Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2009. Том 50, № 5

УДК 517.98

ПРИНЦИП ОГРАНИЧЕННОСТИ ДЛЯ РЕШЕТОЧНО НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ

А. Е. Гутман, С. А. Лисовская

Аннотация. Рассматриваются три классических факта теории нормированных пространств: принцип ограниченности, теорема Банаха — Штейнгауза и принцип ограниченности на выпуклом компакте. С помощью методов булевозначного анализа доказываются точные аналоги этих теорем для случая решеточно нормированных пространств.

Ключевые слова: теорема Банаха — Штейнгауза, пространство Банаха — Канторовича, циклически компактное множество, булевозначный анализ.

Академику Ю. Г. Решетняку в связи с его 80-летием

В работе, базирующейся на традиционных определениях, обозначениях и фактах из теории решеточно нормированных пространств [1] и булевозначного анализа [2], мы доказываем точные аналоги трех классических теорем для случая произвольных решеточно нормированных пространств над расширенными пространствами Канторовича, а именно принцип ограниченности (2.4), теорему Банаха — Штейнгауза (2.6) и принцип ограниченности на выпуклом компакте (3.3). Эти теоремы, полученные методом «спуска», усиливают и обобщают аналогичные результаты И. Г. Ганиева и К. К. Кудайбергенова [3], установленные для случая пространств Банаха — Канторовича над решеткой измеримых функций. (Доказательства, приведенные в [3], получены с помощью специфической техники теории измеримых банаховых расслоений с лифтингом и не задействуют методы булевозначного анализа.)

Все векторные пространства по умолчанию предполагаются ненулевыми.

На протяжении всей статьи E — расширенное пространство Канторовича над $\mathbb{R}$; E^{++} — множество порядковых единиц в E; 1_E — некоторый фиксированный элемент E^{++}; ef — произведение элементов $e, f \in E$, соответствующее той операции умножения, относительно которой E является коммутативной упорядоченной алгеброй с мультипликативной единицей 1_E, причем $(\forall\, e, f \in E)(ef = 0 \Leftrightarrow e \perp f)$; B — полная булева алгебра всех порядковых проекторов в E; $\operatorname{Prt}(B)$ — множество всех разбиений единицы в B; $\mathbb{V}^{(B)}$ — отделимый B-значный универсум; $[\![\varphi]\!]$ — значение истинности в $\mathbb{V}^{(B)}$ формулы φ языка теории множеств; $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [\varphi]$ — синоним равенства $[\![\varphi]\!] = 1_B$; $\bigsqcup\limits_{i\in I} \pi_i x_i$ — перемешивание семейства $(x_i)_{i\in I} \subset \mathbb{V}^{(B)}$ относительно $(\pi_i)_{i\in I} \in \operatorname{Prt}(B)$; $\operatorname{cyc} X$ — циклическая оболочка множества $X \subset \mathbb{V}^{(B)}$; $\mathscr{R}$ — упорядоченное поле вещественных чисел внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, содержащее $\mathbb{R}^{\wedge}$ в виде подполя.

Работа поддержана Фондом содействия отечественной науке.

Множество всех экстенсиональных функций из X в Y, где $X, Y \subset \mathbb{V}^{(B)}$, мы обозначаем символом $\mathscr{E}(X,Y)$. В случае $\mathscr{X}, \mathscr{Y} \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $\mathscr{T} \subset \mathscr{E}(\mathscr{X}{\downarrow}, \mathscr{Y}{\downarrow})$ положим $\mathscr{T}{\uparrow\uparrow} := \{T{\uparrow} : T \in \mathscr{T}\}{\uparrow}$. При этом $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [\mathscr{T}{\uparrow\uparrow}$ — некоторое множество функций из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}]$. Если же $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [\mathscr{X} \neq \varnothing$ и $\mathbb{T}$ — некоторое множество функций из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}]$, то $\mathbb{T}{\downarrow\downarrow} := \{\tau{\downarrow} : \tau \in \mathbb{T}{\downarrow}\} \subset \mathscr{E}(\mathscr{X}{\downarrow}, \mathscr{Y}{\downarrow})$.

1. Булевозначная реализация mix-полных E-нормированных пространств

Условимся называть (*полным*) *E-нормированным пространством* векторное пространство X над $\mathbb{R}$, снабженное нормой $|\!\cdot\!| : X \to E$, относительно которой X является (соответственно o-полным) d-разложимым решеточно нормированным пространством (см. [1, 2.1.1]), удовлетворяющим условию $|X|^{\perp\perp} = E$, где $|X| := \{|x| : x \in X\}$.

Пусть $X := (X, |\!\cdot\!|)$ — произвольное E-нормированное пространство.

Будем говорить, что Y является *E-нормированным подпространством* X, и писать $Y \subset_E X$, если Y — векторное подпространство X и пара $(Y, |\!\cdot\!|\big|_Y)$ является E-нормированным пространством. (При этом по умолчанию наделяем Y нормой $|\!\cdot\!|\big|_Y$.) Как легко видеть, $Y \subset_E X$ тогда и только тогда, когда Y — векторное подпространство X, $(\forall\, \pi \in B)(\forall\, y \in Y)(\pi_X y \in Y)$ и $|Y|^{\perp\perp} = E$. В случае $Y \subset_E X$ будем также говорить, что X является *расширением* Y.

Формулы $x_n \to x$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ будут использоваться в качестве синонимов порядковой сходимости $|x_n - x| \to 0$ в E. Говорят, что подмножество $U \subset X$ *аппроксимирует элемент* $x \in X$, если $\inf\{|u - x| : u \in U\} = 0$. Множество U назовем *всюду плотным* в X, если U аппроксимирует каждый элемент X.

Для удобства будем снабжать индексом X знаки перемешиваний, вычисляемых в пространстве X: $\operatorname*{mix}_{i\in I}{}_X\, \pi_i x_i$. Пусть $U \subset X$. Символом $\operatorname{mix}_X U$ обозначим mix-*замыкание* (в X) множества U, состоящее из всех элементов $x \in X$, представимых в виде $x = \operatorname*{mix}_{i\in I}{}_X\, \pi_i u_i$, где $(\pi_i)_{i\in I} \in \operatorname{Prt}(B)$, $(u_i)_{i\in I} \subset U$. Множество U назовем mix-*замкнутым* (в X), если $\operatorname{mix}_X U = U$. Будем говорить, что множество U является mix-*полным* (в X), если для любых $(\pi_i)_{i\in I} \in \operatorname{Prt}(B)$ и $(u_i)_{i\in I} \subset U$ существует такой элемент $u \in U$, что $u = \operatorname*{mix}_{i\in I}{}_X\, \pi_i u_i$.

Отметим, что mix-полнота является абсолютным свойством в следующем смысле: если X и $\overline{X}$ — E-нормированные пространства и $U \subset X \subset_E \overline{X}$, то mix-полнота U в X равносильна mix-полноте U в $\overline{X}$. В случае, когда X является mix-полным в X (а тогда и в любом расширении X), пространство X называется mix-*полным E-нормированным пространством*. Как известно, всякое полное E-нормированное пространство является mix-полным.

Назовем mix-*пополнением* пространства X такое mix-полное E-нормированное пространство $\overline{X}$, что $X \subset_E \overline{X}$ и $\operatorname{mix}_{\overline{X}} X = \overline{X}$. (Ясно, что $X = \overline{X}$ в случае mix-полного пространства X.) Любое E-нормированное пространство имеет mix-пополнение, причем единственное с точностью до изометрии (см. 1.6).

Следующее утверждение вытекает из [4, 1.5.2, 1.5.3].

1.1. *Если $\overline{X}$ — mix-пополнение E-нормированного пространства X, то любое всюду плотное подмножество X является всюду плотным в $\overline{X}$. В частности, X всюду плотно в $\overline{X}$.*

Согласно теореме Гордона [2, 10.3.4, 10.4.1, 10.4.3 (2)] спуск $\mathscr{R}{\downarrow}$, снабженный спусками линейных операций и отношения порядка, является расширенным пространством Канторовича, линейно и порядково изоморфным E. Для удобства будем считать, что $E = \mathscr{R}{\downarrow}$, причем $\operatorname{mix}_{E\,i\in I} \pi_i e_i = \bigsqcup_{i\in I} \pi_i e_i$ для любых $(\pi_i)_{i\in I} \in \operatorname{Prt}(B)$ и $(e_i)_{i\in I} \subset E$. Также будем считать, что $1_E = 1^{\wedge}$. (В этом случае $\lambda 1_E = \lambda^{\wedge}$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и спуск умножения из $\mathscr{R}$ совпадает с умножением на E, соответствующим выбору 1_E в качестве мультипликативной единицы.) Формально можно начать с рассмотрения произвольной полной булевой алгебры B, после чего ввести $E := \mathscr{R}{\downarrow}$, $1_E := 1^{\wedge}$ и затем превратить элементы $b \in B$ в порядковые проекторы на E, для всех $e \in E$ полагая be равным перемешиванию $(e, 0)$ относительно $(b, b^{\perp})$, где $b^{\perp}$ — дополнение b в B.

Нормированным пространством над подполем $F \subset \mathbb{R}$ назовем векторное пространство над F, снабженное $\mathbb{R}$-значной нормой, а *банаховым пространством над* F — полное нормированное пространство над F. Следующее утверждение достаточно очевидно.

1.2. *Если $(X, +, \cdot, \|\cdot\|)$ — банахово пространство над подполем $F \subset \mathbb{R}$, то умножение $\cdot : F \times X \to X$ единственным образом продолжается до $\bar{\cdot} : \mathbb{R} \times X \to X$ так, что $(X, +, \bar{\cdot}, \|\cdot\|)$ является банаховым пространством над $\mathbb{R}$.*

Пополнением нормированного пространства X над подполем $F \subset \mathbb{R}$ условимся называть банахово пространство над F (или, если угодно, над $\mathbb{R}$, см. 1.2), содержащее X в виде всюду плотного подпространства (над F). Отметим, что всякое нормированное пространство над F имеет пополнение, причем единственное с точностью до изометрии.

1.3. Если $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathscr{X}$ — векторное пространство над $\mathbb{R}^{\wedge}]$, то $\mathscr{X}{\downarrow}$ является векторным пространством над $\mathbb{R}$ относительно спуска сложения и умножения $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$, определенного формулой $\mathbb{V}^{(B)} \models [\lambda x = \lambda^{\wedge} x]$. Условимся по умолчанию снабжать $\mathscr{X}{\downarrow}$ упомянутыми операциями и тем самым считать $\mathscr{X}{\downarrow}$ векторным пространством над $\mathbb{R}$.

Если $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathscr{X}$ — векторное пространство над $\mathbb{R}^{\wedge}]$ и X — векторное подпространство $\mathscr{X}{\downarrow}$, то $\mathbb{V}^{(B)} \models [X{\uparrow}$ — векторное подпространство $\mathscr{X}]$. Это обстоятельство позволяет в случае $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathscr{X}$ — нормированное пространство над $\mathbb{R}^{\wedge}]$ по умолчанию считать, что $\mathbb{V}^{(B)} \models [X{\uparrow}$ — нормированное пространство над $\mathbb{R}^{\wedge}]$.

Следующий факт вытекает (с учетом 1.2) из [2, 11.3.1, 11.3.2] (см. также [1, 8.3.1, 8.3.2]).

1.4. Теорема. (1) *Если $\mathscr{X} \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathscr{X}$ — банахово пространство над $\mathbb{R}^{\wedge}]$, то $\mathscr{X}{\downarrow} := (\mathscr{X}{\downarrow}, \|\cdot\|_{\mathscr{X}}{\downarrow})$ является полным E-нормированным пространством. При этом $\operatorname{mix}_{\mathscr{X}{\downarrow}\, i\in I} \pi_i x_i = \bigsqcup_{i\in I} \pi_i x_i$ для любых $(x_i)_{i\in I} \subset \mathscr{X}{\downarrow}$ и $(\pi_i)_{i\in I} \in \operatorname{Prt}(B)$.*

(2) *Всякое E-нормированное пространство X изометрично некоторому всюду плотному подпространству $\widetilde{X} \subset_E \mathscr{X}{\downarrow}$, где $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathscr{X}$ — банахово пространство над $\mathbb{R}^{\wedge}]$. Такое пространство $\mathscr{X}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ единственно с точностью до изометрии. При этом $\widetilde{X} = \mathscr{X}{\downarrow}$ в случае полного E-нормированного пространства X.*

1.5. Теорема. (1) *Если $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathscr{X}$ — нормированное пространство над $\mathbb{R}^{\wedge}]$, то $\mathscr{X}{\downarrow} := (\mathscr{X}{\downarrow}, \|\cdot\|_{\mathscr{X}}{\downarrow})$ является mix-полным E-нормированным пространством. Если, кроме того, $X \subset_E \mathscr{X}{\downarrow}$, $(x_i)_{i\in I} \subset X$ и $(\pi_i)_{i\in I} \in \operatorname{Prt}(B)$, то существование $\operatorname{mix}_{X\, i\in I} \pi_i x_i$ равносильно включению $\bigsqcup_{i\in I} \pi_i x_i \in X$; при этом $\operatorname{mix}_{X\, i\in I} \pi_i x_i = \bigsqcup_{i\in I} \pi_i x_i$.*

(2) *Всякое E-нормированное пространство X изометрично некоторому подпространству $\widetilde{X} \subset_E \mathscr{X}{\downarrow}$, где $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathscr{X}$ — нормированное пространство над $\mathbb{R}^\wedge]$ и $\mathscr{X} = \widetilde{X}{\uparrow}$. Такое пространство $\mathscr{X}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ единственно с точностью до изометрии. При этом $\mathscr{X}{\downarrow}$ является* mix*-пополнением $\widetilde{X}$. В частности, если X —* mix*-полное E-нормированное пространство, то $\widetilde{X} = \mathscr{X}{\downarrow}$.*

$\lhd$ (1) Пусть $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathscr{Y}$ — пополнение $\mathscr{X}]$. В частности, $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathscr{X}$ — векторное подпространство банахова пространства $\mathscr{Y}$ над $\mathbb{R}^\wedge]$. Тогда $\mathscr{X}{\downarrow}$ является mix-полным E-нормированным подпространством $\mathscr{Y}{\downarrow}$. Действительно, замкнутость $\mathscr{X}{\downarrow}$ относительно линейных операций достаточно очевидна, условие $(\forall \pi \in B)(\forall x \in \mathscr{X}{\downarrow})(\pi_{\mathscr{Y}\downarrow} x \in \mathscr{X}{\downarrow})$ и mix-полнота $\mathscr{X}{\downarrow}$ вытекают из равенства сус $\mathscr{X}{\downarrow} = \mathscr{X}{\downarrow}$, а соотношение $|\mathscr{X}{\downarrow}|^{\perp\perp} = E$ обеспечивается неявным предположением $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathscr{X} \neq \{0\}]$. Наконец, если $X \subset_E \mathscr{X}{\downarrow}$, $(x_i)_{i\in I} \subset X$ и $(\pi_i)_{i\in I} \in \mathrm{Prt}(B)$, то $x := \coprod_{i\in I} \pi_i x_i = \operatorname{mix}_{i\in I}{}_{\mathscr{X}\downarrow} \pi_i x_i$, причем как существование $\operatorname{mix}_{i\in I}{}_X \pi_i x_i$, так и включение $x \in X$ влекут равенство $x = \operatorname{mix}_{i\in I}{}_X \pi_i x_i$.

(2) Согласно 1.4 (2) всякое E-нормированное пространство X изометрично некоторому подпространству $\widetilde{X} \subset_E \mathscr{Y}{\downarrow}$, где $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathscr{Y}$ — банахово пространство над $\mathbb{R}^\wedge]$. Положим $\mathscr{X} := \widetilde{X}{\uparrow}$. Тогда $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathscr{X}$ — нормированное пространство над $\mathbb{R}^\wedge]$ (см. 1.3). Согласно (1) спуск $\mathscr{X}{\downarrow}$ является mix-полным E-нормированным пространством, причем $\widetilde{X} \subset_E \mathscr{X}{\downarrow} = \widetilde{X}{\uparrow}{\downarrow} = \text{сус}\,\widetilde{X} = \operatorname{mix}_{\mathscr{X}\downarrow} \widetilde{X}$.

Если $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — нормированные пространства над $\mathbb{R}^\wedge]$, $X \subset_E \mathscr{X}{\downarrow}$, $Y \subset_E \mathscr{Y}{\downarrow}$, $\mathscr{X} = X{\uparrow}$, $\mathscr{Y} = Y{\uparrow}$ и f — изометрия X на Y, то, как легко видеть, $f \in \mathscr{E}(X, Y)$ и $\mathbb{V}^{(B)} \models [f{\uparrow}$ — изометрия $\mathscr{X}$ на $\mathscr{Y}]$. $\rhd$

В дальнейшем при рассмотрении какого-либо нормированного пространства $\mathscr{X}$ над $\mathbb{R}^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ условимся снабжать $\mathscr{X}{\downarrow}$ спусками линейных операций и нормой $|\cdot| := \|\cdot\|_{\mathscr{X}}{\downarrow}$ и тем самым считать $\mathscr{X}{\downarrow}$ (mix-полным) E-нормированным пространством.

1.6. Следствие. *Любое E-нормированное пространство имеет* mix*-пополнение. Если Y и Z —* mix*-пополнения E-нормированного пространства X, то пространства Y и Z изометричны, причем существует такая изометрия $f : Y \to Z$, что $f(x) = x$ для всех $x \in X$.*

$\lhd$ Существование mix-пополнения вытекает из 1.5 (2). Пусть Y и Z — mix-пополнения X. Для $y \in Y$ положим $f(y) := \operatorname{mix}_{i\in I}{}_Z\, \pi_i x_i$, где $(\pi_i)_{i\in I} \in \mathrm{Prt}(B)$ и $(x_i)_{i\in I} \subset X$ таковы, что $y = \operatorname{mix}_{i\in I}{}_Y\, \pi_i x_i$. Элементарные выкладки показывают, что такое определение функции $f : Y \to Z$ корректно, откуда сразу следует равенство $f(x) = x$ для всех $x \in X$. Проверка того факта, что f является изометрией Y на Z, также не составляет труда. $\rhd$

1.7. Теорема. *Пусть $\mathscr{X} \in \mathbb{V}^{(B)}$, $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathscr{X}$ — нормированное пространство над $\mathbb{R}^\wedge]$, и пусть X — всюду плотное E-нормированное подпространство $\mathscr{X}{\downarrow}$. Тогда следующие свойства подмножества $U \subset X$ равносильны:*

(a) *U всюду плотно в X;*

(b) *U всюду плотно в $\mathscr{X}{\downarrow}$;*

(c) $\mathbb{V}^{(B)} \models [\,U{\uparrow}$ *всюду плотно в* $X{\uparrow}\,]$;

(d) $\mathbb{V}^{(B)} \models [\,U{\uparrow}$ *всюду плотно в* $\mathscr{X}\,]$.

$\triangleleft$ Импликация (a)$\Rightarrow$(b) вытекает из [4, 1.5.2].

(b)$\Rightarrow$(d). Из [4, 1.5.5, 1.5.6] следует, что множество U всюду плотно в $\mathscr{X}\!\downarrow$ тогда и только тогда, когда $(\forall\, x \in \mathscr{X}\!\downarrow)(\forall\, e \in E^{++})(\exists\, u \in \mathrm{mix}_{\mathscr{X}\downarrow} U)\ \lvert x-u\rvert \leqslant e$. С учетом 1.5 (1) последнее утверждение равносильно $(\forall\, x \in \mathscr{X}\!\downarrow)(\forall\, e \in E^{++})$ $(\exists\, u \in \mathrm{cyc}\, U)\ \mathbb{V}^{(B)} \models [\|x-u\| \leqslant e]$, что в силу равенств $(\mathrm{cyc}\, U)\!\uparrow = (U\!\uparrow\downarrow)\!\uparrow = U\!\uparrow$ означает $\mathbb{V}^{(B)} \models [(\forall\, x \in \mathscr{X})(\forall\, e \in \mathscr{R}^{++})(\exists\, u \in U\!\uparrow)\ \|x-u\| \leqslant e]$.

Импликация (d)$\Rightarrow$(c) очевидна.

(c)$\Rightarrow$(a). Из (c) следует $\mathbb{V}^{(B)} \models [(\forall\, x \in X\!\uparrow)(\forall\, e \in \mathscr{R}^{++})(\exists\, u \in U\!\uparrow)\ \|x-u\| \leqslant e]$ или, что то же самое, $(\forall\, x \in X\!\uparrow\downarrow)(\forall\, e \in E^{++})(\exists\, u \in \mathrm{cyc}\, U)\ \lvert x-u\rvert \leqslant e$. Согласно [4, 1.5.5, 1.5.6] и 1.5 (1) последнее означает, что множество U всюду плотно в $X\!\uparrow\downarrow$, а значит, и в X. $\triangleright$

Следующее утверждение вытекает из [2, 10.3.8, 10.3.9].

1.8. Теорема. *Пусть* $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathscr{X}$ — *нормированное пространство над* $\mathbb{R}^\wedge]$.

(1) *Если* $s : \mathbb{N} \to \mathscr{X}\!\downarrow$ *и* $x \in \mathscr{X}\!\downarrow$, *то* $\mathbb{V}^{(B)} \models [s\!\Uparrow : \mathbb{N}^\wedge \to \mathscr{X}]$ *и сходимость* $s(n) \to x$ *в* $\mathscr{X}\!\downarrow$ *равносильна* $\mathbb{V}^{(B)} \models [s\!\Uparrow(n) \to x]$.

(2) *Если* $\mathbb{V}^{(B)} \models [\,\sigma : \mathbb{N}^\wedge \to \mathscr{X}$ *и* $x \in \mathscr{X}\,]$, *то* $\sigma\!\Downarrow : \mathbb{N} \to \mathscr{X}\!\downarrow$ *и сходимость* $\sigma\!\Downarrow(n) \to x$ *в* $\mathscr{X}\!\downarrow$ *равносильна* $\mathbb{V}^{(B)} \models [\sigma(n) \to x]$.

2. Принцип ограниченности и теорема Банаха — Штейнгауза для *E*-нормированных пространств

Пусть X и Y — E-нормированные пространства. Линейный оператор $T : X \to Y$ называется *ограниченным*, если существует такой элемент $c \in E^+$, что $\lvert Tx\rvert \leqslant c\,\lvert x\rvert$ для всех $x \in X$. Множество всех ограниченных линейных операторов из X в Y условимся обозначать символом $\mathscr{L}(X,Y)$. Для $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ полагают $\lvert T\rvert := \inf\{c \in E^+ : (\forall\, x \in X)\ \lvert Tx\rvert \leqslant c\,\lvert x\rvert\}$. Как легко видеть, $\lvert Tx\rvert \leqslant \lvert T\rvert\lvert x\rvert$ для всех $x \in X$.

Если X и Y — нормированные пространства над подполем $F \subset \mathbb{R}$, то символом $\mathscr{L}(X,Y)$ обозначается множество всех ограниченных линейных (точнее, F-линейных) операторов из X в Y, а норма $\|T\| \in \mathbb{R}$ оператора $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ определяется традиционной формулой $\inf\{c \in \mathbb{R}^+ : (\forall\, x \in X)\ \|Tx\| \leqslant c\|x\|\}$.

Если $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ — нормированные пространства над $\mathbb{R}^\wedge$ и $\tau \in \mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})]$, то записи $\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ и $\|\tau\|$ будут символизировать те элементы $L \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $e \in E$, для которых $\mathbb{V}^{(B)} \models [\,L = \mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\,]$ и $\mathbb{V}^{(B)} \models [\,e = \|\tau\|\,]$.

2.1. Теорема. *Пусть* $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ — *нормированные пространства над* $\mathbb{R}^\wedge]$, $X \subset_E \mathscr{X}\!\downarrow$, $Y \subset_E \mathscr{Y}\!\downarrow$. *Учитывая 1.3, будем рассматривать* $X\!\uparrow$ *и* $Y\!\uparrow$ *как нормированные подпространства* $\mathscr{X}$ *и* $\mathscr{Y}$ *над* $\mathbb{R}^\wedge$ *внутри* $\mathbb{V}^{(B)}$.

(1) *Если* $T \in \mathscr{L}(X,Y)$, *то* $T \in \mathscr{E}(X,Y)$, $\mathbb{V}^{(B)} \models [T\!\uparrow \in \mathscr{L}(X\!\uparrow, Y\!\uparrow)]$ *и* $\lvert T\rvert = \|T\!\uparrow\|$.

(2) *Если* $\mathbb{V}^{(B)} \models [\tau \in \mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})]$, *то* $\tau\!\downarrow \in \mathscr{L}(\mathscr{X}\!\downarrow, \mathscr{Y}\!\downarrow)$ *и* $\lvert \tau\!\downarrow\rvert = \|\tau\|$.

(3) *Если* $\mathbb{V}^{(B)} \models [\tau \in \mathscr{L}(X\!\uparrow, Y\!\uparrow)]$, *то* $\tau\!\downarrow|_X \in \mathscr{L}(X, Y\!\uparrow\downarrow)$ *и* $\lvert \tau\!\downarrow|_X\rvert = \|\tau\|$.

(4) *Для любого оператора* $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ *существует единственный элемент* $\tau \in \mathbb{V}^{(B)}$ *такой, что* $\mathbb{V}^{(B)} \models [\tau \in \mathscr{L}(X\!\uparrow, Y\!\uparrow)]$ *и* $\tau\!\downarrow|_X = T$. *При этом* $\tau = T\!\uparrow$, $\lvert T\rvert = \|\tau\|$.

$\triangleleft$ Достаточно привлечь [1, 8.3.3] и воспользоваться внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ тем фактом, что любой оператор $\tau \in \mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, действующий в нормированных пространствах $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ над $\mathbb{R}^\wedge$, имеет единственное продолжение $\bar\tau \in \mathscr{L}(\overline{\mathscr{X}},\overline{\mathscr{Y}})$, $\|\bar\tau\| = \|\tau\|$, где $\overline{\mathscr{X}}$ и $\overline{\mathscr{Y}}$ — пополнения $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$. $\triangleright$

2.2. Лемма. *Пусть $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ — mix-пополнения E-нормированных пространств X и Y. Тогда любой оператор $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ имеет единственное продолжение $\overline{T} \in \mathscr{L}(\overline{X},\overline{Y})$; при этом $|\!|T|\!| = |\!|\overline{T}|\!|$.*

$\triangleleft$ Благодаря 1.5 (2) можно считать, что $X \subset_E \overline{X} = \mathscr{X}{\downarrow}$ и $Y \subset_E \overline{Y} = \mathscr{Y}{\downarrow}$, где $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — нормированные пространства над $\mathbb{R}^\wedge]$, $\mathscr{X} = X{\uparrow}$ и $\mathscr{Y} = Y{\uparrow}$. Согласно 2.1 (1) всякий оператор $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ экстенсионален. Положим $\overline{T} := T{\uparrow}{\downarrow} : X{\uparrow}{\downarrow} \to Y{\uparrow}{\downarrow}$. Из 2.1 следует, что $\overline{T} \in \mathscr{L}(\overline{X},\overline{Y})$, $\overline{T}|_X = T$ и $|\!|T|\!| = |\!|\overline{T}|\!|$. Утверждение о единственности $\overline{T}$ вытекает из 2.1 (4). $\triangleright$

2.3. Следующее косметическое обобщение принципа ограниченности легко вывести из классической формулировки этого принципа [5, 7.2.5].

Пусть X и Y — нормированные пространства над некоторым подполем поля $\mathbb{R}$, причем X является полным, и пусть $\mathscr{T} \subset \mathscr{L}(X,Y)$. Если $\sup\limits_{T\in\mathscr{T}} \|Tx\| < \infty$ для всех $x \in X$, то $\sup\limits_{T\in\mathscr{T}} \|T\| < \infty$.

2.4. Теорема. *Пусть X и Y — E-нормированные пространства, причем X является полным, и пусть $\mathscr{T} \subset \mathscr{L}(X,Y)$. Если для каждого элемента $x \in X$ множество $\{|\!|Tx|\!| : T \in \mathscr{T}\}$ порядково ограничено, то множество $\{|\!|T|\!| : T \in \mathscr{T}\}$ порядково ограничено.*

$\triangleleft$ Пусть $\overline{Y}$ — mix-пополнение пространства Y (см. 1.6). Тогда подмножество $\mathscr{T} \subset \mathscr{L}(X,Y)$ является также подмножеством $\mathscr{L}(X,\overline{Y})$, причем нормы любого оператора $T \in \mathscr{T}$, вычисленные в $\mathscr{L}(X,Y)$ и $\mathscr{L}(X,\overline{Y})$, совпадают.

Согласно 1.4 (2) и 1.5 (2) можно считать, что $X = \mathscr{X}{\downarrow}$ и $\overline{Y} = \mathscr{Y}{\downarrow}$, где $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathscr{X}$ — банахово пространство над $\mathbb{R}^\wedge$, $\mathscr{Y}$ — нормированное пространство над $\mathbb{R}^\wedge]$. Пусть $(\forall\, x \in X)(\exists\, e \in E)(\forall\, T \in \mathscr{T})\ |\!|Tx|\!| \leqslant e$ (согласно условию теоремы). Тогда с учетом соотношения $\mathbb{V}^{(B)} \models [\,|\!|Tx|\!| = \|T{\uparrow}x\|\,]$ имеем

$$(\forall\, x \in \mathscr{X}{\downarrow})(\exists\, e \in E)(\forall\, \tau \in \{T{\uparrow} : T \in \mathscr{T}\})\ \mathbb{V}^{(B)} \models [\,\|\tau x\| \leqslant e\,].$$

Используя равенство $\mathscr{T}{\uparrow}{\uparrow} = \{T{\uparrow} : T \in \mathscr{T}\}{\uparrow}$, получаем

$$\mathbb{V}^{(B)} \models [(\forall\, x \in \mathscr{X})(\exists\, e \in \mathscr{R})(\forall\, \tau \in \mathscr{T}{\uparrow}{\uparrow})\ \|\tau x\| \leqslant e].$$

Кроме того, из 2.1 следует $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathscr{T}{\uparrow}{\uparrow} \subset \mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})]$. Применяя утверждение 2.3 внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, последовательно выводим $\mathbb{V}^{(B)} \models [(\exists\, e \in \mathscr{R})(\forall\, \tau \in \mathscr{T}{\uparrow}{\uparrow})\ \|\tau\| \leqslant e]$; $(\exists\, e \in E)(\forall\, \tau \in \{T{\uparrow} : T \in \mathscr{T}\})\ \mathbb{V}^{(B)} \models [\,\|\tau\| \leqslant e]$; $(\exists\, e \in E)(\forall\, T \in \mathscr{T})\ \|T{\uparrow}\| \leqslant e$. Остается заметить, что $|\!|T|\!| = \|T{\uparrow}\|$ согласно 2.1 (1). $\triangleright$

2.5. Следующее обобщение теоремы Банаха — Штейнгауза легко выводится из классической версии этой теоремы [5, 7.2.9].

Пусть X и Y — нормированные пространства над некоторым подполем поля $\mathbb{R}$, причем Y является полным, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}(X,Y)$, U — всюду плотное подмножество X, для каждого элемента $u \in U$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} T_n u \in Y$ и имеется такое число $c \in \mathbb{R}^+$, что $\|T_n\| \leqslant c$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует такой оператор $T \in \mathscr{L}(X,Y)$, что $\|T\| \leqslant c$ и $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x = Tx$ для всех $x \in X$.

2.6. Теорема. *Пусть X и Y — E-нормированные пространства, причем Y является полным, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}(X,Y)$, U — всюду плотное подмножество X, для каждого элемента $u \in U$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} T_n u \in Y$ и имеется такой элемент $c \in E^+$, что $|\!|T_n|\!| \leqslant c$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует такой оператор $T \in \mathscr{L}(X,Y)$, что $|\!|T|\!| \leqslant c$ и $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x = Tx$ для всех $x \in X$.*

$\lhd$ Предварительно докажем сформулированное утверждение для случая, когда пространство X является mix-полным.

Учитывая 1.4 (2) и 1.5 (2), можем считать, что $X = \mathscr{X}{\downarrow}$ и $Y = \mathscr{Y}{\downarrow}$, где $\mathbb{V}^{(B)} \models [\,\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — нормированные пространства над $\mathbb{R}^\wedge$, причем $\mathscr{Y}$ полно$\,]$.

Положим $s(n) := T_n{\uparrow}$ для $n \in \mathbb{N}$. Из 2.1 следует, что $s : \mathbb{N} \to \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}){\downarrow}$ и $\mathscr{L}(X, Y) = \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}){\downarrow}{\downarrow}$, а значит, $\mathbb{V}^{(B)} \models [\,s{\Uparrow} : \mathbb{N}^\wedge \to \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})]$ и $\mathbb{V}^{(B)} \models [\,s{\Uparrow}(n^\wedge) = T_n{\uparrow}]$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Согласно 1.7 имеем $\mathbb{V}^{(B)} \models [\,U{\uparrow}$ всюду плотно в $\mathscr{X}\,]$. Кроме того, $\|T_n{\uparrow}\| = |T_n| \leqslant c$ для всех $n \in \mathbb{N}$ (см. 2.1 (1)), тем самым $(\forall\, n \in \mathbb{N})\ \mathbb{V}^{(B)} \models [\,\|s{\Uparrow}(n^\wedge)\| \leqslant c\,]$, т. е. $\mathbb{V}^{(B)} \models [\,(\forall\, n \in \mathbb{N}^\wedge)\ \|s{\Uparrow}(n)\| \leqslant c\,]$. Наконец, по условию теоремы имеем $(\forall\, u \in U)(\exists\, y \in Y)\ s(n)u \to y$, откуда с учетом 1.8 (1) следует, что $(\forall\, u \in U)$ $(\exists\, y \in Y)\ \mathbb{V}^{(B)} \models [\,s{\Uparrow}(n)u \to y\,]$, т. е. $\mathbb{V}^{(B)} \models [\,(\forall\, u \in U{\uparrow})(\exists\, y \in \mathscr{Y})\ s{\Uparrow}(n)u \to y\,]$.

Применяя 2.5 внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, получаем $\mathbb{V}^{(B)} \models [\,(\exists\,\tau)\ \tau \in \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}),\ \|\tau\| \leqslant c$, $(\forall\, x \in \mathscr{X})\ s{\Uparrow}(n)x \to \tau x\,]$, а значит, найдется такой элемент $\tau \in \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}){\downarrow}$, что $\|\tau\| \leqslant c$ и $(\forall\, x \in X)\ \mathbb{V}^{(B)} \models [\,s{\Uparrow}(n)x \to \tau x\,]$. Положим $T := \tau{\downarrow}$. Тогда с учетом 1.8 (1) и 2.1 (2) имеем $T \in \mathscr{L}(X, Y)$, $|T| \leqslant c$ и $(\forall\, x \in X)\ T_n x \to Tx$.

Пусть теперь X — произвольное (не обязательно mix-полное) E-нормированное пространство и пусть $\overline{X}$ — mix-пополнение X (см. 1.6). Поскольку пространство Y является полным, оно mix-полно и поэтому совпадает со своим mix-пополнением. Согласно 2.2 для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует (единственное) продолжение $\overline{T}_n \in \mathscr{L}(\overline{X}, Y)$ оператора $T_n \in \mathscr{L}(X, Y)$, причем $|\overline{T}_n| = |T_n| \leqslant c$. Кроме того, будучи всюду плотным в X, множество U всюду плотно в $\overline{X}$ (см. 1.1). Наконец, для каждого элемента $u \in U$ имеем $(\forall\, n \in \mathbb{N})\ \overline{T}_n u = T_n u$, а значит, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{T}_n u = \lim\limits_{n\to\infty} T_n u \in Y$.

Таким образом, условия доказываемой теоремы выполняются для $\overline{X}$, Y, $(\overline{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, U и c, причем пространство $\overline{X}$ является mix-полным. Следовательно, существует такой оператор $\overline{T} \in \mathscr{L}(\overline{X}, Y)$, что $|\overline{T}\,| \leqslant c$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{T}_n x = \overline{T} x$ для всех $x \in \overline{X}$. Полагая $T := \overline{T}\,|_X$, получаем искомый оператор $T \in \mathscr{L}(X, Y)$. $\rhd$

3. Принцип ограниченности на выпуклом mix-компактном множестве

Пусть X — E-нормированное пространство, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ и $x \in X$. Будем говорить, что *последовательность* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *аппроксимирует* x, если для любого $k \in \mathbb{N}$ множество $\{x_n : n \geqslant k\}$ аппроксимирует x, т. е. $(\forall\, k \in \mathbb{N})\ \inf\limits_{n\geqslant k} |x_n - x| = 0$.

Множество $K \subset X$ назовем mix-*компактным*, если K является mix-полным и для любой последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ существует элемент $x \in K$ такой, что $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ аппроксимирует x. (Ясно, что в случае $E = \mathbb{R}$ mix-компактность равносильна компактности в топологии нормы.)

3.1. Как легко видеть, mix-компактность является абсолютным свойством в следующем смысле.

Если X и $\overline{X}$ — E-нормированные пространства и $K \subset X \subset_E \overline{X}$, то mix-*компактность K в X равносильна* mix-*компактности K в $\overline{X}$.*

3.2. Теорема. *Пусть $\mathbb{V}^{(B)} \models [\,\mathscr{X}$ — нормированное пространство над $\mathbb{R}^\wedge]$.*

(1) *Подмножество $K \subset \mathscr{X}{\downarrow}$* mix-*компактно тогда и только тогда, когда K является* mix-*полным и $\mathbb{V}^{(B)} \models [\,K{\uparrow}$ — компактное подмножество $\mathscr{X}\,]$.*

(2) *$\mathbb{V}^{(B)} \models [\,\mathscr{K}$ — компактное подмножество $\mathscr{X}\,]$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{K}{\downarrow}$ —* mix-*компактное подмножество $\mathscr{X}{\downarrow}$.*

$\triangleleft$ (1) Компактность множества $K{\uparrow}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ равносильна соотношению $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [\,(\forall\,\sigma : \mathbb{N}^{\wedge} \to K{\uparrow})(\exists\,x \in K{\uparrow})(\forall\,k \in \mathbb{N}^{\wedge})\ \inf\{\|\sigma(n)-x\| : n \geqslant k\} = 0\,]$, которое с учетом [2, 5.7.8] и равенства $\operatorname{cyc} K = K$ (см. 1.5 (1)) переписывается в виде $(\forall\,s : \mathbb{N} \to K)(\exists\,x \in K)(\forall\,k \in \mathbb{N})\ \varphi$, где $\varphi := (\mathbb{V}^{(B)} \vDash [\,\inf\{\|s{\uparrow}(n) - x\| : n \geqslant k^{\wedge}\} = 0\,])$, причем $\varphi \Leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \vDash [(\forall\,e \in \mathscr{R}^{+})((\forall\,n \geqslant k^{\wedge})(e \leqslant \|s{\uparrow}(n) - x\|) \Rightarrow e = 0)] \Leftrightarrow (\forall\,e \in E^{+})((\forall\,n \geqslant k)(e \leqslant |s(n) - x|) \Rightarrow e = 0) \Leftrightarrow \inf\{|s(n) - x| : n \geqslant k\} = 0$.

(2) Положим $K := \mathscr{K}{\downarrow}$. Если $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [\mathscr{K}$ — компактное подмножество $\mathscr{X}]$, то, учитывая очевидную mix-полноту множества K и применяя (1), заключаем, что K является mix-компактным подмножеством $\mathscr{X}{\downarrow}$. Если же K — mix-компактное подмножество $\mathscr{X}{\downarrow}$, то с учетом равенства $K{\uparrow} = \mathscr{K}$ имеем $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [\mathscr{K}$ — компактное подмножество $\mathscr{X}]$ согласно (1). $\triangleright$

Пусть X — нормированное пространство над $\mathbb{R}$, и пусть F — подполе $\mathbb{R}$. Множество $U \subset X$ назовем F-*выпуклым*, если $(1-\lambda)u+\lambda v \in U$ для всех $u, v \in U$ и $\lambda \in [0,1]_F$, где $[0,1]_F := F \cap [0,1]$. Выпуклыми подмножествами X, как обычно, считаются $\mathbb{R}$-выпуклые множества. Как легко видеть, если множество $U \subset X$ замкнуто и F-выпукло, то U — выпуклое подмножество X.

Следующая теорема является аналогом классического принципа ограниченности на выпуклом компакте (ср. [6, 2.9]).

3.3. Теорема. *Пусть X и Y — E-нормированные пространства, пусть $\mathscr{T} \subset \mathscr{L}(X,Y)$, и пусть K — выпуклое* mix*-компактное подмножество X. Если множество $\{|Tx| : T \in \mathscr{T}\}$ порядково ограничено для каждого элемента $x \in K$, то множество $\{|Tx| : T \in \mathscr{T},\ x \in K\}$ порядково ограничено.*

$\triangleleft$ Принимая во внимание 1.4 (2) и 1.2, можно считать, что X и Y — всюду плотные E-нормированные подпространства спусков $\mathscr{X}{\downarrow}$ и $\mathscr{Y}{\downarrow}$ соответственно, где $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — банаховы пространства над $\mathscr{R}]$. Из 1.7 следует, что $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [X{\uparrow}$ всюду плотно в $\mathscr{X}]$ и $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [Y{\uparrow}$ всюду плотно в $\mathscr{Y}]$. Пусть $\mathscr{K} := K{\uparrow}$.

Согласно 3.2 (1) имеем $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [\mathscr{K}$ — компактное подмножество $\mathscr{X}]$.

По условию теоремы $(\forall\,x, y \in K)(\forall\,\lambda \in [0,1]_{\mathbb{R}})(\exists\,z \in K)\ z = (1^{\wedge} - \lambda^{\wedge})x + \lambda^{\wedge}y$. Заметим, что $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [([0,1]_{\mathbb{R}})^{\wedge} = [0^{\wedge}, 1^{\wedge}]_{\mathbb{R}^{\wedge}}]$ в силу ограниченности формулы $\varphi(S, 0, 1, \mathbb{R})$, определяющей равенство $S = [0,1]_{\mathbb{R}}$ (см. [2, 4.2.9]). Следовательно,

$$\mathbb{V}^{(B)} \vDash [(\forall\,x, y \in \mathscr{K})(\forall\,\lambda \in [0^{\wedge}, 1^{\wedge}]_{\mathbb{R}^{\wedge}})(\exists\,z \in \mathscr{K})\ z = (1^{\wedge} - \lambda)x + \lambda y],$$

т. е. $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [\mathscr{K}$ — $\mathbb{R}^{\wedge}$-выпуклое подмножество $\mathscr{X}]$. Поскольку $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [\mathscr{K}$ замкнуто в $\mathscr{X}]$, заключаем, что $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [\mathscr{K}$ — выпуклое подмножество $\mathscr{X}]$.

По условию теоремы имеем $(\forall\,x \in K)(\exists\,e \in E)(\forall\,T \in \mathscr{T})\ |Tx| \leqslant e$, а значит,

$$(\forall\,x \in K)(\exists\,e \in E)(\forall\,\tau \in \{T{\uparrow} : T \in \mathscr{T}\})\ \mathbb{V}^{(B)} \vDash [\,\|\tau x\| \leqslant e\,]$$

или, что то же самое, $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [(\forall\,x \in \mathscr{K})(\exists\,e \in \mathscr{R})(\forall\,\tau \in \mathscr{T}{\uparrow\uparrow})\ \|\tau x\| \leqslant e\,]$. Согласно 2.1 $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [\mathscr{T}{\uparrow\uparrow} \subset \mathscr{L}(X{\uparrow}, Y{\uparrow})]$. Поскольку $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [X{\uparrow}$ всюду плотно в $\mathscr{X}]$ и $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [\mathscr{Y}$ — банахово пространство$\,]$, внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ каждый ограниченный оператор $\tau \in \mathscr{L}(X{\uparrow}, Y{\uparrow})$ имеет единственное продолжение $\bar\tau \in \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. Пусть $\overline{\mathscr{T}}$ такой элемент $\mathbb{V}^{(B)}$, что $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [\overline{\mathscr{T}} = \{\bar\tau : \tau \in \mathscr{T}{\uparrow\uparrow}\}]$. Тогда $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [\overline{\mathscr{T}} \subset \mathscr{L}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})]$ и $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [(\forall\,x \in \mathscr{K})(\exists\,e \in \mathscr{R})(\forall\,\tau \in \overline{\mathscr{T}})\ \|\tau x\| \leqslant e\,]$.

Таким образом, $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$, $\overline{\mathscr{T}}$ и $\mathscr{K}$ удовлетворяют внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ условиям принципа ограниченности на выпуклом компакте (см. [6, 2.9]). Используя этот принцип внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, заключаем, что $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [(\exists\,e \in \mathscr{R})(\forall\,\tau \in \overline{\mathscr{T}})(\forall\,x \in \mathscr{K})\ \|\tau x\| \leqslant e\,]$. Поскольку $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [\mathscr{K} \subset X{\uparrow}]$, последнее соотношение справедливо и для $\mathscr{T}{\uparrow\uparrow}$, т. е. $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [(\exists\, e \in \mathscr{R})(\forall\, \tau \in \mathscr{T}{\uparrow}{\uparrow})(\forall\, x \in \mathscr{K})\ \|\tau x\| \leqslant e]$, откуда следует, что $(\exists\, e \in E)(\forall\, \tau \in \{T{\uparrow} : T \in \mathscr{T}\})(\forall\, x \in K)\ \mathbb{V}^{(B)} \vDash [\,\|\tau x\| \leqslant e\,]$ или, что то же самое, $(\exists\, e \in E)(\forall\, T \in \mathscr{T})(\forall\, x \in K)\ |Tx| \leqslant e$. ▷

В завершение покажем (см. 3.4), что понятие циклически компактного подмножества B-циклического банахова пространства (см. [1, 7.3.1, 7.3.3, 8.5.1]) является в определенном смысле частным случаем понятия mix-компактного подмножества E-нормированного пространства.

Для удобства предварительно напомним соответствующие определения.

Согласно [1, 8.3.5] под B-циклическим банаховым пространством можно понимать E-нормированное подпространство $X := \{x \in \overline{X} : (\exists\, \lambda \in \mathbb{R}^+)\ |x| \leqslant \lambda\, 1_E\}$ какого-либо полного E-нормированного пространства $\overline{X}$, снабженное $\mathbb{R}$-значной нормой $\|x\| := \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ : |x| \leqslant \lambda\, 1_E\}$.

Обозначим через $\mathrm{Prt}_{\mathbb{N}}(B)$ множество всех последовательностей $\nu : \mathbb{N} \to B$, являющихся разбиениями единицы булевой алгебры B. Для $\nu_1, \nu_2 \in \mathrm{Prt}_{\mathbb{N}}(B)$ формула $\nu_1 \ll \nu_2$ служит сокращением следующего утверждения: если $m, n \in \mathbb{N}$ и $\nu_1(m) \wedge \nu_2(n) \neq 0_B$, то $m < n$.

Пусть X — B-циклическое банахово пространство.

Для mix-полного подмножества $K \subset X$, последовательности $s : \mathbb{N} \to K$ и разбиения $\nu \in \mathrm{Prt}_{\mathbb{N}}(B)$ полагают $s_\nu := \operatorname*{mix}_{n \in \mathbb{N}}{}_X\, \nu(n) s(n)$. *Циклической подпоследовательностью* последовательности $s : \mathbb{N} \to K$ называется всякая последовательность вида $(s_{\nu_k})_{k \in \mathbb{N}}$, где $(\nu_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathrm{Prt}_{\mathbb{N}}(B)$ и $(\forall\, k \in \mathbb{N})\ \nu_k \ll \nu_{k+1}$.

Подмножество $K \subset X$ называется *циклически компактным* (см. [1, 8.5.1]), если K является mix-полным и любая последовательность элементов K имеет циклическую подпоследовательность, сходящуюся по норме $\|\cdot\|$ к некоторому элементу K.

3.4. Теорема. *Пусть X — B-циклическое банахово пространство. Подмножество $K \subset X$ является циклически компактным тогда и только тогда, когда K mix-компактно.*

◁ $(\Rightarrow)$ Пусть K — циклически компактное подмножество X. Рассмотрим произвольную последовательность $s : \mathbb{N} \to K$. По определению циклической компактности найдутся последовательность $(\nu_k)_{k \in N} \subset \mathrm{Prt}_{\mathbb{N}}(B)$ и элемент $x \in K$ такие, что $(\forall\, k \in \mathbb{N})(\nu_k \ll \nu_{k+1})$ и $\|s_{\nu_k} - x\| \to 0$. Прямой анализ этих соотношений показывает, что $\inf\{|\varkappa - x| : \varkappa \in \mathrm{mix}_X\{s(n) : n \geqslant k\}\} = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$, а значит, последовательность s аппроксимирует элемент $x \in K$, поскольку в случае $\varkappa = \operatorname*{mix}_{n \geqslant k}{}_X\, \pi_n s(n)$, где $(\pi_n)_{n \geqslant k} \in \mathrm{Prt}(B)$, имеем

$$\pi_m\big(\inf_{n \geqslant k} |s(n) - x|\big) \leqslant \pi_m |s(m) - x| = |\pi_m s(m) - \pi_m x| = \pi_m |\varkappa - x| \leqslant |\varkappa - x|$$

для всех $m \geqslant k$ и, следовательно,

$$\inf_{n \geqslant k} |s(n) - x| = \sup_{m \geqslant k} \pi_m\big(\inf_{n \geqslant k} |s(n) - x|\big) \leqslant |\varkappa - x|.$$

$(\Leftarrow)$ Пусть теперь K — mix-компактное подмножество X, и пусть $s : \mathbb{N} \to K$. Благодаря 1.5 (2) можно считать, что $X \subset_E \mathscr{X}{\downarrow}$, где $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [\mathscr{X}$ — нормированное пространство над $\mathbb{R}^\wedge]$. Положим $\sigma := s{\uparrow}$. Тогда $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [\sigma : \mathbb{N}^\wedge \to K{\uparrow}]$. Кроме того, из 3.1 и 3.2 (1) следует, что $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [K{\uparrow}$ — компактное подмножество $\mathscr{X}]$. Применив внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ классический критерий компактности, рассмотрим такие элементы $x \in K$ и $\mathscr{N} \in \mathbb{V}^{(B)}$, что

$$\mathbb{V}^{(B)} \vDash \big[\mathscr{N} : \mathbb{N}^\wedge \to \mathbb{N}^\wedge,\ \mathscr{N}(k) < \mathscr{N}(k+1),\ \|\sigma(\mathscr{N}(k)) - x)\| \leqslant \tfrac{1}{k}\ \text{ для всех }\ k \in \mathbb{N}^\wedge\big].$$

Положим $\nu_k(n) := [\![\mathscr{N}(k^\wedge) = n^\wedge]\!]$ для всех $k, n \in \mathbb{N}$. Элементарная проверка показывает, что $\nu_k \in \mathrm{Prt}_{\mathbb{N}}(B)$ и $(\forall\, k \in \mathbb{N})\ \nu_k \ll \nu_{k+1}$. Кроме того, для всех $k \in \mathbb{N}$ имеем $\mathbb{V}^{(B)} \models [s_{\nu_k} = \sigma(\mathscr{N}(k^\wedge))]$ и, следовательно, $\|s_{\nu_k} - x\| \leqslant \frac{1}{k}$. $\triangleright$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы. М.: Наука, 2003.
2. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Введение в булевозначный анализ. М.: Наука, 2005.
3. *Ганиев И. Г., Кудайбергенов К. К.* Принцип равномерной ограниченности Банаха — Штейнгауза для операторов в пространствах Банаха — Канторовича над L^0 // Мат. тр. 2006. Т. 9, № 1. С. 21–33.
4. *Гутман А. Е.* Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Линейные операторы, согласованные с порядком. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1995. С. 63–211.
5. *Кутателадзе С. С.* Основы функционального анализа. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2006.
6. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.

Статья поступила 2 июня 2009 г.

Гутман Александр Ефимович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
gutman@math.nsc.ru

Лисовская Светлана Алексеевна
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
lisovskaya_sveta@ngs.ru