Сибирский журнал
индустриальной математики
Январь–март, 2010. Том XIII, № 1(41)

УДК 517:531:511.225

КОФИНИТНЫЕ ЧИСЛА, НЕСТАНДАРТНЫЙ АНАЛИЗ И МЕХАНИКА*)

А. Е. Гутман, С. С. Кутателадзе, Ю. Г. Решетняк

Показывается математическая несостоятельность предлагаемых в работах А. Ф. Ревуженко вариантов нестандартного анализа.

Ключевые слова: нестандартный анализ, Ревуженко, псевдонаука.

Сочинения А. Ф. Ревуженко, посвященные изобретению новых чисел [1–3] для прикладных задач, не являются научной базой его деятельности в механике упруго-пластических тел. Это самостоятельные работы, вносящие, по мнению автора, новые элементы в аппарат и понимание объектов математического анализа. На самом деле новым в этих сочинениях автора является неправомерное использование терминов и понятий математического анализа по отношению к предметам, к которым они не относятся вовсе или относятся не так, как кажется автору.

Ревуженко использует термин «нестандартный анализ», иногда ссылается на сочинения по нестандартному анализу и употребляет некоторые взятые из математического анализа термины, но сути конструкций и существа основ нестандартного анализа не понимает. Рассматриваемые им объекты принадлежат алгебраической системе, которую современная математика не считает нестандартной числовой прямой, потому что она таковой не является.

Ревуженко рассматривает множество, составленное из последовательностей рациональных чисел, и отождествляет те из этих последовательностей, которые совпадают начиная с какого-то места. Объекты возникающего множества он называет «кофинитными числами». (В обычной схеме построения множества вещественных чисел, восходящей к Г. Кантору, отождествляют фундаментальные последовательности рациональных чисел, расстояние между одноименными членами которых стремится к нулю.)

Конструкция, применяемая Ревуженко, давно известна в алгебре в более общем контексте фильтрованных произведений. Фильтр, рассматриваемый Ревуженко, математики именуют фильтром Фреше. Аналог этой конструкции на произвольном бесконечном множестве принято называть кофинитным фильтром. Таким образом, Ревуженко повторяет стандартную математическую конструкцию. Использование специального термина «кофинитный» трудно объяснить случайным совпадением, и, стало быть, автор знает о том, что его конструкция в математике давно известна.

В том разделе современной математики, который именуют нестандартным анализом, используется конструкция ультрапроизведения, где вместо фильтра Фреше рассматривается любой содержащий его ультрафильтр. Хорошо известно, что любой фильтр может быть получен как пересечение ультрафильтров. Использование ультрафильтров и является ключом к успеху построений, впервые проведенных выдающимся американским логиком и газодинамиком А. Робинсоном [4], создателем теории дельта-крыла [5, 6] и нестандартного анализа [7, 8].

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда содействия отечественной науке.

Рассмотрим сходящиеся к нулю последовательности a и b, заданные соотношениями $a(2n-1)=\frac{1}{2n-1}$, $a(2n)=0$, $b(2n-1)=0$, $b(2n)=\frac{1}{2n}$, т. е. $a=\left(1,0,\frac{1}{3},0,\frac{1}{5},0,\frac{1}{7},0,\dots\right)$ и $b=\left(0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{4},0,\frac{1}{6},0,\dots\right)$. У Ревуженко эти последовательности перестают быть эквивалентными, каковыми были у Кантора, и становятся неэквивалентными. Они задают разные ненулевые «кофинитные числа» по определению Ревуженко. Их произведение ab при этом равно нулю. Однако каждый сомножитель нулю не равен. Такие объекты в математике называют *нетривиальными делителями нуля.* Числа в математике составляют поле, а в полях нетривиальных делителей нуля быть не может по определению. У Робинсона названные последовательности также не эквивалентны, но одна из них равна нулю, а другая — нет. Дело в том, что любой ультрафильтр на множестве натуральных чисел содержит либо множество всех четных чисел, либо множество всех нечетных чисел.

Система вещественных чисел, свойства которой обогащены нестандартным анализом, является не просто алгеброй, а обладает рядом дополнительных свойств. Эти свойства у системы «кофинитных чисел» Ревуженко отсутствуют, а у нестандартной вещественной прямой Робинсона есть. Один из важнейших результатов нестандартного анализ Робинсона — принцип переноса. Согласно этому принципу всякое утверждение обычной математики, верное для всех обычных (стандартных) элементов бесконечного множества, верно и для его нестандартных элементов. Этот принцип и делает нестандартный анализ особо привлекательным (см., например, [9]).

В построениях Ревуженко нет никакого намека на принцип переноса. Более того, этот принцип в его «анализе» вообще невозможен. Успехи применения нестандартного анализа Робинсона связаны именно с тем, что Робинсон использовал весьма тонкие средства и соображения из теории моделей, которые Ревуженко кажутся совершенно излишними. К таким относится понятие ультрафильтра, лежащее в основе теории Робинсона и совершенно не нужное Ревуженко.

Таким образом, никакого нового класса объектов Ревуженко не выделяет и ничего содержательного в математику не вносит. (Более того, список разнообразных доробинсоновских версий нестандартного анализа уже включает модель, основанную именно на факторизации числовых последовательностей по кофинитному фильтру [10, 11].)

На эти обстоятельства Ревуженко было указано много лет назад в отрицательной рецензии на его сочинения, одно из которых он послал в «Сибирский математический журнал». Статья была отклонена, но Ревуженко опубликовал свои тексты в других изданиях Сибирского отделения РАН, вставил в книгу [1] с претенциозным названием «Механика упруго-пластических сред и нестандартный анализ» и продолжает мультиплицировать математические тривиальности в изданиях механического и технического профиля, в частности в журнале «Физическая мезомеханика» [2, 3].

Нет необходимости прослеживать эволюцию воззрений Ревуженко, в которых он проходит известный путь от изучения «функций со структурой» через собственный «нестандартный анализ» к «кофинитным», «неординарным» и иным «числам» и концепции «неархимедова многомасштабного пространства». Однако хотя в последних работах есть попытки разобраться с делителями нуля и аналогичными препятствиями, по-прежнему нет понимания различия между новыми моделями и не новыми обобщениями и аналогами числового поля, каковыми служат мириады разнообразных алгебраических систем. Отсутствие понимания идеи теории моделей не препятствует уровню претензий, основанных на суждении о том, что «концепция вещественной прямой определяет и основные свойства пространства и времени» [3, с. 46] и, стало быть, «рассматривая неархимедовы прямые в качестве осей координат, мы приходим к неархимедову пространству и времени» [3, с. 54].

Никакие заклинания не выводят «функции со структурой» за пределы тривиальных примеров функциональных алгебр. Никакие ссылки на механику упруго-пластических сред не могут оправдать неэтичное использование устоявшегося в науке термина «нестандартный анализ» для тривиальных соображений, к каждому из которых нельзя отнести ни слово «нестандартный», ни слово «анализ». И кофинитные числа, и их разновидности и обобщения остаются малоинтересными предметами малосодержательного дискурса.

Неправомерное использование Ревуженко термина «нестандартный анализ» трудно оправдать. Следует еще раз подчеркнуть, что никакого нестандартного анализа в сочинениях Ревуженко нет, а есть спекуляции на родственные темы. Дело в том, что проблема, решенная Робинсоном в его нестандартном анализе, состояла отнюдь не в том, чтобы как-то расширить числовую систему привлечением новых элементов, а в том, чтобы ввести в классическое исчисление актуальные бесконечно большие и малые элементы, не потеряв никаких существенных свойств обычных вещественных чисел. Робинсонов нестандартный анализ считается одним из самых выдающихся достижений математики XX века. Уже в своей классической книге Робинсон дал приложения нестандартного анализа к выводу уравнений пограничного слоя и принципа Сен Венана (см. [8, пп. 9.6, 9.7]). За истекшие полвека идеи Робинсона продемонстрировали свою эффективность в ряде приложений (см., например, [12–17]).

В сочинениях Ревуженко отсутствуют серьезные приложения его «кофинитных чисел». Это неудивительно, так как техника Ревуженко математически ничтожна и потому фактически бесплодна. Так, уравнения теории упругости, которые Ревуженко получает посредством своего подхода, в точности совпадают с теми, с которыми работают механики. Это также предсказуемо. Классики, установившие основные уравнения механики сплошной среды, начиная с Эйлера и вплоть до наших дней в своих рассуждениях широко применяли бесконечно малые величины в том виде, как их представляли себе Ньютон и Лейбниц.

Без привлечения понятия ультрафильтра или его эквивалентов необходимого расширения числового поля добиться нельзя, это обстоятельство давно известно в математике. Сочинения Ревуженко принадлежат к классу бессодержательных и неудачных попыток развить и обобщить нестандартный анализ, игнорируя формальный аппарат последнего и, в частности, технику теории моделей. В то же время современная нестандартная теория множеств [18] уже давно имеет готовые к использованию инструменты, позволяющие моделировать «многомасштабное пространство» и «иерархию структурных уровней», причем как аналитически (с помощью бесконечно малых разных порядков), так и логически (посредством понятия относительной стандартности [19]). Глубина же сочинений Ревуженко не превосходит уровня начальных страниц популярных изложений основ нестандартного анализа, так как возникающую здесь научную проблематику автор не понимает и имеющейся техникой математического анализа не владеет. Поток псевдонаучных публикаций Ревуженко по поводу нестандартного анализа не иссякает более десяти лет, что достойно сожаления.

Печально, когда в академическую печать проникают сочинения, сочетающие претенциозность и невежество. К сожалению, к указанному классу относятся все работы Ревуженко по изобретению новых чисел.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ревуженко А. Ф.* Механика упруго-пластических сред и нестандартный анализ. Новосибирск: изд. НГУ, 2000.

2. *Ревуженко А. Ф.* Об использовании в механике твердого тела концепции пространства, наделенного иерархией структурных уровней // Физическая мезомеханика. 2003. Т. 6, № 4. С. 73–83.

3. *Ревуженко А. Ф. [и др.].* Концепция неархимедова многомасштабного пространства и модели пластических сред со структурой // Физическая мезомеханика. 2008. Т. 11, № 3. С. 45–60.

4. *Macintyre A. J.* Abraham Robinson, 1918–1974 // Bull. Amer. Math. Soc. 1977. V. 83. P. 646–666.

5. *Robinson A.* Aerofoil Theory of a Flat Delta Wing at Supersonic Speeds. London: Ministry of Supply, Aeronautical Research Council, 1946.

6. *Robinson A., Laurmann J. A.* Wing Theory. Cambridge: Univ. Press, 1956.

7. *Robinson A.* Non-standard analysis // Indag. Math. 1961. V. 23. P. 423–440.

8. *Robinson A.* Non-standard Analysis. Amsterdam: North-Holland, 1974.

9. *Кановей В. Г.* О корректности эйлерова метода разложения синуса в бесконечное произведение // Успехи мат. наук. 1988. Т. 43, № 4(262). С. 57–81.

10. *Chwistek L.* The Limits of Science. London: Kegan Paul, 1948.

11. *Lakatos I.* Cauchy and the continuum: The significance of non-standard analysis for the history and philosophy of mathematics // Math. Intelligencer. 1978. V. 1. P. 151–161.

12. *Capinski M., Cutland N. J.* Nonstandard Methods for Stochastic Fluid Mechanics. Singapore et al.: World Sci. Publ., 1995.

13. *Rubio J. E.* Optimization and Nonstandard Analysis. New York; London: Marcel Dekker, 1994.

14. *Cutland N.* Loeb Measures in Practice: Recent Advances. Berlin et al.: Springer Verl., 2001.

15. *Гордон Е. И., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Инфинитезимальный анализ. Новосибирск: Изд-во Института математики, 2006.

16. *The Strength of Nonstandard Analysis.* Wienn: Springer Verl., 2007.

17. *Maslov V. P.* Nonstandard analysis, parastatistics, and fractals // Theor. Math. Physics. 2007. V. 153, N 2. P. 1575–1581.

18. *Nelson E.* Internal set theory: A new approach to nonstandard analysis // Bull. Amer. Math. Soc. 1977. V. 83, N 6. P. 1165–1198.

19. *Гордон Е. И.* Относительно стандартные элементы в теории внутренних множеств Э. Нельсона // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 1. С. 89–95.

Статья поступила 14 декабря 2009 г.

Гутман Александр Ефимович
Кутателадзе Семен Самсонович
Решетняк Юрий Григорьевич
Институт математики СО РАН
пр. Акад. Коптюга, 4
630090 г. Новосибирск
E-mail: sskut@math.nsc.ru