ПРИНЦИП ОГРАНИЧЕННОСТИ ДЛЯ РЕШЕТОЧНО НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ

BOUNDEDNESS PRINCIPLE FOR LATTICE-NORMED SPACES

Гутман А. Е.[1], Лисовская С. А.[2]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
gutman@math.nsc.ru

[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
lisovskaya_sveta@ngs.ru

В работе рассматриваются три классических факта теории нормированных пространств: принцип ограниченности, теорема Банаха — Штейнгауза и принцип ограниченности на выпуклом компакте. С помощью методов булевозначного анализа [1] доказываются сформулированные ниже точные аналоги этих принципов для случая решеточно нормированных пространств [2] над расширенным пространством Канторовича E.

Для E-нормированных пространств X и Y символом $\mathcal{L}(X,Y)$ обозначается множество всех линейных операторов $T : X \to Y$ таких, что $(\exists\, c \in E^+)\,(\forall\, x \in X)$ $|Tx| \leqslant c\,|x|$. При этом $|T| := \inf\{c \in E^+ : (\forall\, x \in X)\ |Tx| \le c\,|x|\}$. Подмножество $U \subset X$ называется *всюду плотным*, если $\inf\{|x-u| : u \in U\} = 0$ для всех $x \in X$. Подмножество $K \subset X$ называется mix-*компактным*, если K mix-полно и для любой последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ существует элемент $x \in K$ такой, что $\inf\limits_{n\geqslant k} |x_n - x| = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. *Пусть X и Y — E-нормированные пространства, причем X является полным, и пусть $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(X,Y)$. Если множество $\{|Tx| : T \in \mathcal{T}\}$ порядково ограничено для каждого элемента $x \in X$, то множество $\{|T| : T \in \mathcal{T}\}$ порядково ограничено.*

Теорема 2. *Пусть X и Y — E-нормированные пространства, причем Y является полным. Пусть, кроме того, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X,Y)$, U — всюду плотное подмножество X, для каждого элемента $u \in U$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} T_n u \in Y$ и имеется такой элемент $c \in E^+$, что $|T_n| \leqslant c$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует такой оператор $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, что $|T| \leqslant c$ и $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x = Tx$ для всех $x \in X$.*

Теорема 3. *Пусть X и Y — E-нормированные пространства, $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ и пусть K — выпуклое mix-компактное подмножество пространства X. Если множество $\{|Tx| : T \in \mathcal{T}\}$ порядково ограничено для каждого элемента $x \in K$, то множество $\{|Tx| : T \in \mathcal{T},\ x \in K\}$ порядково ограничено.*

Теоремы 1–3, полученные методом «спуска», усиливают и обобщают аналогичные результаты [3], установленные для случая пространств Банаха — Канторовича над решеткой измеримых функций. (Доказательства, приведенные в [3], основаны на специфической технике теории измеримых банаховых расслоений с лифтингом и не задействуют методы булевозначного анализа.)

Работа выполнена при поддержке Фонда содействия отечественной науке.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Введение в булевозначный анализ. М.: Наука, 2005.
2. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы. М.: Наука, 2003.
3. *Ганиев И. Г., Кудайбергенов К. К.* Принцип равномерной ограниченности Банаха — Штейнгауза для операторов в пространствах Банаха — Канторовича над L^0 // Математические труды. 2006. Т. 9, № 1. С. 21–33.