Владикавказский математический журнал
2012, Том 14, Выпуск 1, С. 47–63

УДК **517.98**

ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ Δ_1-ТЕРМОВ В БУЛЕВОЗНАЧНОМ АНАЛИЗЕ

А. Е. Гутман

Демонстрируется использование в булевозначном анализе синтаксической техники, связанной с понятием Δ_1-терма. В качестве примера рассмотрен вопрос о том, какие подходы к определению числового поля $\mathbb{R}$ и какие полные булевы алгебры B обеспечивают явное включение $\mathbb{R}^{\wedge} \subset \mathbb{R}$ внутри булевозначного универсума $\mathbb{V}^{(B)}$.

Ключевые слова: теория множеств, консервативное расширение, вещественное число, булевозначный анализ, каноническое вложение, σ-дистрибутивная булева алгебра, Σ_1-формула.

Цель статьи — привести примеры использования в булевозначном анализе некоторой формальной техники, основанной на классификации термов и способной в определенных случаях служить весьма простой заменой прямого вычисления булевозначной истинности. Все сформулированные здесь факты в том или ином виде известны.

Предложенная А. Леви иерархия Σ_n- и Π_n-формул (см. [12]) стала одним из активно используемых инструментов булевозначного анализа благодаря тому факту, что соотношения, выразимые Σ_1-формулами, сохраняются при каноническом вложении в булевозначный универсум (см. 2.7). Выяснив, что какое-либо утверждение $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ эквивалентно формуле класса Σ_1, мы тем самым избавляем себя от необходимости вычислять булевозначную истинность $\varphi(x_1^{\wedge}, \ldots, x_n^{\wedge})$. В этой связи оказываются полезными разнообразные синтаксические приемы, позволяющие последовательно выстраивать все более и более сложные формулы, оставаясь при этом в рамках класса Σ_1. Цель нашей заметки — предложить некоторое дополнение к набору такого рода приемов.

В качестве демонстрационного примера мы решили рассмотреть несколько традиционных подходов к определению вещественных чисел и выяснить, какие из них согласуются с каноническим вложением, т. е. обеспечивают импликацию

$$\text{«}x \text{ — вещественное число»} \ \Rightarrow\ \text{«}x^{\wedge} \text{ — вещественное число внутри } \mathbb{V}^{(B)}\text{»}.$$

(Здесь B — полная булева алгебра, $\mathbb{V}^{(B)}$ — соответствующий булевозначный универсум.)

1. Расширение теории за счет определений

Поскольку целевая аудитория в данном случае не предполагается состоящей исключительно из специалистов в области логики и формальных языков, мы сочли целесообразным предварить изложение схематичным описанием того формализма, который, как нам представляется, может стоять за введением «обозначений», т. е. за расширением языка теории множеств посредством «определений» новых формул и термов — таких, как, например, $x \subset y$, $f : x \to y$, $\mathscr{P}(x)$, $x \cup y$, $\varnothing$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $[\![\varphi]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}}$, $\mathbb{V}^{(B)} \vDash \varphi$.

1.1. Как известно, в роли языка L теории множеств традиционно выступает язык предикатов первого порядка с равенством и сигнатурой $\Sigma = \{\in\}$. Изначально этот язык включает лишь атомарные формулы вида $x = y$ и $x \in y$ (где x, y — переменные) и формулы, рекурсивно выстраиваемые из уже имеющихся формул с помощью пропозициональных и кванторных связок.

Допустим, мы хотели бы расширить язык теории множеств новой формулой $x \subset y$ и двумя новыми термами $\mathscr{P}(x)$ и $\varnothing$. Для этого достаточно обогатить сигнатуру Σ до сигнатуры $\Sigma^* = \{\in, \subset, \mathscr{P}, \varnothing\}$, добавив бинарный символ предиката $\subset$, унарный функциональный символ $\mathscr{P}$ и константу $\varnothing$. В результате формальный язык L^* расширенной сигнатуры Σ^* будет содержать такие новые атомарные формулы, как $\varnothing \in x$, $\mathscr{P}(x) \subset \mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing))$ и т. п., а также всевозможные формулы, рекурсивно конструируемые из новых формул — включая, например, формулу $(\exists\, x)\big(\varnothing \in x \wedge \mathscr{P}(x) \subset \mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing))\big)$, которая принадлежит расширенному языку L^* на формальном уровне и не содержит каких-либо «сокращений» или «обозначений».

Обогатив сигнатуру $\Sigma = \{\in\}$ до сигнатуры $\Sigma^* = \{\in, \subset, \mathscr{P}, \varnothing\}$, мы тем самым пополнили язык новыми формулами и термами, но пока не придали им «смысл». В рассматриваемом случае эту задачу можно решить добавлением аксиом, играющих роль соответствующих *определений*. Рассмотрим формулы

$$\begin{aligned}\mathrm{Sub}(x, y) &:= (\forall\, z)(z \in x \Rightarrow z \in y),\\ \mathrm{Pwr}(x, y) &:= (\forall\, z)\big(z \in y \Leftrightarrow \mathrm{Sub}(z, x)\big),\\ \mathrm{Emp}(x) &:= \neg(\exists\, y)(y \in x)\end{aligned}$$

и обозначим символом ZFC* теорию сигнатуры Σ^*, аксиоматика которой получается из аксиоматики ZFC за счет добавления трех новых аксиом:

$$x \subset y \Leftrightarrow \mathrm{Sub}(x, y), \quad y = \mathscr{P}(x) \Leftrightarrow \mathrm{Pwr}(x, y), \quad x = \varnothing \Leftrightarrow \mathrm{Emp}(x).$$

Поскольку формулы $\mathrm{Sub}(x, y)$, $\mathrm{Pwr}(x, y)$ и $\mathrm{Emp}(x)$ принадлежат языку сигнатуры Σ, всякая формула φ расширенного языка L^* поддается «переформулировке» в терминах исходного языка L — в виде эквивалентной формулы $\lceil\varphi\rceil$ сигнатуры Σ. Процедуру переформулировки можно организовать рекурсивно — пропуская логические связки, и преобразуя атомарные формулы сигнатуры Σ^* с учетом принятых определений:

$$\begin{gathered}\lceil\varphi \wedge \psi\rceil := \lceil\varphi\rceil \wedge \lceil\psi\rceil, \quad \lceil\neg\,\varphi\rceil := \neg\lceil\varphi\rceil, \quad \lceil(\exists\, x)\,\varphi\rceil := (\exists\, x)\,\lceil\varphi\rceil,\\ \lceil x = y\rceil := x = y, \quad \lceil x \in y\rceil := x \in y,\\ \lceil\sigma \subset \tau\rceil := \lceil\mathrm{Sub}(\sigma, \tau)\rceil, \quad \lceil\tau = \mathscr{P}(\sigma)\rceil := \lceil\mathrm{Pwr}(\sigma, \tau)\rceil, \quad \lceil\tau = \varnothing\rceil := \lceil\mathrm{Emp}(\tau)\rceil,\\ \lceil\tau \in \mathscr{P}(\sigma)\rceil := (\exists\, y)\big(\,\lceil y = \mathscr{P}(\sigma)\rceil \wedge \lceil\tau \in y\rceil\,\big), \quad \lceil\varnothing \in \tau\rceil := (\exists\, x)\big(\,\lceil x = \varnothing\rceil \wedge \lceil x \in \tau\rceil\,\big)\end{gathered}$$

и т. п. (Здесь x и y — переменные, σ и τ — термы языка L^*, φ и ψ — формулы языка L^*.)

Важно отметить, что доказуемость в ZFC формул $(\exists!\, x)\,\mathrm{Pwr}(x, y)$ и $(\exists!\, x)\,\mathrm{Emp}(x)$ гарантирует «корректность» введенных определений: формальные рассуждения, проводимые в рамках расширенной теории ZFC*, служат «законным» доказательным средством, т. е. использование определений не позволяет доказать то, что раньше не было доказуемым в ZFC.

1.2. Ориентируясь на приведенный выше пример, можно заключить, что определение или введение обозначений состоит в консервативном расширении теории, допускающем элиминацию — «переформулировку» утверждений расширенного языка в терминах исходного языка.

Рассмотрим какую-либо аксиоматизируемую теорию $\mathscr{T}$ произвольной сигнатуры Σ. *Расширением теории $\mathscr{T}$ за счет определений* (или — более кратко — *элиминируемым*[1] *расширением*) назовем аксиоматическое расширение теории $\mathscr{T}$ до теории $\mathscr{T}^*$ более богатой сигнатуры Σ^*, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) $\mathscr{T}^*$ является *консервативным расширением* теории $\mathscr{T}$, т. е. для любой формулы φ сигнатуры Σ из $\mathscr{T}^* \vdash \varphi$ следует $\mathscr{T} \vdash \varphi$;

(2) существует *элиминация расширения* $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}^*$ в виде алгоритма, позволяющего каждой формуле φ сигнатуры Σ^* сопоставить такую формулу $\lceil\varphi\rceil$ сигнатуры Σ, что $\mathscr{T}^* \vdash (\varphi \Leftrightarrow \lceil\varphi\rceil)$.

Аксиомы теории $\mathscr{T}^*$, не входящие в аксиоматику $\mathscr{T}$, будем называть *определениями* или *определяющими аксиомами*, а формулу $\lceil\varphi\rceil$ — *переводом* φ на язык Σ или *переформулировкой* φ в терминах Σ.

Отметим, что сигнатура Σ^* может быть получена добавлением любого не более чем счетного — в том числе, бесконечного — набора новых символов (см., например, 1.6 и 1.8). По этой причине алгоритмизируемость перевода является существенным требованием.

1.3. Приведем критерий элиминируемости расширения, легко проверяемый для большинства определений, встречающихся в математической практике.

Теория $\mathscr{T}^*$ сигнатуры Σ^*, аксиоматически расширяющая теорию $\mathscr{T}$ сигнатуры Σ, является элиминируемым расширением $\mathscr{T}$ тогда и только тогда, когда атомарным формулам вида $p(\bar{x})$ и $y = f(\bar{x})$, где $p, f \in \Sigma^* \backslash \Sigma$ — предикатные и функциональные символы, можно алгоритмически сопоставить такие формулы $\lceil p(\bar{x})\rceil$ и $\lceil y = f(\bar{x})\rceil$ сигнатуры Σ, что

$$\begin{gathered}
\mathscr{T}^* \vdash \big(p(\bar{x}) \Leftrightarrow \lceil p(\bar{x})\rceil\big),\\
\mathscr{T}^* \vdash \big(y = f(\bar{x}) \Leftrightarrow \lceil y = f(\bar{x})\rceil\big),\\
\mathscr{T} \vdash (\exists!\, y)\lceil y = f(\bar{x})\rceil,
\end{gathered}$$

причем все расширяющие аксиомы $\mathscr{T}^*$ доказуемы в теории $\mathscr{T}^+$, полученной из $\mathscr{T}$ присоединением формул $p(\bar{x}) \Leftrightarrow \lceil p(\bar{x})\rceil$, $y = f(\bar{x}) \Leftrightarrow \lceil y = f(\bar{x})\rceil$ в качестве аксиом.

$\lhd$ *Достаточность.* Консервативность расширения $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}^*$ с очевидностью следует из теоремы о полноте, а алгоритм элиминации для $\mathscr{T}^*$ можно получить из имеющейся элиминации атомарных формул, рекурсивно распространив ее на все формулы с сохранением логических связок (ср. 1.1).

Необходимость. В пояснении нуждается лишь заключительное условие критерия. Пусть φ — аксиома $\mathscr{T}^*$ и пусть $\lceil\cdot\rceil^*$ и $\lceil\cdot\rceil^+$ — элиминации расширений $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}^*$ и $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}^+$. Поскольку $\mathscr{T}^* \vdash (\varphi \Leftrightarrow \lceil\varphi\rceil^*)$ и $\mathscr{T}^+ \vdash (\varphi \Leftrightarrow \lceil\varphi\rceil^+)$, мы имеем $\mathscr{T}^* \vdash (\lceil\varphi\rceil^+ \Leftrightarrow \lceil\varphi\rceil^*)$, а значит, $\mathscr{T} \vdash (\lceil\varphi\rceil^+ \Leftrightarrow \lceil\varphi\rceil^*)$. Учитывая $\mathscr{T}^* \vdash \varphi$, последовательно заключаем $\mathscr{T}^* \vdash \lceil\varphi\rceil^*$, $\mathscr{T} \vdash \lceil\varphi\rceil^*$, $\mathscr{T} \vdash \lceil\varphi\rceil^+$, $\mathscr{T}^+ \vdash \lceil\varphi\rceil^+$, $\mathscr{T}^+ \vdash \varphi$. $\rhd$

1.4. Как легко видеть, элиминация может переводить формулы исходного языка только в эквивалентные им формулы: $\mathscr{T} \vdash (\varphi \Leftrightarrow \lceil\varphi\rceil)$ для формул φ сигнатуры Σ. Кроме того, элиминация инвариантна относительно логических связок: в теории $\mathscr{T}$ доказуемы формулы $\lceil\varphi \wedge \psi\rceil \Leftrightarrow \lceil\varphi\rceil \wedge \lceil\psi\rceil$, $\lceil\neg\varphi\rceil \Leftrightarrow \neg\lceil\varphi\rceil$, $\lceil(\exists\, x)\,\varphi\rceil \Leftrightarrow (\exists\, x)\,\lceil\varphi\rceil$ и т. п. Более того, процедуру перевода можно реорганизовать так, что она будет сохранять формулы сигнатуры Σ, пропускать все логические связки (трансформируя лишь атомарные формулы) и переводить любую формулу в формулу с тем же набором свободных переменных.

[1] В литературе встречаются аналоги элиминируемых расширений, называемые *дефинициальными* и *несущественными* расширениями.

Таким образом, перевод формулы не зависит от контекста, в котором данная формула участвует в объемлющих ее формулах. Это обстоятельство позволяет считать всякую формулу φ расширенной сигнатуры Σ^* синонимом (обозначением, сокращением) ее перевода $\lceil\varphi\rceil$ на исходный язык Σ и обращаться с новыми формулами так, как если бы они принадлежали формальному языку рассматриваемой теории $\mathscr{T}$.

1.5. Если $\mathscr{T}_1$ — элиминируемое расширение $\mathscr{T}$, а $\mathscr{T}_2$ — элиминируемое расширение $\mathscr{T}_1$, то $\mathscr{T}_2$ — элиминируемое расширение $\mathscr{T}$. Это тривиальное наблюдение обосновывает законность итеративного определения новых символов посредством введенных ранее.

Если $\mathscr{T}_1$ и $\mathscr{T}_2$ — элиминируемые расширения $\mathscr{T}$ сигнатур Σ_1 и Σ_2, причем $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \Sigma$, то соединение теорий $\mathscr{T}_1$ и $\mathscr{T}_2$ (с сигнатурой $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ и объединенной аксиоматикой) является элиминируемым расширением $\mathscr{T}$ (см. [1, теорема 24.1]). Это обстоятельство обеспечивает корректность объединения нескольких независимых систем определений.

1.6. Для демонстрации элиминируемого расширения с бесконечным набором новых сигнатурных символов мы формализуем обогащение языка ZFC термами $\{x \in \tau : \varphi\}$.

Предварительно примем соглашение, упрощающее процедуру подстановки. Впервые записывая какую-либо формулу φ в виде $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, где $x_1, \dots, x_n$ — попарно различные переменные, мы не предполагаем, что все переменные $x_1, \dots, x_n$ участвуют в φ в качестве параметров (т. е. свободных переменных). Мы также не предполагаем, что все параметры формулы φ входят в список $x_1, \dots, x_n$. Первоначальная запись формулы в виде $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ означает лишь, что любое последующее выражение $\varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)$, где $\tau_1, \dots, \tau_n$ — термы, обозначает результат подстановки $x_1 \mapsto \tau_1, \dots, x_n \mapsto \tau_n$ в формулу φ (с традиционным устранением коллизий путем предварительного переименования связанных переменных в φ, участвующих в термах τ_i). В этом случае формула $\varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)$ оказывается логическим эквивалентном формулы

$$(\exists\, x_1) \dots (\exists\, x_n)\, (\, x_1 = \tau_1 \;\wedge\; \cdots \;\wedge\; x_n = \tau_n \;\wedge\; \varphi\,).$$

Аналогичное соглашение принимается в отношении записей вида $\tau(x_1, \dots, x_n)$ и их связи с подстановкой $\tau(\tau_1, \dots, \tau_n)$ термов $\tau_1, \dots, \tau_n$ в терм τ.

Пусть теперь x — переменная, $\tau(\bar{y})$ — терм и $\varphi(x, \bar{y}, \bar{z})$ — формула, где списки $\bar{y} = y_1, \dots, y_m$ и $\bar{z} = z_1, \dots, z_n$ не включают x, причем $\bar{y}$ — полный список параметров τ, а $\bar{z}$ — полный список отличных от x и $\bar{y}$ параметров φ. (Параметры предполагаются перечисленными в *естественном порядке*, т. е. в порядке их первых свободных вхождений.) Для всякой такой тройки x, τ, φ обогатим сигнатуру $(m+n)$-местным функциональным символом $\{x \in \tau : \varphi\}$ и добавим определяющую аксиому $x \in \{x \in \tau : \varphi\}(\bar{y}, \bar{z}) \Leftrightarrow x \in \tau \wedge \varphi$, логически эквивалентную формуле

$$u \in \big\{x \in \tau(\bar{y}) : \varphi(x, \bar{y}, \bar{z})\big\}(\bar{v}, \overline{w}) \;\Leftrightarrow\; u \in \tau(\bar{v}) \;\wedge\; \varphi(u, \bar{v}, \overline{w}),$$

где u, $\bar{v} = v_1, \dots, v_m$, $\overline{w} = w_1, \dots, w_n$ — новые переменные.

Благодаря очевидной доказуемости равенства

$$\big\{u \in \tau(\bar{v}) : \varphi(u, \bar{v}, \overline{w})\big\}(\bar{y}, \bar{z}) \;=\; \big\{x \in \tau(\bar{y}) : \varphi(x, \bar{y}, \bar{z})\big\}(\bar{y}, \bar{z})$$

использование записей $\{x \in \tau : \varphi\}(\dots)$ без ущерба для выразительности языка может быть ограничено термами вида $\big\{x \in \tau(\bar{y}) : \varphi(x, \bar{y}, \bar{z})\big\}(\bar{y}, \bar{z})$, для которых мы примем сокращение $\big\{x \in \tau(\bar{y}) : \varphi(x, \bar{y}, \bar{z})\big\}$, т. е. $\{x \in \tau : \varphi\}$. С учетом этого соглашения определяющие аксиомы приобретают вид $x \in \{x \in \tau : \varphi\} \Leftrightarrow x \in \tau \wedge \varphi$ или, что то же самое,

$$u \in \big\{x \in \tau(\bar{y}) : \varphi(x, \bar{y}, \bar{z})\big\} \;\Leftrightarrow\; u \in \tau(\bar{y}) \;\wedge\; \varphi(u, \bar{y}, \bar{z}).$$

1.7. Поскольку новые символы $\{x\in\tau : \varphi\}$ были введены для термов τ и формул φ, сигнатура которых еще не включала эти символы, в расширенный язык не вошли выражения вида $\big\{u\in\sigma : \dots\{x\in\tau : \varphi\}\dots\big\}$. Это ограничение устраняется, например, объединением последовательности расширений, каждое из которых увеличивает допустимую глубину вложенности конструкций $\{x\in\tau : \varphi\}$ друг в друга. (К аналогичному результату приводит подходящее расширение языка на уровне грамматики.) Такую процедуру можно назвать *грамматическим замыканием.*

1.8. Описанный в 1.2 формализм элиминируемых расширений по понятным причинам не позволяет ввести в язык ZFC термы собственных классов — такие, как $\mathbb{V}$ и $\mathbb{V}^{(B)}$. (Эти термы легко определяются, например, в рамках теории фон Неймана — Гёделя — Бернайса.) Не вдаваясь в технические детали, мы условимся считать выражение $x\in\mathbb{V}^{(B)}$ сокращением соответствующей формулы с параметрами x и B.

Что касается синтаксиса булевозначной истинности в форме термов $[\![\varphi]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}}$ и формул $\mathbb{V}^{(B)}\vDash\varphi$, то его употребление в языке ZFC поддается формализации с помощью элиминируемого расширения, аналогичного рассмотренному в 1.6. А именно, для всякой формулы $\varphi(\bar{x})$ сигнатуры $\{\in\}$, где $\bar{x}=x_1,\dots,x_n$ — полный список параметров φ в естественном порядке, обогатим сигнатуру $(n+1)$-местным функциональным символом $[\![\varphi]\!]$, условимся записывать терм $[\![\varphi(\bar{x})]\!](B,\bar{x})$ в сокращенном виде $[\![\varphi]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}}$ и добавим традиционные определяющие аксиомы

$$
\begin{gathered}
[\![x=y]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}}=b \;\Leftrightarrow\; \alpha(B,x,y,b), \quad [\![x\in y]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}}=b \;\Leftrightarrow\; \beta(B,x,y,b),\\
[\![\varphi\wedge\psi]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}} \;=\; [\![\varphi]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}}\wedge_B[\![\psi]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}}, \quad [\![\neg\varphi]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}} \;=\; \neg_B[\![\varphi]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}},\\
[\![(\exists\,x)\,\varphi]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}} \;=\; \sup\nolimits_B\big\{[\![\varphi]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}} : x\in\mathbb{V}^{(B)}\big\},\dots,
\end{gathered}
$$

где α и β определяют истинность равенства и принадлежности внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ (см. [7, 4.1.4]).

Индукцией по сложности формулы φ сигнатуры $\{\in\}$ легко показать, что в полученном элиминируемом расширении доказуемы равенства

$$
[\![\varphi(u_1,\dots,u_n)]\!](B,x_1,\dots,x_n)=[\![\varphi(x_1,\dots,x_n)]\!](B,x_1,\dots,x_n)=[\![\varphi]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}},
$$

а значит, как и в случае 1.6, ограничение использования записей $[\![\varphi]\!](\dots)$ одними лишь термами $[\![\varphi]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}}:=[\![\varphi(\bar{x})]\!](B,\bar{x})$ не снижает выразительную способность языка.

1.9. На данный момент расширенный язык содержит символы $[\![\varphi]\!]$ лишь для формул φ сигнатуры $\Sigma=\{\in\}$ — даже в том случае, если перед предпринятым расширением мы успели перейти к какой-либо теории ZFC* сигнатуры Σ^*, обогатив язык ZFC новыми предикатными и функциональными символами. Естественное желание распространить синтаксис $[\![\varphi]\!]$ на формулы φ сигнатуры Σ^* реализуется следующим способом.

Пусть $\lceil\cdot\rceil$ — элиминация расширения ZFC $\subset$ ZFC*, причем $\varphi=\lceil\varphi\rceil$ для формул φ сигнатуры Σ (см. 1.4). Действуя в соответствии с 1.8, для каждой формулы φ сигнатуры Σ^* добавим новый функциональный символ $[\![\varphi]\!]$ соответствующей арности, введем сокращение $[\![\varphi(\bar{x})]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}}\;:=\;[\![\varphi(\bar{x})]\!](B,\bar{x})$ и присоединим определяющую аксиому

$$
[\![\varphi]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}}=\big[\!\big[\lceil\varphi\rceil\big]\!\big]_{\mathbb{V}^{(B)}}.
$$

Отметим, что при этом сохраняется согласованность синтаксиса истинности с логическими связками: для формул φ, ψ сигнатуры Σ^* равенства $[\![\varphi\wedge\psi]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}}=[\![\varphi]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}}\wedge_B[\![\psi]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}}$, $[\![\neg\varphi]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}}=\neg_B[\![\varphi]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}}$, $[\![(\exists\,x)\,\varphi]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}}=\sup_B\big\{[\![\varphi]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}} : x\in\mathbb{V}^{(B)}\big\}$ и т. п. становятся теоремами расширенной теории.

Предикат истинности вводится традиционным определением $\mathbb{V}^{(B)} \vDash \varphi \Leftrightarrow [\![\varphi]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}} = 1_B$, которое служит синонимом аксиомы $\big[\mathbb{V}^{(B)} \vDash \varphi(\bar{x})\big](B,\bar{x}) \Leftrightarrow [\![\varphi(\bar{x})]\!](B,\bar{x}) = 1_B$ с учетом сокращений $\mathbb{V}^{(B)} \vDash \varphi(\bar{x}) := \big[\mathbb{V}^{(B)} \vDash \varphi(\bar{x})\big](B,\bar{x})$, $[\![\varphi(\bar{x})]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}} := [\![\varphi(\bar{x})]\!](B,\bar{x})$. В результате $\mathbb{V}^{(B)}$ оказывается моделью теории ZFC*: если ZFC* $\vdash \varphi$, то в расширенной теории доказуема истинность $\mathbb{V}^{(B)} \vDash \varphi$ для любой полной булевой алгебры B.

Соответствующее грамматическое замыкание (ср. 1.7) обогащает язык выражениями вида $\big[\!\!\big[\ldots[\![\varphi]\!]_{\mathbb{V}^{(C)}}\ldots\big]\!\!\big]_{\mathbb{V}^{(B)}}$, предоставляя возможность рассматривать булевозначные модели внутри булевозначных моделей (см., например, [13]).

1.10. Поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ часто определяется как произвольное условно полное линейно упорядоченное поле. Поскольку в ZFC такое поле единственно лишь с точностью до изоморфизма, соответствующее определение константы $\mathbb{R}$ не удовлетворяет условиям 1.2. Точнее, пусть $\delta(x)$ — формализация на языке ZFC утверждения «x является условно полным линейно упорядоченным полем», и пусть $\mathrm{ZFC}_{\mathbb{R}}$ — расширение ZFC константой $\mathbb{R}$ и аксиомой $\delta(\mathbb{R})$.

Если теория ZFC *непротиворечива, то расширение* $\mathrm{ZFC} \subset \mathrm{ZFC}_{\mathbb{R}}$ *не является элиминируемым.*

$\lhd$ Достаточно показать, что элиминации не поддается формула $x = \mathbb{R}$. Действительно, если бы нашлась формула $\varepsilon(x)$ сигнатуры $\{\in\}$ такая, что $\mathrm{ZFC}_{\mathbb{R}} \vdash \big(x = \mathbb{R} \Leftrightarrow \varepsilon(x)\big)$, то с учетом теоремы о полноте мы бы имели $\mathrm{ZFC} \vdash \big(\delta(r) \Rightarrow (\forall\, x)\big(x = r \Leftrightarrow \varepsilon(x)\big)\big)$ и, в частности, $\mathrm{ZFC} \vdash \big(\delta(r_1) \wedge \delta(r_2) \Rightarrow r_1 = r_2\big)$. $\rhd$

Заметим впрочем, что благодаря доказуемости в ZFC формулы $(\exists\, x)\,\delta(x)$ теория $\mathrm{ZFC}_{\mathbb{R}}$ оказывается консервативным расширением ZFC. Более того, расширение $\mathrm{ZFC} \subset \mathrm{ZFC}_{\mathbb{R}}$ допускает элиминацию, но в существенно более слабом смысле: для любой формулы φ сигнатуры $\{\in, \mathbb{R}\}$ найдется такая формула $\lceil\varphi\rceil$ сигнатуры $\{\in\}$, что

$$\mathrm{ZFC}_{\mathbb{R}} \vdash \varphi \quad \text{равносильно} \quad \mathrm{ZFC} \vdash \lceil\varphi\rceil.$$

На роль $\lceil\varphi\rceil$ в данном случае подходит импликация $\delta(r) \Rightarrow \varphi\big|_r^{\mathbb{R}}$, где $\varphi\big|_r^{\mathbb{R}}$ — результат замены в формуле φ всех вхождений константы $\mathbb{R}$ на новую переменную r.

Таким образом, определение константы $\mathbb{R}$ как «произвольного условно полного линейно упорядоченного поля» формализуется консервативным, но не элиминируемым расширением. Отсутствие элиминации затрудняет моделирование такого расширения внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ (см. 1.9). В рассматриваемом случае вместо внедрения константы $\mathbb{R}$ внутрь синтаксиса $[\![\ldots]\!]$ обычно вводится символ $\mathscr{R}$, определяемый как «произвольный элемент $\mathbb{V}^{(B)}$, являющийся внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ условно полным линейно упорядоченным полем». Этот подход реализуется добавлением унарного функционального символа R и аксиомы

$$\beta(B) \;\Rightarrow\; (\exists\, \mathscr{R}\,)\big(\mathscr{R} = \mathrm{R}(B) \,\wedge\, \mathscr{R} \in \mathbb{V}^{(B)} \,\wedge\, \mathbb{V}^{(B)} \vDash \delta(\mathscr{R}\,)\big),$$

где $\beta(B)$ — формализация утверждения о том, что B является полной булевой алгеброй. Полученная в результате теория вновь оказывается консервативным, но не элиминируемым расширением ZFC.

1.11. Константа $\mathbb{R}$ будет допускать элиминацию, если мы выберем какое-нибудь «конкретное» определение поля вещественных чисел (например, в виде множества десятичных дробей или цепных дробей или в виде множества классов эквивалентности канторовых последовательностей и др.), т. е. определение, обеспечивающее единственность определяемого объекта.

Пусть, к примеру, $\rho(x)$ — формализация на языке ZFC утверждения о том, что x является множеством всех дедекиндовых сечений. Привлекая формализм 1.2, определим константу $\mathbb{R}$ аксиомой $x=\mathbb{R} \Leftrightarrow \rho(x)$. Символ $\mathbb{R}$ теперь становится элементом формального языка расширенной теории. Поскольку $\mathrm{ZFC} \vdash (\exists!\, x)\,\rho(x)$, полученное расширение является элиминируемым (см. 1.3), и у нас появляется возможность распространить синтаксис булевозначной истинности на формулы φ расширенной сигнатуры, полагая $[\![\varphi]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}} = \big[\!\big[\lceil\varphi\rceil\big]\!\big]_{\mathbb{V}^{(B)}}$ (см. 1.9). В результате мы приходим к очередному элиминируемому расширению ZFC*, причем $\mathbb{V}^{(B)}$ оказывается моделью этой теории.

Поскольку в ZFC доказуем перевод $(\exists!\, x)\rho(x)$ формулы $(\exists!\, x)(x=\mathbb{R})$, эта формула истинна в любой булевозначной модели $\mathbb{V}^{(B)}$ теории ZFC. (Точнее говоря, утверждение «$\mathbb{V}^{(B)} \vDash (\exists!\, x)(x=\mathbb{R})$ для любой полной булевой алгебры B» является теоремой ZFC*.) В частности, благодаря принципу максимума для каждой полной булевой алгебры B в соответствующем булевозначном универсуме $\mathbb{V}^{(B)}$ существует элемент $x \in \mathbb{V}^{(B)}$, удовлетворяющий соотношению $\mathbb{V}^{(B)} \vDash (x=\mathbb{R})$. Иными словами, в каждой булевозначной модели $\mathbb{V}^{(B)}$ — да и вообще в каждой модели ZFC — имеется свой элемент, который внутри этой модели «является $\mathbb{R}$». Таким образом, символ $\mathbb{R}$ не только «именует элемент $x \in \mathbb{V}$, удовлетворяющий определению $\rho(x)$», но и служит универсальным именем для вещественного поля во всех моделях ZFC.

Отмеченная универсальность символа константы не удивительна, поскольку этот символ принадлежит сигнатуре *языка* рассматриваемой теории, а не какой-либо ее отдельной модели. В этом смысле константа $\mathbb{R}$ ничем не выделяется среди прочих элементов сигнатуры — включая символ предиката $\in$, который без каких-либо синтаксических модификаций возникает в формулах вида $\mathbb{V}^{(B)} \vDash \varphi$. Так, формула $\mathbb{V}^{(B)} \vDash (x\in y)$ имеет перевод $\lceil\mathbb{V}^{(B)} \vDash (x\in y)\rceil$ на исходный язык теории множеств в виде формулы с параметрами B, x, y. Совершенно аналогично — формула $\mathbb{V}^{(B)} \vDash (x=\mathbb{R})$ имеет перевод $\lceil\mathbb{V}^{(B)} \vDash (x=\mathbb{R})\rceil = \big\lceil\mathbb{V}^{(B)} \vDash \lceil x=\mathbb{R}\rceil\big\rceil = \lceil\mathbb{V}^{(B)} \vDash \rho(x)\rceil$ в виде формулы с параметрами B, x.

1.12. Возможный дискомфорт, вызываемый записью $\mathbb{V}^{(B)} \vDash (x=\mathbb{R})$, обусловлен не столько универсальным использованием константы $\mathbb{R}$, сколько несогласованностью синтаксиса истинности с подстановкой термов: формула $\mathbb{V}^{(B)} \vDash (x=\mathbb{R})$ не эквивалентна формуле $\big(\mathbb{V}^{(B)} \vDash (x=y)\big)\big|^y_{\mathbb{R}}$, получаемой в результате подстановки $y \mapsto \mathbb{R}$ в $\mathbb{V}^{(B)} \vDash (x=y)$. Действительно, для отделимого универсума мы имеем $\mathbb{V}^{(B)} \vDash (x=y) \Leftrightarrow x=y$, а значит,

$$\big(\mathbb{V}^{(B)} \vDash (x=y)\big)\big|^y_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow (x=y)\big|^y_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow x=\mathbb{R} \Leftrightarrow \rho(x),$$

в то время как

$$\mathbb{V}^{(B)} \vDash (x=\mathbb{R}) \Leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \vDash \lceil x=\mathbb{R}\rceil \Leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \vDash \rho(x).$$

Этот феномен обусловлен отсутствием перестановочности синтаксиса $[\![\,\ldots\,]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}}$ с процедурой подстановки термов, т. е. отсутствием тождества $[\![\varphi]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}}\big|^y_\tau = [\![\varphi\big|^y_\tau]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}}$. Так, согласно определениям

$$\begin{aligned} [\![\varphi(x,y)]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}}\big|^y_\tau &= [\![\varphi(x,y)]\!](B,x,y)\big|^y_\tau = [\![\varphi(x,y)]\!](B,x,\tau), \\ [\![\,\varphi(x,y)\big|^y_\tau\,]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}} &= [\![\varphi(x,\tau)]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}} \qquad\qquad = [\![\varphi(x,\tau)]\!](B,x), \end{aligned}$$

но равенство $[\![\varphi(x,y)]\!](B,x,\tau) = [\![\varphi(x,\tau)]\!](B,x)$ расширенная теория не гарантирует. На перестановочность истинности и подстановки можно рассчитывать лишь в случае простейших термов — переменных:

$$\begin{aligned} &[\![\varphi]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}}\big|^y_z = [\![\varphi(x,y)]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}}\big|^y_z = [\![\varphi(x,y)]\!](B,x,y)\big|^y_z = [\![\varphi(x,y)]\!](B,x,z) \\ &= [\![\varphi(x,z)]\!](B,x,z) = [\![\,\varphi(x,z)\,]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}} = [\![\,\varphi(x,y)\big|^y_z\,]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}} = [\![\,\varphi\big|^y_z\,]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}}. \end{aligned}$$

Таким образом, формулы $\psi(x,\tau)$ и $(\exists\, y)\big[\, y=\tau \,\wedge\, \psi(x,y)\,\big]$ всегда эквивалентны, чего нельзя сказать о формулах $\mathbb{V}^{(B)}\vDash\varphi(x,\tau)$ и $(\exists\, y)\big[y=\tau\wedge\mathbb{V}^{(B)}\vDash\varphi(x,y)\big]$. По определению $\mathbb{V}^{(B)}\vDash\varphi$ равносильно $\mathbb{V}^{(B)}\vDash\lceil\varphi\rceil$, а значит, интерпретация участвующих в φ синтаксических конструкций производится «внутри» предиката $\big[\mathbb{V}^{(B)}\vDash\varphi\big]$ и не может быть делегирована за его синтаксические пределы. Это обстоятельство адекватно отражает концепцию моделирования: будучи моделью теории множеств, универсум $\mathbb{V}^{(B)}$ по-своему интерпретирует не только предикаты $=$ и $\in$, но и все определяемые элементы расширенной сигнатуры — такие, как предикат $\subset$, константы $\varnothing$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, функциональные символы $\mathscr{P}$, $\cup$, $\{x\in\tau:\varphi\}$ и т. п. Так, зная, что истинность формулы «x состоит из всех подмножеств y» зависит от того, в какой модели она проверяется, легко согласиться с возможной неэквивалентностью утверждений $x=\mathscr{P}(y)$ и $\mathbb{V}^{(B)}\vDash[\,x=\mathscr{P}(y)\,]$, а универсальность константы $\mathbb{R}$ и отличие формулы $\mathbb{V}^{(B)}\vDash[\,x=\mathbb{R}\,]$ от подстановки $\big(\mathbb{V}^{(B)}\vDash[\,x=y\,]\big)\big|^{y}_{\mathbb{R}}$ перестают удивлять, если принять во внимание, что $\mathbb{R}$ — такой же функциональный символ, как и $\mathscr{P}$, отличающийся лишь арностью (количеством формальных аргументов).

1.13. Определение канонического вложения ${}^\wedge\colon\mathbb{V}\hookrightarrow\mathbb{V}^{(2)}\subset\mathbb{V}^{(B)}$ посредством унарного функционального символа ${}^\wedge$ по традиции сопровождается соглашением о записи терма ${}^\wedge(x)$ в виде $x^\wedge$. Пусть $y=x^\wedge\Leftrightarrow\lambda(x,y)$ — соответствующая определяющая аксиома.

Говоря «y — вещественное число», мы имеем в виду $y\in\mathbb{R}$, а фраза «y — вещественное число внутри $\mathbb{V}^{(B)}$» означает $\mathbb{V}^{(B)}\vDash[\,y\in\mathbb{R}\,]$. Казалось бы, фраза «$x^\wedge$ — вещественное число внутри $\mathbb{V}^{(B)}$» адекватно выражается формулой

$$\mathbb{V}^{(B)}\vDash[\,x^\wedge\in\mathbb{R}\,],$$

но опыт, накопленный в 1.12, подсказывает, что это не так. Поскольку все синтаксические конструкции подлежат интерпретации внутри предиката истинности, формула $\mathbb{V}^{(B)}\vDash[\,x^\wedge\in\mathbb{R}\,]$ выражает утверждение о том, что внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ вещественным числом является стандартное имя $x^\wedge$ элемента x, *вычисленное внутри* $\mathbb{V}^{(B)}$:

$$\mathbb{V}^{(B)}\vDash[\,x^\wedge\in\mathbb{R}\,]\ \Leftrightarrow\ \mathbb{V}^{(B)}\vDash(\exists\, y)\big(\,y=x^\wedge\,\wedge\,y\in\mathbb{R}\,\big)\ \Leftrightarrow\ \mathbb{V}^{(B)}\vDash(\exists\, y)\big(\,\lambda(x,y)\,\wedge\,y\in\mathbb{R}\,\big).$$

В то же время, говоря «$x^\wedge$ — вещественное число внутри $\mathbb{V}^{(B)}$», мы подразумеваем вычисление имени $x^\wedge$ вне $\mathbb{V}^{(B)}$ и на самом деле имеем в виду

$$\Big(\mathbb{V}^{(B)}\vDash[\,y\in\mathbb{R}\,]\Big)\Big|^{y}_{x^\wedge}\Leftrightarrow\ (\exists\, y)\big(\,y=x^\wedge\,\wedge\,\mathbb{V}^{(B)}\vDash[\,y\in\mathbb{R}\,]\big)\ \Leftrightarrow\ (\exists\, y)\big(\,\lambda(x,y)\,\wedge\,\mathbb{V}^{(B)}\vDash[\,y\in\mathbb{R}\,]\big).$$

Эта формальная запись рассматриваемого утверждения оказалась довольно громоздкой. Совместить формализм и лаконичность в данном случае можно следующим способом.

Рассмотрим унарный функциональный символ Out, введем обозначение $\underline{\tau}:=\mathrm{Out}(\tau)$ и условимся называть термы вида $\underline{\tau}$ *внешними термами*. Выражения, не содержащие внешние термы, назовем *внутренними*. Пусть Ψ — совокупность всех формул ψ вида $\varphi\big(\underline{\tau_1},\dots,\underline{\tau_n}\big)$, где $\varphi(y_1,\dots,y_n)$ — внутренняя формула и $\tau_1,\dots,\tau_n$ — внутренние термы. Для всякой такой формулы ψ обогатим сигнатуру функциональным символом $[\![\psi]\!]$ естественной арности и примем соглашение о сокращенной записи $[\![\psi(\bar{x})]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}}:=[\![\psi]\!](B,\bar{x})$. Далее, для любой формулы $\psi(y)$ из Ψ и любого внутреннего терма τ добавим аксиому $\big[\!\big[\psi\big(\underline{\tau}\big)\big]\!\big]_{\mathbb{V}^{(B)}}=[\![\psi(y)]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}}\big|^{y}_{\tau}$ или ее синоним $\big[\!\big[\psi\big(\underline{\tau}\big)\big]\!\big]_{\mathbb{V}^{(B)}}=b\Leftrightarrow(\exists\, y)\big(\,y=\tau\,\wedge\,[\![\psi(y)]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}}=b\,\big)$ и обеспечим произвольную вложенность внешних термов за счет соответствующего грамматического замыкания. Как и прежде, определим предикат истинности аксиомой $\mathbb{V}^{(B)}\vDash\psi\ \Leftrightarrow\ [\![\psi]\!]_{\mathbb{V}^{(B)}}=1_B$. В итоге формальной версией фразы «$x^\wedge$ — вещественное число внутри $\mathbb{V}^{(B)}$» станет формула $\mathbb{V}^{(B)}\vDash\big[\,\underline{x^\wedge}\in\mathbb{R}\,\big]$, равносильная $\Big(\mathbb{V}^{(B)}\vDash[\,y\in\mathbb{R}\,]\Big)\Big|^{y}_{x^\wedge}$.

В математической практике внешние термы употребляются без специального синтаксиса. Это отступление от формализма традиционно компенсируется контекстом. Так, если речь идет о подмножествах $X, Y \subset \mathbb{V}^{(B)}$, экстенсиональном отображении $f\colon X \to Y$ и элементе $x \in X$, то в формуле $\mathbb{V}^{(B)} \models [\, f\uparrow(x) = f(x)\,]$ легко угадывается внешнее использование термов $f\uparrow$ и $f(x)$: в рассматриваемом контексте подразумевается формула $\mathbb{V}^{(B)} \models \big[\, \underline{f\uparrow}(x) = \underline{f(x)}\,\big]$, равносильная $(\exists\, F)(\exists\, y)\big(\, F = f\uparrow \,\wedge\, y = f(x) \,\wedge\, \mathbb{V}^{(B)} \models [\, F(x) = y\,]\,\big)$.

Таким образом, импликация

$$\text{«}x \text{ — вещественное число»} \;\Rightarrow\; \text{«}x^{\wedge} \text{ — вещественное число внутри } \mathbb{V}^{(B)}\text{»},$$

демонстрационное исследование которой было анонсировано во введении, выражается формулой $(\forall\, x \in \mathbb{R})\ \mathbb{V}^{(B)} \models \big[\, \underline{x^{\wedge}} \in \mathbb{R}\,\big]$ или, что то же самое, $\mathbb{V}^{(B)} \models \big[\, \underline{\mathbb{R}^{\wedge}} \subset \mathbb{R}\,\big]$. В дальнейшем, следуя традиции, мы условимся скрывать синтаксис внешних термов и, в частности, вместо $\mathbb{V}^{(B)} \models \big[\, \underline{\mathbb{R}^{\wedge}} \subset \mathbb{R}\,\big]$ будем писать $\mathbb{V}^{(B)} \models [\,\mathbb{R}^{\wedge} \subset \mathbb{R}\,]$.

2. Классификация термов и ее приложения

Как уже было отмечено в 1.10, поле вещественных чисел в булевозначном универсуме обычно определяется как произвольный элемент $\mathscr{R} \in \mathbb{V}^{(B)}$, являющийся внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ условно полным линейно упорядоченным полем. Впрочем, выбор такого элемента $\mathscr{R}$, как правило, сразу ограничивается соглашением об истинности внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ утверждения «$\mathbb{R}^{\wedge}$ является подполем $\mathscr{R}$» (см., например, [7, 10.3.3]). Фактически это означает, что полем вещественных чисел $\mathscr{R}$ внутри булевозначной модели объявляется произвольное пополнение архимедова линейно упорядоченного поля $\mathbb{R}^{\wedge}$.

Поскольку такое введение символа $\mathscr{R}$ реализуется консервативным расширением теории множеств, оно логически безупречно, но все же доставляет определенные технические неудобства, вызванные отсутствием элиминации (см. 1.10). Можно также отметить изъян методического характера: в рассматриваемом случае способы определения чисел внутри $\mathbb{V}$ и внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ оказываются различными. Более того, понятие числа в булевозначном универсуме перестает быть «внутренним», задействуя объект $\mathbb{R}^{\wedge}$, формально неопределимый внутри $\mathbb{V}^{(B)}$.

В рамках формализма, описанного в 1.11, числовое поле определяется посредством элиминируемого расширения, константа $\mathbb{R}$ приобретает универсальность и понятие вещественного числа становится единым для всех моделей теории множеств. Тем не менее, устраняя отмеченные ранее технические и методические «недостатки», мы рискуем потерять уже ставшее привычным включение $\mathbb{R}^{\wedge} \subset \mathbb{R}$.

В данном контексте представляется уместным вопрос о том, в каких случаях (т. е. для каких булевых алгебр B) и какие из традиционных конструкций числового поля $\mathbb{R}$ гарантируют явное включение $\mathbb{R}^{\wedge} \subset \mathbb{R}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. Исследуя этот вопрос в качестве демонстрационного примера, мы покажем, что соотношение $\mathbb{V}^{(B)} \models [\,\mathbb{R}^{\wedge} \subset \mathbb{R}\,]$ всегда имеет место при определении чисел как дедекиндовых сечений (см. 2.8), в то время как подход Кантора, основанный на рассмотрении фундаментальных последовательностей рациональных чисел, обеспечивает упомянутое включение лишь в случае σ-дистрибутивной булевой алгебры B (см. 2.14). Роль основного инструмента будет отведена понятию Δ_1-терма.

В дальнейшем мы предполагаем, что термы возникают в рамках элиминируемого расширения теории ZFC (см. 1.2), и сохраняем имя ZFC за таким расширением. В частности, всякому терму $\tau(x_1, \dots, x_n)$ соответствует такая формула $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ сигнатуры $\{\in\}$, что $\mathrm{ZFC} \vdash [\, y = \tau(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \varphi(y, x_1, \dots, x_n)\,]$. Мы также продолжаем придерживаться принятого в 1.6 соглашения о записях вида $\varphi(\dots)$ и $\tau(\dots)$ и их связи с процедурой подстановки термов.

2.1. Пусть Φ — какая-либо совокупность формул языка теории множеств. Формулу φ относят к *классу* Φ и называют Φ-*формулой*, если $\mathrm{ZFC} \vdash [\,\varphi \Leftrightarrow \varphi'\,]$ для некоторой формулы φ' из Φ. Как легко видеть, если $\mathrm{ZFC} \vdash [\,\psi \Leftrightarrow \varphi\,]$ и φ — формула класса Φ, то формула ψ также принадлежит классу Φ. В последнем случае формулу φ можно назвать Φ-*определением* формулы ψ.

Терм τ условимся относить к *классу* Φ и называть Φ-*термом* или Φ-*определимым* термом, если классу Φ принадлежит равенство $y = \tau$. (Здесь, как и всюду в подобных случаях, неявно предполагается, что y — переменная, не участвующая в терме τ в качестве параметра.) Таким образом, принадлежность терма $\tau(x_1, \dots, x_n)$ классу Φ означает, что $\mathrm{ZFC} \vdash [\, y = \tau(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \varphi(y, x_1, \dots, x_n)\,]$ для какой-либо Φ-формулы $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$. Эквивалентность $y = \tau(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ назовем Φ-*определением* терма τ. Кроме того, Φ-определимость терма $\tau(\bar{x})$ посредством $\varphi(y, \bar{x})$ может быть выражена более лаконично в форме $\varphi\big(\tau(\bar{x}), \bar{x}\big)$ (см., например, 2.15).

2.2. Пусть Δ_0 — наименьшая совокупность формул, содержащая формулы вида $x \in y$ и замкнутая относительно связок $\vee$, $\neg$, $(\exists\, x \in y)$.

Как легко видеть, все бескванторные формулы сигнатуры $\{\in\}$ (с равенством) принадлежат классу Δ_0 и для любых формул φ и ψ класса Δ_0 этому же классу принадлежат формулы $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$, $\neg\varphi$, $\varphi \Rightarrow \psi$, $\varphi \Leftrightarrow \psi$, $(\exists\, x \in y)\,\varphi$, $(\exists!\, x \in y)\,\varphi$, $(\forall\, x \in y)\,\varphi$. Поскольку Δ_0-формулы эквивалентны (в ZFC) формулам, содержащим лишь ограниченные кванторы, формулы класса Δ_0 часто называют *ограниченными*.

Следующие выражения служат примерами термов и формул класса Δ_0:

$\varnothing$; $\{x\}$; $\{x, y\}$; $\langle x, y\rangle := \big\{\{x\}, \{x, y\}\big\}$;

$X \cup Y$; $X \cap Y$; $X \backslash Y$; $\cup X$; $X \times Y$; $X \subset Y$;

f — функция; $f : X \to Y$; $\mathrm{dom}\, f$; $\mathrm{im}\, f$; $f(x)$; $xfy := f(\langle x, y\rangle)$;

$0 := \varnothing$; $x + 1 := x \cup \{x\}$; $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\} :=$ «наименьший предельный ординал».

Соответствующие Δ_0-определения имеются, например, в [11, 12.10].

2.3. Пусть Σ_1 — совокупность формул вида $(\exists\, x)\,\varphi$, где φ — формула класса Δ_0. Следующие утверждения вытекают из [11, 13.10].

(1) *Формулы и термы класса Δ_0 принадлежат классу Σ_1.*

(2) *Для любых формул φ и ψ класса Σ_1 этому же классу принадлежат формулы $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$, $(\exists\, x \in y)\varphi$, $(\forall\, x \in y)\varphi$, $(\exists\, x)\varphi$.*

(3) *Если формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ и термы $\tau_1, \dots, \tau_n$ принадлежат классу Σ_1, то этому же классу принадлежит формула $\varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)$.*

(4) *Если термы $\tau(x_1, \dots, x_n)$, $\tau_1, \dots, \tau_n$ принадлежат классу Σ_1, то этому же классу принадлежит терм $\tau(\tau_1, \dots, \tau_n)$.*

2.4. Формулу φ относят к *классу* Δ_1 и называют Δ_1-*формулой*, если φ и $\neg\varphi$ принадлежат классу Σ_1. Терм τ относят к *классу* Δ_1 и называют Δ_1-*термом*, если равенство $y = \tau$ принадлежит классу Δ_1.

(1) *Формулы и термы класса Σ_1 принадлежат классу Δ_1.*

(2) *Классы Σ_1-термов и Δ_1-термов совпадают.*

(3) *Для любых формул φ и ψ класса Δ_1 этому же классу принадлежат формулы $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$, $\neg\varphi$, $\varphi \Rightarrow \psi$, $\varphi \Leftrightarrow \psi$, $(\exists\, x \in y)\varphi$, $(\exists!\, x \in y)\varphi$, $(\forall\, x \in y)\varphi$.*

(4) *Если формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ и термы $\tau_1, \dots, \tau_n$ принадлежат классу Δ_1, то этому же классу принадлежит формула $\varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)$.*

(5) *Если формула $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ и терм $\tau(x_1,\dots,x_n)$ принадлежат классу Δ_1, то этому же классу принадлежит терм $\{\tau(x_1,\dots,x_n) : x_1\in X_1,\dots,x_n\in X_n,\ \varphi(x_1,\dots,x_n)\}$.*

$\lhd$ Утверждение (1) очевидно, (2) вытекает из тавтологии $x\neq\tau \Leftrightarrow (\exists\, y)[y=\tau\ \wedge\ x\neq y]$, (3) имеется в [11, 13.10], а для обоснования (4) и (5) достаточно заметить, что

$$\varphi(\tau)\Leftrightarrow(\exists\, y)[y=\tau\ \wedge\ \varphi(y)];\quad \neg\varphi(\tau)\Leftrightarrow(\exists\, y)[y=\tau\ \wedge\ \neg\varphi(y)];$$
$$Y=\{\tau(x) : x\in X,\ \varphi(x)\}\ \Leftrightarrow(\forall\, y\in Y)(\exists\, x\in X)[\varphi(x)\ \wedge\ y=\tau(x)]$$
$$\wedge\,(\forall\, x\in X)[\neg\varphi(x)\ \vee\ (\exists\, y\in Y)\ y=\tau(x)].\ \rhd$$

(В конце заметки мы покажем, что утверждение (5) не распространяется на случай произвольной Σ_1-формулы φ.)

Учитывая совпадение понятий Δ_1-терма и Σ_1-терма, мы отдаем предпочтение первому из этих двух терминов.

2.5. Определяя какой-либо функциональный символ $\mathscr{F}$ с формальными параметрами $\bar{x}=x_1,\dots,x_n$ посредством аксиомы $y=\mathscr{F}(\bar{x})\Leftrightarrow\varphi(y,\bar{x})$, необходимо соблюдать требование $\mathrm{ZFC}\vdash(\forall\,\bar{x})(\exists!\,y)\varphi(y,\bar{x})$, называемое *корректностью* соответствующего определения. (В противном случае расширенная теория заведомо окажется противоречивой.) В то же время практика изобилует примерами символов, корректно определяемых лишь при выполнении некоторых условий $\delta(\bar{x})$, налагаемых на параметры $\bar{x}$:

$$\mathrm{ZFC}\vdash(\forall\,\bar{x})\big[\delta(\bar{x})\ \Rightarrow\ (\exists!\,y)\varphi(y,\bar{x})\big].$$

Такое условно корректное определение всегда можно распространить до корректного, положив, например, $\mathscr{F}(\bar{x})=\varnothing$ в случае $\neg\delta(\bar{x})$. Если при этом определяющая формула $\varphi(y,\bar{x})$ принадлежит классу Σ_1 (классу Δ_0), а условие $\delta(\bar{x})$ принадлежит классу Δ_1 (классу Δ_0), то терм $\mathscr{F}(\bar{x})$ окажется Δ_1-термом (соответственно Δ_0-термом), поскольку

$$y=\mathscr{F}(\bar{x})\ \Leftrightarrow\ [\,\delta(\bar{x})\ \wedge\ \varphi(y,\bar{x})\,]\ \vee\ [\,\neg\delta(\bar{x})\ \wedge\ y=\varnothing\,].$$

Подобные распространения подразумеваются по умолчанию. Например, бинарный символ $f(x)$, снабжаемый условно корректным Δ_0-определением $y=f(x)\ \Leftrightarrow\ \langle x,y\rangle\in f$ при Δ_0-условии $\delta(f,x)\ :=\ [\,f$ — функция $\wedge\ x\in\operatorname{dom}f\,]$, неявно заменяется символом с корректным Δ_0-определением $y=f(x)\ \Leftrightarrow\ [\,\delta(f,x)\ \wedge\ \langle x,y\rangle\in f\,]\ \vee\ [\,\neg\delta(f,x)\ \wedge\ y=\varnothing\,]$.

2.6. Сведения, приведенные в 2.2–2.4, служат удобным инструментом при последовательном построении выражений в рамках классов Δ_0, Σ_1 и Δ_1. В частности, с их помощью можно легко убедиться в том, что все компоненты традиционным способом определяемых числовых систем $\langle\mathbb{N},+_{\mathbb{N}},\cdot_{\mathbb{N}},\leqslant_{\mathbb{N}}\rangle$, $\langle\mathbb{Z},+_{\mathbb{Z}},\cdot_{\mathbb{Z}},\leqslant_{\mathbb{Z}}\rangle$ и $\langle\mathbb{Q},+_{\mathbb{Q}},\cdot_{\mathbb{Q}},\leqslant_{\mathbb{Q}}\rangle$ являются Δ_1-термами. Например,

$$\mathbb{Z}=\{m-n : m,n\in\mathbb{N}\},$$

где $m-n=\{\langle m',n'\rangle : m',n'\in\mathbb{N},\ m+_{\mathbb{N}}n'=m'+_{\mathbb{N}}n\}$;

$$\mathbb{Q}\ =\ \{i/j : i,j\in\mathbb{Z},\ j\neq 0_{\mathbb{Z}}\},$$

где $i/j=\{\langle i',j'\rangle : i',j'\in\mathbb{Z},\ j'\neq 0_{\mathbb{Z}},\ i\cdot_{\mathbb{Z}}j'=i'\cdot_{\mathbb{Z}}j\}$; для операции $+_{\mathbb{N}}$ можно предложить Σ_1-определение

$$+_{\mathbb{N}}:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}\ \wedge\ (\forall\, m,n\in\mathbb{N})\big[\,m+_{\mathbb{N}}0=m\ \wedge\ m+_{\mathbb{N}}(n+1)=(m+_{\mathbb{N}}n)+1\,\big];$$

отношение $\leqslant_{\mathbb{Z}}$ представляет собой Δ_1-терм

$$\leqslant_{\mathbb{Z}}\ =\ \{\langle m-n,m'-n'\rangle : m,n,m',n'\in\mathbb{N},\ m+_{\mathbb{N}}n'\leqslant_{\mathbb{N}}m'+_{\mathbb{N}}n\}$$

и т. п.

2.7. *Пусть $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ — Σ_1-формула, $\psi(x_1,\dots,x_n)$ — Δ_1-формула и $\tau(x_1,\dots,x_n)$ — Δ_1-терм, все параметры которых входят в список $x_1,\dots,x_n$. Тогда в ZFC доказуемо утверждение о том, что для любой полной булевой алгебры B и любых $x_1,\dots,x_n$*

$$\varphi(x_1,\dots,x_n) \ \Rightarrow\ \mathbb{V}^{(B)} \models \varphi(x_1^\wedge,\dots,x_n^\wedge); \tag{1}$$
$$\psi(x_1,\dots,x_n) \ \Leftrightarrow\ \mathbb{V}^{(B)} \models \psi(x_1^\wedge,\dots,x_n^\wedge); \tag{2}$$
$$\mathbb{V}^{(B)} \models \big[\, \tau(x_1,\dots,x_n)^\wedge = \tau(x_1^\wedge,\dots,x_n^\wedge) \,\big]. \tag{3}$$

В частности, если Δ_1-терм τ не имеет параметров, то $\mathbb{V}^{(B)} \models [\, \tau^\wedge = \tau \,]$.

$\lhd$ Доказательство (1) можно найти в [7, 4.2.9], (2) вытекает из (1), а (3) является синонимом импликации $y = \tau(x_1,\dots,x_n) \ \Rightarrow\ \mathbb{V}^{(B)} \models \big[\, y^\wedge = \tau(x_1^\wedge,\dots,x_n^\wedge) \,\big]$. $\rhd$

Из 2.6 и 2.7 ясно, что для любой алгебры B внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ истинны равенства

$$\big\langle \mathbb{N}^\wedge,\, +_{\mathbb{N}}^\wedge,\, \cdot_{\mathbb{N}}^\wedge,\, \leqslant_{\mathbb{N}}^\wedge \big\rangle = \langle \mathbb{N}, +_{\mathbb{N}}, \cdot_{\mathbb{N}}, \leqslant_{\mathbb{N}} \rangle,$$
$$\big\langle \mathbb{Z}^\wedge,\, +_{\mathbb{Z}}^\wedge,\, \cdot_{\mathbb{Z}}^\wedge,\, \leqslant_{\mathbb{Z}}^\wedge \big\rangle = \langle \mathbb{Z}, +_{\mathbb{Z}}, \cdot_{\mathbb{Z}}, \leqslant_{\mathbb{Z}} \rangle,$$
$$\big\langle \mathbb{Q}^\wedge,\, +_{\mathbb{Q}}^\wedge,\, \cdot_{\mathbb{Q}}^\wedge,\, \leqslant_{\mathbb{Q}}^\wedge \big\rangle = \langle \mathbb{Q}, +_{\mathbb{Q}}, \cdot_{\mathbb{Q}}, \leqslant_{\mathbb{Q}} \rangle.$$

2.8. Напомним, что *дедекиндовым сечением* называется всякое непустое насыщенное вниз подмножество $x \subset \mathbb{Q}$, отличное от $\mathbb{Q}$ и не имеющее наибольшего элемента. Порядок и сложение в множестве $\mathbb{R}_{\mathrm{D}}$ всех дедекиндовых сечений определяются аксиомами $x \leqslant y \ \Leftrightarrow\ x \subset y$, $x + y = \{p +_{\mathbb{Q}} q : p \in x,\, q \in y\}$. Для определения операции умножения можно сначала ввести понятие положительного сечения: $0 \leqslant x \Leftrightarrow \mathbb{Q}^- \subset x$, где $\mathbb{Q}^- = \{q \in \mathbb{Q} : q <_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}}\}$, затем определить унарную операцию противоположного элемента: $-x = \{p -_{\mathbb{Q}} q : p \in \mathbb{Q}^-,\ q \in \mathbb{Q}\backslash x\}$, следом ввести произведение положительных сечений: $x \cdot y = \mathbb{Q}^- \cup \{p \cdot_{\mathbb{Q}} q : p \in x,\ q \in y,\, p, q \geqslant_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}}\}$, после чего определить произведение $x \cdot y$ остальных пар сечений x и y как $-(-x \cdot y)$, $-(x \cdot -y)$ или $-x \cdot -y$ в зависимости от того, какие из двух сечений не являются положительными.

Для любой полной булевой алгебры B внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ истинно включение $\mathbb{R}_{\mathrm{D}}^\wedge \subset \mathbb{R}_{\mathrm{D}}$, причем $\big\langle \mathbb{R}_{\mathrm{D}}^\wedge, +^\wedge, \cdot^\wedge, \leqslant^\wedge \big\rangle$ — упорядоченное подполе поля $\langle \mathbb{R}_{\mathrm{D}}, +, \cdot, \leqslant \rangle$.

$\lhd$ Заметим, что включение $x \in \mathbb{R}_{\mathrm{D}}$ равносильно формуле

$$x \neq \varnothing \ \wedge\ x \subset \mathbb{Q} \ \wedge\ x \neq \mathbb{Q}$$
$$\wedge (\forall\, q \in x)(\forall\, p \in \mathbb{Q})(p \leqslant_{\mathbb{Q}} q \ \Rightarrow\ p \in x) \wedge (\forall\, q \in x)(\exists\, p \in x)(q <_{\mathbb{Q}} p),$$

принадлежащей классу Σ_1 (и даже Δ_1), а значит, формула $(\forall\, x \in X)(x \in \mathbb{R}_{\mathrm{D}})$ служит Σ_1-определением включения $X \subset \mathbb{R}_{\mathrm{D}}$. Стало быть, согласно 2.7(1) справедлива импликация $X \subset \mathbb{R}_{\mathrm{D}} \Rightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models [\, X^\wedge \subset \mathbb{R}_{\mathrm{D}}]$, из которой (в случае $X = \mathbb{R}_{\mathrm{D}}$) следует $\mathbb{V}^{(B)} \models [\, \mathbb{R}_{\mathrm{D}}^\wedge \subset \mathbb{R}_{\mathrm{D}}]$.

Из определений порядка, сложения и умножения в $\mathbb{R}_{\mathrm{D}}$ видна принадлежность формулы $x \leqslant y$ и термов $x + y$, $x \cdot y$ классу Δ_1. Следовательно, включение $F \subset +$ обладает Σ_1-определением

$$(\forall\, f \in F)(\exists\, x, y)\big(x, y \in \mathbb{R}_{\mathrm{D}} \wedge\ f = \langle x, y, x + y \rangle\big)$$

и поэтому $F \subset + \ \Rightarrow\ \mathbb{V}^{(B)} \models [\, F^\wedge \subset + \,]$. В частности, $\mathbb{V}^{(B)} \models [\, +^\wedge \subset + \,]$, откуда с учетом $\mathbb{V}^{(B)} \models \big[\, +^\wedge : \mathbb{R}_{\mathrm{D}}^\wedge \times \mathbb{R}_{\mathrm{D}}^\wedge \to \mathbb{R}_{\mathrm{D}}^\wedge \,\big]$ вытекает $\mathbb{V}^{(B)} \models \big[\, +^\wedge = +|_{\mathbb{R}_{\mathrm{D}}^\wedge \times \mathbb{R}_{\mathrm{D}}^\wedge} \,\big]$.

Соотношения $\mathbb{V}^{(B)} \models \big[\, \cdot^\wedge = \cdot|_{\mathbb{R}_{\mathrm{D}}^\wedge \times \mathbb{R}_{\mathrm{D}}^\wedge} \,\big]$ и $\mathbb{V}^{(B)} \models \big[\, \leqslant^\wedge = \leqslant \cap\, (\mathbb{R}_{\mathrm{D}}^\wedge \times \mathbb{R}_{\mathrm{D}}^\wedge) \,\big]$ устанавливаются аналогично. $\rhd$

2.9. В связи с приведенными выше рассуждениями стоит отметить, что принадлежность термов $x+y$ и $x \cdot y$ классу Δ_1 на самом деле не нуждается в проверке. Какими бы формулами ни определялись эти термы, соответствующие им операции $+$ и $\cdot$ должны быть непрерывными продолжениями на $\mathbb{R}_{\mathrm{D}} \times \mathbb{R}_{\mathrm{D}}$ соответствующих операций $+_{\mathbb{Q}}$ и $\cdot_{\mathbb{Q}}$, перенесенных из поля $\mathbb{Q}$ на подполе $\imath[\mathbb{Q}] \subset \mathbb{R}_{\mathrm{D}}$ посредством изоморфного вложения

$$q \in \mathbb{Q} \ \mapsto \ \imath(q) = \{p \in \mathbb{Q} : \, p <_{\mathbb{Q}} q\} \in \mathbb{R}_{\mathrm{D}}.$$

Поскольку терм $\imath(q)$ и отношение $x \leqslant y$ принадлежат классу Δ_1, терм $x+y$ (как и $x \cdot y$) обладает Σ_1-определением:

$$\begin{gathered} z = x + y \ \Leftrightarrow \ \bigl[\, \imath(p +_{\mathbb{Q}} q) \to z \ \text{ при } p \to x, \ q \to y \,\bigr] \\ \Leftrightarrow \ (\forall \, \varepsilon \in \mathbb{Q}^{+})(\exists \, \delta \in \mathbb{Q}^{+})(\forall \, p, q \in \mathbb{Q})\bigl[\, p \in B(x,\delta) \ \wedge \ q \in B(y,\delta) \ \Rightarrow \ p +_{\mathbb{Q}} q \in B(z,\varepsilon)\bigr], \end{gathered}$$

где $p \in B(x,\delta) \ \Leftrightarrow \ \imath(p -_{\mathbb{Q}} \delta) \leqslant x \leqslant \imath(p +_{\mathbb{Q}} \delta)$.

Аналогичные соображения, приводящие к утверждению 2.8, справедливы для многих классических конструкций поля вещественных чисел — включая определения $\mathbb{R}$, основанные на бесконечных десятичных дробях (или записях в других позиционных системах) и цепных дробях. В рамках этих подходов, как и в случае дедекиндовых сечений, формулы $x \in \mathbb{R}$ и $x \leqslant y$ принадлежат классу Δ_1 и имеется вложение $\imath : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ посредством Δ_1-терма $\imath(q)$.

2.10. Пусть σ и τ — произвольные термы. Будем говорить, что формула $\varphi(T,S)$ *определяет τ по σ* (или, точнее, определяет $T = \tau$ по $S = \sigma$), если $\mathrm{ZFC} \vdash [\, T = \tau \ \Leftrightarrow \ \varphi(T,\sigma)\,]$. Терм τ условимся называть Σ_1-*определимым по* σ, если существует Σ_1-формула, определяющая τ по σ. Термы τ и σ назовем Σ_1-*эквивалентными*, если τ Σ_1-определим по σ, а σ Σ_1-определим по τ.

(1) *Отношение Σ_1-определимости термов транзитивно.*

(2) *Если термы $\tau(x_1,\ldots,x_n)$, $\tau_1, \ldots, \tau_n$ Σ_1-определимы по σ, то терм $\tau(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ Σ_1-определим по σ.*

(3) *Если терм $\tau(x)$ принадлежит классу Δ_1, то терм $\tau(\sigma)$ Σ_1-определим по σ.*

(4) *Если терм $\tau(x_1, \ldots, x_n)$ и формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ принадлежат классу Δ_1, то терм $\bigl\{\tau(x_1,\ldots,x_n) : \, x_1,\ldots,x_n \in \sigma, \ \varphi(x_1,\ldots,x_n,\sigma)\bigr\}$ Σ_1-определим по σ.*

(5) *Пусть термы ρ,σ, Δ_1-терм $\tau(x_1,\ldots,x_n)$ и Δ_1-формула $\varphi(x_1,\ldots,x_n,y)$ таковы, что в ZFC доказуемо равенство $\rho = \bigl\{\tau(x_1,\ldots,x_n) \, : \, x_1,\ldots,x_n \in \sigma, \ \varphi(x_1,\ldots,x_n,\sigma)\bigr\}$. Тогда терм $\rho^{\mathbb{N}}$ Σ_1-определим по $\sigma^{\mathbb{N}}$.*

$\lhd$ (1) Если $\varphi(T,S)$ определяет τ по σ, а $\psi(S,R)$ определяет σ по ρ, то формула $(\exists \, S)[\varphi(T,S) \ \wedge \ \psi(S,R)]$ определяет τ по ρ.

(2) Если $\varphi(T,S,x_1,\ldots,x_n)$ определяет $T = \tau(x_1,\ldots,x_n)$ по $S = \sigma$, а $\varphi_i(T_i,S)$ определяют $T_i = \tau_i$ по $S = \sigma$, то $(\exists \, T_1,\ldots,T_n)[\, \varphi(T,S,T_1,\ldots,T_n) \ \wedge \ \varphi_1(T_1,S) \ \wedge \ \cdots \ \wedge \ \varphi_n(T_n,S)\,]$ определяет $T = \tau(\tau_1,\ldots,\tau_n)$ по $S = \sigma$.

Утверждение (3) является частным случаем (2), а (4) вытекает из (3) и 2.4(5).

(5) Терм σ Σ_1-определим по $\sigma^{\mathbb{N}}$, а терм ρ, в свою очередь, Σ_1-определим по σ в силу (4). Благодаря (1) имеется такая Σ_1-формула $\psi(P,S)$, что $\mathrm{ZFC} \vdash \bigl[\, P = \rho \ \Leftrightarrow \ \psi(P,\sigma^{\mathbb{N}})\,\bigr]$, и тогда следующая Σ_1-формула определяет $R = \rho^{\mathbb{N}}$ по $S = \sigma^{\mathbb{N}}$:

$$\begin{gathered} (\exists \, p)\bigl[\, \psi(p,S) \ \wedge \ (\forall \, r \in R)(r : \mathbb{N} \to p)\,\bigr] \\ \wedge(\forall \, x_1,\ldots,x_n \in S)\bigl[\, (\exists \, m \in \mathbb{N}) \, \neg\varphi\bigl(x_1(m),\ldots,x_n(m),S\bigr) \\ \vee(\exists \, r \in R)(\forall \, m \in \mathbb{N}) \ r(m) = \tau\bigl(x_1(m),\ldots,x_n(m)\bigr)\,\bigr]. \ \rhd \end{gathered}$$

2.11. *Пусть $\sigma(\bar{x})$ и $\tau(\bar{x})$ — произвольные термы, все параметры которых входят в список $\bar{x} = x_1, \dots, x_n$, и пусть терм τ Σ_1-определим по σ. Тогда в ZFC доказуемо утверждение о том, что для любой полной булевой алгебры B и любых $x_1, \dots, x_n$*

$$\mathbb{V}^{(B)} \models [\, \sigma(x_1, \dots, x_n)^\wedge = \sigma(x_1^\wedge, \dots, x_n^\wedge) \,] \ \Rightarrow\ \mathbb{V}^{(B)} \models [\, \tau(x_1, \dots, x_n)^\wedge = \tau(x_1^\wedge, \dots, x_n^\wedge) \,].$$

В частности, если σ не имеет параметров, то

$$\mathbb{V}^{(B)} \models [\, \sigma^\wedge = \sigma \,] \ \Rightarrow\ (\forall\, x_1, \dots, x_n)\ \mathbb{V}^{(B)} \models [\, \tau(x_1, \dots, x_n)^\wedge = \tau(x_1^\wedge, \dots, x_n^\wedge) \,],$$

а если оба терма σ и τ не имеют параметров, то

$$\mathbb{V}^{(B)} \models [\, \sigma^\wedge = \sigma \,] \ \Rightarrow\ \mathbb{V}^{(B)} \models [\, \tau^\wedge = \tau \,].$$

$\lhd$ Для краткости ограничимся случаем $n = 1$. Пусть Σ_1-формула $\varphi(T, S, x)$ определяет $T = \tau(x)$ по $S = \sigma(x)$, т. е. в ZFC доказуемы формулы $(\forall\, x)\, \varphi\big(\tau(x), \sigma(x), x\big)$ и $(\forall\, x, T)\big[\, \varphi\big(T, \sigma(x), x\big) \Rightarrow T = \tau(x) \,\big]$. Благодаря принципу переноса эти формулы истинны внутри $\mathbb{V}^{(B)}$. В частности, для всех x внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ истинны формулы

$$\varphi\big(\tau(x^\wedge), \sigma(x^\wedge), x^\wedge\big); \quad \varphi\big(\tau(x)^\wedge, \sigma(x^\wedge), x^\wedge\big) \ \Rightarrow\ \tau(x)^\wedge = \tau(x^\wedge). \tag{1}$$

Согласно 2.7(1) из $\varphi\big(\tau(x), \sigma(x), x\big)$ следует истинность внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ формулы

$$\varphi\big(\tau(x)^\wedge, \sigma(x)^\wedge, x^\wedge\big). \tag{2}$$

Осталось заметить, что (1), (2) и $\sigma(x)^\wedge = \sigma(x^\wedge)$ влекут $\tau(x)^\wedge = \tau(x^\wedge)$. $\rhd$

2.12. Полная булева алгебра B называется *σ-дистрибутивной*[2], если она удовлетворяет любому из следующих эквивалентных условий (см. [8, § 19; 2; 10]):

(a) $\bigwedge_{i\in\mathbb{N}} \bigvee_{j\in\mathbb{N}} b(i,j) = \bigvee_{j\in\mathbb{N}^\mathbb{N}} \bigwedge_{i\in\mathbb{N}} b\big(i, j(i)\big)$ для всех $b \colon \mathbb{N}^2 \to B$;

(b) $\bigvee_{i\in\mathbb{N}} \bigwedge_{j\in\mathbb{N}} b(i,j) = \bigwedge_{j\in\mathbb{N}^\mathbb{N}} \bigvee_{i\in\mathbb{N}} b\big(i, j(i)\big)$ для всех $b \colon \mathbb{N}^2 \to B$;

(c) $\bigvee_{s\in\{1,-1\}^\mathbb{N}} \bigwedge_{i\in\mathbb{N}} s(i)b(i) = 1_B$ для всех $b \colon \mathbb{N} \to B$;

(d) в любую последовательность счетных (конечных, 2-элементных) покрытий B можно вписать покрытие;

(e) в любую последовательность счетных (конечных, 2-элементных) разбиений B можно вписать разбиение.

Булева алгебра классов эквивалентности измеримых подмножеств $[0, 1]$, как легко видеть, не является σ-дистрибутивной. Всякая атомная полная булева алгебра σ-дистрибутивна. Примером безатомной σ-дистрибутивной полной булевой алгебры служит пополнение фактор-алгебры $\mathscr{P}(\mathbb{N})/\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$ (см. [2, 10]).

2.13. *Следующие свойства полной булевой алгебры B равносильны:*

(a) *булева алгебра B σ-дистрибутивна*;

(b) $\mathbb{V}^{(B)} \models \big[\, \mathscr{P}(\mathbb{N})^\wedge = \mathscr{P}(\mathbb{N}) \,\big]$;

(c) $\mathbb{V}^{(B)} \models \big[\, (\mathbb{N}^\mathbb{N})^\wedge = \mathbb{N}^\mathbb{N} \,\big]$;

(d) $\mathbb{V}^{(B)} \models \big[\, \mathbb{R}_{\mathrm{D}}^\wedge = \mathbb{R}_{\mathrm{D}} \big]$;

(e) $\mathbb{V}^{(B)} \models \big[\,$*упорядоченные поля $\mathbb{R}^\wedge$ и $\mathbb{R}$ изоморфны*$\,\big]$, *где $\mathbb{R}$ — упорядоченное поле вещественных чисел, вводимое любым из традиционных определений.*

$\lhd$ Импликации (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c) хорошо известны (см. [9, 2.14, 2.15]). Эквивалентность (d) $\Leftrightarrow$ (e) легко установить, используя 2.8, плотность $\mathbb{R}_{\mathrm{D}}^\wedge$ в $\mathbb{R}_{\mathrm{D}}$ и принадлежность классу Σ_1 утверждения об изоморфности двух упорядоченных полей. Доказательство (a) $\Leftrightarrow$ (e) имеется в [2, 10]. $\rhd$

[2] В теории множеств такие булевы алгебры относят к классу $(\omega, 2)$-дистрибутивных или, что то же самое, (ω, ω)-дистрибутивных алгебр, в то время как ω-дистрибутивными называют булевы алгебры, являющиеся (ω, α)-дистрибутивными для любого кардинала α.

Каждое из утверждений (a)–(e) равносильно локальной одномерности пространства Канторовича с базой B. Это обстоятельство использовано в [2, 10] для доказательства эквивалентности (a) $\Leftrightarrow$ (e) на основе теории K-пространств — теории, созданной Л. В. Канторовичем [3], и в настоящее время составляющей один из важнейших разделов функционального анализа (см. [4–6]). Вместе с тем из 2.11 ясно, что равносильность (b) $\Leftrightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (d) имеет «синтаксическую» причину: термы $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $\mathbb{R}_{\mathrm{D}}$ Σ_1-эквивалентны. (Соответствующие взаимные Σ_1-определения можно сформулировать, используя, например, представление вещественных чисел в виде бесконечных двоичных дробей или цепных дробей. При этом существенную роль играет принадлежность формулы $x \in \mathbb{R}_{\mathrm{D}}$ классу Δ_1.) Отметим также, что список $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}_{\mathrm{D}}$ можно пополнить, например, термами $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ и $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, Σ_1-эквивалентность которых терму $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ вытекает из 2.10(5) в силу представлений $\mathbb{Z} = \{n - m : n, m \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{Q} = \{i/j : i, j \in \mathbb{Z},\ j \neq 0_{\mathbb{Z}}\}$, $\mathbb{N} = \{\lfloor q \rfloor : q \in \mathbb{Q},\ q \geqslant_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}}\}$.

2.14. Подход Кантора к определению упорядоченного поля вещественных чисел начинается с рассмотрения множества

$$\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{C}} = \big\{ s \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : (\forall\, q \in \mathbb{Q}^{+})(\exists\, m \in \mathbb{N})(\forall\, n \in \mathbb{N})\big[\, m \leqslant_{\mathbb{N}} n \Rightarrow |s(m) -_{\mathbb{Q}} s(n)| \leqslant_{\mathbb{Q}} q \,\big]\big\}$$

всех фундаментальных последовательностей рациональных чисел, после чего множество вещественных чисел $\mathbb{R}_{\mathrm{C}}$ определяется как фактор $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{C}}/{\sim}$ по отношению эквивалентности

$$s \sim t \ \Leftrightarrow\ (\forall\, q \in \mathbb{Q}^{+})(\exists\, m \in \mathbb{N})(\forall\, n \in \mathbb{N})\big[\, m \leqslant_{\mathbb{N}} n \Rightarrow |s(n) -_{\mathbb{Q}} t(n)| \leqslant_{\mathbb{Q}} q \,\big]$$

и снабжается естественными операциями сложения, умножения и отношением порядка.

Включение $\mathbb{R}^{\wedge}_{\mathrm{C}} \subset \mathbb{R}_{\mathrm{C}}$ истинно внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ тогда и только тогда, когда полная булева алгебра B σ-дистрибутивна.

$\lhd$ Пусть для булевой алгебры B справедливо соотношение $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [\mathbb{R}^{\wedge}_{\mathrm{C}} \subset \mathbb{R}_{\mathrm{C}}]$.

Предварительно покажем, что $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [\, 0^{\wedge}_{\mathrm{C}} = 0_{\mathrm{C}}]$, где $0_{\mathrm{C}} \in \mathbb{R}_{\mathrm{C}}$ — множество всех последовательностей рациональных чисел, сходящихся к $0_{\mathbb{Q}}$. Действительно, из $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [\mathbb{R}^{\wedge}_{\mathrm{C}} \subset \mathbb{R}_{\mathrm{C}}]$ следует $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [\, 0^{\wedge}_{\mathrm{C}} \in \mathbb{R}_{\mathrm{C}}]$. Поскольку формула $s \in 0_{\mathrm{C}}$ имеет Σ_1-определение

$$s : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \ \wedge\ (\forall\, q \in \mathbb{Q}^{+})(\exists\, m \in \mathbb{N})(\forall\, n \in \mathbb{N})\big[\, m \leqslant_{\mathbb{N}} n \Rightarrow |s(n)| \leqslant_{\mathbb{Q}} q \,\big],$$

с учетом 2.7(1) мы имеем $(\forall\, s \in 0_{\mathrm{C}})$ $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [\, s^{\wedge} \in 0_{\mathrm{C}}]$, а значит, $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [\, 0^{\wedge}_{\mathrm{C}} \subset 0_{\mathrm{C}}]$. Стало быть, внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ элементы $0^{\wedge}_{\mathrm{C}}$ и 0_{C} фактор-множества $\mathbb{R}_{\mathrm{C}} = \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{C}}/{\sim}$ удовлетворяют включению $0^{\wedge}_{\mathrm{C}} \subset 0_{\mathrm{C}}$ и поэтому совпадают: $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [\, 0^{\wedge}_{\mathrm{C}} = 0_{\mathrm{C}}]$.

Заметим, что $\mathscr{P}(\mathbb{N}) = \{\operatorname{supp}(s) : s \in 0_{\mathrm{C}}\}$, где $\operatorname{supp}(s) = \{n \in \mathbb{N} : s(n) \neq 0_{\mathbb{Q}}\}$, а значит, терм $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ Σ_1-определим по 0_{C} (см. 2.10(4) и 2.4(5)). Согласно 2.11 из $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [\, 0^{\wedge}_{\mathrm{C}} = 0_{\mathrm{C}}]$ вытекает $\mathbb{V}^{(B)} \vDash \big[\, \mathscr{P}(\mathbb{N})^{\wedge} = \mathscr{P}(\mathbb{N}) \,\big]$ и, следовательно, булева алгебра B σ-дистрибутивна в силу 2.13.

Наоборот, пусть B — σ-дистрибутивная алгебра. Тогда $\mathbb{V}^{(B)} \vDash \big[\, (\mathbb{Q}^{\mathbb{N}})^{\wedge} = \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \,\big]$ (см. 2.13). Для любой последовательности $s \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{C}}$ рассмотрим соответствующий класс эквивалентности $\rho(s) \in \mathbb{R}_{\mathrm{C}}$. С учетом 2.4(4) из приведенного выше определения $s \sim t$ видно, что эта формула принадлежит классу Δ_1. Согласно 2.10(4) терм $\rho(s) = \{t : t \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}},\ s \sim t\}$ Σ_1-определим по $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$. Благодаря 2.11 из $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [\, (\mathbb{Q}^{\mathbb{N}})^{\wedge} = \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \,]$ следует $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [\, \rho(s)^{\wedge} = \rho(s^{\wedge}) \,]$ для всех s. Следовательно, $(\forall\, s \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}_{\mathrm{C}})$ $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [\, \rho(s)^{\wedge} \in \mathbb{R}_{\mathrm{C}} \,]$, т. е. $(\forall\, x \in \mathbb{R}_{\mathrm{C}})$ $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [\, x^{\wedge} \in \mathbb{R}_{\mathrm{C}} \,]$, а значит, $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [\, \mathbb{R}^{\wedge}_{\mathrm{C}} \subset \mathbb{R}_{\mathrm{C}} \,]$. $\rhd$

2.15. Как известно (см. [7, 5.1.8, 5.1.9]), для любой полной булевой алгебры B и любого множества X внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ имеет место равенство $\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X)^{\wedge} = \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X^{\wedge})$, проверяемое довольно утомительным вычислением булевозначной истинности. В качестве еще одной иллюстрации применения техники Δ_1-термов заметим, что этот факт является прямым следствием 2.7(3), имея все ту же «синтаксическую» причину — принадлежность терма $\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X)$ классу Δ_1.

Действительно, для любого множества X рассмотрим функцию $\mathbb{F}_X : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(X)$, сопоставляющую каждому числу $n \in \mathbb{N}$ совокупность $\mathbb{F}_X(n)$ всех подмножеств X, состоящих из n элементов. Остается заметить, что $\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X) = \cup(\operatorname{im} \mathbb{F}_X)$, причем терм $\mathbb{F}_X$ обладает Σ_1-определением

$$\mathbb{F}_X \text{ — функция } \wedge \ \operatorname{dom} \mathbb{F}_X = \mathbb{N} \ \wedge \ \mathbb{F}_X(0) = \{\varnothing\}$$
$$\wedge (\forall\, n \in \mathbb{N})\ \mathbb{F}_X(n+1) = \big\{ y \cup \{x\} : \, y \in \mathbb{F}_X(n), \ x \in X, \ x \notin y \big\}.$$

2.16. В заключение приведем пример такой Σ_1-формулы $\varphi(x)$, что терм $\{x \in X : \varphi(x)\}$ не принадлежит классу Δ_1. (Таким образом, утверждение 2.4 (5), справедливое для Δ_1-формул, не распространяется на формулы класса Σ_1.)

Для краткости введем символ $\mathbb{P} := \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Формула $\mathbb{P} \not\subset x$ относится к классу Σ_1, поскольку $\mathbb{P} \not\subset x \Leftrightarrow (\exists\, y)[\, y \subset \mathbb{N} \wedge y \notin x\,]$. Предполагая непротиворечивость ZFC, покажем, что терм $\tau(X) := \{x \in X : \mathbb{P} \not\subset x\}$ не принадлежит классу Σ_1. Согласно 2.7 (3) для этого достаточно указать такую полную булеву алгебру B, что $\tau(\{\mathbb{P}\})^{\wedge} \neq \tau(\{\mathbb{P}\}^{\wedge})$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$.

Пусть A — произвольная полная булева алгебра, не являющаяся σ-дистрибутивной. Из 2.13 вытекает $\mathbb{V}^{(A)} \not\models [\, \mathbb{P}^{\wedge} = \mathbb{P}\,]$, т. е. истинность в $\mathbb{V}^{(A)}$ формулы $\mathbb{P}^{\wedge} \neq \mathbb{P}$ отлична от нуля. Следовательно, $\mathbb{V}^{(B)} \models [\, \mathbb{P}^{\wedge} \neq \mathbb{P}\,]$ для некоторой ненулевой компоненты $B \subset A$. Поскольку $x \subset \mathbb{P} \Leftrightarrow (\forall\, y \in x)\ y \subset \mathbb{N}$, формула $x \subset \mathbb{P}$ принадлежит классу Σ_1. Рассматривая случай $x = \mathbb{P}$ и учитывая 2.7 (1), заключаем, что внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ истинно $\mathbb{P}^{\wedge} \subset \mathbb{P}$, а значит, $\mathbb{P} \not\subset \mathbb{P}^{\wedge}$ и тем самым

$$\tau(\{\mathbb{P}\}^{\wedge}) \;=\; \tau(\{\mathbb{P}^{\wedge}\}) \;=\; \big\{x \in \{\mathbb{P}^{\wedge}\} : \, \mathbb{P} \not\subset x\big\} \;=\; \{\mathbb{P}^{\wedge}\}.$$

С другой стороны,

$$\tau(\{\mathbb{P}\})^{\wedge} \;=\; \big\{x \in \{\mathbb{P}\} : \, \mathbb{P} \not\subset x\big\}^{\wedge} \;=\; \varnothing^{\wedge}.$$

Из приведенного примера, в частности, следует, что соотношение [7, 5.1.3] применимо лишь в том случае, когда формула φ принадлежит классу Δ_1.

Автор признателен Е. А. Амбуевой и А. А. Найденко за сотрудничество.

Литература

1. *Булос Дж., Джеффри Р.* Вычислимость и логика.—М.: Мир, 1994.—396 с.
2. *Гутман А. Е.* Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Тр. Ин-та математики СО РАН. Линейные операторы, согласованные с порядком.—Новосибирск: Изд-во ин-та математики, 1995.—Т. 29.—С. 63–211.
3. *Канторович Л. В.* О полуупорядоченных линейных пространствах и их приложениях в теории линейных операций // Докл. АН СССР.—1935.—Т. 4, № 1/2.—С. 11–14.
4. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.—М.: Наука, 1984.—752 с.
5. *Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.—М.–Л.: Гостехиздат, 1950.—550 с.
6. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—609 с.
7. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Введение в булевозначный анализ.—М.: Наука, 2005.—256 с.
8. *Сикорский Р.* Булевы алгебры.—М.: Мир, 1969.—376 с.
9. *Bell J. L.* Set Theory. Boolean-Valued Models and Independence Proofs.—New York: Clarendon Press, 2005.

10. *Gutman A. E.* Locally one-dimensional K-spaces and σ-distributive Boolean algebras // Siberian Adv. Math.—1995.—Vol. 5, № 1.—P. 42–48.
11. *Jech T.* Set Theory.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 2002.
12. *Lévy A.* A hierarchy of formulas in set theory.—Providence (R. I.): Amer. Math. Soc., 1965.—(Mem. Amer. Math. Soc., № 57).
13. *Solovay R. M., Tennenbaum S.* Iterated Cohen extensions and Souslin's problem // Annals of Math.—1971.—Vol. 94, № 2.—P. 201–245.

Статья поступила 23 ноября 2011 г.

Гутман Александр Ефимович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
заведующий лаб. функционального анализа
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, пр. ак. Коптюга, 4;

Новосибирский государственный университет,
профессор кафедры математического анализа
РОССИЯ, 630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, д. 2
E-mail: `gutman@math.nsc.ru`

AN EXAMPLE OF USING Δ_1 TERMS IN BOOLEAN VALUED ANALYSIS

Gutman A. E.

Syntactic tools related to Δ_1 terms are demonstrated by application to Boolean valued analysis. As an example, the question is considered of what approaches to defining the field $\mathbb{R}$ of reals and what complete Boolean algebras B provide the explicit inclusion $\mathbb{R}^\wedge \subset \mathbb{R}$ inside the Boolean valued universe $\mathbb{V}^{(B)}$.

Key words: set theory, conservative extension, real number, Boolean valued analysis, canonical embedding, σ-distributive Boolean algebra, Σ_1 formula.