ПРОСТРАНСТВО CD_0-СЕЧЕНИЙ БАНАХОВА РАССЛОЕНИЯ

А. Е. Гутман[1], **А. В. Коптев**[2]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск;
[1] *gutman@math.nsc.ru*, [2] *koptev@math.nsc.ru*

На протяжение всего текста Q — непустой компакт (т. е. компактное хаусдорфово топологическое пространство) без изолированных точек. Как обычно, символом $C(Q)$ обозначается множество всех непрерывных вещественных функций, определенных на Q, а символом $c_0(Q)$ — совокупность всех таких функций $f\colon Q \to \mathbb{R}$, что множество $\{q \in Q : |f(q)| > \varepsilon\}$ конечно для любого числа $\varepsilon > 0$.

Пространство $CD_0(Q) = C(Q) + c_0(Q)$, введенное Ю. А. Абрамовичем и А. В. Викстедом [1, 2] в качестве примера банаховой решетки с некоторыми необычными порядково-топологическими свойствами, послужило предметом дальнейших интенсивных исследований (см., например, [3–8]), одним из результатов которых явилось представление $CD_0(Q)$ в виде пространства $C(\widetilde{Q})$ непрерывных функций на множестве $\widetilde{Q} = Q \times \{0,1\}$, снабженном некоторой компактной хаусдорфовой топологией (см. [5]). В данной работе мы продолжаем инициированные в [6] исследования, связанные с распространением упомянутых результатов на случай сечений банаховых расслоений.

Банахово расслоение (или, точнее, непрерывное банахово расслоение) над Q является формализацией интуитивного представления о «непрерывной» функции $\mathcal{X}$, определенной на Q и сопоставляющей каждой точке $q \in Q$ некоторое банахово пространство $\mathcal{X}(q)$ (называемое слоем $\mathcal{X}$ в точке q). Один из формальных подходов к определению «непрерывности» $\mathcal{X}$ заключается в выделении так называемой непрерывной структуры в $\mathcal{X}$ — некоторого векторного подпространства $\mathcal{C}_{\mathcal{X}}$ пространства сечений $S(Q,\mathcal{X}) = \{s\colon Q \to \cup \operatorname{im} \mathcal{X} \,:\, s(q) \in \mathcal{X}(q) \text{ для всех } q \in Q\}$ такого, что поточечная норма $|\!|\!|c|\!|\!|\colon q \mapsto \|c(q)\|_{\mathcal{X}(q)}$ каждого сечения $c \in \mathcal{C}_{\mathcal{X}}$ непрерывна и множество $\{c(q) \,:\, c \in \mathcal{C}_{\mathcal{X}}\}$ всюду плотно в $\mathcal{X}(q)$ для всех $q \in Q$. Непрерывная структура $\mathcal{C}_{\mathcal{X}}$ позволяет определить совокупность $C(Q,\mathcal{X})$ непрерывных сечений расслоения $\mathcal{X}$ как множество всех таких сечений $u \in S(Q,\mathcal{X})$, что $|\!|\!|u - c|\!|\!| \in C(Q)$ при $c \in \mathcal{C}_{\mathcal{X}}$. Понятие непрерывного сечения банахова расслоения является естественным обобщением понятия непрерывной вектор-функции: действительно, если X — банахово пространство, то $C(Q,X) = C(Q,\mathcal{X})$, где $\mathcal{X}$ — постоянное банахово расслоение со слоем X, снабженное непрерывной структурой, состоящей, например, из постоянных функций $c\colon Q \to X$.

Пусть $\mathcal{X}$ — произвольное банахово расслоение над Q. Прямыми аналогами банаховых решеток $c_0(Q)$ и $CD_0(Q)$ являются пространства сечений $c_0(Q,\mathcal{X}) = \{u \in S(Q,\mathcal{X}) : |\!|\!|u|\!|\!| \in c_0(Q)\}$ и $CD_0(Q,\mathcal{X}) = C(Q,\mathcal{X}) + c_0(Q,\mathcal{X})$.

Теорема 1. *Имеет место разложение в прямую сумму $CD_0(Q,\mathcal{X}) = C(Q,\mathcal{X}) \oplus c_0(Q,\mathcal{X})$. Таким образом, каждое сечение $u \in CD_0(Q,\mathcal{X})$ единственным образом представляется в виде суммы $u = u_c + u_d$, где $u_c \in C(Q,\mathcal{X})$, $u_d \in c_0(Q,\mathcal{X})$.*

Теорема 2. *Сечение $u \in S(Q,\mathcal{X})$ принадлежит $CD_0(Q,\mathcal{X})$ тогда и только тогда, когда для любой точки $q \in Q$ существует предел $\lim\limits_{p \to q} u(p)$. При этом $\lim\limits_{p \to q} u(p) = u_c(q)$ для всех $q \in Q$.*

Введем топологию на множестве $Q \times \{0,1\}$ следующим образом: $Q \times \{1\}$ снабдим дискретной топологией и для любого элемента $q \in Q$ окрестностью точки $(q,0)$ объявим всякое подмножество $U \subset Q \times \{0,1\}$, для которого существует такая окрестность $V \subset Q$ точки q, что $(V \times \{0,1\}) \setminus \{(q,1)\} \subset U$. Полученное топологическое пространство обозначим символом $\widetilde{Q}$.

Для $f \in CD_0(Q)$ определим функцию $\widetilde{f}\colon \widetilde{Q} \to \mathbb{R}$ равенствами $\widetilde{f}(\cdot,0) = f_c$, $\widetilde{f}(\cdot,1) = f$. В [5, 7] показано, что $\widetilde{Q}$ является компактом и отображение $f \mapsto \widetilde{f}$ осуществляет изометрический и порядковый изоморфизм между банаховыми решетками $CD_0(Q)$ и $C(\widetilde{Q})$.

Определим функцию $\widetilde{\mathcal{X}}$ на $\widetilde{Q}$, полагая $\widetilde{\mathcal{X}}(q,0) = \widetilde{\mathcal{X}}(q,1) = \mathcal{X}(q)$ $(q \in Q)$, и для каждого сечения $u \in CD_0(Q,\mathcal{X})$ рассмотрим сечение $\widetilde{u} \in S(\widetilde{Q},\widetilde{\mathcal{X}})$, определенное равенствами $\widetilde{u}(\cdot,0) = u_c$, $\widetilde{u}(\cdot,1) = u$. Несложно показать, что множество $\{\widetilde{u} : u \in CD_0(Q,\mathcal{X})\}$ является непрерывной структурой, превращающей $\widetilde{\mathcal{X}}$ в банахово расслоение над $\widetilde{Q}$.

Теорема 3. *Векторное пространство $CD_0(Q,\mathcal{X})$ является банаховым $CD_0(Q)$-модулем относительно равномерной нормы $\|u\| = \sup\{\|u(q)\| : q \in Q\}$ и поточечного умножения. Отображение $u \mapsto \widetilde{u}$ осуществляет линейную изометрию $CD_0(Q,\mathcal{X})$ на $C(\widetilde{Q},\widetilde{\mathcal{X}})$. При этом $\widetilde{fu} = \widetilde{f}\widetilde{u}$ для всех $f \in CD_0(Q)$, $u \in CD_0(Q,\mathcal{X})$.*

Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — банаховы расслоения над Q. Символом $S[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$ обозначим совокупность всевозможных функций H, определенных на Q и сопоставляющих точкам $q \in Q$ ограниченные линейные операторы $H(q)\colon \mathcal{X}(q) \to \mathcal{Y}(q)$. Как легко видеть, $S[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$ является векторным пространством относительно поточечных операций.

Для $H \in S[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$ и $u \in S(Q,\mathcal{X})$ условимся обозначать символом Hu сечение расслоения $\mathcal{Y}$, определяемое формулой $(Hu)(q) = H(q)u(q)$ $(q \in Q)$. Введем в рассмотрение векторные подпространства $C[\mathcal{X},\mathcal{Y}], c_0[\mathcal{X},\mathcal{Y}], CD_0[\mathcal{X},\mathcal{Y}] \subset S[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$, состоящие из тех функций $H \in S[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$, для которых из $u \in C(Q,\mathcal{X})$ следует $Hu \in C(Q,\mathcal{Y})$, $Hu \in c_0(Q,\mathcal{Y})$, $Hu \in CD_0(Q,\mathcal{Y})$ соответственно.

Теорема 4. *Если $H \in CD_0[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$, то $\sup\{\|H(q)\| : q \in Q\} < \infty$. Каждое из пространств $C[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$, $c_0[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$, $CD_0[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$ является банаховым пространством относительно равномерной нормы $\|H\| = \sup\{\|H(q)\| : q \in Q\}$.*

Теорема 5. *Имеет место разложение в прямую сумму $CD_0[\mathcal{X},\mathcal{Y}] = C[\mathcal{X},\mathcal{Y}] \oplus c_0[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$. В частности, любая функция $H \in CD_0[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$ единственным образом представляется в виде суммы $H = H_c + H_d$, где $H_c \in C[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$, $H_d \in c_0[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$.*

Теорема 6. *Если $H \in CD_0[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$, $u \in CD_0(Q,\mathcal{X})$, то $Hu \in CD_0(Q,\mathcal{Y})$, $(Hu)_c = H_c u_c$, $(Hu)_d = H_c u_d + H_d u_d + H_d u_c$.*

Для $H \in CD_0[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$ определим функцию $\widetilde{H} \in S[\widetilde{\mathcal{X}},\widetilde{\mathcal{Y}}]$, полагая $\widetilde{H}(\cdot,0) = H_c$, $\widetilde{H}(\cdot,1) = H$.

Теорема 7. *Отображение $H \mapsto \widetilde{H}$ осуществляет линейную изометрию между банаховыми пространствами $CD_0[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$ и $C[\widetilde{\mathcal{X}},\widetilde{\mathcal{Y}}]$. При этом для любых $f \in CD_0(Q)$, $H \in CD_0[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$, $u \in CD_0(Q,\mathcal{X})$ справедливо равенство $\widetilde{fHu} = \widetilde{f}\widetilde{H}\widetilde{u}$.*

Для $C(Q)$-подмодуля $\mathcal{V} \subset CD_0(Q,\mathcal{Y})$ обозначим символом $\mathrm{Hom}(C(Q,\mathcal{X}),\mathcal{V})$ множество всех ограниченных $C(Q)$-гомоморфизмов из $C(Q,\mathcal{X})$ в $\mathcal{V}$. Для $H \in CD_0[\mathcal{X},\mathcal{Y}]$ определим функцию $T_H : C(Q,\mathcal{X}) \to CD_0(Q,\mathcal{Y})$, полагая $(T_H u)(q) = H(q)u(q)$ для всех $u \in C(Q,\mathcal{X})$ и $q \in Q$.

Теорема 8. *Отображение $H \mapsto T_H$ осуществляет линейные изометрии между парами банаховых пространств $C[\mathcal{X},\mathcal{Y}] \leftrightarrow \mathrm{Hom}(C(Q,\mathcal{X}),C(Q,\mathcal{Y}))$, $c_0[\mathcal{X},\mathcal{Y}] \leftrightarrow \mathrm{Hom}(C(Q,\mathcal{X}),c_0(Q,\mathcal{Y}))$, $CD_0[\mathcal{X},\mathcal{Y}] \leftrightarrow \mathrm{Hom}(C(Q,\mathcal{X}),CD_0(Q,\mathcal{Y}))$.*

Литература

1. *Abramovich Y. A., Wickstead A. W.* Regular operators from and into a small Riesz space // Indag. Math. N.S. 1991. V. 2, N 3. P. 257–274.
2. *Abramovich Y. A., Wickstead A. W.* Remarkable classes of unital AM-spaces // J. Math. Anal. Appl. 1993. V. 180, N 2. P. 398–411.
3. *Abramovich Y. A., Wickstead A. W.* The regularity of order bounded operators into $C(K)$. II // Quart. J. Math. Oxford Ser. 2. 1993. V. 44, N 175. P. 257–270.
4. *Alpay Ş., Ercan Z.* $CD_0(K,E)$ and $CD_\omega(K,E)$-spaces as Banach lattices // Positivity. 2000. V. 4, N 3. P. 213–225.
5. *Ercan Z.* A concrete description of $CD_0(K)$-spaces as $C(X)$-spaces and its applications // Proc. Amer. Math. Soc. 2004. V. 132. P. 1761–1763.
6. *Hõim T., Robbins D. A.* Section spaces of Banach bundles which generalize some function spaces // Siberian Adv. Math. 2006. V. 16, N 3. P. 71–81.
7. *Troitsky V. G.* On $CD_0(K)$-spaces // Владикавказский мат. журн. 2004. Т. 6, № 1. С. 71–73.
8. *Алпай Ш., Эрджан З.* Заметка о пространствах $CD_0(K)$ // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 3. С. 514–517.