УДК 517.98

А. Е. Гутман, А. В. Коптев

ПРОСТРАНСТВА CD_0-СЕЧЕНИЙ И CD_0-ГОМОМОРФИЗМОВ БАНАХОВЫХ РАССЛОЕНИЙ

В данной работе рассматривается банахово пространство $CD_0(Q, \mathcal{X}) = C(Q, \mathcal{X}) + c_0(Q, \mathcal{X})$, элементы которого являются суммами непрерывных и «дискретных» сечений банахова расслоения $\mathcal{X}$ над компактом Q без изолированных точек. Как известно, это пространство изометрично пространству $C\big(\widetilde{Q}, \widetilde{\mathcal{X}}\big)$ непрерывных сечений некоторого банахова расслоения $\widetilde{\mathcal{X}}$ над компактом $\widetilde{Q} = Q\times\{0,1\}$ (с топологией специального вида). Мы уточняем связь между $\mathcal{X}$ и $\widetilde{\mathcal{X}}$ на примере подрасслоений, а также расслоений, полученных непрерывной заменой переменной и ограничением на топологическое подпространство. Кроме того, мы вводим и исследуем пространство CD_0-гомоморфизмов $CD_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ банаховых расслоений $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ и показываем, что оно обладает рядом свойств, аналогичных свойствам пространства CD_0-сечений.

Ключевые слова: непрерывное банахово расслоение, сечение банахова расслоения, банахов $C(Q)$-модуль, гомоморфизм банаховых расслоений, гомоморфизм банаховых $C(Q)$-модулей, удвоение по Александрову.

Введение

Пусть Q — непустой компакт (т. е. компактное хаусдорфово топологическое пространство) без изолированных точек, $C(Q)$ — множество всех определенных на Q непрерывных вещественных функций и $c_0(Q)$ — совокупность всех таких функций $f : Q \to \mathbb{R}$, что множество $\{q \in Q : |f(q)| > \varepsilon\}$ конечно для любого числа $\varepsilon > 0$.

Пространство $CD_0(Q) = C(Q) + c_0(Q)$, введенное Ю. А. Абрамовичем и А. В. Викстедом [7, 8] в качестве примера банаховой решетки с некоторыми необычными порядково-топологическими свойствами, послужило предметом дальнейших интенсивных исследований (см., например: [1, 3, 9–11, 13, 14]), одним из результатов которых явилось представление $CD_0(Q)$ в виде пространства $C\big(\widetilde{Q}\big)$ непрерывных функций на множестве $\widetilde{Q} = Q\times\{0,1\}$, наделенном некоторой компактной хаусдорфовой топологией (см. [11]). В данной работе мы продолжаем инициированные в [13] исследования, связанные с распространением упомянутых результатов на случай сечений банаховых расслоений. (Краткое изложение истории рассматриваемого круга вопросов и анонс приведенных ниже новых результатов можно найти в [3].)

§ 1. Предварительные сведения

Банахово расслоение (или, точнее, непрерывное банахово расслоение) над Q является формализацией интуитивного представления о «непрерывной» функции $\mathcal{X}$, определенной на Q и сопоставляющей каждой точке $q \in Q$ некоторое банахово пространство $\mathcal{X}(q)$

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2007. Т. 7, вып. 4. С. 27–48

(называемое слоем $\mathcal{X}$ в точке q). Один из формальных подходов к определению «непрерывности» $\mathcal{X}$ (см. [2, § 2.1; 5, 2.4.3]) заключается в выделении так называемой непрерывной структуры в $\mathcal{X}$ — некоторого векторного подпространства $\mathcal{C}_{\mathcal{X}}$ пространства сечений

$$S(Q,\mathcal{X}) \,=\, \bigl\{u\colon Q \to \textstyle\bigcup_{q\in Q}\mathcal{X}(q) \,:\, u(q)\in\mathcal{X}(q) \text{ для всех } q\in Q\bigr\}$$

(снабженного поточечными операциями, см. [2, 1.7.3; 5, 2.4.3]) такого, что, во-первых, поточечная норма

$$|\!|\!|c|\!|\!| : Q \to \mathbb{R}, \quad |\!|\!|c|\!|\!|\,(q) = \|c(q)\|_{\mathcal{X}(q)} \ (q\in Q)$$

каждого сечения $c\in\mathcal{C}_{\mathcal{X}}$ непрерывна и, во-вторых, $\mathcal{C}_{\mathcal{X}}$ послойно плотно в $\mathcal{X}$, т. е. множество $\{c(q) \,:\, c\in\mathcal{C}_{\mathcal{X}}\}$ всюду плотно в $\mathcal{X}(q)$ для всех $q\in Q$. Непрерывная структура $\mathcal{C}_{\mathcal{X}}$ позволяет определить совокупность $C(Q,\mathcal{X})$ непрерывных сечений расслоения $\mathcal{X}$ как множество всех таких сечений $u\in S(Q,\mathcal{X})$, что $|\!|\!|u-c|\!|\!| \in C(Q)$ при $c\in\mathcal{C}_{\mathcal{X}}$.

Замечание 1. Понятие непрерывного сечения банахова расслоения можно расценивать как обобщение понятия непрерывной вектор-функции. Действительно, если X — банахово пространство, то $C(Q,X) = C(Q,\mathcal{X})$, где $\mathcal{X}$ — постоянное банахово расслоение со слоями $\mathcal{X}(q) = X$, снабженное непрерывной структурой, состоящей, например, из постоянных функций $c\colon Q\to X$ (см. [2, 2.2.1]).

Отметим, что имеется альтернативный — и в определенном смысле эквивалентный — подход к введению непрерывной структуры, при котором непрерывность сечений возникает как чисто топологическое понятие. (Изложение обоих подходов, а также обоснование их эквивалентности можно найти в [12].) Обозначим символом $Q\otimes\mathcal{X}$ объединение попарно непересекающихся копий $\{q\}\times\mathcal{X}(q)$ слоев банахова расслоения $\mathcal{X}$ над Q:

$$Q\otimes\mathcal{X} = \{(q,x) : q\in Q,\ x\in\mathcal{X}(q)\}$$

и для произвольного сечения $u\in S(Q,\mathcal{X})$ определим функцию $Q\otimes u\colon Q \to Q\otimes\mathcal{X}$, полагая

$$(Q\otimes u)(q) = \bigl(q, u(q)\bigr) \ \text{ для всех } q\in Q.$$

Тогда всевозможные «трубки»

$$\{(q,x)\in Q\otimes\mathcal{X} : q\in U,\ \|x-c(q)\| < \varepsilon\},$$

определяемые сечениями $c\in\mathcal{C}_{\mathcal{X}}$, открытыми подмножествами $U\subset Q$ и числами $\varepsilon>0$, образуют базу некоторой открытой топологии на $Q\otimes\mathcal{X}$ (см. [12, 5.3]). При этом индуцированная топология каждой копии $\{q\}\times\mathcal{X}(q)\subset Q\otimes\mathcal{X}$ слоя $\mathcal{X}(q)$ совпадает с исходной топологией этого слоя как банахова пространства, а произвольное сечение $u\in S(Q,\mathcal{X})$ оказывается непрерывным тогда и только тогда, когда функция $Q\otimes u\colon Q\to Q\otimes\mathcal{X}$ непрерывна (в обычном смысле) относительно топологии трубок (см. [2, 2.1.7]).

Различные непрерывные структуры $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ в $\mathcal{X}$ могут порождать одну и ту же топологию на $Q\otimes\mathcal{X}$. В этом случае непрерывные структуры $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ называют эквивалентными, а банаховы расслоения $(\mathcal{X},\mathcal{C}_1)$ и $(\mathcal{X},\mathcal{C}_2)$ отождествляют. Такое отождествление оправдывается в том числе следующим фактом (см. [2, 2.1.8]).

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ — непрерывные структуры в $\mathcal{X}$ и пусть $C(Q,\mathcal{X}\,|\,\mathcal{C}_1)$ и $C(Q,\mathcal{X}\,|\,\mathcal{C}_2)$ — соответствующие им множества непрерывных сечений. Тогда следующие условия равносильны:*

(1) *$\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ эквивалентны;*

(2) *$C(Q,\mathcal{X}\,|\,\mathcal{C}_1)=C(Q,\mathcal{X}\,|\,\mathcal{C}_2)$;*

(3) *$C(Q,\mathcal{X}\,|\,\mathcal{C}_1)\subset C(Q,\mathcal{X}\,|\,\mathcal{C}_2)$;*

(4) *$\mathcal{C}_1\subset C(Q,\mathcal{X}\,|\,\mathcal{C}_2)$;*

(5) *пересечение $C(Q,\mathcal{X}\,|\,\mathcal{C}_1)\cap C(Q,\mathcal{X}\,|\,\mathcal{C}_2)$ послойно плотно в $\mathcal{X}$.*

В дальнейшем нам пригодятся следующие основные свойства множества непрерывных сечений банахова расслоения.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{X}$ — банахово расслоение над компактом Q.*

(1) *Если $u\in C(Q,\mathcal{X})$, то $|\!|\!|u|\!|\!|\in C(Q)$.*

(2) *Множество $C(Q,\mathcal{X})$ является замкнутым векторным подпространством банахова пространства $\ell^\infty(Q,\mathcal{X})$ всех ограниченных сечений $\mathcal{X}$, снабженного равномерной нормой $\|u\|=\big\||\!|\!|u|\!|\!|\big\|=\sup_{q\in Q}\|u(q)\|$.*

(3) *Если $u\in C(Q,\mathcal{X})$ и $f\in C(Q)$, то $fu\in C(Q,\mathcal{X})$. В частности, $C(Q,\mathcal{X})$ является банаховым $C(Q)$-модулем.*

(4) *Множество $C(Q,\mathcal{X})$ полностью заполняет слои $\mathcal{X}$. Более того, для любых $q\in Q$ и $x\in\mathcal{X}(q)$ существует такое сечение $u\in C(Q,\mathcal{X})$, что $u(q)=x$ и $\|u\|\leqslant\|x\|$.*

Доказательства утверждений (1)–(3) имеются, например, в [2, § 2.3]. Утверждение (4) принято называть теоремой Дюпре (см. [12, 2.10]). Отметим, что эта теорема справедлива для банахова расслоения над произвольным топологическим пространством Q (см. [4, 1.1]).

Замечание 2. Введенная выше топология трубок позволяет интерпретировать разнообразные топологические понятия и факты, касающиеся сечений $u\in S(Q,\mathcal{X})$, в терминах соответствующих функций $Q\otimes u$. Например (см. [2, 2.3.7]), сечение $u\in S(Q,\mathcal{X})$ имеет предел $x\in\mathcal{X}(q)$ в точке $q\in Q$ тогда и только тогда, когда предел функции $Q\otimes u\colon Q\to Q\otimes\mathcal{X}$ в точке q равен (q,x):

$$\lim_{p\to q}u(p)=x\ \Leftrightarrow\ \lim_{p\to q}\big(p,u(p)\big)=(q,x)\ \text{ в } Q\otimes\mathcal{X}.$$

Согласно [2, 2.3.8] и теореме Дюпре, последнее соотношение равносильно существованию такого сечения $v\in C(Q,\mathcal{X})$, что $v(q)=x$ и $\lim\limits_{p\to q}\|u(p)-v(p)\|=0$.

Пусть $\mathcal{X}$ — произвольное банахово расслоение над Q. Аналогами банаховых решеток $c_0(Q)$ и $CD_0(Q)$ являются пространства c_0- и CD_0-сечений

$$c_0(Q,\mathcal{X})=\{u\in S(Q,\mathcal{X}):|\!|\!|u|\!|\!|\in c_0(Q)\},$$
$$CD_0(Q,\mathcal{X})=C(Q,\mathcal{X})+c_0(Q,\mathcal{X}),$$

снабженные равномерной нормой. Пространство $CD_0(Q,\mathcal{X})$ было впервые рассмотрено в статье [13] $\big($там оно фигурирует как сумма $\Gamma(\pi)+\Gamma(\pi_0)\big)$, где, в частности, построена линейная изометрия этого пространства на банахово пространство всех непрерывных сечений некоторого банахова расслоения над компактом $\widetilde{Q}$, которое в нашей работе обозначается символом $\widetilde{\mathcal{X}}$ (см. определение 1). Кроме того, в [13] установлены некоторые взаимосвязи между $C(Q)$-модульными гомоморфизмами, действующими из $C(Q,\mathcal{X})$ в $C(Q)$, и $C\bigl(\widetilde{Q}\bigr)$-модульными гомоморфизмами, действующими из $C\bigl(\widetilde{Q},\widetilde{\mathcal{X}}\bigr)$ в $C\bigl(\widetilde{Q}\bigr)$.

Настоящая работа посвящена дальнейшему исследованию пространств CD_0-сечений и гомоморфизмов, действующих в этих пространствах.

В § 2 мы приводим основные определения и известные факты о пространствах CD_0-функций и CD_0-сечений (почти не добавляя ничего нового).

В § 3 мы уточняем связь между банаховыми расслоениями $\mathcal{X}$ и $\widetilde{\mathcal{X}}$ на примере постоянных расслоений, подрасслоений, а также расслоений, полученных непрерывной заменой переменной и ограничением на топологическое подпространство.

Наконец, в § 4 для произвольных банаховых расслоений $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ над Q мы вводим и исследуем понятие CD_0-гомоморфизма $H \in CD_0[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$ — такой операторно-значной функции

$$H:\ q \in Q\ \mapsto\ H(q) \in B\bigl(\mathcal{X}(q),\mathcal{Y}(q)\bigr),$$

что ее поточечное применение к CD_0-сечениям расслоения $\mathcal{X}$ дает CD_0-сечения расслоения $\mathcal{Y}$. Мы показываем, что CD_0-гомоморфизмы обладают рядом свойств, аналогичных свойствам CD_0-сечений. Например, каждый CD_0-гомоморфизм H единственным образом разлагается в сумму $H = H_c + H_d$ «непрерывной» и «дискретной» частей $H_c \in C[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$ и $H_d \in c_0[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$, а пространство $CD_0[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$, снабженное равномерной нормой, изометрично пространству $C\bigl[\widetilde{\mathcal{X}},\widetilde{\mathcal{Y}}\bigr]$ всех гомоморфизмов соответствующих расслоений $\widetilde{\mathcal{X}}$ и $\widetilde{\mathcal{Y}}$ над $\widetilde{Q}$.

Все векторные пространства, рассматриваемые в данной работе, предполагаются заданными над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел.

На протяжении всего текста Q — непустой компакт без изолированных точек.

§ 2. Пространство CD_0-сечений

Напомним, что символом $C(Q)$ обозначается множество всех определенных на Q непрерывных вещественных функций, а символом $c_0(Q)$ — совокупность всех таких функций $f : Q \to \mathbb{R}$, что множество $\{q \in Q : |f(q)| > \varepsilon\}$ конечно для любого числа $\varepsilon > 0$. Как $C(Q)$, так и $c_0(Q)$ являются банаховыми решетками и банаховыми алгебрами относительно поточечных операций, поточечного порядка и равномерной нормы. Оба этих пространства являются банаховыми подрешетками и подалгебрами решеточно упорядоченной банаховой алгебры $\ell^\infty(Q)$ всех определенных на Q ограниченных вещественных функций. Как легко видеть, $c_0(Q)$ представляет собой замыкание в $\ell^\infty(Q)$ пространства функций с конечными носителями и состоит в точности из тех функций $f : Q \to \mathbb{R}$, для которых существует последовательность попарно различных точек $q_n \in Q$ $(n \in \mathbb{N})$ такая, что $f(q_n) \to 0$ при $n \to \infty$ и $f \equiv 0$ вне $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$. В частности, для любых $f \in \ell^\infty(Q)$ и $g \in c_0(Q)$ из $|f| \leqslant |g|$ вытекает $f \in c_0(Q)$, и тем самым $c_0(Q)$ является порядковым идеалом $\ell^\infty(Q)$.

Символом $CD_0(Q)$ обозначается пространство всех функций $f : Q \to \mathbb{R}$, представимых в виде сумм $f = g + h$ элементов $g \in C(Q)$ и $h \in c_0(Q)$:

$$CD_0(Q) \ := \ C(Q) + c_0(Q).$$

В следующем утверждении собраны некоторые используемые в дальнейшем факты о пространстве $CD_0(Q)$, установленные в [8, 10, 11, 14].

Теорема 3. *Пусть Q — непустой компакт без изолированных точек.*

(1) *Снабженное поточечными операциями, поточечным порядком и равномерной нормой, пространство $CD_0(Q)$ является банаховой решеткой и AM-пространством с единицей.*

(2) *Имеет место разложение в прямую сумму*

$$CD_0(Q) = C(Q) \oplus c_0(Q).$$

Таким образом, любая функция $f \in CD_0(Q)$ единственным образом представляется в виде суммы $f = f_c + f_d$, где $f_c \in C(Q)$ и $f_d \in c_0(Q)$.

(3) *Для любой функции $f \in CD_0(Q)$ справедливо неравенство $\|f_c\| \leqslant \|f\|$.*

(4) *Функция $f : Q \to \mathbb{R}$ принадлежит $CD_0(Q)$ тогда и только тогда, когда для любой точки $q \in Q$ существует предел $\lim\limits_{p \to q} f(p)$. При этом*

$$\lim_{p \to q} f(p) = f_c(q) \ \ \text{для всех } q \in Q.$$

В частности, $f \in c_0(Q)$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{p \to q} f(p) = 0$ для всех $q \in Q$.

Замечание 3. Как легко видеть, пространство $CD_0(Q)$ представляет собой банахову алгебру (относительно поточечного умножения), причем $C(Q)$ является ее подалгеброй, а $c_0(Q)$ — алгебраическим идеалом. При этом для любых $f, g \in CD_0(Q)$ имеют место равенства $(fg)_c = f_c g_c$ и $(fg)_d = f_c g_d + f_d g_d + f_d g_c$.

Всюду ниже $\mathcal{X}$ — произвольное банахово расслоение над Q. Обозначим через $c_0(Q, \mathcal{X})$ множество всех сечений расслоения $\mathcal{X}$, поточечная норма которых принадлежит $c_0(Q)$:

$$c_0(Q, \mathcal{X}) \ := \ \{u \in S(Q, \mathcal{X}) : |\!|\!|u|\!|\!| \in c_0(Q)\}.$$

Заметим, что $c_0(Q, \mathcal{X})$ является банаховым подпространством банахова пространства $\ell^\infty(Q, \mathcal{X})$ всех ограниченных сечений расслоения $\mathcal{X}$ (с равномерной нормой) и представляет собой замыкание в $\ell^\infty(Q, \mathcal{X})$ пространства сечений с конечными носителями.

Следующее утверждение непосредственно вытекает из теоремы 3 (4).

Следствие 1. *Сечение $u \in S(Q, \mathcal{X})$ принадлежит $c_0(Q, \mathcal{X})$ тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{p \to q} u(p) = 0 \ \ \text{для всех } q \in Q.$$

Определим $CD_0(Q, \mathcal{X})$ как пространство всех сечений $u \in S(Q, \mathcal{X})$, представимых в виде сумм $u = v + w$ элементов $v \in C(Q, \mathcal{X})$ и $w \in c_0(Q, \mathcal{X})$:

$$CD_0(Q, \mathcal{X}) \ := \ C(Q, \mathcal{X}) + c_0(Q, \mathcal{X}).$$

Следующее утверждение является переформулировкой [13, Lemma 1].

Предложение 1. *Имеет место разложение в прямую сумму*

$$CD_0(Q,\mathcal{X}) = C(Q,\mathcal{X}) \oplus c_0(Q,\mathcal{X}).$$

$\triangleleft$ Действительно, если $u \in C(Q,\mathcal{X}) \cap c_0(Q,\mathcal{X})$, то $|\!|\!| u |\!|\!| \in C(Q) \cap c_0(Q)$, откуда в силу теоремы 3 (2) следует, что $|\!|\!| u |\!|\!| = 0$ и тем самым $u = 0$. $\triangleright$

Разложение $CD_0(Q,\mathcal{X}) = C(Q,\mathcal{X}) \oplus c_0(Q,\mathcal{X})$ позволяет ввести в рассмотрение линейные проекторы $(\cdot)_c$ и $(\cdot)_d$ пространства $CD_0(Q,\mathcal{X})$ на соответствующие подпространства $C(Q,\mathcal{X})$ и $c_0(Q,\mathcal{X})$. Таким образом, каждое сечение $u \in CD_0(Q,\mathcal{X})$ единственным образом представляется в виде суммы $u = u_c + u_d$, где $u_c \in C(Q,\mathcal{X})$ и $u_d \in c_0(Q,\mathcal{X})$.

Теорема 4. *Сечение $u \in S(Q,\mathcal{X})$ принадлежит $CD_0(Q,\mathcal{X})$ тогда и только тогда, когда для любой точки $q \in Q$ существует предел $\lim\limits_{p\to q} u(p)$. При этом*

$$\lim_{p\to q} u(p) = u_c(q) \ \ \text{для всех } q \in Q.$$

$\triangleleft$ Если $u \in CD_0(Q,\mathcal{X})$, то согласно следствию 1 для любой точки $q \in Q$ мы имеем

$$\lim_{p\to q} \|u(p) - u_c(p)\| = \lim_{p\to q} \|u_d(p)\| = 0,$$

откуда с учетом замечания 2 вытекает, что $\lim\limits_{p\to q} u(p) = u_c(q)$.

Переходя к доказательству достаточности, предположим, что предел $v(q) := \lim\limits_{p\to q} u(p)$ существует для всех $q \in Q$. Для любого сечения $w \in C(Q,\mathcal{X})$ и любой точки $q \in Q$ мы имеем

$$\|v(q) - w(q)\| = \Big\| \lim_{p\to q} u(p) - w(q) \Big\| = \lim_{p\to q} \|u(p) - w(p)\|,$$

откуда $|\!|\!| v - w |\!|\!| = |\!|\!| u - w |\!|\!|_c \in C(Q)$ в силу теоремы 3 (4). Учитывая произвольность сечения $w \in C(Q,\mathcal{X})$, мы заключаем, что $v \in C(Q,\mathcal{X})$. С другой стороны,

$$\lim_{p\to q} \|u(p) - v(p)\| = \Big\| \lim_{p\to q} u(p) - \lim_{p\to q} v(p) \Big\| = \|v(q) - v(q)\| = 0$$

для всех $q \in Q$ и тем самым $u - v \in c_0(Q,\mathcal{X})$ согласно следствию 1. $\triangleright$

Предложение 2. *Если $u \in CD_0(Q,\mathcal{X})$, то $|\!|\!| u |\!|\!| \in CD_0(Q)$. При этом*

$$|\!|\!| u |\!|\!|_c = |\!|\!| u_c |\!|\!|, \quad \big| |\!|\!| u |\!|\!|_d \big| \leqslant |\!|\!| u_d |\!|\!|.$$

$\triangleleft$ Включение $|\!|\!| u |\!|\!| \in CD_0(Q)$ и равенство $|\!|\!| u |\!|\!|_c = |\!|\!| u_c |\!|\!|$ вытекают из теорем 3 (4) и 4. Кроме того,

$$\big| |\!|\!| u |\!|\!|_d \big| = \big| |\!|\!| u |\!|\!| - |\!|\!| u |\!|\!|_c \big| = \big| |\!|\!| u |\!|\!| - |\!|\!| u_c |\!|\!| \big| \leqslant |\!|\!| u - u_c |\!|\!| = |\!|\!| u_d |\!|\!|. \quad \triangleright$$

(Отметим очевидную допустимость неравенства $\big| |\!|\!| u |\!|\!|_d \big| \neq |\!|\!| u_d |\!|\!|$. Например, если $q \in Q$, $v \in C(Q,\mathcal{X})$, $v(q) \neq 0$ и $u = v - 2\chi_{\{q\}}v$, то $|\!|\!| u |\!|\!|_d = 0$ и $|\!|\!| u_d |\!|\!| = 2\|v(q)\|\chi_{\{q\}}$.)

Таким образом, пространство $CD_0(Q,\mathcal{X})$, снабженное поточечной нормой $|\!|\!| \cdot |\!|\!|$, является решеточно нормированным пространством над банаховой решеткой $CD_0(Q)$ и пространством со смешанной нормой: $\|u\| = \big\| |\!|\!| u |\!|\!| \big\|$, $u \in CD_0(Q,\mathcal{X})$ (см. [5, 7.1.1]).

Предложение 3. *Для любого сечения $u \in CD_0(Q, \mathcal{X})$ имеют место неравенства*

$$\|u_c\| \leqslant \|u\|, \quad \|u_d\| \leqslant 2\|u\|.$$

$\lhd$ С учетом теоремы 3 (3) и предложения 2 справедливы соотношения

$$\|u_c\| = \big\| |\!|\!| u_c |\!|\!| \big\| = \big\| |\!|\!| u |\!|\!|_c \big\| \leqslant \big\| |\!|\!| u |\!|\!| \big\| = \|u\|.$$

Остается заметить, что $\|u_d\| = \|u - u_c\| \leqslant \|u\| + \|u_c\| \leqslant 2\|u\|$. $\rhd$

Предложение 4. *Нормированное пространство $CD_0(Q, \mathcal{X})$ является банаховым.*

$\lhd$ Если (u_n) — фундаментальная последовательность в $CD_0(Q, \mathcal{X})$, то согласно предложению 3 последовательности элементов $(u_n)_c$ и $(u_n)_d$ также являются фундаментальными, а значит, благодаря полноте нормированных пространств $C(Q, \mathcal{X})$ и $c_0(Q, \mathcal{X})$ имеют соответствующие равномерные пределы $v \in C(Q, \mathcal{X})$ и $w \in c_0(Q, \mathcal{X})$. Таким образом, последовательность (u_n) равномерно сходится к сумме $v + w$, принадлежащей $CD_0(Q, \mathcal{X})$. $\rhd$

Простой непосредственной проверкой устанавливается следующее утверждение.

Предложение 5. *Пространство $CD_0(Q, \mathcal{X})$ является банаховым $CD_0(Q)$-модулем относительно поточечного умножения. При этом для любых $f \in CD_0(Q)$ и $u \in CD_0(Q, \mathcal{X})$ имеют место равенства*

$$(fu)_c = f_c u_c, \quad (fu)_d = f_c u_d + f_d u_d + f_d u_c.$$

Следуя [14], введем топологию на множестве $Q \times \{0, 1\}$ следующим образом: подмножество $Q \times \{1\}$ снабдим дискретной топологией (т. е. объявим все точки вида $(q, 1)$ изолированными) и для любого элемента $q \in Q$ окрестностью точки $(q, 0)$ объявим всякое подмножество $U \subset Q \times \{0, 1\}$, для которого существует такая окрестность $V \subset Q$ точки q, что

$$(V \times \{0, 1\}) \setminus \{(q, 1)\} \subset U.$$

Полученное топологическое пространство мы будем для удобства обозначать символом $\widetilde{Q}$. (Определенная таким способом топология на $Q \times \{0, 1\}$ была ранее описана в статье [11] в терминах сходимости.)

Стоит отметить, что топологическое пространство $\widetilde{Q}$ обычно именуется *удвоением по Александрову* (*Alexandroff duplicate*) компакта Q и обозначается символом $A(Q)$. Как известно (см. [6, 3.1.G]), оно хаусдорфово и компактно (более того, в нем компактно любое содержащее $Q \times \{0\}$ множество), его «непрерывная часть» $Q \times \{0\}$ гомеоморфна Q, а «дискретная часть» $Q \times \{1\}$ открыта и всюду плотна в $\widetilde{Q}$. Отметим также, что удвоение окружности (называемое «двойной окружностью Александрова») служит классическим примером наследственно нормального топологического пространства, не являющегося совершенно нормальным и удовлетворяющего первой аксиоме счетности, но не сепарабельного и тем самым не удовлетворяющего второй аксиоме счетности (см. [6, 3.1.26]).

В статье [11] (см. также [14]) получен следующий результат.

Теорема 5. *Банаховы решетки $CD_0(Q)$ и $C(\widetilde{Q})$ изометрически и порядково изоморфны.*

Изометрический и порядковый изоморфизм между $CD_0(Q)$ и $C(\widetilde{Q})$ осуществляет отображение $f \mapsto \widetilde{f}$, сопоставляющее каждой функции $f \in CD_0(Q)$ функцию $\widetilde{f} : \widetilde{Q} \to \mathbb{R}$, определенную формулой

$$\widetilde{f}(q,r) = f_c(q) + r f_d(q), \quad q \in Q,\ r \in \{0,1\}.$$

Таким образом, $\widetilde{f}(\cdot,0) = f_c$ и $\widetilde{f}(\cdot,1) = f$.

Как легко видеть, с учетом замечания 3 отображение $f \mapsto \widetilde{f}$ сохраняет умножение и тем самым является изоморфизмом между алгебрами $CD_0(Q)$ и $C(\widetilde{Q})$.

Приведенный ниже критерий непосредственно вытекает из теоремы 5.

Предложение 6. *Следующие свойства функции $g : \widetilde{Q} \to \mathbb{R}$ равносильны:*

(1) $g \in C(\widetilde{Q})$;

(2) $g(\cdot,0) \in C(Q)$, $g(\cdot,1) - g(\cdot,0) \in c_0(Q)$;

(3) $g(\cdot,1) \in CD_0(Q)$, $g(\cdot,0) = g(\cdot,1)_c$.

Отметим также, что образы пространств $C(Q)$ и $c_0(Q)$ относительно изометрии $f \mapsto \widetilde{f}$ описываются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
\{\, \widetilde{f} \ : \ f \in C(Q) \,\} \ &= \ \{\, g \in C(\widetilde{Q}) \ : \ g(\cdot,0) = g(\cdot,1) \,\} \ = \\
&= \ \{\, g : \widetilde{Q} \to \mathbb{R} \ : \ g(\cdot,0) = g(\cdot,1) \in C(Q) \,\}, \\
\{\, \widetilde{f} \ : \ f \in c_0(Q) \,\} \ &= \ \{\, g \in C(\widetilde{Q}) \ : \ g(\cdot,0) = 0 \,\} \ = \\
&= \ \{\, g : \widetilde{Q} \to \mathbb{R} \ : \ g(\cdot,0) = 0,\ g(\cdot,1) \in c_0(Q) \,\}.
\end{aligned}$$

Определение 1. Следуя [13], рассмотрим (пока еще дискретное) банахово расслоение $\widetilde{\mathcal{X}}$ над $\widetilde{Q}$ со слоями

$$\widetilde{\mathcal{X}}(q,0) = \widetilde{\mathcal{X}}(q,1) = \mathcal{X}(q), \quad q \in Q,$$

и для каждого сечения $u \in CD_0(Q,\mathcal{X})$ определим сечение $\widetilde{u} \in S(\widetilde{Q},\widetilde{\mathcal{X}})$ формулой

$$\widetilde{u}(q,r) = u_c(q) + r u_d(q), \quad q \in Q,\ r \in \{0,1\}.$$

Таким образом, $\widetilde{u}(\cdot,0) = u_c$ и $\widetilde{u}(\cdot,1) = u$. Заметим, что благодаря предложению 2 мы имеем $|\!|\!|\widetilde{u}|\!|\!| = \widetilde{|\!|\!|u|\!|\!|}$ для всех $u \in CD_0(Q,\mathcal{X})$.

Покажем, что множество $\mathcal{C}_{\widetilde{\mathcal{X}}} := \{\widetilde{u} : u \in CD_0(Q,\mathcal{X})\}$ является непрерывной структурой в $\widetilde{\mathcal{X}}$. Действительно, в силу очевидной линейности отображения $u \mapsto \widetilde{u}$ множество $\mathcal{C}_{\widetilde{\mathcal{X}}}$ является векторным подпространством $S(\widetilde{Q},\widetilde{\mathcal{X}})$. Кроме того, для любого сечения $u \in CD_0(Q,\mathcal{X})$ мы имеем $|\!|\!|\widetilde{u}|\!|\!| = \widetilde{|\!|\!|u|\!|\!|} \in C(\widetilde{Q})$. Наконец, множество $\mathcal{C}_{\widetilde{\mathcal{X}}}$ содержит послойно плотное в $\widetilde{\mathcal{X}}$ множество $\{\widetilde{u} : u \in C(Q,\mathcal{X})\}$ и тем самым само является послойно плотным в $\widetilde{\mathcal{X}}$.

В дальнейшем мы сохраняем символ $\widetilde{\mathcal{X}}$ для обозначения непрерывного банахова расслоения $(\widetilde{\mathcal{X}},\mathcal{C}_{\widetilde{\mathcal{X}}})$ над $\widetilde{Q}$.

Следующий результат установлен в [13, Proposition 6]. (Ради полноты изложения мы приводим его здесь вместе с нашим вариантом доказательства.)

Теорема 6. *Отображение $u \mapsto \widetilde{u}$ является линейной изометрией $CD_0(Q,\mathcal{X})$ на $C(\widetilde{Q},\widetilde{\mathcal{X}})$. При этом $\widetilde{fu} = \widetilde{f}\widetilde{u}$ для любых $f \in CD_0(Q)$ и $u \in CD_0(Q,\mathcal{X})$.*

$\triangleleft$ Если $f \in CD_0(Q)$ и $u \in CD_0(Q,\mathcal{X})$, то с учетом предложения 5 мы имеем

$$\widetilde{fu}\,(\cdot,0) = (fu)_c = f_c u_c = \big(\widetilde{f}\widetilde{u}\big)(\cdot,0), \quad \widetilde{fu}\,(\cdot,1) = fu = \big(\widetilde{f}\widetilde{u}\big)(\cdot,1)$$

и тем самым $\widetilde{fu} = \widetilde{f}\widetilde{u}$. Следовательно, $\mathcal{C}_{\widetilde{\mathcal{X}}}$ является $C(\widetilde{Q})$-подмодулем $C(\widetilde{Q},\widetilde{\mathcal{X}})$. Учитывая послойную плотность $\mathcal{C}_{\widetilde{\mathcal{X}}}$ в $\widetilde{\mathcal{X}}$ и принимая во внимание следствие [12, 4.3] теоремы Стоуна — Вейерштрасса для расслоений, заключаем, что подмодуль $\mathcal{C}_{\widetilde{\mathcal{X}}}$ равномерно плотен в $C(\widetilde{Q},\widetilde{\mathcal{X}})$. Далее, из предложения 3 следует, что для всех $u \in CD_0(Q,\mathcal{X})$

$$\|\widetilde{u}\| = \max\{\|\widetilde{u}(\cdot,0)\|, \|\widetilde{u}(\cdot,1)\|\} = \max\{\|u_c\|, \|u\|\} = \|u\|.$$

Таким образом, отображение $u \mapsto \widetilde{u}$ является линейной изометрией банахова пространства $CD_0(Q,\mathcal{X})$ на всюду плотное подпространство $\mathcal{C}_{\widetilde{\mathcal{X}}} \subset C(\widetilde{Q},\widetilde{\mathcal{X}})$, откуда следует равенство $\mathcal{C}_{\widetilde{\mathcal{X}}} = C(\widetilde{Q},\widetilde{\mathcal{X}})$. $\triangleright$

Приведенный ниже критерий непосредственно вытекает из теоремы 6.

Предложение 7. *Следующие свойства сечения $v \in S(\widetilde{Q},\widetilde{\mathcal{X}})$ равносильны:*

(1) $v \in C(\widetilde{Q},\widetilde{\mathcal{X}})$;

(2) $v(\cdot,0) \in C(Q,\mathcal{X})$, $v(\cdot,1) - v(\cdot,0) \in c_0(Q,\mathcal{X})$;

(3) $v(\cdot,1) \in CD_0(Q,\mathcal{X})$, $v(\cdot,0) = v(\cdot,1)_c$.

Отметим также, что образы пространств $C(Q,\mathcal{X})$ и $c_0(Q,\mathcal{X})$ относительно изометрии $u \mapsto \widetilde{u}$ описываются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
\big\{\,\widetilde{u}\ :\ u \in C(Q,\mathcal{X})\,\big\} \ &= \ \big\{\,v \in C(\widetilde{Q},\widetilde{\mathcal{X}})\ :\ v(\cdot,0) = v(\cdot,1)\,\big\} \ = \\
&= \ \big\{\,v \in S(\widetilde{Q},\widetilde{\mathcal{X}})\ :\ v(\cdot,0) = v(\cdot,1) \in C(Q,\mathcal{X})\,\big\},\\
\big\{\,\widetilde{u}\ :\ u \in c_0(Q,\mathcal{X})\,\big\} \ &= \ \big\{\,v \in C(\widetilde{Q},\widetilde{\mathcal{X}})\ :\ v(\cdot,0) = 0\,\big\} \ = \\
&= \ \big\{\,v \in S(\widetilde{Q},\widetilde{\mathcal{X}})\ :\ v(\cdot,0) = 0,\ v(\cdot,1) \in c_0(Q,\mathcal{X})\,\big\}.
\end{aligned}$$

§ 3. Примеры

В этом параграфе мы приведем серию примеров, уточняющих связь между $\mathcal{X}$ и $\widetilde{\mathcal{X}}$ в случае постоянных расслоений, а также демонстрирующих согласование этой связи с переходом к подрасслоению, непрерывной заменой переменной и ограничением на топологическое подпространство.

Рассмотрим произвольное банахово пространство X и предположим, что $\mathcal{X}$ является постоянным банаховым расслоением над Q со слоем X. Из определения расслоения $\widetilde{\mathcal{X}}$ видно, что все его слои совпадают с X. Обозначим через $\mathrm{const}(Q,X)$ и $\mathrm{const}(\widetilde{Q},X)$ множества всех постоянных сечений расслоений $\mathcal{X}$ и $\widetilde{\mathcal{X}}$ соответственно. Как легко видеть,

$$\mathrm{const}(\widetilde{Q},X) = \{\widetilde{c} : c \in \mathrm{const}(Q,X)\} \subset C(\widetilde{Q},\widetilde{\mathcal{X}}).$$

Следовательно, $\mathrm{const}\big(\widetilde{Q}, X\big)$ является непрерывной структурой в $\widetilde{\mathcal{X}}$, эквивалентной $\mathcal{C}_{\widetilde{\mathcal{X}}}$, а значит, $\widetilde{\mathcal{X}}$ представляет собой постоянное банахово расслоение над $\widetilde{Q}$ со слоем X.

С учетом замечания 1 это наблюдение позволяет почти без изменений перенести все результаты § 2 на случай пространств вектор-функций $CD_0(Q, X) = C(Q, X) + c_0(Q, X)$ и $C\big(\widetilde{Q}, X\big)$.

Пусть $\mathcal{X}_0$ — подрасслоение банахова расслоения $\mathcal{X}$ над Q, т. е. такое банахово расслоение над Q, что $\mathcal{X}_0(q)$ является банаховым подпространством $\mathcal{X}(q)$ для любой точки $q \in Q$ и, кроме того, $C(Q, \mathcal{X}_0) = C(Q, \mathcal{X}) \cap S(Q, \mathcal{X}_0)$ (см. [2, 2.2.2; 5, 2.4.11]). Учитывая очевидное равенство $c_0(Q, \mathcal{X}_0) = c_0(Q, \mathcal{X}) \cap S(Q, \mathcal{X}_0)$, мы заключаем, что

$$CD_0(Q, \mathcal{X}_0) \subset CD_0(Q, \mathcal{X}) \cap S(Q, \mathcal{X}_0).$$

Ниже мы покажем, что множества $CD_0(Q, \mathcal{X}_0)$ и $CD_0(Q, \mathcal{X}) \cap S(Q, \mathcal{X}_0)$ могут как различаться, так и совпадать, причем для нетривиального подрасслоения $\mathcal{X}_0$ (т. е. ненулевого и не равного всему $\mathcal{X}$). Но сначала докажем одно простое вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{X}_0$ — подрасслоение $\mathcal{X}$. Следующие свойства сечения $u \in CD_0(Q, \mathcal{X}) \cap$ $\cap\, S(Q, \mathcal{X}_0)$ равносильны:*

(1) $u \in CD_0(Q, \mathcal{X}_0)$;

(2) $u_c \in S(Q, \mathcal{X}_0)$;

(3) $u_d \in S(Q, \mathcal{X}_0)$,

где $u = u_c + u_d$ — разложение сечения u в пространстве $CD_0(Q, \mathcal{X})$.

◁ (1)⇒(2). Пусть $u \in CD_0(Q, \mathcal{X}_0)$. Рассмотрим разложение $u = u_c^\circ + u_d^\circ$ сечения u в пространстве $CD_0(Q, \mathcal{X}_0)$. Тогда $u_c^\circ \in C(Q, \mathcal{X}_0) \subset C(Q, \mathcal{X})$ и $u_d^\circ \in c_0(Q, \mathcal{X}_0) \subset c_0(Q, \mathcal{X})$, откуда в силу единственности разложения $u = u_c + u_d$ в пространстве $CD_0(Q, \mathcal{X})$ следует, что $u_c^\circ = u_c$ и тем самым $u_c \in S(Q, \mathcal{X}_0)$.

Импликация (2)⇒(3) очевидна ввиду равенства $u_d = u - u_c$.

(3)⇒(1). Пусть $u_d \in S(Q, \mathcal{X}_0)$. Тогда $u_c = u - u_d \in S(Q, \mathcal{X}_0)$ и поэтому $u_c \in C(Q, \mathcal{X}) \cap$ $\cap\, S(Q, \mathcal{X}_0) = C(Q, \mathcal{X}_0)$. Кроме того, $u_d \in c_0(Q, \mathcal{X}) \cap S(Q, \mathcal{X}_0) = c_0(Q, \mathcal{X}_0)$. Следовательно, $u = u_c + u_d \in C(Q, \mathcal{X}_0) + c_0(Q, \mathcal{X}_0) = CD_0(Q, \mathcal{X}_0)$. ▷

Предложение 8. *В любом ненулевом банаховом расслоении $\mathcal{X}$ над Q существуют нетривиальные (т. е. ненулевые и не равные всему $\mathcal{X}$) подрасслоения $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$ такие, что*

$$CD_0(Q, \mathcal{X}_1) = CD_0(Q, \mathcal{X}) \cap S(Q, \mathcal{X}_1), \tag{1}$$

$$CD_0(Q, \mathcal{X}_2) \neq CD_0(Q, \mathcal{X}) \cap S(Q, \mathcal{X}_2). \tag{2}$$

◁ Пусть $\mathcal{X}$ — произвольное ненулевое банахово расслоение над Q.

Прежде всего заметим, что для любого замкнутого подмножества $V \subset Q$ существует подрасслоение $\mathcal{X}_V$ расслоения $\mathcal{X}$, имеющее следующие слои:

$$\mathcal{X}_V(q) = \begin{cases} \{0\}, & q \in V, \\ \mathcal{X}(q), & q \in Q \backslash V. \end{cases}$$

Действительно, согласно [2, 2.2.2], достаточно показать, что

$$\big\{u(q) : u \in C(Q, \mathcal{X}),\ u = 0 \text{ на } V\big\} = \mathcal{X}(q) \ \text{ для всех } q \in Q \backslash V.$$

Пусть $q \in Q\backslash V$ и $x \in \mathcal{X}(q)$. По теореме Дюпре найдется такое сечение $v \in C(Q, \mathcal{X})$, что $v(q) = x$. Кроме того, поскольку Q — вполне регулярное пространство, существует функция $f \in C(Q)$ такая, что $f = 0$ на V и $f(q) = 1$. Тогда $fv \in C(Q, \mathcal{X})$, $fv = 0$ на V и $(fv)(q) = x$.

Как легко видеть, найдутся две различные точки $q_1, q_2 \in Q$, в которых расслоение $\mathcal{X}$ имеет ненулевые слои. Благодаря отделимости топологии Q существует такое открытое подмножество $U \subset Q$, что $q_1 \in U$ и $q_2 \in Q \setminus \operatorname{cl} U$. В этом случае подрасслоение $\mathcal{X}_1 := \mathcal{X}_{\operatorname{cl} U}$ расслоения $\mathcal{X}$ будет нетривиальным. Согласно лемме 1 для доказательства (1) достаточно рассмотреть произвольное сечение $u \in CD_0(Q, \mathcal{X}) \cap S(Q, \mathcal{X}_1)$ и показать, что $u_c \in S(Q, \mathcal{X}_1)$. Действительно, с учетом теоремы 4 для всех $q \in \operatorname{cl} U$ мы имеем

$$u_c(q) = \lim_{p \to q} u(p) = \lim_{p \to q} u|_U(p) = 0,$$

а значит, $u_c \in S(Q, \mathcal{X}_1)$.

Теперь возьмем любую точку $q \in Q$, в которой $\mathcal{X}(q) \neq \{0\}$, и положим $\mathcal{X}_2 := \mathcal{X}_{\{q\}}$. По теореме Дюпре существует такое сечение $v \in C(Q, \mathcal{X})$, что $v(q) \neq 0$. Пусть $u = v - \chi_{\{q\}} v$. Тогда $u \in CD_0(Q, \mathcal{X}) \cap S(Q, \mathcal{X}_2)$, но $u_c = v \notin S(Q, \mathcal{X}_2)$, откуда в силу леммы 1 следует, что $u \notin CD_0(Q, \mathcal{X}_2)$, и тем самым выполняется (2). $\rhd$

Как показывает следующее утверждение, несмотря на возможное отсутствие равенства $CD_0(Q, \mathcal{X}_0) = CD_0(Q, \mathcal{X}) \cap S(Q, \mathcal{X}_0)$, аналогичное равенство для «непрерывных версий» рассматриваемых пространств справедливо всегда.

Предложение 9. *Если $\mathcal{X}_0$ — подрасслоение $\mathcal{X}$, то $\widetilde{\mathcal{X}_0}$ — подрасслоение $\widetilde{\mathcal{X}}$. В частности,*

$$C\big(\widetilde{Q}, \widetilde{\mathcal{X}_0}\big) = C\big(\widetilde{Q}, \widetilde{\mathcal{X}}\big) \cap S\big(\widetilde{Q}, \widetilde{\mathcal{X}_0}\big).$$

$\lhd$ Из определения расслоения $\widetilde{\mathcal{X}_0}$ видно, что каждый его слой является банаховым подпространством соответствующего слоя $\widetilde{\mathcal{X}}$. Кроме того, с учетом предложения 7 мы имеем

$$\begin{aligned}
C\big(\widetilde{Q}, \widetilde{\mathcal{X}_0}\big) &= \big\{ v \in S\big(\widetilde{Q}, \widetilde{\mathcal{X}_0}\big) \ : \ v(\cdot, 0) \in C(Q, \mathcal{X}_0),\ v(\cdot, 1) - v(\cdot, 0) \in c_0(Q, \mathcal{X}_0) \big\} = \\
&= \big\{ v \in S\big(\widetilde{Q}, \widetilde{\mathcal{X}_0}\big) \ : \ v(\cdot, 0) \in C(Q, \mathcal{X}) \cap S(Q, \mathcal{X}_0), \\
&\qquad\qquad v(\cdot, 1) - v(\cdot, 0) \in c_0(Q, \mathcal{X}) \cap S(Q, \mathcal{X}_0) \big\} = \\
&= \big\{ v \in S\big(\widetilde{Q}, \widetilde{\mathcal{X}_0}\big) \ : \ v(\cdot, 0) \in C(Q, \mathcal{X}),\ v(\cdot, 1) - v(\cdot, 0) \in c_0(Q, \mathcal{X}) \big\} = \\
&= \big\{ v \in S\big(\widetilde{Q}, \widetilde{\mathcal{X}_0}\big) \ : \ v \in C\big(\widetilde{Q}, \widetilde{\mathcal{X}}\big) \big\} = \\
&= C\big(\widetilde{Q}, \widetilde{\mathcal{X}}\big) \cap S\big(\widetilde{Q}, \widetilde{\mathcal{X}_0}\big). \quad \rhd
\end{aligned}$$

Возвращаясь к приведенному в предложении 8 примеру сечения $u \in CD_0(Q, \mathcal{X}) \cap \cap S(Q, \mathcal{X}_2)$, не принадлежащего $CD_0(Q, \mathcal{X}_2)$, заметим, что соответствующее ему непрерывное сечение $\widetilde{u} \in C\big(\widetilde{Q}, \widetilde{\mathcal{X}}\big)$ в одной из точек выходит за рамки подрасслоения $\widetilde{\mathcal{X}_2}$, а именно, $\widetilde{u}(q, 0) = u_c(q) \notin \widetilde{\mathcal{X}_2}(q, 0)$.

Пусть P и Q — непустые компакты без изолированных точек.

Определение 2. Функцию $\varphi\colon P \to Q$ назовем *локально уникальной*, если любая точка $p_0 \in P$ имеет такую окрестность $U \subset P$, что $\varphi(p) \neq \varphi(p_0)$ для всех $p \in U \setminus \{p_0\}$.

Как легко видеть, функция $\varphi\colon P \to Q$ непрерывна и локально уникальна тогда и только тогда, когда для любой точки $p \in P$ и любой окрестности $V \subset Q$ точки $\varphi(p)$ найдется окрестность $U \subset P$ точки p такая, что $\varphi(U \setminus \{p\}) \subset V \setminus \{\varphi(p)\}$.

Напомним, что для банахова расслоения $\mathcal{X} = (\mathcal{X}, \mathcal{C}_{\mathcal{X}})$ над Q и непрерывной функции $\varphi\colon P \to Q$ символом $\mathcal{X} \circ \varphi$ обозначается банахово расслоение над P со слоями $(\mathcal{X} \circ \varphi)(p) = \mathcal{X}\big(\varphi(p)\big)$ и непрерывной структурой $\{c \circ \varphi : c \in \mathcal{C}_{\mathcal{X}}\}$ (см. [2, 2.2.6]). Как легко видеть, $u \circ \varphi \in C(P, \mathcal{X} \circ \varphi)$ для всех $u \in C(Q, \mathcal{X})$.

Теорема 7. *Следующие свойства непрерывной функции $\varphi\colon P \to Q$ равносильны:*

(1) *функция φ локально уникальна;*

(2) *прообраз $\varphi^{-1}(q)$ любой точки $q \in Q$ конечен;*

(3) *если $f \in c_0(Q)$, то $f \circ \varphi \in c_0(P)$;*

(4) *если $f \in CD_0(Q)$, то $f \circ \varphi \in CD_0(P)$, $(f \circ \varphi)_c = f_c \circ \varphi$, $(f \circ \varphi)_d = f_d \circ \varphi$;*

(5) *если $\mathcal{X}$ — банахово расслоение над Q и $u \in c_0(Q, \mathcal{X})$, то $u \circ \varphi \in c_0(P, \mathcal{X} \circ \varphi)$;*

(6) *если $\mathcal{X}$ — банахово расслоение над Q и $u \in CD_0(Q, \mathcal{X})$, то $u \circ \varphi \in CD_0(P, \mathcal{X} \circ \varphi)$, $(u \circ \varphi)_c = u_c \circ \varphi$, $(u \circ \varphi)_d = u_d \circ \varphi$.*

$\lhd$ (6)⇒(5). Если $u \in c_0(Q, \mathcal{X})$, то $u_d = u$, откуда в силу (6) следует, что

$$u \circ \varphi = u_d \circ \varphi = (u \circ \varphi)_d \in c_0(P, \mathcal{X} \circ \varphi).$$

(5)⇒(4). Если $f \in CD_0(Q)$, то $f \circ \varphi = f_c \circ \varphi + f_d \circ \varphi$, причем $f_c \circ \varphi \in C(P)$ благодаря непрерывности φ и $f_d \circ \varphi \in c_0(P)$ в силу (5). Остается сослаться на теорему 3 (2).

(4)⇒(3). Устанавливается совершенно аналогично импликации (6)⇒(5).

(3)⇒(2). Рассмотрим произвольную точку $q \in Q$. Поскольку $\chi_{\{q\}} \in c_0(Q)$, мы имеем $\chi_{\varphi^{-1}(q)} = \chi_{\{q\}} \circ \varphi \in c_0(P)$ в силу (3). Следовательно, по определению $c_0(P)$ множество $\varphi^{-1}(q) = \big\{p \in P : \chi_{\varphi^{-1}(q)}(p) > \frac{1}{2}\big\}$ является конечным.

(2)⇒(1). С очевидностью следует из отделимости топологии P.

(1)⇒(6). Если $u \in CD_0(Q, \mathcal{X})$, то $u \circ \varphi = u_c \circ \varphi + u_d \circ \varphi$, причем $u_c \circ \varphi \in C(P, \mathcal{X} \circ \varphi)$. В силу предложения 1 остается показать включение $u_d \circ \varphi \in c_0(P, \mathcal{X} \circ \varphi)$. Из следствия 1 с учетом (1) вытекает, что

$$\lim_{p \to p_0} u_d\big(\varphi(p)\big) = \lim_{q \to \varphi(p_0)} u_d(q) = 0$$

для всех $p_0 \in P$, а значит, $u_d \circ \varphi \in c_0(P, \mathcal{X} \circ \varphi)$ согласно тому же следствию 1. $\rhd$

Пусть P и Q — непустые компакты без изолированных точек. Для любой функции $\varphi\colon P \to Q$ определим функцию $\widetilde{\varphi}\colon \widetilde{P} \to \widetilde{Q}$, полагая

$$\widetilde{\varphi}(p, r) = \big(\varphi(p), r\big), \quad p \in P,\ r \in \{0, 1\}.$$

Предложение 10. *Функция $\widetilde{\varphi}\colon \widetilde{P} \to \widetilde{Q}$ непрерывна тогда и только тогда, когда функция $\varphi\colon P \to Q$ непрерывна и локально уникальна.*

$\lhd$ Ввиду дискретности топологии на подмножестве $P\times\{1\} \subset \widetilde{P}$ функция $\widetilde{\varphi}$ непрерывна на $P\times\{1\}$ вне зависимости от свойств φ. Остается заметить, что, каковы бы ни были точка $p \in P$, окрестность $U \subset P$ точки p и окрестность $V \subset Q$ точки $\varphi(p)$, включение $\varphi(U\setminus\{p\}) \subset V\setminus\{\varphi(p)\}$ равносильно включению

$$\widetilde{\varphi}\big((U\times\{0,1\}) \setminus \{(p,1)\}\big) \subset (V\times\{0,1\}) \setminus \big\{\big(\varphi(p),1\big)\big\}. \quad \rhd$$

Предложение 11. *Пусть P и Q — непустые компакты без изолированных точек и $\varphi\colon P \to Q$ — непрерывная локально уникальная функция. Тогда*

(1) $\widetilde{u\circ\varphi} = \widetilde{u}\circ\widetilde{\varphi}$ *для всех* $u \in CD_0(Q,\mathcal{X})$*;*

(2) $\widetilde{\mathcal{X}\circ\varphi} = \widetilde{\mathcal{X}}\circ\widetilde{\varphi}$.

$\lhd$ (1) С учетом теоремы 7 (6) для любого сечения $u \in CD_0(Q,\mathcal{X})$ мы имеем

$$\begin{aligned}
&\widetilde{u\circ\varphi}\,(\cdot,0) = (u\circ\varphi)_c = u_c\circ\varphi = \widetilde{u}(\cdot,0)\circ\varphi = (\widetilde{u}\circ\widetilde{\varphi})(\cdot,0),\\
&\widetilde{u\circ\varphi}\,(\cdot,1) = u\circ\varphi = \widetilde{u}(\cdot,1)\circ\varphi = (\widetilde{u}\circ\widetilde{\varphi})(\cdot,1).
\end{aligned}$$

(2) Очевидно, что $\widetilde{\mathcal{X}\circ\varphi}$ и $\widetilde{\mathcal{X}}\circ\widetilde{\varphi}$ совпадают как дискретные банаховы расслоения (т. е. имеют одни и те же слои). Согласно теореме 1 для доказательства совпадения $\widetilde{\mathcal{X}\circ\varphi}$ и $\widetilde{\mathcal{X}}\circ\widetilde{\varphi}$ как непрерывных банаховых расслоений достаточно показать, что пересечение $C\Big(\widetilde{P},\widetilde{\mathcal{X}\circ\varphi}\Big)\cap C\big(\widetilde{P},\widetilde{\mathcal{X}}\circ\widetilde{\varphi}\big)$ послойно плотно в $\widetilde{\mathcal{X}}\circ\widetilde{\varphi}$. Учитывая теоремы 6 и 7 (6) и предложение 11 (1), мы имеем

$$\begin{aligned}
C\Big(\widetilde{P},\widetilde{\mathcal{X}\circ\varphi}\Big) \ &= \ \big\{\widetilde{v} \ : \ v \in CD_0\big(P,\mathcal{X}\circ\varphi\big)\big\} \ \supset \ \Big\{\widetilde{u\circ\varphi} \ : \ u \in CD_0(Q,\mathcal{X})\Big\} \ = \\
= \ \big\{\widetilde{u}\circ\widetilde{\varphi} \ : \ u \in CD_0(Q,\mathcal{X})\big\} \ &= \ \big\{w\circ\widetilde{\varphi} \ : \ w \in C\big(\widetilde{Q},\widetilde{\mathcal{X}}\big)\big\} \ \subset \ C\big(\widetilde{P},\widetilde{\mathcal{X}}\circ\widetilde{\varphi}\big).
\end{aligned}$$

Остается заметить, что множество $\big\{w\circ\widetilde{\varphi} \ : \ w \in C\big(\widetilde{Q},\widetilde{\mathcal{X}}\big)\big\}$ послойно плотно в $\widetilde{\mathcal{X}}\circ\widetilde{\varphi}$. $\rhd$

Напомним, что для банахова расслоения $\mathcal{X} = (\mathcal{X},\mathcal{C}_{\mathcal{X}})$ над Q и топологического подпространства $P \subset Q$ символом $\mathcal{X}|_P$ обозначается банахово расслоение над P со слоями $(\mathcal{X}|_P)(p) = \mathcal{X}(p)$ и непрерывной структурой $\{c|_P \,:\, c \in \mathcal{C}_{\mathcal{X}}\}$ (см. [2, 2.2.5]). Отметим очевидное равенство $C(P,\mathcal{X}|_P) = C(P,\mathcal{X})$, где $C(P,\mathcal{X})$ — множество всех непрерывных сечений расслоения $\mathcal{X}$, определенных на P (см. [2, 2.1.2]).

Предложение 12. *Пусть P — непустой компакт без изолированных точек, являющийся топологическим подпространством Q. Тогда $\widetilde{P}$ является топологическим подпространством $\widetilde{Q}$ и имеют место следующие соотношения:*

(1) *если* $u \in CD_0(Q,\mathcal{X})$, *то* $u|_P \in CD_0(P,\mathcal{X}|_P)$, $(u|_P)_c = u_c|_P$, $(u|_P)_d = u_d|_P$*;*

(2) $\widetilde{u|_P} = \widetilde{u}|_{\widetilde{P}}$ *для всех* $u \in CD_0(Q,\mathcal{X})$*;*

(3) $\widetilde{\mathcal{X}|_P} = \widetilde{\mathcal{X}}\big|_{\widetilde{P}}$*; в частности,* $C\Big(\widetilde{P},\widetilde{\mathcal{X}|_P}\Big) = C\big(\widetilde{P},\widetilde{\mathcal{X}}\big)$.

$\lhd$ Пусть φ — тождественное вложение P в Q. Тогда, как легко видеть, функция φ непрерывна и локально уникальна, $\widetilde{\varphi}$ является тождественным вложением $\widetilde{P}$ в $\widetilde{Q}$, $\mathcal{X}|_P = \mathcal{X} \circ \varphi$, $\widetilde{\mathcal{X}}\big|_{\widetilde{P}} = \widetilde{\mathcal{X}} \circ \widetilde{\varphi}$, $u|_P = u \circ \varphi$ и $\widetilde{u}|_{\widetilde{P}} = \widetilde{u} \circ \widetilde{\varphi}$ для всех $u \in CD_0(Q, \mathcal{X})$. Остается сослаться на теорему 7 (6) и предложения 10 и 11. $\rhd$

Из определения компакта $\widetilde{Q}$ с очевидностью следует, что отображение $\imath : q \mapsto (q, 0)$ является гомеоморфизмом Q на замкнутое подмножество $Q \times \{0\} \subset \widetilde{Q}$. Это наблюдение позволяет, рассматривая $\imath$ в качестве отождествления, считать Q топологическим подпространством $\widetilde{Q}$.

Предложение 13. *С учетом принятого выше соглашения справедливы следующие соотношения:*

(1) $\widetilde{u} \circ \imath = \widetilde{u}|_Q = u$ *для всех* $u \in C(Q, \mathcal{X})$;

(2) $\widetilde{\mathcal{X}} \circ \imath = \widetilde{\mathcal{X}}\big|_Q = \mathcal{X}$.

$\lhd$ (1) Если $u \in C(Q, \mathcal{X})$, то $\widetilde{u} \circ \imath = \widetilde{u}(\cdot, 0) = u_c = u$.

(2) Очевидно, что $\mathcal{X}$ и $\widetilde{\mathcal{X}} \circ \imath$ совпадают как дискретные банаховы расслоения (т. е. имеют одни и те же слои). Кроме того, с учетом (1) и теоремы 6 мы имеем

$$C(Q, \mathcal{X}) \ = \ \{\, \widetilde{u} \circ \imath \ : \ u \in C(Q, \mathcal{X}) \,\} \ \subset \ \big\{\, v \circ \imath \ : \ v \in C\big(\widetilde{Q}, \widetilde{\mathcal{X}}\big) \,\big\} \ \subset \ C\big(Q, \widetilde{\mathcal{X}} \circ \imath\big).$$

Согласно теореме 1 из включения $C(Q, \mathcal{X}) \subset C\big(Q, \widetilde{\mathcal{X}} \circ \imath\big)$ следует, что $\mathcal{X}$ и $\widetilde{\mathcal{X}} \circ \imath$ совпадают как непрерывные банаховы расслоения. $\rhd$

§ 4. Пространство CD_0-гомоморфизмов

Всюду ниже $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — произвольные банаховы расслоения над непустым компактом Q без изолированных точек.

Для простоты изложения введем ряд сокращающих обозначений.

Символом $S[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ обозначим векторное пространство всех сечений дискретного банахова расслоения над Q со слоями $B\big(\mathcal{X}(q), \mathcal{Y}(q)\big)$. Таким образом, $S[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ состоит из всевозможных функций H, определенных на Q и сопоставляющих каждой точке $q \in Q$ ограниченный линейный оператор $H(q) : \mathcal{X}(q) \to \mathcal{Y}(q)$.

Символом $\ell^\infty[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ обозначим банахово пространство всех ограниченных сечений из $S[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ (снабженное равномерной нормой):

$$\ell^\infty[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] \ = \ \big\{\, H \in S[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] \ : \ |\!|\!|H|\!|\!| \in \ell^\infty(Q) \,\big\}.$$

Для любых сечений $H \in S[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ и $u \in S(Q, \mathcal{X})$ символом Hu условимся обозначать сечение расслоения $\mathcal{Y}$, определяемое формулой $(Hu)(q) = H(q)u(q)$, $q \in Q$. (В [2] вместо Hu используется символ $H \otimes u$.)

Банахово подпространство $\ell^\infty[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$, состоящее из всех гомоморфизмов из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$ (см. [2, 2.4.2, 2.4.11]), будем обозначать через $C[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$. $\big($В [2] вместо $C[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ используется символ $\mathrm{Hom}_Q(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.$\big)$

Замечание 4. Отметим, что согласно [2, 2.4.7] мы имеем

$$C[\mathcal{X},\mathcal{Y}] \ = \ \big\{\, H\in S[\mathcal{X},\mathcal{Y}] \ : \ Hu\in C(Q,\mathcal{Y}) \text{ для всех } u\in C(Q,\mathcal{X}) \,\big\}.$$

$\big($В рамках данной статьи последнее равенство можно рассматривать как определение $C[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$, ср. [5, 2.4.9].$\big)$

Предложение 14. *Справедливо равенство*

$$\ell^\infty[\mathcal{X},\mathcal{Y}] \ = \ \big\{\, H\in S[\mathcal{X},\mathcal{Y}] \ : \ Hu\in \ell^\infty(Q,\mathcal{Y}) \text{ для всех } u\in C(Q,\mathcal{X}) \,\big\}.$$

$\triangleleft$ В пояснении нуждается лишь включение «$\supset$». Пусть сечение $H\in S[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$ таково, что $Hu\in\ell^\infty(Q,\mathcal{Y})$ для всех $u\in C(Q,\mathcal{X})$. Для каждой точки $q\in Q$ определим линейный оператор $T_q\colon C(Q,\mathcal{X})\to\mathcal{Y}(q)$ формулой $T_q u = H(q)u(q)$. Привлекая теорему Дюпре, мы видим, что

$$\begin{aligned} \|T_q\| \ &= \ \sup\,\big\{\, \|H(q)u(q)\| \ : \ u\in C(Q,\mathcal{X}),\ \|u\|\leqslant 1 \,\big\} \ = \\ &= \ \sup\,\big\{\, \|H(q)x\| \ : \ x\in \mathcal{X}(q),\ \|x\|\leqslant 1 \,\big\} \ = \ \|H(q)\|. \end{aligned}$$

Кроме того, $\sup_{q\in Q}\|T_q u\| = \sup_{q\in Q}\|(Hu)(q)\| < \infty$ для всех $u\in C(Q,\mathcal{X})$. Поскольку $C(Q,\mathcal{X})$ является банаховым пространством, принцип ограниченности позволяет заключить, что $\sup_{q\in Q}\|H(q)\| = \sup_{q\in Q}\|T_q\| < \infty$. $\triangleright$

Определение 3. Введем в рассмотрение множество

$$c_0[\mathcal{X},\mathcal{Y}] \ = \ \big\{\, H\in S[\mathcal{X},\mathcal{Y}] \ : \ Hu\in c_0(Q,\mathcal{Y}) \text{ для всех } u\in C(Q,\mathcal{X}) \,\big\}$$

и условимся называть его элементы c_0-*гомоморфизмами* из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$.

Привлекая предложение 14 и учитывая полноту $c_0(Q,\mathcal{Y})$, легко показать, что $c_0[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$ является замкнутым векторным подпространством $\ell^\infty[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$. В частности, $c_0[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$ — банахово пространство относительно равномерной нормы.

Предложение 15. *Сечение $H\in S[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$ является c_0-гомоморфизмом тогда и только тогда, когда оно ограничено и существует послойно плотное в $\mathcal{X}$ подмножество $\mathcal{U}\subset C(Q,\mathcal{X})$ такое, что $Hu\in c_0(Q,\mathcal{Y})$ для всех $u\in\mathcal{U}$.*

$\triangleleft$ В доказательстве нуждается лишь достаточность. Пусть H и $\mathcal{U}$ удовлетворяют сформулированному условию. Опуская тривиальный случай $H\equiv 0$, будем считать, что $C := \sup_{q\in Q}\|H(q)\| > 0$. Рассмотрим произвольное сечение $v\in C(Q,\mathcal{X})$ и покажем, что $Hv\in c_0(Q,\mathcal{Y})$. Согласно следствию 1 для этого достаточно, зафиксировав точку $q\in Q$ и число $\varepsilon>0$, найти такую окрестность U точки q, что $\|H(p)v(p)\|<\varepsilon$ для всех $p\in U\backslash\{q\}$. Благодаря послойной плотности $\mathcal{U}$ в $\mathcal{X}$ существует сечение $u\in\mathcal{U}$, удовлетворяющее неравенству $\|u(q)-v(q)\|<\frac{\varepsilon}{2C}$. В силу следствия 1 справедливо соотношение $\lim\limits_{p\to q} H(p)u(p)=0$, а значит, найдется окрестность U точки q такая, что

$$\|u(p)-v(p)\| < \frac{\varepsilon}{2C}\,, \quad \|H(p)u(p)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех $p\in U\backslash\{q\}$. Тогда для всех $p\in U\backslash\{q\}$ мы имеем

$$\|H(p)v(p)\| \leqslant \|H(p)u(p)\| + \|H(p)\|\,\|u(p)-v(p)\| < \frac{\varepsilon}{2} + C\frac{\varepsilon}{2C} = \varepsilon. \quad \triangleright$$

Как показывает следующее утверждение, требование ограниченности сечения H в предложении 15 является существенным.

Предложение 16. *Для любого непустого компакта Q без изолированных точек существуют постоянные банаховы расслоения $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ над Q, сечение $H \in S[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ и послойно плотное в $\mathcal{X}$ подмножество $\mathcal{U} \subset C(Q, \mathcal{X})$ такие, что $Hu \in c_0(Q, \mathcal{Y})$ для всех $u \in \mathcal{U}$, но сечение H не является ограниченным.*

$\triangleleft$ Если Q — непустой компакт без изолированных точек, то он, очевидно, бесконечен и тем самым содержит последовательность попарно различных точек $q_n \in Q$ ($n \in \mathbb{N}$). Пусть c_0 — банахово пространство сходящихся к нулю последовательностей и s_{fin} — пространство финитных (т. е. устанавливающихся на нуле) последовательностей. Определим отображение $H : Q \to c_0'$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &H(q_n)\, x = n \cdot x(n) \ \text{ при } \ n \in \mathbb{N},\ x \in c_0, \\ &H(q) = 0 \ \text{ для всех } \ q \in Q \setminus \{q_n : n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Тогда, полагая $\mathcal{X} = Q \times \{c_0\}$, $\mathcal{Y} = Q \times \{\mathbb{R}\}$ и обозначая через $\mathcal{U}$ совокупность всех постоянных функций $u : Q \to s_{\mathrm{fin}}$, мы видим, что $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, H и $\mathcal{U}$ являются искомыми. $\triangleright$

Примером c_0-гомоморфизма служит любое сечение $H \in S[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$, поточечная норма $\|H\|$ которого принадлежит $c_0(Q)$. Тем не менее, множество $c_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$, вообще говоря, не исчерпывается сечениями такого вида. Действительно, из построений, приведенных в [13, Example 9], следует, что в случае сепарабельного компакта Q существует c_0-гомоморфизм, поточечная норма которого равна единице на всюду плотном подмножестве Q. Более того, как показывает следующее утверждение, вне зависимости от свойств Q поточечной нормой c_0-гомоморфизма может быть совершенно произвольная ограниченная положительная функция $f : Q \to \mathbb{R}$.

Предложение 17. *Для любого непустого компакта Q без изолированных точек существуют постоянные банаховы расслоения $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ над Q такие, что для произвольной функции $0 \leqslant f \in \ell^\infty(Q)$ найдется c_0-гомоморфизм $H \in c_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ с поточечной нормой $\|H\| = f$.*

$\triangleleft$ Положим $\mathcal{X} = Q \times \{c_0(Q)\}$, $\mathcal{Y} = Q \times \{\mathbb{R}\}$ и определим отображение $H : Q \to c_0(Q)'$, полагая $H(q)x = f(q)x(q)$ для всех $q \in Q$ и $x \in c_0(Q)$. Тогда, как легко видеть, $H \in S[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$, $\|H\| = f$ и $Hu \in c_0(Q, \mathcal{Y})$ для всех постоянных функций $u : Q \to c_0(Q)$, откуда с учетом предложения 15 следует, что $H \in c_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$. $\triangleright$

Определение 4. Введем в рассмотрение множество

$$CD_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] \ = \ \big\{\, H \in S[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] \ : \ Hu \in CD_0(Q, \mathcal{Y}) \text{ для всех } u \in C(Q, \mathcal{X}) \,\big\}$$

и условимся называть его элементы CD_0-*гомоморфизмами* из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$.

Из предложения 14 и полноты $CD_0(Q, \mathcal{Y})$ (см. предложение 4) с очевидностью следует, что $CD_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ является замкнутым векторным подпространством $\ell^\infty[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ и тем самым представляет собой банахово пространство относительно равномерной нормы.

Предложение 18. *Имеет место равенство*

$$CD_0[\mathcal{X},\mathcal{Y}] \;=\; \big\{\, H \in S[\mathcal{X},\mathcal{Y}] \;:\; Hu \in CD_0(Q,\mathcal{Y}) \text{ для всех } u \in CD_0(Q,\mathcal{X}) \,\big\}.$$

◁ В пояснении нуждается лишь включение «$\subset$». Если $H\in CD_0[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$ и $u\in CD_0(Q,\mathcal{X})$, то $|\!|\!| Hu_d |\!|\!| \leqslant \|H\| |\!|\!| u_d |\!|\!| \in c_0(Q)$, а значит,

$$Hu = Hu_c + Hu_d \in CD_0(Q,\mathcal{Y}) + c_0(Q,\mathcal{Y}) \subset CD_0(Q,\mathcal{Y}). \quad ▷$$

Предложение 19. *Если $H \in \ell^\infty[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$, $u \in C(Q,\mathcal{X})$ и $Hu \in CD_0(Q,\mathcal{Y})$, то*

$$|\!|\!| (Hu)_c |\!|\!| \leqslant \|H\|\, |\!|\!| u |\!|\!|, \quad |\!|\!| (Hu)_d |\!|\!| \leqslant 2\|H\|\, |\!|\!| u |\!|\!|.$$

◁ Согласно теореме 4 для всех $q \in Q$ мы имеем

$$\|(Hu)_c(q)\| = \lim_{p\to q} \|H(p)u(p)\| \leqslant \sup_{p\in Q} \|H(p)\| \lim_{p\to q} \|u(p)\| = \|H\|\|u(q)\|.$$

Кроме того, $|\!|\!| (Hu)_d |\!|\!| = |\!|\!| Hu - (Hu)_c |\!|\!| \leqslant |\!|\!| Hu |\!|\!| + |\!|\!| (Hu)_c |\!|\!| \leqslant 2\|H\|\, |\!|\!| u |\!|\!|$. ▷

Предложение 20. *Сечение $H \in S[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$ является CD_0-гомоморфизмом тогда и только тогда, когда оно ограничено и существует послойно плотное в $\mathcal{X}$ подмножество $\mathcal{U} \subset C(Q,\mathcal{X})$ такое, что $Hu \in CD_0(Q,\mathcal{Y})$ для всех $u \in \mathcal{U}$.*

◁ В доказательстве нуждается лишь достаточность. Пусть H и $\mathcal{U}$ удовлетворяют сформулированным условиям. Не нарушая общности, можно считать, что $\mathcal{U}$ является векторным подпространством $C(Q,\mathcal{X})$.

Для каждой точки $q \in Q$ обозначим через $\mathcal{U}(q)$ всюду плотное векторное подпространство $\{u(q) : u \in \mathcal{U}\} \subset \mathcal{X}(q)$ и определим отображение $G_0(q) : \mathcal{U}(q) \to \mathcal{Y}(q)$, полагая

$$G_0(q)u(q) = (Hu)_c(q) \;\text{ для всех }\; u \in \mathcal{U}.$$

Такое определение корректно, поскольку с учетом предложения 19 для любых сечений $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$ из $u_1(q) = u_2(q)$ следует, что

$$\|(Hu_1)_c(q) - (Hu_2)_c(q)\| \leqslant \|H\|\|u_1(q) - u_2(q)\| = 0.$$

Линейность отображения $G_0(q)$ не вызывает сомнений. Кроме того, согласно предложению 19 для всех $u \in \mathcal{U}$ мы имеем

$$\|G_0(q)u(q)\| = \|(Hu)_c(q)\| \leqslant \|H\|\,\|u(q)\|,$$

откуда $\|G_0(q)\| \leqslant \|H\|$ и тем самым $G_0(q) \in B\big(\mathcal{U}(q),\mathcal{Y}(q)\big)$. Благодаря плотности $\mathcal{U}(q)$ в $\mathcal{X}(q)$ и полноте $\mathcal{Y}(q)$ оператор $G_0(q)$ имеет продолжение $G(q) \in B\big(\mathcal{X}(q),\mathcal{Y}(q)\big)$, причем $\|G(q)\| = \|G_0(q)\| \leqslant \|H\|$. Таким образом, $G \in \ell^\infty[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$ и $Gu = (Hu)_c \in C(Q,\mathcal{Y})$ для всех $u \in \mathcal{U}$, откуда согласно [2, 2.4.9] следует, что $G \in C[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$.

Поскольку $H - G \in \ell^\infty[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$ и $(H-G)u = Hu - (Hu)_c \in c_0(Q,\mathcal{Y})$ для всех $u \in \mathcal{U}$, в силу предложения 15 сечение $H - G$ является c_0-гомоморфизмом, а значит, для всех $v \in C(Q,\mathcal{X})$

$$Hv = Gv + (H-G)v \in C(Q,\mathcal{Y}) + c_0(Q,\mathcal{Y}) = CD_0(Q,\mathcal{Y}),$$

т. е. $H \in CD_0[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$. ▷

Заметим, что согласно предложению 16 требование ограниченности сечения H в последнем утверждении не может быть опущено.

Очевидно, что сумма гомоморфизма и c_0-гомоморфизма является CD_0-гомоморфизмом. Как показывает следующее утверждение, такими суммами исчерпывается все множество CD_0-гомоморфизмов.

Теорема 8. *Имеет место разложение в прямую сумму*

$$CD_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] \; = \; C[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] \oplus c_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}].$$

В частности, любой CD_0-гомоморфизм $H \in CD_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ единственным образом представляется в виде суммы $H = H_c + H_d$, где $H_c \in C[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ и $H_d \in c_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$.

$\lhd$ Единственной нетривиальной частью сформулированного утверждения является включение $CD_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] \subset C[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] + c_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$, обоснование которого можно легко извлечь из доказательства предложения 20, рассмотрев $C(Q, \mathcal{X})$ в качестве $\mathcal{U}$. $\rhd$

Предложение 21. *Для любых $H \in CD_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ и $u \in CD_0(Q, \mathcal{X})$ справедливы равенства*

$$(Hu)_c = H_c u_c, \quad (Hu)_d = H_c u_d + H_d u_d + H_d u_c.$$

В частности, если $u \in C(Q, \mathcal{X})$, то

$$(Hu)_c = H_c u, \quad (Hu)_d = H_d u.$$

$\lhd$ Учитывая предложение 1 и теорему 8, достаточно заметить, что

$$Hu = (H_c + H_d)(u_c + u_d) = H_c u_c + (H_c u_d + H_d u_d + H_d u_c),$$

причем $H_c u_c \in C(Q, \mathcal{Y})$ и $H_c u_d + H_d u_d + H_d u_c \in c_0(Q, \mathcal{Y})$. $\rhd$

Аналогичным образом из теоремы 3 (2), предложения 5 и теоремы 8 выводится следующее утверждение.

Предложение 22. *Пространство $CD_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ является $CD_0(Q)$-модулем относительно поточечного умножения. При этом для любых $f \in CD_0(Q)$ и $H \in CD_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ имеют место равенства*

$$(fH)_c = f_c H_c, \quad (fH)_d = f_c H_d + f_d H_d + f_d H_c.$$

В частности, если $f \in C(Q)$, то

$$(fH)_c = f H_c, \quad (fH)_d = f H_d.$$

Очевидное неравенство $\|fH\| \leqslant \|f\| \|H\|$ ($f \in CD_0(Q)$, $H \in CD_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$) позволяет заключить, что $CD_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ является банаховым $CD_0(Q)$-модулем.

Предложение 23. *Для любого CD_0-гомоморфизма $H \in CD_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ имеют место неравенства*

$$\|H_c\| \leqslant \|H\|, \quad \|H_d\| \leqslant 2\|H\|.$$

$\lhd$ Пусть $H \in CD_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$. Рассмотрим произвольные элементы $q \in Q$ и $x \in \mathcal{X}(q)$. По теореме Дюпре, существует такое сечение $u \in C(Q, \mathcal{X})$, что $u(q) = x$. Тогда согласно предложениям 19 и 21 мы имеем

$$\|H_c(q)x\| = \|H_c(q)u(q)\| = \|(H_c u)(q)\| = \|(Hu)_c(q)\| \leqslant \|H\| \, \|u(q)\| = \|H\| \, \|x\|,$$

откуда вытекает неравенство $\|H_c\| \leqslant \|H\|$. Следовательно,

$$\|H_d\| = \|H - H_c\| \leqslant \|H\| + \|H_c\| \leqslant 2\|H\|. \quad \triangleright$$

Пусть $\widetilde{\mathcal{X}}$ и $\widetilde{\mathcal{Y}}$ — банаховы расслоения над $\widetilde{Q}$, построенные в соответствии с определением 1. Для каждого CD_0-гомоморфизма $H \in CD_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ определим сечение $\widetilde{H} \in S\big[\widetilde{\mathcal{X}}, \widetilde{\mathcal{Y}}\big]$ формулой

$$\widetilde{H}(q,r) = H_c(q) + rH_d(q), \quad q \in Q,\ r \in \{0,1\}.$$

Таким образом, $\widetilde{H}(\cdot,0) = H_c$ и $\widetilde{H}(\cdot,1) = H$.

Теорема 9. *Отображение $H \mapsto \widetilde{H}$ осуществляет линейную изометрию банахова пространства $CD_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ на $C\big[\widetilde{\mathcal{X}}, \widetilde{\mathcal{Y}}\big]$. При этом для любых $f \in CD_0(Q)$, $u \in CD_0(Q, \mathcal{X})$ и $H \in CD_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ имеют место равенства $\widetilde{Hu} = \widetilde{H}\widetilde{u}$ и $\widetilde{fH} = \widetilde{f}\widetilde{H}$.*

$\triangleleft$ Пусть $f \in CD_0(Q)$, $u \in CD_0(Q, \mathcal{X})$ и $H \in CD_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$. С учетом предложения 21 мы имеем

$$\widetilde{Hu}\,(\cdot,0) = (Hu)_c = H_c u_c = \widetilde{H}(\cdot,0)\,\widetilde{u}(\cdot,0) = \big(\widetilde{H}\widetilde{u}\big)(\cdot,0),$$
$$\widetilde{Hu}\,(\cdot,1) = Hu = \widetilde{H}(\cdot,1)\,\widetilde{u}(\cdot,1) = \big(\widetilde{H}\widetilde{u}\big)(\cdot,1)$$

и тем самым $\widetilde{Hu} = \widetilde{H}\widetilde{u}$. Совершенно аналогично с привлечением предложения 22 устанавливается равенство $\widetilde{fH} = \widetilde{f}\widetilde{H}$.

Покажем, что $\widetilde{H} \in C\big[\widetilde{\mathcal{X}}, \widetilde{\mathcal{Y}}\big]$. Действительно, если $v \in C\big(\widetilde{Q}, \widetilde{\mathcal{X}}\big)$, то $v = \widetilde{u}$ для некоторого сечения $u \in CD_0(Q, \mathcal{X})$ (см. теорему 6), а значит, $\widetilde{H}v = \widetilde{H}\widetilde{u} = \widetilde{Hu} \in C\big(\widetilde{Q}, \widetilde{\mathcal{Y}}\big)$. Остается учесть замечание 4.

Линейность отображения $H \mapsto \widetilde{H}$ очевидна. Кроме того, с учетом предложения 23 для всех $H \in CD_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ мы имеем

$$\big\|\widetilde{H}\big\| = \max\big\{\big\|\widetilde{H}(\cdot,0)\big\|, \big\|\widetilde{H}(\cdot,1)\big\|\big\} = \max\{\|H_c\|, \|H\|\} = \|H\|.$$

Остается показать, что образ отображения $H \mapsto \widetilde{H}$ совпадает с $C\big[\widetilde{\mathcal{X}}, \widetilde{\mathcal{Y}}\big]$. Рассмотрим произвольный гомоморфизм $G \in C\big[\widetilde{\mathcal{X}}, \widetilde{\mathcal{Y}}\big]$ и положим $H := G(\cdot,1)$. Как легко видеть, $H \in S[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$. Согласно предложению 7 для всех $u \in CD_0(Q, \mathcal{X})$ справедливы соотношения

$$Hu = G(\cdot,1)\,\widetilde{u}(\cdot,1) = (G\widetilde{u})(\cdot,1) \in CD_0(Q, \mathcal{Y}),$$

откуда следует, что $H \in CD_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ (см. предложение 18). Для доказательства равенства $\widetilde{H} = G$ рассмотрим произвольные элементы $(q,r) \in \widetilde{Q}$, $x \in \widetilde{\mathcal{X}}(q,r)$ и покажем, что

$$\widetilde{H}(q,r)\,x = G(q,r)\,x.$$

Благодаря теореме 6 и теореме Дюпре найдется сечение $u \in CD_0(Q, \mathcal{X})$ такое, что $\widetilde{u}(q,r) = x$. С учетом предложений 7 и 21 мы имеем

$$\widetilde{H}(\cdot,0)\,\widetilde{u}(\cdot,0) = H_c u_c = (Hu)_c = \big((G\widetilde{u})(\cdot,1)\big)_c = (G\widetilde{u})(\cdot,0) = G(\cdot,0)\,\widetilde{u}(\cdot,0).$$

Кроме того, $\widetilde{H}(\cdot,1)\,\widetilde{u}(\cdot,1) = H\,\widetilde{u}(\cdot,1) = G(\cdot,1)\,\widetilde{u}(\cdot,1)$. Следовательно,

$$\widetilde{H}(q,r)\,x = \widetilde{H}(q,r)\,\widetilde{u}(q,r) = G(q,r)\,\widetilde{u}(q,r) = G(q,r)\,x. \quad \triangleright$$

Приведенный ниже критерий непосредственно вытекает из теоремы 9. (В случае $\mathcal{Y} = Q\times\{\mathbb{R}\}$ он фактически является переформулировкой утверждения [13, Proposition 8].)

Предложение 24. *Следующие свойства сечения $G \in S\big[\widetilde{\mathcal{X}},\widetilde{\mathcal{Y}}\big]$ равносильны:*

(1) $G \in C\big[\widetilde{\mathcal{X}},\widetilde{\mathcal{Y}}\big]$;

(2) $G(\cdot,0) \in C[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$, $G(\cdot,1) - G(\cdot,0) \in c_0[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$;

(3) $G(\cdot,1) \in CD_0[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$, $G(\cdot,0) = G(\cdot,1)_c$.

Отметим также, что образы пространств $C[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$ и $c_0[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$ относительно изометрии $H \mapsto \widetilde{H}$ описываются следующими формулами:

$$\begin{aligned}\big\{\,\widetilde{H}\ :\ H\in C[\mathcal{X},\mathcal{Y}]\,\big\} &= \big\{\,G\in C\big[\widetilde{\mathcal{X}},\widetilde{\mathcal{Y}}\big]\ :\ G(\cdot,0)=G(\cdot,1)\,\big\} = \\ &= \big\{\,G\in S\big[\widetilde{\mathcal{X}},\widetilde{\mathcal{Y}}\big]\ :\ G(\cdot,0)=G(\cdot,1)\in C[\mathcal{X},\mathcal{Y}]\,\big\},\\ \big\{\,\widetilde{H}\ :\ H\in c_0[\mathcal{X},\mathcal{Y}]\,\big\} &= \big\{\,G\in C\big[\widetilde{\mathcal{X}},\widetilde{\mathcal{Y}}\big]\ :\ G(\cdot,0)=0\,\big\} = \\ &= \big\{\,G\in S\big[\widetilde{\mathcal{X}},\widetilde{\mathcal{Y}}\big]\ :\ G(\cdot,0)=0,\ G(\cdot,1)\in c_0[\mathcal{X},\mathcal{Y}]\,\big\}.\end{aligned}$$

В заключение мы опишем пространства гомоморфизмов, c_0-гомоморфизмов и CD_0-гомоморфизмов в терминах их действия в банаховых $C(Q)$-модулях.

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ — произвольные векторные подпространства банаховых пространств $\ell^\infty(Q,\mathcal{X})$ и $\ell^\infty(Q,\mathcal{Y})$ соответственно. Функцию $T\colon\mathcal{U} \to \mathcal{V}$ назовем *ортоморфизмом* (ср. [2, 6.2.11; 5, 4.1.3 (5)]), если T является ограниченным линейным оператором и для любых $u \in \mathcal{U}$, $q \in Q$ из $u(q) = 0$ следует $(Tu)(q) = 0$. Множество всех ортоморфизмов из $\mathcal{U}$ в $\mathcal{V}$ условимся обозначать символом $\mathrm{Orth}(\mathcal{U},\mathcal{V})$. Как легко видеть, $\mathrm{Orth}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ является замкнутым векторным подпространством пространства всех ограниченных линейных операторов из $\mathcal{U}$ в $\mathcal{V}$, снабженного операторной нормой.

Предложение 25. *Следующие свойства функции $T\colon C(Q,\mathcal{X})\to\ell^\infty(Q,\mathcal{Y})$ равносильны:*

(1) *T является ортоморфизмом;*

(2) *T является гомоморфизмом банаховых $C(Q)$-модулей, т. е. T — ограниченный линейный оператор и $T(fu) = fTu$ для всех $f \in C(Q)$, $u \in C(Q,\mathcal{X})$;*

(3) *существует сечение $H \in \ell^\infty[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$ такое, что $(Tu)(q) = H(q)u(q)$ для всех $u \in C(Q,\mathcal{X})$, $q \in Q$; при этом $\|T\| = \|H\|$.*

◁ Импликация (3)⇒(2) очевидна.

(2)⇒(1). Пусть $u \in C(Q,\mathcal{X})$ и $q \in Q$ таковы, что $u(q) = 0$. Согласно [12, 2.11] найдутся последовательности функций $f_n \in C(Q)$ и сечений $u_n \in C(Q,\mathcal{X})$ такие, что $f_n(q) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\|f_nu_n - u\| \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда в силу (2) мы имеем

$$(Tu)(q) = \lim_{n\to\infty}\big(T(f_nu_n)\big)(q) = \lim_{n\to\infty}(f_nTu_n)(q) = \lim_{n\to\infty} f_n(q)(Tu_n)(q) = 0.$$

(1)⇒(3). Для каждой точки $q \in Q$ определим отображение $H(q) : \mathcal{X}(q) \to \mathcal{Y}(q)$, полагая $H(q)u(q) = (Tu)(q)$ для всех $u \in C(Q,\mathcal{X})$. Корректность такого определения с очевидностью вытекает из (1) и теоремы Дюпре. Линейность отображения $H(q)$ также не вызывает сомнений. Кроме того, согласно теореме Дюпре, мы имеем

$$\begin{aligned}\sup_{q\in Q}\|H(q)\| &= \sup\big\{\,\|H(q)u(q)\|\ :\ q\in Q,\ u\in C(Q,\mathcal{X}),\ \|u\|\leqslant 1\,\big\} = \\ &= \sup\Big\{\,\sup_{q\in Q}\|(Tu)(q)\|\ :\ u\in C(Q,\mathcal{X}),\ \|u\|\leqslant 1\Big\} = \|T\|. \quad ▷\end{aligned}$$

Предложение 25 позволяет вывести из установленных выше результатов ряд очевидных следствий о пространствах ортоморфизмов. Сформулируем некоторые из них.

Следствие 2. *Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — банаховы расслоения над непустым компактом Q без изолированных точек.*

(1) *Для любого сечения $H \in \ell^\infty[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$ определим функцию $T_H : C(Q,\mathcal{X}) \to \ell^\infty(Q,\mathcal{Y})$, полагая $(T_H u)(q) = H(q)u(q)$ для всех $u \in C(Q,\mathcal{X})$ и $q \in Q$. Сопоставление $H \mapsto T_H$ осуществляет изометрический изоморфизм между следующими парами банаховых $C(Q)$-модулей:*

$$\begin{array}{lcl} \ell^\infty[\mathcal{X},\mathcal{Y}] & \leftrightarrow & \mathrm{Orth}\big(C(Q,\mathcal{X}), \ell^\infty(Q,\mathcal{Y})\big), \\ C[\mathcal{X},\mathcal{Y}] & \leftrightarrow & \mathrm{Orth}\big(C(Q,\mathcal{X}), C(Q,\mathcal{Y})\big), \\ c_0[\mathcal{X},\mathcal{Y}] & \leftrightarrow & \mathrm{Orth}\big(C(Q,\mathcal{X}), c_0(Q,\mathcal{Y})\big), \\ CD_0[\mathcal{X},\mathcal{Y}] & \leftrightarrow & \mathrm{Orth}\big(C(Q,\mathcal{X}), CD_0(Q,\mathcal{Y})\big). \end{array}$$

(2) *Имеет место разложение в прямую сумму*

$$\mathrm{Orth}\big(C(Q,\mathcal{X}), CD_0(Q,\mathcal{Y})\big) = \mathrm{Orth}\big(C(Q,\mathcal{X}), C(Q,\mathcal{Y})\big) \oplus \mathrm{Orth}\big(C(Q,\mathcal{X}), c_0(Q,\mathcal{Y})\big).$$

В частности, любой ортоморфизм $T : C(Q,\mathcal{X}) \to CD_0(Q,\mathcal{Y})$ единственным образом представляется в виде суммы $T = T_c + T_d$ ортоморфизмов $T_c : C(Q,\mathcal{X}) \to$ $\to C(Q,\mathcal{Y})$ и $T_d : C(Q,\mathcal{X}) \to c_0(Q,\mathcal{Y})$. При этом $T_c = T_{H_c}$ и $T_d = T_{H_d}$, где H — такой CD_0-гомоморфизм из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$, что $T = T_H$.

(3) *Для любого ортоморфизма $T : C(Q,\mathcal{X}) \to CD_0(Q,\mathcal{Y})$ имеют место неравенства $\|T_c\| \leqslant \|T\|$, $\|T_d\| \leqslant 2\|T\|$.*

(4) *Для любого ортоморфизма $T : C(Q,\mathcal{X}) \to CD_0(Q,\mathcal{Y})$ и любого сечения $u \in C(Q,\mathcal{X})$ справедливы равенства $T_c u = (Tu)_c$ и $T_d u = (Tu)_d$.*

В частности, банаховы пространства $CD_0[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$, $C\big[\widetilde{\mathcal{X}},\widetilde{\mathcal{Y}}\big]$, $\mathrm{Orth}\big(C(Q,\mathcal{X}), CD_0(Q,\mathcal{Y})\big)$ и $\mathrm{Orth}\big(C(\widetilde{Q},\widetilde{\mathcal{X}}), C(\widetilde{Q},\widetilde{\mathcal{Y}})\big)$ линейно изометричны.

Список литературы

1. *Алпай Ш., Эрджан З.* Заметка о пространствах $CD_0(K)$ // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 3. С. 514–517.

2. *Гутман А. Е.* Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Тр. Ин-та математики СО РАН. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1995. Т. 29. Линейные операторы, согласованные с порядком. С. 63–211.

3. *Гутман А. Е., Коптев А. В.* Пространства CD_0-функций и удвоение по Александрову // Владикавказский мат. журн. 2007. Т. 9, № 3. С. 11–21.

4. *Коптев А. В.* Несколько классов банаховых расслоений с непрерывными слабо непрерывными сечениями // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 3. С. 600–612.

5. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы. М.: Наука, 2003.

6. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.

7. *Abramovich Y. A., Wickstead A. W.* Regular operators from and into a small Riesz space // Indag. Math. N.S. 1991. Vol. 2. No. 3. P. 257–274.

8. *Abramovich Y. A., Wickstead A. W.* Remarkable classes of unital *AM*-spaces // J. Math. Anal. Appl. 1993. Vol. 180. No. 2. P. 398–411.

9. *Abramovich Y. A., Wickstead A. W.* The regularity of order bounded operators into $C(K)$. II // Quart. J. Math. Oxford Ser. 2. 1993. Vol. 44. No. 175. P. 257–270.

10. *Alpay Ş., Ercan Z.* $CD_0(K,E)$ and $CD_\omega(K,E)$-spaces as Banach lattices // Positivity. 2000. Vol. 4. No. 3. P. 213–225.

11. *Ercan Z.* A concrete description of $CD_0(K)$-spaces as $C(X)$-spaces and its applications // Proc. Amer. Math. Soc. 2004. Vol. 132. P. 1761–1763.

12. *Gierz G.* Bundles of Topological Vector Spaces and Their Duality. Berlin: Springer, 1982. (Lecture Notes in Math.; No. 955.)

13. *Hõim T., Robbins D. A.* Section spaces of Banach bundles which generalize some function spaces // Siberian Adv. Math. 2006. Vol. 16. No. 3. P. 71–81.

14. *Troitsky V. G.* On $CD_0(K)$-spaces // Владикавказский мат. журн. 2004. Т. 6, № 1. С. 71–73.

Материал поступил в редколлегию 20.08.2007

Адреса авторов

ГУТМАН Александр Ефимович
РОССИЯ, 630090, г. Новосибирск, 90
пр. Акад. Коптюга, 4
Институт математики СО РАН
e-mail: gutman@math.nsc.ru

КОПТЕВ Александр Викторович
РОССИЯ, 630090, г. Новосибирск, 90
пр. Акад. Коптюга, 4
Институт математики СО РАН
e-mail: koptev@math.nsc.ru

Referats

UDC 517.9

Yu. E. Anikonov, M. Yamamoto On one method of investigation of inverse problems // Vestnik, Quart. J. of Novosibirsk State Univ., Series: Math., mech. and informatics. 2007. Vol. 7, No. 4, P. 3–8.

In this paper we propose and discuss a new method of investigation of nonlinear inverse problems for evolution equation in complex case on the base of Carlemann formulae.

UDC 519.635.4

Bondar L. N. Solvability conditions of boundary value problems for quasielliptic systems // Vestnik, Quart. J. of Novosibirsk State Univ., Series: Math., mech. and informatics. 2007. Vol. 7, No. 4, P. 9–26.

In the paper we consider boundary value problems for a class of quasielliptic systems in a half-space. The Lopatinskii condition is assumed to be satisfied. We establish sufficient conditions for the right-hand side of the systems under which the boundary value problems are solvable in $W^l_p(R^+_n)$, $1 < p \leq p^*$.

UDC 517.98

Gutman A. E., Koptev A. V. Spaces of CD_0-sections and CD_0-homomorphisms of Banach bundles // Vestnik, Quart. J. of Novosibirsk State Univ., Series: Math., mech. and informatics. 2007. Vol. 7, No. 4, P. 27–48.

The Banach space $CD_0(Q,\mathcal{X}) = C(Q,\mathcal{X}) + c_0(Q,\mathcal{X})$ is considered whose elements are the sums of continuous and "discrete" sections of a Banach bundle $\mathcal{X}$ over a compact Hausdorff space Q without isolated points. As is known, $CD_0(Q,\mathcal{X})$ is isometric to the space $C\big(\widetilde{Q},\widetilde{\mathcal{X}}\big)$ of continuous sections of a Banach bundle $\widetilde{\mathcal{X}}$ over the set $\widetilde{Q} = Q\times\{0,1\}$ endowed with a special topology. The connections are clarified between $\mathcal{X}$ and $\widetilde{\mathcal{X}}$ related to subbundles as well as to bundles obtained by a continuous change of variable and by the restriction onto a topological subspace. In addition, we introduce and study the space $CD_0[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$ of CD_0-homomorphisms of Banach bundles $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$ and demonstrate that it possesses certain properties analogous to those of the space of CD_0-sections.