \mathscr{X})$ — счетное послойно плотное в $\mathscr{X}$ множество. Рассмотрим произвольные НБР $\mathscr{Y}$ над Q, гомоморфизм $H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, точку $q \in Q$ и докажем непрерывность в q поточечной нормы H. Поскольку пространство Q функционально дискретно, найдется окрестность U точки q, на которой постоянны все функции $\|u\|$ и $\|H \otimes u\|$, $u \in \mathscr{U}$. Ввиду послойной плотности в $\mathscr{X}$ множества $\mathscr{U}$ имеет место равенство $\|H\|(p) = \sup\{\|H \otimes u\|(p) : u \in \mathscr{U},\ \|u\|(p) \leqslant 1\}$ для любой точки $p \in Q$, откуда следует, что функция $\|H\|$ постоянна на U и, в частности, непрерывна в точке q. Остается сослаться на теорему 3.3.2. $\triangleright$

3.3.16. *Следствие.* *Пусть Q — произвольное топологическое* *пространство и X — сепарабельное бесконечномерное банахово пространство. Следующие утверждения равносильны:*

(а) *для любого* НБР $\mathscr{Y}$ *над* Q *существует расслоение* $B(X_Q,\mathscr{Y})$*;*
(б) *существует расслоение* $B(X_Q,\mathscr{R})$*;*
(в) *пространство* Q *функционально дискретно.*

$\lhd$ Импликация (а)$\to$(б) очевидна, (в) следует из (б) согласно 3.3.13, (а) вытекает из (в) в силу 3.3.15. $\rhd$

3.3.17. *Предложение.* *Пусть X — несепарабельное банахово пространство. Существует функционально дискретное нормальное топологическое пространство Q такое, что для любого* НБР $\mathscr{Y}$ *над* Q *с ненулевыми слоями не существует расслоения* $B(X_Q,\mathscr{Y})$.

$\lhd$ Обозначим через $\aleph$ множество всех счетных подмножеств пространства X, упорядоченное по включению. Понятно, что счетные подмножества $\aleph$ обладают верхними гранями и $\aleph$ не имеет наибольшего элемента.

Как показано в 3.1.13, пространство $Q := \aleph^{\bullet}$ нормально и функционально дискретно.

Пусть $\mathscr{Y}$ — произвольное НБР над Q с ненулевыми слоями. Определим гомоморфизм $H \in \operatorname{Hom}(X_Q,\mathscr{Y})$ с разрывной поточечной нормой. Для этого рассмотрим сечение $v \in C(Q,\mathscr{Y})$, принимающее ненулевое значение в точке $\infty \in Q$. Поскольку пространство X не является сепарабельным, для любого элемента $\alpha \in \aleph$ существует функционал $x'_\alpha \in X'$ такой, что $x'_\alpha \equiv 0$ на $\operatorname{cl}\operatorname{lin}\alpha$ и $\|x'_\alpha\| = 1$. Пусть $H(\alpha) = v(\alpha) \otimes x'_\alpha$ для всех $\alpha \in \aleph$ и $H(\infty) = 0$. Тогда по теореме [3, 2.4.9] отображение H является гомоморфизмом, так как для любого постоянного сечения $u_x \equiv x$, $x \in X$, сечение $H \otimes u_x$ принимает нулевые значения на интервале $(\{x\},\infty]$, а значит, непрерывно. Вместе с тем поточечная норма H разрывна в точке ∞. Следовательно, согласно теореме 3.3.2 не существует расслоения $B(X_Q,\mathscr{Y})$. $\rhd$

3.3.18. *Лемма.* *Предположим, что $\aleph$ — направленное по возрастанию упорядоченное множество без наибольшего элемента, $\mathscr{X}$ —* НБР *над $\aleph^{\bullet}$ (см. 3.1.13) и в $C(\aleph^{\bullet},\mathscr{X})$ существует такое послойно плотное подмножество, что равномощные ему подмножества $\aleph$ обладают верхними гранями. Тогда для любого* НБР $\mathscr{Y}$ *над $\aleph^{\bullet}$ существует расслоение* $B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$.

$\lhd$ Пусть $\mathscr{U}$ — подмножество $C(\aleph^\bullet, \mathscr{X})$, удовлетворяющее условиям леммы.

Рассмотрим произвольное непрерывное банахово расслоение $\mathscr{Y}$ над $\aleph^\bullet$ и проверим непрерывность поточечной нормы произвольного гомоморфизма $H \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. Тем самым в силу теоремы 3.3.2 наше утверждение будет доказано.

Для каждого $u \in \mathscr{U}$ выберем $\alpha_u \in \aleph$ так, чтобы $|\!|\!| u |\!|\!|(\alpha) = |\!|\!| u |\!|\!|(\infty)$ и $|\!|\!| H \otimes u |\!|\!|(\alpha) = |\!|\!| H \otimes u |\!|\!|(\infty)$ для всех $\alpha \geqslant \alpha_u$ (см. замечание 3.1.13 (1)). Тогда для любого $u \in \mathscr{U}$ два последних равенства имеют место при всех $\alpha \geqslant \beta$, где β — верхняя грань множества $\{\alpha_u : u \in \mathscr{U}\}$. Поскольку множество $\mathscr{U}$ послойно плотно в $\mathscr{X}$, значение нормы $|\!|\!| H |\!|\!|$ в любой точке $\alpha \in \aleph^\bullet$ вычисляется по формуле $|\!|\!| H |\!|\!|(\alpha) = \sup\{|\!|\!| H \otimes u |\!|\!|(\alpha) : u \in \mathscr{U}, |\!|\!| u |\!|\!|(\alpha) \leqslant 1\}$. Из этой формулы сразу видно, что при $\alpha \geqslant \beta$ поточечная норма H принимает значение $|\!|\!| H |\!|\!|(\alpha) = |\!|\!| H |\!|\!|(\infty)$, а значит, непрерывна. $\rhd$

Следствие. *Для всякого банахова пространства X найдется недискретное нормальное топологическое пространство Q такое, что для любого* НБР *$\mathscr{Y}$ над Q существует расслоение $B(X_Q, \mathscr{Y})$.*

$\lhd$ Достаточно взять $Q = \aleph^\bullet$, где $\aleph$ — произвольный кардинал, превосходящий мощность X, и воспользоваться последней леммой. $\rhd$

3.3.19. Пусть X — банахово пространство, Q — топологическое пространство и $\mathscr{Y}$ — произвольное НБР над Q с ненулевыми слоями.

Приведенный ниже список результатов показывает, как зависит существование операторного расслоения $B(X_Q, \mathscr{Y})$ от свойств X и Q. Этот список не содержит дополнительных новых фактов и лишь подводит итог проведенным исследованиям.

- **(1)** Если банахово пространство X конечномерно, то расслоение $B(X_Q, \mathscr{Y})$ существует.
- **(2)** Предположим, что пространство X бесконечномерно.
  - **(2.1)** Пусть X сепарабельно. Расслоение $B(X_Q, \mathscr{Y})$ существует в том и только том случае, когда пространство Q функционально дискретно.
  - **(2.2)** Пусть X — не сепарабельное пространство.
    - **(2.2.1)** Если пространство Q не функционально дискретно, то расслоения $B(X_Q, \mathscr{Y})$ не существует.

(2.2.2) Если пространство Q функционально дискретно, то расслоение $B(X_Q, \mathscr{Y})$ может как существовать, так и не существовать (в том числе при дополнительном предположении, что пространство Q нормально и недискретно).

Утверждение (1) вытекает из 3.3.6, (2.1) следует из 3.3.13 и 3.3.16, (2.2.1) является следствием 3.3.13, а (2.2.2) вытекает из 3.3.17 и следствия 3.3.18.

3.4. Сопряженное банахово расслоение

В этом параграфе рассматриваются вопросы о существовании и свойствах расслоения $\mathscr{X}'$, сопряженного к данному расслоению $\mathscr{X}$.

В разделе 3.4.2 перечислены разнообразные необходимые и достаточные условия существования сопряженного расслоения. Все утверждения этого раздела являются прямыми следствиями результатов предыдущего параграфа. Предложение 3.4.3 утверждает существование сопряженного расслоения для НБР с гильбертовыми слоями.

Одним из естественных шагов при исследовании понятия сопряженного расслоения является установление нормативных соотношений двойственности между расслоениями $\mathscr{X}$ и $\mathscr{X}'$. Этой теме посвящен раздел 3.4.5. Предварительно в 3.4.4 обсуждается условие послойной нормировки слоев НБР значениями соответствующих гомоморфизмов. К сожалению, вопрос о том, всегда ли имеет место такая нормировка, мы были вынуждены оставить открытым, ограничившись перечислением ситуаций, в которых она заведомо имеется.

В разделах 3.4.6–3.4.9 рассматривается связь между сепарабельностью отдельного слоя банахова расслоения и конечномерностью его слоев или слоев сопряженного расслоения.

Разделы 3.4.10–3.4.12 содержат результаты, касающиеся рефлексивности слоев $\mathscr{X}(q)$ и $\mathscr{X}'(q)$, а также связи между существованием расслоения $\mathscr{X}'$ и просторностью расслоения $\mathscr{X}$ с рефлексивными слоями над экстремально несвязным компактом.

Оставшаяся часть параграфа (3.4.13–3.4.17) посвящена изучению второго сопряженного расслоения. В круг исследуемых здесь вопросов входит существование расслоения $\mathscr{X}''$, изометричность рассматриваемых расслоений, а также вложение банахова расслоения во второе сопряженное.

3.4.1. Определение. Пусть $\mathscr{X}$ — непрерывное банахово расслоение. Расслоение $B(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ (если оно существует) будем называть *сопряженным* к $\mathscr{X}$ и обозначать символом $\mathscr{X}'$. Если расслоение $\mathscr{X}'$ существует, мы говорим, что $\mathscr{X}$ *имеет сопряженное расслоение.*

Согласно теореме 3.3.2 сопряженное расслоение $\mathscr{X}'$ существует в точности тогда, когда поточечные нормы всех гомоморфизмов из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{R}$ непрерывны.

3.4.2. *Предложение.* **(1)** *Всякое* НБР $\mathscr{X}$ *над* Q *с постоянной конечной размерностью имеет сопряженное расслоение* $\mathscr{X}'$. *Более того, если топологическое пространство* Q *вполне регулярно, то* $\mathscr{X}'(q) = \mathscr{X}(q)'$ *для всех* $q \in Q$.

(2) НБР $\mathscr{X}$ *с конечномерными слоями над бэровским вполне регулярным топологическим пространством, удовлетворяющим первой аксиоме счетности, имеет сопряженное расслоение в том и только том случае, если для каждого числа* $n = 0, 1, 2, \dots$ *множество* $\{\dim \mathscr{X} = n\}$ *является открыто-замкнутым.*

(3) *Предположим, что постоянное* НБР *со слоем* X *имеет сопряженное расслоение. Тогда последнее является постоянным* НБР *со слоем* X'.

(4) *Если постоянное* НБР *над* Q *с бесконечномерным слоем имеет сопряженное расслоение, то пространство* Q *является функционально дискретным (в частности, если при этом пространство* Q *вполне регулярно, то все его счетные подмножества замкнуты).*

(5) *Для любого несепарабельного банахова пространства* X *существует функционально дискретное топологическое пространство* Q *такое, что* НБР X_Q *не имеет сопряженного расслоения.*

(6) *Постоянное* НБР *над* Q *с бесконечномерным сепарабельным слоем имеет сопряженное расслоение тогда и только тогда, когда пространство* Q *функционально дискретно.*

(7) *Для всякого банахова пространства* X *существует недискретное нормальное топологическое пространство* Q *такое, что* НБР X_Q *имеет сопряженное расслоение.*

(8) *Если пространство* Q *не функционально дискретно, то для произвольного банахова пространства* X *следующие утверждения равносильны:*

(а) *существует* $(X_Q)'$;
(б) $(X')_Q = (X_Q)'$;
(в) $C(Q, X') = \mathrm{Hom}(X_Q, \mathscr{R})$;
(г) *банахово пространство* X *конечномерно.*

$\lhd$ Утверждения (1)–(8) непосредственно вытекают из 3.3.6 и 3.3.7, 3.3.9, 3.3.11, 3.3.13, 3.3.17, 3.3.16, следствия 3.3.18 и предложения 3.3.14 соответственно. $\rhd$

Замечание. Из примеров 3.2.13 (1)–(3) с учетом 3.3.2 следует, что требование постоянства размерности в утверждении (1) последнего предложения существенно для наличия сопряженного расслоения.

3.4.3. Лемма. *Пусть* $\mathscr{X}$ — НБР *над* Q *с гильбертовыми слоями (т. е. все слои* $\mathscr{X}$ *являются гильбертовыми пространствами). Для любого глобального сечения* u *расслоения* $\mathscr{X}$ *и любой точки* $q \in Q$ *положим* $h(u)(q) = \langle \cdot, u(q) \rangle \in \mathscr{X}(q)'$. *Тогда* $h[C(Q, \mathscr{X})] \subset \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$. *Кроме того,* $h[C(Q, \mathscr{X})]$ *является непрерывной структурой в (дискретном) банаховом расслоении со слоями* $\mathscr{X}(q)'$ $(q \in Q)$.

$\lhd$ В силу [3, 2.4.4] включение $h[C(Q, \mathscr{X})] \subset \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ следует из соотношений

$$\langle u_1 | h(u_2) \rangle = \langle u_1(\cdot), u_2(\cdot) \rangle = \frac{1}{2}\Big(\|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 - \|u_1 - u_2\|^2 \Big) \in C(Q),$$
$$\|h(u_2)\| = \|u_2\|,$$

справедливых для любых $u_1, u_2 \in C(Q, \mathscr{X})$. Второе утверждение леммы вытекает из теоремы Рисса. $\rhd$

Предложение. *Предположим, что* $\mathscr{X}$ — НБР *с гильбертовыми слоями. Если существует расслоение* $\mathscr{X}'$, *то оно изометрично* $\mathscr{X}$ *(см. [3, 2.4.12]).*

$\lhd$ Пусть Q — топологическое пространство и $\mathscr{X}$ — НБР над Q с гильбертовыми слоями. Рассмотрим НБР $\mathscr{Y}$ со слоями $\mathscr{Y}(q) = \mathscr{X}(q)'$ $(q \in Q)$ и непрерывной структурой $\mathscr{C} = h[C(Q, \mathscr{X})]$ (см. лемму). В силу теоремы [3, 2.4.12(3)] расслоения $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ изометричны. Из послойной плотности $\mathscr{C}$ в $\mathscr{Y}$ и соотношений $\mathscr{C} \subset \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R}) = C(Q, \mathscr{X}')$ следует, что в каждой точке $q \in Q$ слои $\mathscr{X}'(q)$ и $\mathscr{Y}(q)$ совпадают и $\mathscr{C}$ является непрерывной структурой в $\mathscr{X}'$, т. е. $\mathscr{X}' = \mathscr{Y}$. $\rhd$

3.4.4. Определение. Пусть $\mathscr{X}$ — НБР над топологическим пространством Q. Будем говорить, что $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})$ *нормирует* $\mathscr{X}$ *на подмножестве* $D \subset Q$, если для любой точки $q \in D$ и любого элемента $x \in \mathscr{X}(q)$ имеет место равенство

$$\|x\| = \sup\{|H(q)x| : H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R}),\ \|H\| \leqslant 1\}.$$

Говорим, что $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})$ *нормирует* $\mathscr{X}$, если $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})$ нормирует $\mathscr{X}$ на Q.

Нам не известны примеры НБР $\mathscr{X}$, для которых множество $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})$ не нормировало бы $\mathscr{X}$. (Более того, мы не знаем, существует ли ненулевое банахово расслоение с нулевым сопряженным.) В настоящий момент мы можем лишь указать некоторые классы банаховых расслоений $\mathscr{X}$, для которых $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})$ заведомо нормирует $\mathscr{X}$. К числу таких расслоений относятся следующие:

(1) НБР $\mathscr{X}$ над Q такое, что для каждой точки $q \in Q$ множество $\{H(q) : H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})\} \subset \mathscr{X}(q)'$ нормирует $\mathscr{X}(q)$ и для любого гомоморфизма $H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})$ существует гомоморфизм $G \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})$, удовлетворяющий соотношениям $G(q) = H(q)$ и $\|G\| \in C(Q)$;

(2) НБР $\mathscr{X}$ над вполне регулярным топологическим пространством Q, удовлетворяющее следующим условиям: для каждой точки $q \in Q$ множество $\{H(q) : H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})\} \subset \mathscr{X}(q)'$ нормирует $\mathscr{X}(q)$ и для любого гомоморфизма $H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})$ найдется гомоморфизм $G \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})$ такой, что $G(q) = H(q)$ и поточечная норма G непрерывна в точке q;

(3) постоянное НБР;

(4) НБР с постоянной конечной размерностью над вполне регулярным топологическим пространством;

(5) НБР над компактным топологическим пространством или локально компактным хаусдорфовым пространством, имеющее счетное послойно плотное множество непрерывных глобальных сечений;

(6) НБР с конечномерными слоями над метризуемым локально компактным пространством;

(7) НБР с гильбертовыми слоями;

(8) НБР над регулярным экстремально несвязным топологическим пространством;

(9) НБР над $\overline{\mathbb{N}}$ с сепарабельным слоем в точке ∞;

(10) НБР над хаусдорфовым топологическим пространством с конечным числом неизолированных точек, имеющее сепарабельные слои в этих точках;

(11) расслоение, являющееся сопряженным к некоторому НБР.

$\triangleleft$ Доказательство того факта, что $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})$ нормирует $\mathscr{X}$ в случаях (1) и (2), можно без труда получить с помощью домножения гомоморфизма G на подходящий элемент $C(Q)$.

Случаи (3), (4) и (7) легко свести к случаю (1), воспользовавшись соответственно следствием 3.2.3, предложением 3.4.2 (1) и леммой 3.4.3.

Случай (5) для компактного топологического пространства Q рассмотрен в [12, 19.16], а случай локально компактного хаусдорфова (а следовательно, вполне регулярного) пространства Q сводится к случаю компактного пространства рассмотрением компактной окрестности произвольной точки $q \in Q$ и домножением гомоморфизма на непрерывную вещественную функцию, равную единице в точке q и зануляющуюся вне рассматриваемой окрестности. Аналогичными рассуждениями случай (6) можно свести к (5), привлекая утверждение [12, 19.5 (iii)].

(8): Пусть $\mathscr{X}$ — НБР над регулярным экстремально несвязным топологическим пространством D. Рассмотрим экстремально несвязный компакт Q, содержащий D как всюду плотное подмножество, и продолжение $\beta\mathscr{X}$ по Стоуну — Чеху расслоения $\mathscr{X}$ на Q (см. [3, 1.1.4, 2.5.10]). Обозначим символом $\overline{\beta\mathscr{X}}$ просторную оболочку расслоения $\beta\mathscr{X}$ (см. [3, 3.1.5]). Каждому гомоморфизму $\overline{H} \in \mathrm{Hom}\left(\overline{\beta\mathscr{X}},\mathscr{R}\right)$ сопоставим отображение $H : q \in Q \mapsto \overline{H}(q)|_{\beta\mathscr{X}(q)}$, $q \in Q$. Из теоремы [3, 2.4.4] следует, что $H \in \mathrm{Hom}(\beta\mathscr{X},\mathscr{R})$. Применив теорему [3, 3.3.3 (1)] к расслоению $\overline{\beta\mathscr{X}}$, мы заключаем, что $\mathrm{Hom}(\beta\mathscr{X},\mathscr{R})$ нормирует $\beta\mathscr{X}$. Осталось заметить, что

$$\{H|_D : H \in \mathrm{Hom}(\beta\mathscr{X},\mathscr{R})\} \subset \mathrm{Hom}_D(\mathscr{X},\mathscr{R}).$$

(10): Если хаусдорфово топологическое пространство Q имеет конечное число неизолированных точек, то, как легко видеть, каждая из этих точек отделяется от остальных неизолированных точек открыто-замкнутой окрестностью. Следовательно, мы не нарушим общности, предположив, что пространство Q имеет единственную неизолированную точку q.

Пусть $\mathscr{X}$ — НБР над Q с сепарабельным слоем $\mathscr{X}(q)$. Достаточно для произвольного функционала $x' \in \mathscr{X}(q)'$, $\|x'\| < 1$, построить гомоморфизм $H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$, принимающий значение $H(q) = x'$ и удовлетворяющий неравенству $\|H\| \leqslant 1$.

Рассмотрим какую-нибудь счетную систему $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ линейно независимых элементов пространства $\mathscr{X}(q)$, линейная оболочка которой плотна в $\mathscr{X}(q)$, и, воспользовавшись теоремой Дюпре (см. [3, 2.3.5]), с каждым номером $n \in \mathbb{N}$ свяжем сечение $u_n \in C(Q, \mathscr{X})$, проходящее в точке q через x_n. По предложению [12, 18.1] для любого $n \in \mathbb{N}$ существует окрестность U_n точки q такая, что сечения $u_1, \dots, u_n$ поточечно линейно независимы на U_n. Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $p \in U_n$ определим функционал $y_n(p) : \mathrm{lin}\{u_1(p), \dots, u_n(p)\} \to \mathbb{R}$ формулой $\langle u_i(p) | y_n(p) \rangle = \langle u_i(q) | x' \rangle$, $i = 1, \dots, n$.

Поскольку $\|x'\| < 1$, в силу [4, лемма 7] каждую окрестность U_n точки q можно уменьшить до окрестности V_n так, чтобы были выполнены неравенства $\|y_n(p)\| \leqslant 1$ для всех $p \in V_n$. Без ограничения общности можно считать, что $V_n \supset V_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Далее, поточечная линейная независимость множества $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ на пересечении $V_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$ позволяет нам для каждой точки $p \in V_\infty$ определить функционал $y_\infty(p) : \mathrm{lin}\{u_n(p) : n \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{R}$ как общее продолжение функционалов $y_n(p)$, $n \in \mathbb{N}$, т. еiположить $\langle u_n(p) | y_\infty(p) \rangle = \langle u_n(q) | x' \rangle$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что $\|y_\infty(p)\| \leqslant 1$ для $p \in V_\infty$.

Положим

$$H(p) = \begin{cases} 0, & p \notin V_1, \\ \bar{y}_n(p), & p \in V_n \backslash V_{n+1}, \\ \bar{y}_\infty(p), & p \in V_\infty, \end{cases}$$

где $\bar{y}_n(p)$, $1 \leqslant n \leqslant \infty$, — произвольное продолжение функционала $y_n(p)$ на весь слой $\mathscr{X}(p)$ с сохранением нормы. Ясно, что $H(q) = x'$ и $\|H\| \leqslant 1$.

Обозначим через $\mathscr{U}$ множество $\mathrm{lin}\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$, дополненное всеми сечениями с одноточечными носителями. Очевидно, множество $\mathscr{U}$ послойно плотно в $\mathscr{X}$, и для любого элемента $u \in \mathscr{U}$ функция $\langle u | H \rangle$ постоянна в некоторой окрестности точки q, а значит, непрерывна. Следовательно, по теореме [3, 2.4.4] отображение H является гомоморфизмом.

(9): Частный случай (10).

(11): Пусть $\mathscr{X}$ — НБР над топологическим пространством Q, имеющее сопряженное расслоение. Из [3, 2.3.9] следует, что для любой точки $q \in Q$ и любого функционала $x' \in \mathscr{X}'(q)$ имеет место равенство

$$\|x'\| = \sup\bigl\{\langle u(q)|x'\rangle : u \in C(Q, \mathscr{X}),\ \|u\| \leqslant 1\bigr\}.$$

С другой стороны, по теореме [3, 2.4.4] для каждого сечения $u \in C(Q, \mathscr{X})$ отображение $u'' : q \in Q \mapsto \langle u(q)|\cdot\rangle \in \mathscr{X}'(q)'$ является гомоморфизмом из $\mathscr{X}'$ в $\mathscr{R}$, причем $\|u''\| \leqslant \|u\|$. Следовательно, $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}', \mathscr{R})$ нормирует $\mathscr{X}'$. $\triangleright$

3.4.5. Утверждение (3) следующего предложения дает положительный ответ на вопрос Г. Герца [12, Section 19, Problem 2, c. 231] для случаев расслоений 3.4.4 (1)–(11), а также расслоений с конечномерными слоями над бэровскими вполне регулярными топологическими пространствами (см. теорему 3.3.8 (1)).

Предложение. *Пусть* $\mathscr{X}$ — НБР *над топологическим пространством* Q.

(1) *Предположим, что существует сопряженное расслоение* $\mathscr{X}'$. *Тогда для любой точки* $q \in Q$ *и любого элемента* x' *слоя* $\mathscr{X}'(q)$ *имеет место равенство*

$$\|x'\| = \sup\bigl\{\bigl|\langle u(q)|x'\rangle\bigr| : u \in C(Q, \mathscr{X}),\ \|u\| \leqslant 1\bigr\}.$$

В частности, для всякого сечения $u' \in C(Q, \mathscr{X}')$ *в векторной решетке* $C(Q)$ *выполняется соотношение*

$$\|u'\| = \sup\bigl\{\bigl|\langle u|u'\rangle\bigr| : u \in C(Q, \mathscr{X}),\ \|u\| \leqslant 1\bigr\}.$$

Предположим дополнительно, что $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ *нормирует* $\mathscr{X}$ *на всюду плотном подмножестве* Q.

(2) *Для всякого сечения* $u \in C(Q, \mathscr{X})$ *в векторной решетке* $C(Q)$ *выполняется соотношение*

$$\|u\| = \sup\bigl\{\bigl|\langle u|H\rangle\bigr| : H \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R}),\ \|H\| \leqslant 1\bigr\}.$$

(3) *Равномерная норма любого сечения* $u \in C^b(Q, \mathscr{X})$ *представима в виде*

$$\|u\|_\infty = \sup\bigl\{\bigl\|\langle u|H\rangle\bigr\|_\infty : H \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R}),\ \|H\| \leqslant 1\bigr\}.$$

$\lhd$ (1): Поскольку x' принадлежит $\mathscr{X}(q)'$ и множество $C(Q, \mathscr{X})$ послойно плотно в $\mathscr{X}$, найдется последовательность сечений $(u_n) \subset C(Q, \mathscr{X})$ такая, что $|\!|\!|u_n|\!|\!|(q) \leqslant 1$ и $\|x'\| - 1/n \leqslant \langle u_n(q)|x'\rangle \leqslant \|x'\|$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Остается заметить, что в силу леммы [3, 2.3.9] для каждого номера n существует сечение $v_n \in C(Q, \mathscr{X})$, удовлетворяющее соотношениям $v_n(q) = u_n(q)$ и $|\!|\!|v_n|\!|\!| \leqslant 1$.

(2): Обозначим через D всюду плотное подмножество Q, на котором $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ нормирует $\mathscr{X}$, рассмотрим произвольное сечение $u \in C(Q, \mathscr{X})$ и положим

$$\mathscr{F} = \big\{\langle u|H\rangle : H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R}),\ |\!|\!|H|\!|\!| \leqslant 1\big\}.$$

Очевидно, $|\!|\!|u|\!|\!|$ служит верхней границей для $\mathscr{F}$. Если $g \in C(Q)$ — произвольная верхняя граница множества $\mathscr{F}$, то, как легко видеть,

$$g(q) \geqslant \sup_{f \in \mathscr{F}} f(q) = |\!|\!|u|\!|\!|(q)$$

для каждой точки $q \in D$, а значит, $g \geqslant |\!|\!|u|\!|\!|$.

(3): Пусть $u \in C^b(Q, \mathscr{X})$. Очевидно,

$$\|u\|_\infty \geqslant \sup\big\{\big\|\langle u|H\rangle\big\|_\infty : H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R}),\ |\!|\!|H|\!|\!| \leqslant 1\big\}.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ подберем гомоморфизм $H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$, $|\!|\!|H|\!|\!| \leqslant 1$, такой, что $\|u\|_\infty - \varepsilon < \|\langle u|H\rangle\|_\infty$, чем и докажем наше утверждение.

Рассмотрим точку $q \in Q$ такую, что $|\!|\!|u|\!|\!|(q) > \|u\|_\infty - \varepsilon$, и окрестность U этой точки, на которой $|\!|\!|u|\!|\!| > \|u\|_\infty - \varepsilon$. Поскольку $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ нормирует $\mathscr{X}$ на всюду плотном подмножестве Q, существует точка $p \in U$ такая, что

$$|\!|\!|u|\!|\!|(p) = \|u(p)\| = \sup\big\{\big|\langle u(p)|H(p)\rangle\big| : H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R}),\ |\!|\!|H|\!|\!| \leqslant 1\big\},$$

откуда $\|u\|_\infty - \varepsilon < \big|\langle u(p)|H(p)\rangle\big|$ для некоторого гомоморфизма $H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$, $|\!|\!|H|\!|\!| \leqslant 1$. Значит, $\|u\|_\infty - \varepsilon < \|\langle u|H\rangle\|_\infty$. $\rhd$

3.4.6. Теорема. *Пусть Q — вполне регулярное топологическое пространство и $q \in Q$ — неизолированная точка со счетной базой окрестностей. Предположим, что НБР $\mathscr{X}$ над Q имеет сопряженное расслоение $\mathscr{X}'$. Тогда сепарабельность слоя $\mathscr{X}(q)$ влечет конечномерность слоя $\mathscr{X}'(q)$.*

$\lhd$ Пусть слой $\mathscr{X}(q)$ сепарабелен, а слой $\mathscr{X}'(q)$ бесконечномерен. Мы построим гомоморфизм H из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{R}$ с разрывной поточечной нормой и тем самым получим противоречие (в силу теоремы 3.3.2).

Пусть множество $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ всюду плотно в $\mathscr{X}(q)$ и пусть (x'_n) — такая последовательность элементов $\mathscr{X}'(q)$, что (x'_n) слабо* сходится к нулю в $\mathscr{X}(q)'$ и $\|x'_n\| = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$ (см. 3.1.3). Будем считать, что $|\langle x_i|x'_n\rangle| < 1/n$ при $i = 1, \ldots, n$, так как этого можно добиться, перейдя к подпоследовательности. Воспользовавшись теоремой Дюпре (см. [3, 2.3.5]), для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим сечения $u_n \in C(Q, \mathscr{X})$ и $v_n \in C(Q, \mathscr{X}')$ такие, что $u_n(q) = x_n$ и $v_n(q) = x'_n$.

Пусть $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — некоторая база окрестностей точки q. С использованием хаусдорфовости Q по индукции очевидным образом строится новая база $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ окрестностей q, для каждого $n \in \mathbb{N}$ удовлетворяющая следующим условиям: $V_{n+1} \subset V_n \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n$, разность $V_n \backslash V_{n+1}$ содержит некоторую точку q_n вместе с открытой окрестностью W_n и на V_n справедливы оценки $1/2 < |\!|\!| v_n |\!|\!| < 2$ и $|\langle u_i|v_n\rangle| < 1/n$ при $i = 1, \ldots, n$. Покажем, что для любого непрерывного сечения $u \in C(Q, \mathscr{X})$ и произвольного числа $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n выполняются неравенства $|\langle u|v_n\rangle| < \varepsilon$ на V_n. Действительно, пусть $\|u(q) - x_k\| < \varepsilon/4$ и $1/l < \varepsilon/2$ для подходящих $k, l \in \mathbb{N}$. Подберем элемент V_m построенной базы окрестностей q, на котором $|\!|\!| u - u_k |\!|\!| < \varepsilon/4$. Тогда для всех $n \geqslant \max\{k, l, m\}$ на V_n имеют место соотношения

$$|\langle u|v_n\rangle| \leqslant |\langle u - u_k \mid v_n\rangle| + |\langle u_k|v_n\rangle| <$$
$$< |\!|\!| u - u_k |\!|\!| |\!|\!| v_n |\!|\!| + \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{4}\cdot 2 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Определим теперь отображение $H : p \in Q \mapsto H(p) \in \mathscr{X}'(p)$. Положим $H(p) = 0 \in \mathscr{X}(p)'$, если $p \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n$, и для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $H\big|_{W_n} = (f_n v_n)\big|_{W_n}$, где $f_n : Q \to [0, 1]$ — какая-нибудь непрерывная функция, равная единице в q_n и нулю вне W_n.

Функция $\langle u|v\rangle : Q \to \mathbb{R}$ непрерывна, поскольку она представляет собой поточечную сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n\langle u|v_n\rangle$, который равномерно сходится благодаря попарной дизъюнктности множеств W_n $(n \in \mathbb{N})$ и соотношениям $\operatorname{supp} f_n \subset W_n$ и $\sup_{W_n} |\langle u|v_n\rangle| \leqslant \sup_{V_n} |\langle u|v_n\rangle| \to 0$ при $n \to \infty$.

Таким образом, отображение H является гомоморфизмом, так как $\|H\| \leqslant 2$ (см. [3, 2.4.4]). Вместе с тем

$$\|H\|(q_n) = |f_n(q_n)|\|v_n\|(q_n) = \|v_n\|(q_n) > 1/2$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Кроме того, $q_n \to q$ и $\|H\|(q) = 0$. Следовательно, гомоморфизм H имеет разрывную поточечную норму. $\triangleright$

3.4.7. Следствие. *Пусть Q — вполне регулярное топологическое пространство и $q \in Q$ — неизолированная точка со счетной базой окрестностей. Предположим, что НБР $\mathscr{X}$ над Q с гильбертовыми слоями имеет сопряженное расслоение. Тогда сепарабельность слоя $\mathscr{X}(q)$ равносильна его конечномерности.*

Таким образом, если НБР $\mathscr{X}$ с гильбертовыми слоями над вполне регулярным топологическим пространством имеет сопряженное расслоение, то ни один слой $\mathscr{X}$ в неизолированной точке со счетной базой окрестностей не может быть изометричен ℓ^2.

3.4.8. Предложение. *Пусть $Q = \overline{\mathbb{N}}$ — одноточечная компактификация натурального ряда. НБР $\mathscr{X}$ над Q с сепарабельным слоем $\mathscr{X}(\infty)$ имеет сопряженное расслоение тогда и только тогда, когда в некоторой окрестности точки ∞ размерность $\mathscr{X}$ конечна и постоянна.*

$\triangleleft$ Достаточность следует из предложения 3.4.2 (2). Установим необходимость. Предположим, что рассматриваемое расслоение $\mathscr{X}$ имеет сопряженное. Тогда в силу 3.4.6 пространство $\mathscr{X}'(\infty)$ конечномерно, откуда с учетом 3.4.4 (10) следует конечномерность слоя $\mathscr{X}(\infty)$. Положим $m = \dim \mathscr{X}(\infty)$ и рассмотрим сечения $u_1, \dots, u_m \in C(Q, \mathscr{X})$ с линейно независимыми значениями $u_1(\infty), \dots, u_m(\infty)$, существование которых гарантируется теоремой Дюпре (см. [3, 2.3.5]). По предложению [12, 18.1] сечения $u_1, \dots, u_m$ поточечно линейно независимы на некоторой окрестности U точки ∞, а значит, $\dim \mathscr{X} \geqslant m$ на U.

Допустим, что не существует окрестности точки ∞, в которой размерность $\mathscr{X}$ постоянна. Тогда имеется строго возрастающая последовательность натуральных чисел n_k такая, что $\dim \mathscr{X}(n_k) > m$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Для каждого номера $k \in \mathbb{N}$ подберем функционал $x'_k \in \mathscr{X}(n_k)'$, удовлетворяющий равенствам $\|x'_k\| = 1$ и $\langle u_1(n_k)|x'_k\rangle = \dots = \langle u_m(n_k)|x'_k\rangle = 0$. Введем отображение $H : q \in Q \mapsto H(q) \in$

$\mathscr{X}(q)'$ следующим образом:

$$H(q) = \begin{cases} x'_k, & q = n_k, \\ 0, & q \notin \{n_k : k \in \mathbb{N}\}. \end{cases}$$

Ясно, что $\|H\| \leqslant 1$. Обозначим через $\mathscr{U}$ множество $\operatorname{lin}\{u_1, \dots, u_m\}$, дополненное всеми сечениями с одноточечными носителями. Очевидно, множество $\mathscr{U}$ послойно плотно в $\mathscr{X}$, и для любого элемента $u \in \mathscr{U}$ функция $\langle u|H\rangle$ равна нулю в окрестности точки ∞, а значит, непрерывна. Следовательно, по теореме [3, 2.4.4] отображение H является гомоморфизмом, что с учетом 3.3.2 противоречит существованию $\mathscr{X}'$ ввиду разрывности поточечной нормы H. ▷

3.4.9. Одноточечную компактификацию Q натурального ряда можно расценивать как наиболее просто устроенное топологическое пространство, которое является, с одной стороны, классическим (т. е. вполне регулярным, метризуемым, компактным и т. д.), а с другой стороны, — нетривиальным (не дискретным, не антидискретным и т. п.). Как утверждает предложение 3.4.8, НБР $\mathscr{X}$ над Q с сепарабельным слоем $\mathscr{X}(\infty)$ имеет сопряженное расслоение в том и только в том случае, если размерность $\mathscr{X}$ постоянна и конечна в некоторой окрестности точки ∞. Кроме того, в силу предложения 3.4.2 (4) любое постоянное расслоение над Q с бесконечномерным слоем не имеет сопряженного. Покажем, что все же имеется НБР над Q с бесконечномерным слоем в ∞, обладающее сопряженным расслоением.

Пример. Мы построим НБР $\mathscr{X}$ над $Q = \overline{\mathbb{N}}$, удовлетворяющее следующим условиям:

(а) все слои $\mathscr{X}$ над $\mathbb{N}$ конечномерны, а слой $\mathscr{X}(\infty)$ не сепарабелен;

(б) существует $\mathscr{X}'$;

(в) включение $\mathscr{X}'(\infty) \subset \mathscr{X}(\infty)'$ является строгим;

(г) $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R}) = C(Q, \mathscr{X}')$ нормирует $\mathscr{X}$.

Для каждого натурального числа n рассмотрим элемент $e_n = \chi_{\{n\}} \in \ell^\infty$ и координатный функционал $\delta_n \in (\ell^\infty)'$, $\langle x|\delta_n\rangle = x(n)$ для всех $x \in \ell^\infty$.

Обозначим символом $\widetilde{\ell^1}$ образ пространства ℓ^1 при естественном изометрическом вложении этого пространства в $(\ell^\infty)'$. Ясно, что $\delta_n \in \widetilde{\ell^1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Положим $\mathscr{X}(\infty) = \ell^\infty$ и $\mathscr{X}(n) = \operatorname{lin}\{e_1, \dots, e_n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Для каждого элемента $x \in \ell^\infty$ определим сечение u_x банахова расслоения $\mathscr{X}$ следующим образом:

$$u_x(q) = \begin{cases} \big(x(1), \dots, x(q), 0, 0 \dots\big), & q \in \mathbb{N}, \\ x, & q = \infty. \end{cases}$$

Легко видеть, что совокупность $\mathscr{C} = \{u_x : x \in \ell^\infty\}$ представляет собой непрерывную структуру в $\mathscr{X}$, в паре с которой мы будем рассматривать $\mathscr{X}$ как НБР.

Непосредственно из построения видно, что расслоение $\mathscr{X}$ обладает свойством (а).

(б), (в): Для всех $n \in \mathbb{N}$ и $f \in \mathscr{X}(n)'$ положим

$$\langle x \mid \overline{f}\,\rangle = \big\langle (x(1), \dots, x(n), 0, 0, \dots) \mid f\,\big\rangle, \quad x \in \ell^\infty.$$

Ясно, что для каждого числа $n \in \mathbb{N}$ соответствие $f \mapsto \overline{f}$ осуществляет изометрическое вложение $\mathscr{X}(n)'$ в $\widetilde{\ell^1}$.

Пусть H — произвольный гомоморфизм из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{R}$. Для любого элемента $x \in \ell^\infty$ имеют место соотношения

$$\begin{gathered} \big\langle x \mid \overline{H(n)}\,\big\rangle = \big\langle (x(1), \dots, x(n), 0, 0, \dots) \mid H(n)\,\big\rangle = \\ = (H \otimes u_x)(n) \to (H \otimes u_x)(\infty) = \big\langle x \mid H(\infty)\big\rangle \end{gathered}$$

при $n \to \infty$. Стало быть, последовательность $\big(\overline{H(n)}\big) \subset \widetilde{\ell^1}$ слабо фундаментальна, а значит, сходится по норме, так как пространство $\widetilde{\ell^1}$ обладает свойством Шура (см. лемму 3.1.2). Отсюда следует, что $H(\infty)$ является пределом по норме последовательности $\big(\overline{H(n)}\big)$; в частности, $H(\infty) \in \widetilde{\ell^1}$ и $\|H\| \in C(Q)$. Таким образом, НБР $\mathscr{X}$ имеет сопряженное расслоение $\mathscr{X}'$, причем $\mathscr{X}'(\infty) \neq \mathscr{X}(\infty)'$ в силу включения $\mathscr{X}'(\infty) \subset \widetilde{\ell^1}$.

(г): Согласно 3.4.4 (1) достаточно для произвольного функционала $y \in \widetilde{\ell^1}$ предъявить такой гомоморфизм $H_y \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$, что $H_y(\infty) = y$. Искомый гомоморфизм можно определить следующим образом:

$$H_y(q) = \begin{cases} y|_{\mathscr{X}(q)}, & q \in \mathbb{N}, \\ y, & q = \infty. \end{cases}$$

Включение $H_y \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ обеспечивается теоремой [3, 2.4.9] (применительно к $\mathscr{V} = \mathscr{C}$).

3.4.10. Пусть $\mathscr{X}$ — НБР над топологическим пространством Q, имеющее сопряженное расслоение. Отображение $\imath$, ставящее в соответствие каждой точке $q \in Q$ оператор $\imath(q) : x \in \mathscr{X}(q) \mapsto x''|_{\mathscr{X}'(q)}$, назовем *отображением двойного штрихования* для расслоения $\mathscr{X}$. (Здесь $x \mapsto x''$ — каноническое вложение во второе сопряженное пространство.)

Предложение. *Пусть $\mathscr{X}$ — НБР над Q, имеющее сопряженное расслоение, причем $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})$ нормирует $\mathscr{X}$. Пусть, кроме того, $\imath$ — отображение двойного штрихования для $\mathscr{X}$ и $q \in Q$ — произвольная точка.*

(1) *Оператор $\imath(q)$ является изометрическим вложением $\mathscr{X}(q)$ в $\mathscr{X}'(q)'$.*

(2) *Если одно из банаховых пространств $\mathscr{X}(q)$ или $\mathscr{X}'(q)$ рефлексивно, то рефлексивно и другое пространство, имеет место равенство $\mathscr{X}'(q) = \mathscr{X}(q)'$ и оператор $\imath(q)$ является канонической изометрией $\mathscr{X}(q)$ на $\mathscr{X}(q)''$.*

$\lhd$ (1): Пусть $x \in \mathscr{X}(q)$.Тогда

$$\begin{aligned}
\left\|x''\big|_{\mathscr{X}'(q)}\right\| &= \sup\big\{\langle x'|x''\rangle : x' \in \mathscr{X}'(q),\ \|x'\| \leqslant 1\big\} = \\
&= \sup\big\{\langle x|x'\rangle : x' \in \mathscr{X}'(q),\ \|x'\| \leqslant 1\big\} = \\
&= \sup\big\{\langle x|v(q)\rangle : v \in C(Q,\mathscr{X}'),\ \|v(q)\| \leqslant 1\big\} = \\
&= \sup\big\{\langle x|v(q)\rangle : v \in C(Q,\mathscr{X}'),\ |\!|\!|v|\!|\!| \leqslant 1\big\} = \\
&= \sup\big\{\langle x|H(q)\rangle : H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R}),\ |\!|\!|H|\!|\!| \leqslant 1\big\} = \\
&= \|x\| \quad (\text{см. } [3,\ 2.3.9]).
\end{aligned}$$

(2): Если пространство $\mathscr{X}(q)$ рефлексивно, то рефлексивно его сопряженное пространство $\mathscr{X}(q)'$, а значит, и пространство $\mathscr{X}'(q)$, являющееся банаховым подпространством $\mathscr{X}(q)'$.

Пусть теперь рефлексивно банахово пространство $\mathscr{X}'(q)$. Вместе с ним рефлексивно и его сопряженное пространство $\mathscr{X}'(q)'$. Поскольку в силу (1) слой $\mathscr{X}(q)$ изометрично вкладывается в $\mathscr{X}'(q)'$, он тоже является рефлексивным пространством.

Далее, предположим рефлексивность $\mathscr{X}(q)$ и установим равенство $\mathscr{X}'(q) = \mathscr{X}(q)'$. Если банахово пространство $\mathscr{X}'(q)$ является собственным подпространством $\mathscr{X}(q)'$, то по теореме отделимости существует ненулевой функционал $x'' \in \mathscr{X}(q)''$, зануляющийся на $\mathscr{X}'(q)$, и тогда пространство $\mathscr{X}'(q)$ не нормирует элемент пространства $\mathscr{X}(q)$, соответствующий функционалу x''. В этом случае пространство $\mathscr{X}'(q)$ не нормирует $\mathscr{X}(q)$, что противоречит условию предложения.

Тот факт, что оператор $\imath(q)$ является канонической изометрией $\mathscr{X}(q)$ на $\mathscr{X}(q)''$, немедленно следует из равенства $\mathscr{X}'(q) = \mathscr{X}(q)'$ и определения отображения двойного штрихования. ▷

3.4.11. *Предложение.* *Пусть $\mathscr{X}$ — НБР над экстремально несвязным компактом Q, имеющее сопряженное расслоение. Если слой $\mathscr{X}(q)$ в точке $q \in Q$ рефлексивен, то $\mathscr{X}(q) = \overline{\mathscr{X}}(q)$, где $\overline{\mathscr{X}}$ — просторная оболочка $\mathscr{X}$.*

◁ Из предложения 3.3.4 следует, что банаховы пространства $\mathscr{X}'(q)$ и $\overline{\mathscr{X}}'(q)$ изометричны. Поэтому из рефлексивности пространства $\mathscr{X}(q)$ вытекает рефлексивность $\overline{\mathscr{X}}'(q)$, откуда с учетом 3.4.4 (8) и 3.4.10 (2) вытекает равенство $\overline{\mathscr{X}}'(q) = \overline{\mathscr{X}}(q)'$. Таким образом, если включение $\mathscr{X}(q) \subset \overline{\mathscr{X}}(q)$ является строгим, то по теореме отделимости существует ненулевой функционал в $\overline{\mathscr{X}}(q)' = \overline{\mathscr{X}}'(q)$, зануляющийся на $\mathscr{X}(q)$, что противоречит теореме 3.3.5. ▷

3.4.12. *Теорема.* *Пусть $\mathscr{X}$ — НБР с рефлексивными слоями над экстремально несвязным компактом. Тогда существование сопряженного расслоения $\mathscr{X}'$ равносильно просторности $\mathscr{X}$.*

◁ Из существования расслоения $\mathscr{X}'$ и предложения 3.4.11 немедленно вытекает просторность $\mathscr{X}$. С другой стороны, по теореме [3, 3.3.1] просторное НБР всегда имеет сопряженное расслоение. ▷

3.4.13. *Вторым сопряженным расслоением* к непрерывному банахову расслоению $\mathscr{X}$ назовем НБР $\mathscr{X}'' = (\mathscr{X}')'$ (если таковое существует). Ясно, что всякое НБР над дискретным топологическим пространством имеет второе сопряженное расслоение. Важным известным классом непрерывных банаховых расслоений, имеющих вторые сопряженные, являются просторные НБР над экстремально несвязными компактами (см. [3, 3.3]).

Прежде всего отметим, что существование $\mathscr{X}'$ не влечет существования $\mathscr{X}''$.

Предложение. *Пусть X — сепарабельное банахово пространство с несепарабельным сопряженным (например, $X = \ell^1$). Тогда* *существует топологическое пространство Q такое, что постоянное* НБР X_Q *имеет сопряженное расслоение и не имеет второго сопряженного.*

$\triangleleft$ В силу предложения 3.4.2 (5) существует функционально дискретное топологическое пространство Q такое, что НБР $(X')_Q$ не имеет сопряженного расслоения. Согласно 3.4.2 (6) НБР X_Q имеет сопряженное расслоение $(X_Q)'$. По утверждению 3.4.2 (3) расслоение $(X_Q)'$ совпадает с $(X')_Q$ и тем самым не имеет сопряженного расслоения, т. е. не существует расслоения $(X_Q)''$. $\triangleright$

Замечание. Примером банахова расслоения, имеющего сопряженное расслоение, но не имеющего второго сопряженного, является также НБР $\mathscr{X}$, построенное в примере 3.4.9. Действительно, сопоставим каждому номеру $n \in \mathbb{N}$ функционал $e_n'' \in \mathscr{X}'(n)'$, связанный с элементом $e_n \in \mathscr{X}(n)$ правилом $\langle x' | e_n'' \rangle = \langle e_n | x' \rangle$ для всех $x' \in \mathscr{X}'(n)$. Положим $G(n) = e_n''$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $G(\infty) = 0 \in \mathscr{X}'(\infty)'$. Понятно, что множество $\mathscr{D} = \{H_y : y \in \widetilde{\ell^1}\}$ послойно плотно в $\mathscr{X}'$. Применив теорему [3, 2.4.9] (для $\mathscr{V} = \mathscr{D}$), получим $G \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}', \mathscr{R})$. Вместе с тем $|\!|\!| G |\!|\!| \notin C(Q)$, а значит, в силу 3.3.2 НБР $\mathscr{X}'$ не имеет сопряженного расслоения, т. е. не существует $\mathscr{X}''$.

3.4.14. *Предложение.* **(1)** *Предположим, что постоянное* НБР *со слоем X имеет второе сопряженное расслоение. Тогда последнее является постоянным* НБР *со слоем X''.*

(2) *Если постоянное* НБР *над Q с бесконечномерным слоем имеет второе сопряженное расслоение, то пространство Q является функционально дискретным.*

(3) *Пусть X — бесконечномерное банахово пространство, имеющее сепарабельное сопряженное. Тогда существование второго сопряженного к расслоению X_Q равносильно функциональной дискретности топологического пространства Q.*

(4) *Для всякого банахова пространства X существует недискретное нормальное топологическое пространство Q такое, что* НБР X_Q *имеет второе сопряженное расслоение.*

(5) *Если пространство Q не является функционально дискретным, то для произвольного банахова пространства X следующие утверждения равносильны:*

(а) *существует $(X_Q)''$;*
(б) $(X'')_Q = (X_Q)''$;

(в) *существует* $(X_Q)'$ *и* $C(Q, X'') = \operatorname{Hom}\big((X_Q)', \mathscr{R}\big)$;

(г) *банахово пространство* X *конечномерно.*

$\lhd$ Утверждения (1), (2) и (5) являются простыми следствиями предложения 3.4.2.

Доказательство утверждения (4) можно получить с помощью простой модификации доказательства следствия 3.3.18, взяв в качестве Q такое недискретное нормальное топологическое пространство, что сопряженными расслоениями будут обладать постоянные НБР X_Q и $(X')_Q$ одновременно.

Докажем утверждение (3). Необходимость имеет место в силу (2). Переходя к обоснованию достаточности, заметим прежде всего, что пространство X само является сепарабельным. Из 3.4.2 (6) следует существование сопряженного расслоения $(X_Q)'$, которое согласно 3.4.2 (3) совпадает с расслоением $(X')_Q$. Повторное применение утверждения 3.4.2 (6) завершает доказательство. $\rhd$

3.4.15. В отличие от ситуации, описанной в предложении 3.4.13, в следующем случае существование $\mathscr{X}'$ влечет существование $\mathscr{X}''$.

Предложение. *Если* НБР *с гильбертовыми слоями над топологическим пространством* Q *имеет сопряженное расслоение, то оно имеет и второе сопряженное. Более того, расслоения* $\mathscr{X}$, $\mathscr{X}'$ *и* $\mathscr{X}''$ *попарно изометричны.*

$\lhd$ Очевидно, если два НБР изометричны и одно из них имеет сопряженное расслоение, то и другое имеет сопряженное расслоение, причем эти сопряженные расслоения изометричны. Из этого факта и предложения 3.4.3 вытекает доказанное утверждение. $\rhd$

3.4.16. *Предложение.* *Пусть* $\mathscr{X}$ — НБР *над топологическим пространством* Q *такое, что* $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ *нормирует* $\mathscr{X}$. *Предположим, что* $\mathscr{X}$ *имеет второе сопряженное расслоение, и рассмотрим отображение* $\imath$ *двойного штрихования для* $\mathscr{X}$.

(1) *Отображение* $\imath$ *является изометрическим вложением* НБР $\mathscr{X}$ *в* $\mathscr{X}''$.

(2) *Если все слои* $\mathscr{X}$ *рефлексивны, то* $\imath$ *осуществляет изометрию* $\mathscr{X}$ *на* $\mathscr{X}''$.

$\lhd$ (1): Вследствие 3.4.10 (1) отображение $u \mapsto \imath \otimes u$ вкладывает пространство $C(Q, \mathscr{X})$ в $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}', \mathscr{R}) = C(Q, \mathscr{X}'')$ с сохранением поточечной нормы. Остается применить теорему [3, 2.4.4].

(2): Согласно 3.4.4 (11) $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}', \mathscr{R})$ нормирует $\mathscr{X}'$. Поэтому в силу утверждения 3.4.10 (2) имеем $\mathscr{X}(q)'' = \mathscr{X}'(q)' = \mathscr{X}''(q)$ для каждой точки $q \in Q$. В силу того же утверждения и утверждения (1) отображение $\imath$ оказывается изометрией $\mathscr{X}$ на $\mathscr{X}''$. $\rhd$

3.4.17. *Предложение.* *Пусть $\mathscr{X}$ — НБР с постоянной конечной размерностью над вполне регулярным топологическим пространством. Тогда существует расслоение $\mathscr{X}''$, $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ нормирует $\mathscr{X}$ и отображение двойного штрихования для $\mathscr{X}$ осуществляет изометрию $\mathscr{X}$ на $\mathscr{X}''$.*

$\lhd$ Согласно утверждению 3.4.2 (1) в рассматриваемом случае существует сопряженное расслоение $\mathscr{X}'$ и $\dim \mathscr{X}' = \dim \mathscr{X}$. Из того же утверждения вытекает существование $\mathscr{X}''$. Остается воспользоваться 3.4.4 (4) и 3.4.16 (2). $\rhd$

3.5. Слабо непрерывные сечения

В данном параграфе вводится и исследуется понятие слабо непрерывного сечения банахова расслоения.

Поскольку слабо непрерывные сечения тесно связаны с гомоморфизмами сопряженного расслоения (которые, как известно, имеют локально ограниченную поточечную норму), одной из естественных задач является поиск условий, гарантирующих локальную ограниченность слабо непрерывных сечений. Решению этой задачи посвящены разделы 3.5.3–3.5.5.

В разделах 3.5.6–3.5.14 для различных классов банаховых расслоений исследуется вопрос о непрерывности слабо непрерывных сечений.

Разделы 3.5.15–3.5.23 посвящены поиску условий совпадения пространства слабо непрерывных сечений постоянного банахова расслоения и пространства слабо непрерывных вектор-функций со значениями в соответствующем слое.

В качестве итога исследований, проведенных в данном параграфе, в разделах 3.5.24 и 3.5.25 приведены списки условий непрерывности слабо непрерывных сечений, а также условий совпадения или несовпадения пространств слабо непрерывных сечений и слабо непрерывных вектор-функций.

3.5.1. Пусть $\mathscr{X}$ — НБР над топологическим пространством Q и $D \subset Q$.

Определение. Сечение u над D расслоения $\mathscr{X}$ назовем *слабо непрерывным*, если $\langle u|H\rangle \in C(D)$ для всех $H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$. Совокупность всех таких сечений обозначим символом $C_w(D, \mathscr{X})$.

Если НБР $\mathscr{X}$ имеет сопряженное расслоение, то $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R}) = C(Q, \mathscr{X}')$, и в этом случае слабая непрерывность сечения u равносильна непрерывности функций $\langle u|u'\rangle$ для всех $u' \in C(Q, \mathscr{X}')$.

Очевидно, $C_w(D, \mathscr{X})$ является векторным подпространством пространства всех сечений над D расслоения $\mathscr{X}$ и содержит $C(D, \mathscr{X})$ в качестве векторного подпространства.

Отметим, что слабо непрерывное сечение не обязано быть непрерывным. Действительно, рассмотрев НБР $\mathscr{X}$, построенное в 3.4.9, и положив $u(n) = e_n$, $n \in \mathbb{N}$, и $u(\infty) = 0$, мы получим слабо непрерывное (см. замечание 3.4.13), но, очевидно, разрывное сечение расслоения $\mathscr{X}$.

3.5.2. *Лемма.* *Пусть X — банахово пространство, Q — топологическое пространство и D — подмножество Q. Предположим, что последовательность $(q_n) \subset D$ стремится к точке $q \in D$.*

(1) *Если пространство Q вполне регулярно и $u \in C_w(D, X_Q)$, то последовательность $\big(u(q_n)\big)$ w-w^*-сходится к $u(q)$.*

(2) *Для любого гомоморфизма $H \in \mathrm{Hom}(X_Q, \mathscr{R})$ последовательность $\big(H(q_n)\big)$ слабо* сходится к $H(q)$.*

(3) *Если Q — вполне регулярное пространство Фреше — Урысона и точки q_n попарно различны и не равны q, то для любой w-w^*-сходящейся к нулю последовательности $(x_n) \subset X$ существует сечение $u \in C_w(D, X_Q)$, принимающее значения $u(q_n) = x_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $u(q) = 0$.*

(4) *Если $u \in C_w(D, X)$, то последовательность $\big(u(q_n)\big)$ слабо сходится к $u(q)$.*

$\triangleleft$ (1): Как легко видеть, мы не нарушим общности, предположив, что точки q_n попарно различны и не равны q. Из 3.2.6 (4) следует, что для любой последовательности $(x'_n) \subset X'$, слабо* сходящейся к некоторому элементу $x' \in X'$, существует гомоморфизм $H \in \mathrm{Hom}(X_Q, \mathscr{R})$, принимающий значения $H(q_n) = x'_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $H(q) = x'$. Стало быть, $\langle u(q_n)|x'_n\rangle = \langle u|H\rangle(q_n) \to \langle u|H\rangle(q) = \langle u(q)|x'\rangle$.

Утверждения (2) и (4) очевидны.

(3): Пусть (W_n) и (f_n) — последовательности открытых подмножеств Q и непрерывных функций из Q в $[0,1]$, фигурирующие в формулировке леммы 3.2.5. Тогда сечение u над D, определенное формулой

$$u(p) = \begin{cases} f_n(p)x_n, & p \in D \cap W_n, \\ 0, & p \in D \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n, \end{cases}$$

является слабо непрерывным. В самом деле, возьмем произвольный гомоморфизм $H \in \operatorname{Hom}(X_Q, \mathscr{R})$. Функция $\langle u|H\rangle$ непрерывна на каждом множестве $D \cap \operatorname{cl} W_n$, так как $\operatorname{cl} W_n \subset Q \setminus \operatorname{cl} \bigcup_{k\neq n} W_k$, и на пересечении D с последней (открытой) разностью $\langle u|H\rangle$ совпадает с $\langle x_n|H\rangle f_n$.

Допустим, что функция $\langle u|H\rangle$ разрывна в некоторой точке $p \in \bigl(\operatorname{cl} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n\bigr) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl} W_n$. Тогда существуют число $\varepsilon > 0$, последовательность $(p_m) \subset D$ и строго возрастающая последовательность $(n_m) \subset \mathbb{N}$ такие, что $p \in \operatorname{cl}\{p_m : m \in \mathbb{N}\}$, $p_m \in W_{n_m}$ и $\bigl|\langle u|H\rangle(p_m)\bigr| > \varepsilon$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Поскольку Q — пространство Фреше — Урысона, можно выделить подпоследовательность (p_{m_k}), стремящуюся к p. Легко проверить, что последовательность $\bigl(u(p_m)\bigr)$, а значит, и ее подпоследовательность $\bigl(u(p_{m_k})\bigr)$ w-w^*-сходятся к нулю. Вместе с тем в силу (2) последовательность $\bigl(H(p_{m_k})\bigr)$ слабо* сходится к $H(p)$. Следовательно, $\varepsilon < \bigl|\langle u|H\rangle(p_{m_k})\bigr| \to \bigl|\langle u|H\rangle(p)\bigr| = 0$. Предположение о разрывности $\langle u|H\rangle$ в точке p привело нас к противоречию. Остается добавить, что на множестве $Q \setminus \operatorname{cl} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n$ функция $\langle u|H\rangle$ тождественно равна нулю. $\triangleright$

3.5.3. Пример. Существуют пространство Фреше — Урысона Q, банахово пространство X и сечение $u \in C_w(Q, X_Q)$ такие, что u не является локально ограниченным.

Рассмотрим пространство Q, построенное в примере 3.2.11.

Как видно из следствия 3.1.9 (2), пространство ℓ^∞ содержит некоторую w-w^*-сходящуюся к нулю последовательность (x_n), не сходящуюся по норме. Без ограничения общности можно считать, что $\|x_n\| \geqslant 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$ (это условие достигается переходом к подпоследовательности и дальнейшим поэлементным домножением на подходящую константу). Положим $u\bigl((m,n)\bigr) := mx_n$ для всех $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и $u(\infty) := 0 \in \ell^\infty$. Очевидно, сечение u не является локально ограниченным. Покажем, что $H \otimes u \in C(Q)$ для произвольного гомоморфизма $H \in \operatorname{Hom}\bigl((\ell^\infty)_Q, \mathscr{R}\bigr)$. По лемме 3.5.2 (2) для любого номера m последовательность $\bigl(H\bigl((m,n)\bigr)\bigr)_{n\in\mathbb{N}}$ является слабо* сходящейся, откуда $(H\otimes u)\bigl((m,n)\bigr) = m\bigl\langle x_n\bigl|H\bigl((m,n)\bigr)\bigr\rangle \to 0$ при $n\to\infty$. Последнее означает непрерывность функции $H\otimes u$ (см. описание (1) элементов $C(Q)$ в примере 3.2.11).

3.5.4. Предложение. *Пусть* $\mathscr{X}$ *— НБР над топологическим пространством* Q*. Предположим, что* $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})$ *нормирует* $\mathscr{X}$*, а пространство* Q *удовлетворяет одному из следующих условий:*

(а) *Q вполне регулярно и удовлетворяет первой аксиоме счетности;*

(б) *Q локально псевдокомпактно.*

Тогда всякое слабо непрерывное глобальное сечение $\mathscr{X}$ *локально ограничено.*

$\lhd$ Предположим сначала, что Q удовлетворяет условию (а). Допустим, существует слабо непрерывное не локально ограниченное глобальное сечение u расслоения $\mathscr{X}$. В таком случае найдется точка $q\in Q$, в любой окрестности которой поточечная норма $|\!|\!|u|\!|\!|$ неограничена. Будем считать, что $|\!|\!|u|\!|\!|(q)=0$ (иначе, пользуясь теоремой Дюпре (см. [3, 2.3.5]), из u можно вычесть непрерывное сечение, принимающее в точке q значение $u(q)$).

Поскольку пространство Q удовлетворяет первой аксиоме счетности, существует такая последовательность $(q_n)\subset Q$, что $|\!|\!|u|\!|\!|(q_n) > n^2$, $q_i\neq q_j$ при $i\neq j$ и $q_n\to q$. Воспользовавшись условиями предложения, для каждого номера $n\in\mathbb{N}$ подберем гомоморфизм $H_n\in \mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})$, удовлетворяющий соотношениям $\langle u|H_n\rangle(q_n) = \|u(q_n)\|$ и $|\!|\!|H_n|\!|\!|\leqslant 2$.

Из следствия 3.2.6 (2) вытекает существование гомоморфизма $H\in\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})$ такого, что $H(q)=0$ и $H(q_n)=\frac{1}{n}H_n(q_n)$ для всех $n\in\mathbb{N}$. С другой стороны, $\langle u|H\rangle(q_n) = \frac{1}{n}\langle u|H_n\rangle(q_n) = \frac{1}{n}\|u(q_n)\| > n$, что противоречит слабой непрерывности u, так как $q_n\to q$ и $\langle u|H\rangle(q)=0$.

Предположим теперь, что пространство Q удовлетворяет условию (б). Обозначим пространство ограниченных гомоморфизмов из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{R}$ символом $\mathrm{Hom}^b(\mathscr{X},\mathscr{R})$. Зафиксируем произвольное слабо непрерывное сечение u расслоения $\mathscr{X}$ и для каждой точки $q\in Q$ определим линейный функционал $T_q : \mathrm{Hom}^b(\mathscr{X},\mathscr{R})\to\mathbb{R}$ по правилу $T_q(H) = \langle u(q)|H(q)\rangle$. Снабжая пространство $\mathrm{Hom}^b(\mathscr{X},\mathscr{R})$ равномерной нормой и рассматривая произвольное псевдокомпактное подмножество $U \subset Q$, мы видим, что $\|T_q\| \leqslant \|u(q)\|$ и, кроме того,

$$\sup_{q\in U} \|T_q(H)\| = \sup_{q\in U} \bigl|\langle u|H\rangle(q)\bigr| < \infty$$

для всех $H \in \mathrm{Hom}^b(\mathscr{X},\mathscr{R})$. Согласно [3, 2.4.11] нормированное пространство $\mathrm{Hom}^b(\mathscr{X},\mathscr{R})$ является банаховым. Поэтому $\sup_{q\in U} \|T_q\| < \infty$ в силу принципа равномерной ограниченности. Остается привлечь соотношения

$$\|u(q)\| = \sup\bigl\{\bigl|\langle u(q)|H(q)\rangle\bigr| : H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R}),\ \|H\| \leqslant 1\bigr\} = \|T_q\|. \ \triangleright$$

Отметим, что дополнительное ограничение, накладываемое на пространство Q в последнем предложении, является существенным, даже если НБР $\mathscr{X}$ постоянно (см. 3.5.3).

3.5.5. Следствие. *Пусть X — банахово пространство и Q — топологическое пространство, удовлетворяющее условию* (а) *или* (б) *предложения 3.5.4. Тогда всякое слабо непрерывное глобальное сечение X_Q локально ограничено.*

$\triangleleft$ Утверждение немедленно вытекает из 3.5.4 и 3.4.4 (3). $\triangleright$

3.5.6. Замечание. Как следует из определения непрерывности сечения (см. [3, 2.1.2]), если Q — топологическое пространство, $\mathscr{U}$ — некоторое векторное пространство сечений над $D \subset Q$ расслоения $\mathscr{X}$ над Q и все элементы $\mathscr{U}$ имеют непрерывные поточечные нормы, то включение $C(D,\mathscr{X}) \subset \mathscr{U}$ влечет равенство $C(D,\mathscr{X}) = \mathscr{U}$.

Предложение. *Пусть $\mathscr{X}$ —* НБР *над топологическим пространством Q.*

(1) *Предположим, что расслоение $\mathscr{X}$ имеет сопряженное, и пусть $\imath$ — отображение двойного штрихования для $\mathscr{X}$. Для любого подмножества $D \subset Q$ линейный оператор $u \mapsto \imath \otimes u$, определенный на пространстве локально ограниченных сечений $u \in C_w(D,\mathscr{X})$, действует в $\mathrm{Hom}_D(\mathscr{X}',\mathscr{R})$. Если, кроме того, $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})$ нормирует $\mathscr{X}$, то этот оператор сохраняет поточечную норму.*

(2) *Предположим, что $\mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{R})$ нормирует $\mathscr{X}$ и расслоение $\mathscr{X}$ имеет второе сопряженное. Если сечение $u \in C_w(Q,\mathscr{X})$ локально ограничено, то $u \in C(Q,\mathscr{X})$.*

$\lhd$ (1): Включение $\imath \otimes u \in \mathrm{Hom}_D(\mathscr{X}', \mathscr{R})$ имеет место в силу теоремы [3, 2.4.9]. Если же $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ нормирует $\mathscr{X}$, то равенство $\|\imath \otimes u\| = \|u\|$ вытекает из 3.4.10 (1).

(2): Пусть сечение $u \in C_w(Q, \mathscr{X})$ локально ограничено. Тогда в силу утверждения (1) имеет место включение $\imath \otimes u \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}', \mathscr{R})$, которое вместе с равенством $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}', \mathscr{R}) = C(Q, \mathscr{X}'')$ дает непрерывность поточечной нормы гомоморфизма $\imath \otimes u$. Поскольку согласно (1) функции $\|\imath \otimes u\|$ и $\|u\|$ совпадают, последняя из них также непрерывна. Таким образом, векторное пространство $\mathscr{U}$ локально ограниченных сечений $u \in C_w(Q, \mathscr{X})$ состоит из сечений, имеющих непрерывные поточечные нормы, и содержит $C(Q, \mathscr{X})$. Приведенное выше замечание позволяет заключить, что $\mathscr{U} = C(Q, \mathscr{X})$. $\rhd$

3.5.7. *Следствие.* *Пусть $\mathscr{X}$ — НБР с рефлексивными слоями над топологическим пространством Q. Предположим, что $\mathscr{X}$ имеет сопряженное расслоение и $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ нормирует $\mathscr{X}$. Пусть, кроме того, $\imath$ — отображение двойного штрихования для $\mathscr{X}$.*

(1) *Для любого подмножества $D \subset Q$ отображение $u \mapsto \imath \otimes u$ осуществляет линейную биекцию пространства локально ограниченных сечений $u \in C_w(D, \mathscr{X})$ на $\mathrm{Hom}_D(\mathscr{X}', \mathscr{R})$, сохраняя поточечную норму.*

(2) *Предположим, что Q удовлетворяет одному из условий* (а) *или* (б) *предложения 3.5.4. Тогда отображение $u \mapsto \imath \otimes u$ является линейной биекцией $C_w(Q, \mathscr{X})$ на $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}', \mathscr{R})$, сохраняющей поточечную норму.*

(3) *Если $C_w(Q, \mathscr{X}) = C(Q, \mathscr{X})$, то расслоение $\mathscr{X}$ имеет второе сопряженное.*

$\lhd$ (1): Ввиду 3.5.6 (1) достаточно для произвольного подмножества $D \subset Q$ и произвольного гомоморфизма $H \in \mathrm{Hom}_D(\mathscr{X}', \mathscr{R})$ предъявить локально ограниченное сечение $u \in C_w(D, \mathscr{X})$ такое, что $\imath \otimes u = H$.

Воспользовавшись утверждением 3.4.10 (2), мы можем рассмотреть функцию $u : q \in D \mapsto \imath(q)^{-1} H(q)$. Легко видеть, что $u \in C_w(D, \mathscr{X})$ и $\imath \otimes u = H$. При этом функция u локально ограничена, так как таковыми являются гомоморфизмы (теорема [3, 2.4.4]).

(2): Непосредственно вытекает из (1) и предложения 3.5.4.

(3): Если $C_w(Q, \mathscr{X}) = C(Q, \mathscr{X})$, то в силу (1) все элементы $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}', \mathscr{R})$ имеют непрерывные поточечные нормы, что является достаточным условием существования $\mathscr{X}'' = (\mathscr{X}')'$ (см. 3.5.1). $\rhd$

3.5.8. Предложение. *Пусть* $\mathscr{X}$ — НБР *с постоянной конечной размерностью над вполне регулярным топологическим пространством* Q. *Для любого подмножества* $D \subset Q$ *имеет место равенство* $C_w(D, \mathscr{X}) = C(D, \mathscr{X})$.

$\lhd$ Сформулированное утверждение можно вывести из теоремы 3.2.12, предложения 3.4.10 (1) и замечания 3.5.6. $\rhd$

3.5.9. Следствие. *Пусть топологическое пространство* Q *и* НБР $\mathscr{X}$ *над* Q *удовлетворяют условиям предложения 3.5.4. Тогда из существования* $\mathscr{X}''$ *следует равенство* $C_w(Q, \mathscr{X}) = C(Q, \mathscr{X})$.

$\lhd$ Утверждение вытекает из предложений 3.5.4 и 3.5.6 (2). $\rhd$

3.5.10. Следствие. *Пусть* $\mathscr{X}$ — НБР *с рефлексивными слоями над топологическим пространством* Q, *удовлетворяющим одному из условий* (а) *или* (б) *предложения 3.5.4. Предположим, что* $\mathscr{X}$ *имеет сопряженное расслоение и* $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ *нормирует* $\mathscr{X}$. *Тогда существование второго сопряженного расслоения* $\mathscr{X}''$ *равносильно равенству* $C_w(Q, \mathscr{X}) = C(Q, \mathscr{X})$.

$\lhd$ Необходимость и достаточность суть частные случаи 3.5.9 и 3.5.7 (2) соответственно. $\rhd$

3.5.11. Предложение. *Пусть* $\mathscr{X}$ — НБР *с гильбертовыми слоями над произвольным топологическим пространством. Если глобальное сечение* $\mathscr{X}$ *локально ограничено и слабо непрерывно, то оно непрерывно.*

$\lhd$ Пусть Q — топологическое пространство и $\mathscr{X}$ — НБР над Q с гильбертовыми слоями. Зафиксируем локально ограниченное сечение $v \in C_w(Q, \mathscr{X})$ и воспользуемся отображением h из леммы 3.4.3, утверждающей, что $h[C(Q, \mathscr{X})] \subset \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$. Таким образом, справедливы соотношения $\langle c|h(u)\rangle = \langle u|h(c)\rangle \in C(Q)$ для всех $c \in C(Q, \mathscr{X})$, из которых с учетом [3, 2.4.4] следует, что $h(u) \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$. Значит, $|\!|\!| u |\!|\!|^2 = \langle u|h(u)\rangle \in C(Q)$. Наконец, поскольку $|\!|\!| u - c |\!|\!|^2 = |\!|\!| u |\!|\!|^2 - 2\langle c|h(u)\rangle + |\!|\!| u |\!|\!|^2 \in C(Q)$ для всех $c \in C(Q, \mathscr{X})$, сечение u непрерывно. $\rhd$

3.5.12. Предложение. *Пусть* $\mathscr{X}$ — НБР *с гильбертовыми слоями над топологическом пространством* Q. *Предположим, что* Q *удовлетворяет одному из условий (а) или (б) предложения 3.5.4 или* *является хаусдорфовым топологическим пространством, содержащим конечное число неизолированных точек. Тогда* $C_w(Q, \mathscr{X}) = C(Q, \mathscr{X})$.

$\lhd$ Утверждение предложения для случая пространства Q, удовлетворяющего условию (а) или (б) предложения 3.5.4, непосредственно вытекает из предложений 3.5.4 и 3.5.11 и леммы 3.4.3.

Пусть Q — хаусдорфово топологическое пространство, содержащее конечное число неизолированных точек. Как и в доказательстве 3.4.4 (10), не нарушая общности, будем считать, что пространство Q имеет единственную неизолированную точку q. В этом случае согласно замечанию 3.1.11 пространство Q является нормальным и, в частности, вполне регулярным.

Рассмотрим произвольное сечение $v \in C_w(Q, \mathscr{X})$ и покажем, что оно является локально ограниченным. (Тем самым в силу предложения 3.5.11 наше утверждение будет доказано.) Можно считать, что $v(q) = 0$, так как из v можно вычесть глобальное ограниченное непрерывное сечение со значением $v(q)$ в точке q, существующее по теореме Дюпре (см. [3, 2.3.5]).

Пусть h — отображение, фигурирующее в лемме 3.4.3. Вследствие этой леммы $\langle u|h(v)\rangle = \langle v|h(u)\rangle \in C(Q)$ для всех $u \in C(Q, \mathscr{X})$. Для каждой точки $p \in Q$ положим

$$w(p) = \begin{cases} h(v)(p), & \text{если } \|v(p)\| \leqslant 1, \\ \dfrac{h(v)(p)}{\|v(p)\|}, & \text{если } \|v(p)\| > 1. \end{cases}$$

Для любого сечения $u \in C(Q, \mathscr{X})$ имеют место соотношения $|\langle u|w\rangle| \leqslant |\langle u|h(v)| \in C(Q)$ и $\langle u|h(v)\rangle(q) = 0$, откуда следует, что $\langle u|w\rangle \in C(Q)$, поскольку q — единственная неизолированная точка Q. Стало быть, $w \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ в силу теоремы [3, 2.4.4], а значит, $\langle v|w\rangle \in C(Q)$. При этом

$$\langle v|w\rangle(p) = \begin{cases} \|v(p)\|^2, & \text{если } \|v(p)\| \leqslant 1, \\ \|v(p)\|, & \text{если } \|v(p)\| > 1 \end{cases}$$

для всех $p \in Q$ и, следовательно, $|\!|\!|v|\!|\!| \leqslant 1$ в окрестности $\{|\langle v|w\rangle| < 1\}$ точки q. Остальные точки пространства Q являются изолированными. Таким образом, сечение v локально ограничено. $\rhd$

3.5.13. *Лемма.* *Предположим, что* НБР $\mathscr{X}$ *над топологическим пространством* Q *имеет сопряженное расслоение. Для любых* *сечений $u \in C(Q, \mathscr{X})$ и $v \in C_w(Q, \mathscr{X}')$ вещественная функция $\langle u|v\rangle$ непрерывна.*

$\lhd$ Пусть $\imath$ — отображение двойного штрихования для $\mathscr{X}$. Тогда $\imath \otimes u \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}', \mathscr{R})$ согласно предложению 3.5.6 (1). Следовательно, $\langle u|v\rangle = \langle v \mid \imath \otimes u\rangle \in C(Q)$. $\rhd$

Предложение. *Предположим, что НБР $\mathscr{X}$ над топологическим пространством Q имеет сопряженное расслоение.*

(1) *Если сечение $v \in C_w(Q, \mathscr{X}')$ локально ограничено, то $v \in C(Q, \mathscr{X}')$.*

(2) *Если топологическое пространство Q удовлетворяет условию (а) или (б) предложения 3.5.4, то $C_w(Q, \mathscr{X}') = C(Q, \mathscr{X}')$.*

(3) *Если расслоение $\mathscr{X}$ имеет постоянную конечную размерность, то $C_w(Q, \mathscr{X}') = C(Q, \mathscr{X}')$.*

$\lhd$ (1): Пусть $v \in C_w(Q, \mathscr{X}')$ — локально ограниченное сечение. Согласно лемме $\langle u|v\rangle \in C(Q)$ для всех $u \in C(Q, \mathscr{X})$. Следовательно, $v \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ в силу теоремы [3, 2.4.9] и локальной ограниченности v. Остается вспомнить, что $\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R}) = C(Q, \mathscr{X}')$.

(2): Достаточно установить включение $C_w(Q, \mathscr{X}') \subset C(Q, \mathscr{X}')$. Пусть $v \in C_w(Q, \mathscr{X}')$. Согласно лемме $\langle u|v\rangle \in C(Q)$ для всех $u \in C(Q, \mathscr{X})$. Если пространство Q удовлетворяет условию 3.5.4 (а), то $v \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ в силу теоремы 3.2.10, а если Q удовлетворяет условию 3.5.4 (б), то $v \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ в силу теоремы [3, 2.4.7]. Таким образом, в любом из рассматриваемых случаев $v \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R}) = C(Q, \mathscr{X}')$.

(3): Из леммы 3.5.13 и теоремы 3.2.12 следует, что $C_w(Q, \mathscr{X}') \subset \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$. С другой стороны,

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R}) = C(Q, \mathscr{X}') \subset C_w(Q, \mathscr{X}'). \ \rhd$$

3.5.14. *Теорема.* *Пусть X — банахово пространство и Q — вполне регулярное топологическое пространство Фреше — Урысона.*

(1) *Если X обладает свойством* WS, *то $C_w(D, X_Q) = C(D, X_Q)$ для всех подмножеств $D \subset Q$.*

(2) *Если $C_w(D, X_Q) = C(D, X_Q)$ для некоторого подмножества $D \subset Q$, содержащего какую-либо свою предельную точку (в частности, если $D = Q$ и пространство Q не дискретно), то банахово пространство X обладает свойством* WS.

Например, если топологическое пространство Q не дискретно, то равенство $C_w(Q, X_Q) = C(Q, X_Q)$ равносильно тому, что X обладает свойством WS.

$\lhd$ (1): Предположим, $C_w(D, X_Q) \neq C(D, X_Q)$ для некоторого подмножества $D \subset Q$ и покажем, что X не обладает свойством WS. Возьмем сечение $u \in C_w(D, X_Q)$, разрывное в точке $q \in D$. Будем считать, что $u(q) = 0$, так как иначе из u можно вычесть постоянное сечение со значением $u(q)$. Поскольку Q — пространство Фреше — Урысона, имеется последовательность точек $(q_n) \subset D$, стремящаяся к q, такая, что $|\!|\!|u|\!|\!|(q_n) > \varepsilon > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В силу леммы 3.5.2 (1) последовательность $\bigl(u(q_n)\bigr)$ w-w^*-сходится к $u(q) = 0$. Следовательно, X не обладает свойством WS.

(2): Предположим, что X не обладает свойством WS, и установим неравенство $C_w(D, X_Q) \neq C(D, X_Q)$ для любого подмножества $D \subset Q$, содержащего какую-либо свою предельную точку. Пусть $q \in D$ — предельная точка D. Поскольку Q — пространство Фреше — Урысона, существует последовательность $(q_n) \subset D \backslash \{q\}$, стремящаяся к q. Без ограничения общности можно считать, что $q_i \neq q_j$ при $i \neq j$. Поскольку X не обладает свойством WS, имеется w-w^*-сходящаяся к нулю последовательность $(x_n) \subset X$, не сходящаяся к нулю по норме. Согласно лемме 3.5.2 (3) существует сечение $u \in C_w(D, X_Q)$, принимающее значения $u(q_n) = x_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $u(q) = 0$. Очевидно, $u \notin C(D, X_Q)$. $\rhd$

3.5.15. *Лемма.* *Пусть X — банахово пространство, $(x_\alpha)_{\alpha \in \aleph} \subset X$ — слабо сходящаяся к нулю сеть и $(x'_\alpha)_{\alpha \in \aleph} \subset X'$ — ограниченная слабо* сходящаяся к нулю сеть. Предположим, что числовая сеть $\langle x_\alpha | x'_\alpha \rangle$ не сходится к нулю, и положим $Q := \aleph^\bullet$ (см. 3.1.13). Тогда включение $C_w(Q, X_Q) \subset C_w(Q, X)$ является строгим.*

$\lhd$ Рассмотрим вектор-функции $u : Q \to X$ и $H : Q \to X'$, удовлетворяющие равенствам $u(\alpha) = x_\alpha$, $H(\alpha) = x'_\alpha$ для всех $\alpha \in \aleph$ и $u(\infty) = 0$, $H(\infty) = 0$. В силу замечания 3.1.13 (2) функция u является слабо непрерывной, а функция H — слабо* непрерывной. Поскольку, кроме того, функция H ограничена, из теоремы [3, 2.4.9] вытекает, что $H \in \operatorname{Hom}\bigl(X_Q, \mathscr{R}\bigr)$. С другой стороны, вновь привлекая замечание 3.1.13 (2), мы заключаем, что функция $\langle u | H \rangle$ не является непрерывной, а значит, $u \notin C_w(Q, X_Q)$. $\rhd$

3.5.16. *Предложение.* *Для всякого бесконечномерного бана-*

хова пространства X существует нормальное топологическое пространство Q такое, что включение $C_w(Q, X_Q) \subset C_w(Q, X)$ является строгим.

$\lhd$ Утверждение предложения вытекает из 3.1.4 и 3.5.15. $\rhd$

3.5.17. *Следствие.* *Пусть X — банахово пространство. Равенство $C_w(Q, X_Q) = C_w(Q, X)$ имеет место для любого топологического пространства Q тогда и только тогда, когда пространство X конечномерно.*

Заметим, что в случае конечномерного пространства X имеют место равенства $C(Q, X_Q) = C_w(Q, X_Q) = C_w(Q, X) = C(Q, X)$.

3.5.18. *Теорема.* *Пусть X — банахово пространство и Q — произвольное топологическое пространство.*

(1) *Если Q — пространство Фреше — Урысона и X обладает свойством DP^*, то $C_w(D, X_Q) = C_w(D, X)$ для любого подмножества $D \subset Q$.*

(2) *Пусть подмножество $D \subset Q$ таково, что в $C(Q)$ существует функция, не являющаяся локально постоянной на D. Тогда из равенства $C_w(D, X_Q) = C_w(D, X)$ следует, что пространство X обладает свойством DP^*.*

В частности, если Q — недискретное вполне регулярное пространство Фреше — Урысона, то равенство $C_w(Q, X_Q) = C_w(Q, X)$ равносильно тому, что X обладает свойством DP^*.

$\lhd$ (1): Пусть $C_w(D, X_Q) \neq C_w(D, X)$ для некоторого подмножества $D \subset Q$. Покажем, что X не обладает свойством DP^*. Возьмем вектор-функцию $u \in C_w(D, X) \setminus C_w(D, X_Q)$ и рассмотрим гомоморфизм $H \in \mathrm{Hom}(X_Q, \mathscr{R})$ такой, что функция $\langle u|H \rangle$ разрывна в некоторой точке $q \in D$. Тогда в q разрывна и функция $\langle u - u_q \mid H - H_q \rangle$, где u_q и H_q — постоянные функции со значениями $u(q)$ и $H(q)$ соответственно. $\big($Это справедливо в силу того, что функции $\langle u|H_q \rangle$, $\langle u_q|H \rangle$ и $\langle u_q|H_q \rangle$ непрерывны.$\big)$ Поскольку Q — пространство Фреше — Урысона, найдется стремящаяся к q последовательность $(q_n) \subset D \setminus \{q\}$, которая удовлетворяет условию $|\langle u(q_n) - u(q) \mid H(q_n) - H(q) \rangle| > \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и всех $n \in \mathbb{N}$. Вместе с тем в силу 3.5.2 (2), (4) последовательность $\big(u(q_n) - u(q)\big)$ слабо сходится к нулю, а последовательность $\big(H(q_n) - H(q)\big)$ слабо* сходится к нулю. Следовательно, X не обладает свойством DP^*.

(2): Предположим, что пространство X не обладает свойством DP*. Рассмотрим слабо сходящуюся к нулю последовательность $(x_n) \subset X$ и слабо* сходящуюся к нулю последовательность $(x'_n) \subset X'$ такие, что $\langle x_n | x'_n \rangle$ не сходится к нулю. Переходом к подпоследовательностям и домножением всех элементов одной из них на $\pm\delta$ при подходящем $\delta \in \mathbb{R}$ можно добиться выполнения неравенств $\langle x_n | x'_n \rangle \geqslant 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Дополнительно потребуем, чтобы $\langle x_{n+1} | x'_n \rangle + \langle x_n | x'_{n+1} \rangle \geqslant 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, чего, в свою очередь, можно добиться попарным домножением на ± 1 элементов x_2 и x'_2, x_3 и x'_3 и т. д. Пусть вектор-функции $u : [0,1] \to X$ и $u' : [0,1] \to X'$ удовлетворяют равенствам $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$,

$$u\big(\lambda \tfrac{1}{n+1} + (1-\lambda)\tfrac{1}{n}\big) = \lambda x_{n+1} + (1-\lambda) x_n,$$
$$u'\big(\lambda \tfrac{1}{n+1} + (1-\lambda)\tfrac{1}{n}\big) = \lambda x'_{n+1} + (1-\lambda) x'_n$$

для всех $\lambda \in [0,1]$ и $n \in \mathbb{N}$. По лемме 3.1.14 функция u слабо непрерывна, а функция u' слабо* непрерывна. Рассмотрим функцию $\langle u | u' \rangle : [0,1] \to \mathbb{R}$. Для произвольных $n \in \mathbb{N}$ и $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned}
\langle u|u'\rangle\big(\lambda \tfrac{1}{n+1} + (1-\lambda)\tfrac{1}{n}\big) =& \big\langle \lambda x_{n+1} + (1-\lambda) x_n \;\big|\; \lambda x'_{n+1} + (1-\lambda) x'_n \big\rangle = \\
=& \lambda^2 \langle x_{n+1} | x'_{n+1} \rangle + (1-\lambda)^2 \langle x_n | x'_n \rangle + \\
&+ \lambda(1-\lambda)\big(\langle x_{n+1} | x'_n \rangle + \langle x_n | x'_{n+1} \rangle\big) \geqslant \\
\geqslant& \lambda^2 + (1-\lambda)^2 + 0 = \\
=& 2(\lambda - 1/2)^2 + 1/2 \geqslant \\
\geqslant& 1/2.
\end{aligned}$$

Итак, $\langle u|u'\rangle(0) = 0$ и, кроме того, $\langle u|u'\rangle \geqslant 1/2$ на $(0,1]$. Теперь возьмем непрерывную функцию $g \in C(Q)$ такую, что ограничение $g|_D$ не постоянно в любой окрестности некоторой точки $q \in D$. Не нарушая общности, можно считать, что $g : Q \to [0,1]$ и $g(q) = 0$ (см. доказательство 3.1.15). Как легко видеть, $u \circ g|_D \in C_w(D, X)$ и $u' \circ g \in \operatorname{Hom}(X_Q, \mathscr{R})$. Ясно, что функция $\big\langle (u \circ g)|_D \;\big|\; u' \circ g \big\rangle = \langle u|u'\rangle \circ g|_D$ равна нулю в точке q и, кроме того, образ этой функции на каждой окрестности точки q пересекается с промежутком $[1/2, \infty)$. Следовательно, $(u \circ g)|_D \notin C_w(D, X_Q)$.

Последнее утверждение теоремы вытекает из утверждений (1) и (2) и предложения 3.1.12 (3). $\triangleright$

3.5.19. Следствие. *Пусть X — банахово пространство и Q — топологическое пространство, не являющееся функционально дискретным. В каждом из следующих случаев включение $C_w(Q, X_Q) \subset C_w(Q, X)$ является строгим:*

(1) *X — бесконечномерное рефлексивное банахово пространство;*
(2) *X — сепарабельное банахово пространство, не обладающее свойством Шура;*
(3) *X — банахово пространство, удовлетворяющее одному из условий 3.1.8 (3), (5) или (6) и не обладающее свойством Шура.*

$\triangleleft$ В силу утверждения (2) теоремы 3.5.18 достаточно показать, что в каждом из рассмотренных случаев пространство X не обладает свойством DP*. Нарушение этого условия в случаях (2) и (3) обеспечивается леммой 3.1.9 (3), а в случае (1) можно воспользоваться теоремой Джозефсона — Ниссенцвейга [10, XII], согласно которой на единичной сфере пространства X'' существует слабо* сходящаяся к нулю последовательность. $\triangleright$

3.5.20. Предложение. *Пусть X — банахово пространство и Q — функционально дискретное топологическое пространство. Если в X' существует счетное тотальное подмножество, то $C(Q, X) = C(Q, X_Q) = C_w(Q, X_Q) = C_w(Q, X)$.*

$\triangleleft$ Доказываемое утверждение вытекает из леммы 3.1.16, так как всегда справедливы соотношения

$$C(Q, X) = C(Q, X_Q) \subset C_w(Q, X_Q) \subset C_w(Q, X). \ \triangleright$$

3.5.21. Предложение. *Пусть X — произвольное банахово пространство. Предположим, что в X' нет счетного тотального множества. Тогда существует функционально дискретное топологическое пространство Q такое, что включение $C_w(Q, X_Q) \subset C_w(Q, X)$ является строгим.*

$\triangleleft$ Утверждение предложения вытекает из лемм 3.1.6 и 3.5.15 и замечания 3.1.13 (1). $\triangleright$

3.5.22. Следующее утверждение является прямым следствием предложений 3.5.20 и 3.5.21.

Теорема. *Пусть X — произвольное банахово пространство. Равенство $C_w(Q, X_Q) = C_w(Q, X)$ имеет место для всякого функционально дискретного топологического пространства Q в том и только том случае, если в X' существует счетное тотальное множество.*

3.5.23. ***Следствие.*** *Пусть Q — топологическое пространство и X — сепарабельное банахово пространство, не обладающее свойством Шура. Равенство $C_w(Q, X_Q) = C_w(Q, X)$ имеет место в том и только том случае, если топологическое пространство Q функционально дискретно.*

$\triangleleft$ Необходимость следует из 3.1.8 (2), леммы 3.1.9 (3) и теоремы 3.5.18 (2), а достаточность — из предложения 3.5.20. $\triangleright$

В завершение параграфа мы приведем списки условий непрерывности слабо непрерывных сечений, а также условий совпадения или несовпадения пространств слабо непрерывных сечений и слабо непрерывных вектор-функций. Эти списки не содержат дополнительных новых результатов и лишь подводят итог проведенным исследованиям.

3.5.24. Пусть $\mathscr{X}$ — НБР над топологическим пространством Q. В каждом из перечисленных ниже случаев имеет место равенство $C_w(Q, \mathscr{X}) = C(Q, \mathscr{X})$:

(1) $\mathscr{X}$ имеет постоянную конечную размерность, и пространство Q вполне регулярно;

(2) Q — экстремально несвязный компакт и расслоение $\mathscr{X}$ просторно;

(3) $\mathscr{X}$ — НБР с гильбертовыми слоями, и пространство Q удовлетворяет одному из следующих условий:

- **(а)** пространство Q вполне регулярно и удовлетворяет первой аксиоме счетности;
- **(б)** пространство Q локально псевдокомпактно;
- **(в)** пространство Q хаусдорфово и содержит конечное число неизолированных точек;

(4) $\mathscr{X} = X_Q$, где X — банахово пространство, обладающее свойством WS (см. 3.1.8), и Q — вполне регулярное пространство Фреше — Урысона;

(5) $\mathscr{X} = X_Q$, где X — такое банахово пространство, что X' содержит счетное тотальное множество (например, X сепарабельно или является сопряженным к сепарабельному банахову пространству), и Q — функционально дискретное пространство;

(6) $\mathscr{X}$ является сопряженным к некоторому НБР, и пространство Q удовлетворяет одному из условий (3) (а) или (3) (б);

(7) $\mathscr{X}$ — сопряженное расслоение к некоторому НБР, имеющему постоянную конечную размерность (заметим, что согласно предложению 3.4.2 (1) всякое НБР с постоянной конечной размерностью имеет сопряженное расслоение);

(8) $\mathscr{X}$ имеет второе сопряженно расслоение, $\mathrm{Hom}_Q(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ нормирует $\mathscr{X}$, и пространство Q удовлетворяет одному из условий (3) (а) или (3) (б).

◁ Равенство $C_w(Q, \mathscr{X}) = C(Q, \mathscr{X})$ в случаях (1)–(8) непосредственно вытекает из 3.5.8, [3, 3.3.7 (1)], 3.5.12, 3.5.14 (1), 3.5.20, предложения 3.5.13 (2), предложения 3.5.13 (3) и следствия 3.5.9 соответственно. ▷

3.5.25. Пусть X — банахово пространство и Q — топологическое пространство.

В следующих случаях пространства $C_w(Q, X_Q)$ и $C_w(Q, X)$ совпадают:

(1) пространство X конечномерно;

(2) X обладает свойством DP* (см. 3.1.9), и Q — пространство Фреше — Урысона;

(3) в X' существует счетное тотальное подмножество, и пространство Q функционально дискретно.

В следующих случаях включение $C_w(Q, X_Q) \subset C_w(Q, X)$ является строгим:

(4) X не обладает свойством DP*, и пространство Q не является функционально дискретным;

(5) пространство X бесконечномерно, и Q — топологическое пространство, о котором идет речь в предложении 3.5.16;

(6) в X' не существует счетного тотального подмножества, и Q — функционально дискретное топологическое пространство, о котором идет речь в предложении 3.5.21.

◁ Для проверки перечисленных утверждений в случаях (1)–(6) достаточно воспользоваться результатами 3.5.17, 3.5.18 (1), 3.5.20, 3.5.18 (2), 3.5.16 и 3.5.21 соответственно. ▷

Литература

1. Архангельский А. В., Пономарёв В. И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях.—М.: Наука, 1974.

2. Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств.—М.: Физматгиз, 1961.

3. Гутман А. Е. Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Линейные операторы, согласованные с порядком.—Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 1995.—С. 63–211.

4. Коптев А. В. Критерий рефлексивности слоев банахова расслоения // Сиб. мат. журн.—1995.—Т. 36, № 4.—С. 851–856.

5. Кусраев А. Г. Векторная двойственность и ее приложения. — Новосибирск: Наука, 1985.

6. Кутателадзе С. С. Основы функционального анализа.—Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 1995.

7. Энгелькинг Р. Общая топология.—М.: Мир, 1986.

8. Aliprantis C. D. and Burkinshaw O. Positive Operators.—New York: Academic Press, 1985.

9. Burden C. W. and Mulvey C. J. Banach spaces in categories of sheaves // Applications of Sheaves.—Berlin: Springer-Verlag, 1979. —P. 169–196.—(Lecture Notes in Math., **753**.)

10. Diestel J. Sequences and Series in Banach Spaces.—Berlin, etc.: Springer-Verlag, 1984.—(Graduate Texts in Mathematics, **92**.)

11. Fourman M. P., Mulvey C. J., and Scott D. S. Applications of Sheaves.—Berlin: Springer-Verlag, 1979.—(Lecture Notes in Math., **753**.)

12. Gierz G. Bundles of Topological Vector Spaces and Their Duality. —Berlin: Springer-Verlag, 1982.—(Lecture Notes in Math., **955**.)

13. Gutman A. E. Banach bundles in the theory of lattice-normed spaces. I. Continuous Banach bundles // Siberian Adv. Math.—1993.—V. 3, No. 3.—P. 1–55.

14. Gutman A. E. Banach bundles in the theory of lattice-normed spaces. II. Measurable Banach bundles // Siberian Adv. Math.—1993.—V. 3, No. 4.—P. 8–40.

15. Gutman A. E. Banach bundles in the theory of lattice-normed spaces. III. Approximating sets and bounded operators // Siberian Adv. Math.—1994.—V. 4, No. 2.—P. 54–75.

16. Gutman A. E. Locally one-dimensional K-spaces and σ-distributive Boolean algebras // Siberian Adv. Math.—1995.—V. 5, No. 2. —P. 99–121.

17. Hofmann K. H. Representations of algebras by continuous sections // Bull. Amer. Math. Soc.—1972.—V. 78.—P. 291–373.

18. Hofmann K. H. and Keimel K. Sheaf theoretical concepts in analysis: bundles and sheaves of Banach spaces, Banach $C(X)$-modules // Applications of Sheaves.—Berlin: Springer-Verlag, 1979.— P. 414–441.—(Lecture Notes in Math., **753**.)

19. Kitchen J. W. and Robbins D. A. Gelfand Representation of Banach Modules.—Warszawa: Polish Scientific Publishers, 1982.— (Dissertationes Mathematicae, No. 203.)

20. Schochetman I. E. Kernels and integral operators for continuous sums of Banach spaces // Mem. Amer. Math. Soc.—1978.—V. 14, No. 202.—P. 1–120.

21. Wnuk W. Banach Lattices with Properties of the Schur Type. A Survey.—Bari: Dipartimento di Matematica dell'Università di Bari, 1983.