Владикавказский математический журнал
2013, Том 15, Выпуск 1, С. 90–97

О ВКЛАДЕ А. Г. КУСРАЕВА В СУБДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И БУЛЕВОЗНАЧНЫЙ АНАЛИЗ

(к его 60-летию)

14 февраля 2013 г. исполнилось 60 лет Анатолию Георгиевичу Кусраеву — выдающемуся ученому и организатору науки.

А. Г. Кусраев принадлежит к научной школе академика Л. В. Канторовича и внес основополагающий вклад в некоторые пограничные разделы функционального анализа и оптимизации. Широкий резонанс и мировое признание получили исследования А. Г. Кусраева по векторной двойственности, субдифференциальному исчислению, теории мажорируемых операторов и другим актуальным разделам порядкового анализа. А. Г. Кусраев — один из мировых лидеров в области применения методов математической логики к задачам анализа. Используя технику булевозначных моделей, он дал характеристики новых классов банаховых пространств и операторных алгебр, построил новые мощные версии векторного интегрирования, доказал реализационные теоремы нового типа, связанные с эффектами цикличности структуры идемпотентов. Первоклассные результаты получены А. Г. Кусраевым в сфере оптимизации, где его техника общего положения дала возможность существенно дополнить признаки оптимальности в экстремальных задачах.

А. Г. Кусраев внес достойный вклад в развитие науки на Северном Кавказе. Он является основателем и бессменным директором Южного математического института РАН и Правительства Республики Северная Осетия-Алания, организатором и бессменным председателем Владикавказского научного центра, создателем и бессменным главным редактором научных журналов «Вестник ВНЦ» и «Владикавказский математический журнал». А. Г. Кусраев удостоен званий «Заслуженный деятель науки РСО-А», «Заслуженный деятель науки РФ», награжден «Орденом Дружбы» и «Орденом Дружбы Республики Южная Осетия». Благодаря личным усилиям А. Г. Кусраева наука юга России получила новые возможности для своего плодотворного развития.

А. Г. Кусраеву принадлежат многочисленные фундаментальные результаты в ряде разделов функционального анализа. Им опубликовано более 270 научных и публицистических трудов, в том числе 24 монографии и 16 учебных пособий. В этой заметке мы остановимся на обсуждении вклада А. Г. Кусраева в выпуклый и булевозначный анализ.

Одним из центральных понятий современного субдифференциального исчисления стало введенное А. Г. Кусраевым отношение общего положения. Конусы A и B в топологическом векторном пространстве X находятся в *общем положении*, если разность $X_0 := A - B$ является дополняемым подпространством X, причем A и B образуют несплющенную пару в X_0, т. е. $U \cap A - U \cap B$ — окрестность нуля в X_0 для любой окрестности нуля U в X_0.

«Несимметричный» случай ($A \neq B$) был включен в рассмотрение по принципиальным соображениям. Ключевую роль здесь играет следующее технологическое наблюдение: конусы $A, B \subset X$ находятся в общем положении тогда и только тогда, когда в X^2 в общем положении находятся конусы $A \times B$ и $\{(x, x) : x \in X\}$. Теперь ясно, как понятие общего положения может быть распространено на любой конечный набор конусов: $A_1, \dots, A_n \subset X$ находятся в *общем положении*, если в X^n в общем положении находятся конусы $A_1 \times \dots \times A_n$ и $\{(x, \dots, x) : x \in X\}$. В результате сопутствующие понятия и факты выпуклого анализа (например, формулы субдифференцирования) распространяются с пар объектов на их произвольные конечные наборы.

Еще одним важным наблюдением служит тот факт, что выпуклые конусы находятся в общем положении тогда и только тогда, когда тем же свойством обладают их преобразования Хёрмандера $H(A) := \bigcup_{t \geqslant 0}(tA \times \{t\})$. Это обстоятельство позволяет расширить понятие общего положения на произвольные выпуклые множества $A, B \subset X$, объявив их находящимися в *общем положении*, если в общем положении находятся конусы $H(A), H(B) \subset X \times \mathbb{R}$.

Использование отношения общего положения приводит к многочисленным новым результатам уже в скалярном случае — хотя бы потому, что условие общего положения оказывается способным заменить традиционное для приложений выпуклого анализа более сильное условие Слейтера и даже вытекающее из него условие внутренней точки: *если пересечение выпуклых множеств A и B содержит точку, внутреннюю для A или B, то множества A и B находятся в общем положении.*

Пусть E — топологическое пространство Канторовича с нормальным положительным конусом E^+ (например, пространство L^p или любое другое идеальное банахово пространство), $P\colon X \to E \cup \{+\infty\}$ — сублинейный оператор, $\operatorname{dom} P := P^{-1}(E)$. В рассматриваемой ситуации возникает неизбежная задача об изучении *топологического субдифференциала*

$$\partial^{\mathrm{c}} P := \partial P \cap \mathscr{L}(X, E),$$

где $\partial P = \{T \in L(X, E) : (\forall\, x \in X)\ Tx \leqslant Px\}$ — алгебраический субдифференциал P, $L(X, E)$ $\big(\mathscr{L}(X, E)\big)$ — пространство всех линейных (непрерывных) операторов из X в E.

Если $\operatorname{dom} P = X$ *и оператор P непрерывен в нуле, то* $\partial^{\mathrm{c}} P = \partial P$. Таким образом, техника вычисления алгебраических субдифференциалов автоматически обслуживает топологический случай для всюду определенных непрерывных сублинейных операторов. Если же $\operatorname{dom} P \neq X$, то равенство $\partial^{\mathrm{c}} P = \partial P$ нельзя гарантировать даже при условии непрерывности P на $\operatorname{dom} P$. Вместе с тем для приложений необходимы формулы субдифференцирования в топологической постановке. Каждая из таких формул по существу представляет собой тонкую форму теоремы существования, в которой при разумных дополнительных топологических ограничениях гарантируется наличие одного или нескольких непрерывных операторов с предписанными алгебраическими свойствами. Развитый А. Г. Кусраевым метод общего положения дает регулярный способ получения таких теорем существования из алгебраической техники субдифференцирования.

В основе метода общего положения лежит формула

$$\pi_E(A \cap B) = \pi_E(A) + \pi_E(B),$$

где $\pi_E(C) = \{T \in \mathscr{L}(X, E) : (\forall\, x \in C)\ Tx \leqslant 0\}$, A и B — конусы в X, находящиеся в общем положении. Иными словами, *если $T \in \mathscr{L}(X, E)$ и $T \leqslant 0$ на $A \cap B$, то существуют такие операторы $T_A, T_B \in \mathscr{L}(X, E)$, что $T = T_A + T_B$, причем $T_A \leqslant 0$ на A, $T_B \leqslant 0$ на B.* Технически метод общего положения состоит в последовательном использовании формулы $\pi_E(A \cap B) = \pi_E(A) + \pi_E(B)$ и вспомогательного представления

$\pi_E\big(\Phi(C)\big) = \{T \in \mathscr{L}(X,E) : T \circ \Phi \in \pi_E(C)\}$, где C — конус в топологическом векторном пространстве Y и $\Phi \in \mathscr{L}(Y,X)$.

Пусть $P, Q\colon X \to E \cup \{+\infty\}$ — сублинейные операторы. Применение метода общего положения к конусам $\{(x,e,x,f) : x \in X,\ e,f \in E\}$ и $\operatorname{epi}(P) \times \operatorname{epi}(Q)$ в $(X \times E)^2$, где $\operatorname{epi}(P) := \{(x,e) \in X \times E : Px \leqslant e\}$ — надграфик P, дает важнейшую для приложений топологическую версию формулы Моро — Рокафеллара

$$\partial^{c}(P+Q) = \partial^{c}P + \partial^{c}Q,$$

согласно которой *для любого оператора* $T \in \mathscr{L}(X,E)$, *удовлетворяющего неравенству* $T \leqslant P + Q$ *на* X, *существуют такие операторы* $T_P, T_Q \in \mathscr{L}(X,E)$, *что* $T = T_P + T_Q$, $T_P \leqslant P$ *и* $T_Q \leqslant Q$ *на* X. Прямым следствием формулы Моро — Рокафеллара является теорема о сэндвиче: *если* $-P \leqslant Q$ *на* X, *то существует такой оператор* $T \in \mathscr{L}(X,E)$, *что* $-P \leqslant T \leqslant Q$ *на* X. Из теоремы о сэндвиче вытекает теорема Мазура — Орлича.

Аналогичные приемы, основанные на методе общего положения, приводят к разнообразным формулам субдифференциального исчисления, справедливым в наиболее широкой из когда-либо рассматриваемых постановок. В число важнейших результатов, установленных А. Г. Кусраевым, входят формулы субдифференцирования конволюций и композиций, а также весьма плодотворное правило линеаризации. Введенное и исследованное А. Г. Кусраевым понятие сублинейного оператора Магарам послужило ключом к решению задачи дезинтегрирования, унифицирующего разнообразные факты теории пространств Канторовича, в основе которых лежит теорема Радона — Никодима.

Эти и другие результаты, полученные А. Г. Кусраевым, оказываются не только более общими, но и более сильными, чем их многочисленные частные случаи и модификации, разбросанные в литературе по выпуклому анализу. Начав свою профессиональную деятельность с изучения векторно-значных субдифференциалов Кларка (в кандидатской диссертации), А. Г. Кусраев установил ряд фундаментальных результатов в области векторной двойственности и приложений функционального анализа к задачам оптимизации и математического моделирования. В его работах субдифференциальное исчисление получило нетривиальное распространение на негладкие операторы, был развит общий метод анализа нелинейных операторов, получены формулы для двойственного описания выпуклых операторов при замене переменной и для вычисления локальных выпуклых аппроксимаций для невыпуклых негладких операторов, в качестве приложения выведены необходимые условия экстремума для нового класса оптимизационных задач, существенно расширены достижения техники, основанной на признаках оптимальности в экстремальных задачах.

Значительный цикл работ А. Г. Кусраева связан с приложениями идей алгебры и логики к задачам функционального анализа. Развитый им метод исследования алгебраических систем основан на их реализации внутри булевозначных моделей теории множеств.

Булевозначный универсум $\mathbb{V}^{(B)}$, построенный в 1960-х годах в работах Д. Скотта и Р. Соловея, представляет собой класс, зависящий от параметра B, который в рамках теории ZFC для любой полной булевой алгебры B является моделью ZFC относительно особым образом определяемых B-значных оценок истинности $[\![\varphi]\!]$ формул φ теоретико-множественной сигнатуры $\{=,\in\}$. Эти оценки сначала вводятся для атомарных формул ($x = y$ и $x \in y$), а затем рекурсивно распространяются на произвольные формулы в соответствии с правилами

$$[\![\varphi \vee \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \vee_B [\![\psi]\!], \quad [\![\varphi \wedge \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \wedge_B [\![\psi]\!], \quad [\![\neg\varphi]\!] = \neg_B [\![\varphi]\!],$$
$$[\![(\exists\, x)\,\varphi]\!] = \sup\nolimits_B\big\{[\![\varphi]\!] : x \in \mathbb{V}^{(B)}\big\}, \quad [\![(\forall\, x)\,\varphi]\!] = \inf\nolimits_B\big\{[\![\varphi]\!] : x \in \mathbb{V}^{(B)}\big\}.$$

Пусть $\varphi(\bar{x})$ — формула теоретико-множественной сигнатуры, $\bar{x} = x_1, \dots, x_n$. В контексте $\bar{x} \in \mathbb{V}^{(B)}$ говорят, что $\varphi(\bar{x})$ *истинно в* $\mathbb{V}^{(B)}$ или *внутри* $\mathbb{V}^{(B)}$ *выполняется* $\varphi(\bar{x})$, и пишут $\mathbb{V}^{(B)} \models \varphi(\bar{x})$, если $[\![\varphi(\bar{x})]\!] = 1_B$. Класс $\mathbb{V}^{(B)}$ служит (булевозначной) моделью ZFC в том смысле, что для любой теоремы $\varphi(\bar{x})$ теории ZFC утверждение $\mathbb{V}^{(B)} \models (\forall\, \bar{x})\, \varphi(\bar{x})$ также является теоремой ZFC. Этот факт называют *принципом переноса*.

Благодаря принципу переноса записи $[\![\varphi(\bar{x})]\!]$ и $\mathbb{V}^{(B)} \models \varphi(\bar{x})$ обретают смысл не только для формул φ сигнатуры теории множеств $\{=, \in\}$, но и для формул, содержащих вхождения любых определяемых в ZFC предикатных и функциональных символов. Кроме того, в синтаксисе $[\![\cdots]\!]$ и $\mathbb{V}^{(B)} \models (\cdots)$ допускается неформальное употребление «внешних» термов. Так, в контексте $f\colon X \to \mathbb{V}^{(B)}$, $x_1, x_2 \in X$, $b \in B$ запись $[\![f(x_1) = f(x_2)]\!] = b$ служит удобным сокращением формулы $(\exists\, y_1, y_2)\big(y_1 = f(x_1) \wedge y_2 = f(x_2) \wedge [\![y_1 = y_2]\!] = b\big)$.

Элемент $u \in \mathbb{V}^{(B)}$ называют *подъемом предиката* $p\colon X \to B$, где X — подмножество $\mathbb{V}^{(B)}$, если для всех $y \in \mathbb{V}^{(B)}$

$$[\![y \in u]\!] = \sup\nolimits_B \{p(x) \wedge_B [\![y = x]\!] : x \in X\}.$$

Подъем предиката $p\colon X \to \{1_B\}$ называется *подъемом множества* X и обозначается символом $X{\uparrow}$. В булевозначном универсуме $\mathbb{V}^{(B)}$ существуют подъемы любых предикатов и любой элемент $\mathbb{V}^{(B)}$ является подъемом какого-либо предиката. Этот факт называют *принципом подъема*. Кроме того, $\mathbb{V}^{(B)}$ удовлетворяет *принципу максимума*: для любой формулы $\varphi(x, \bar{y})$ в ZFC доказуема формула

$$\big(\forall\, \bar{y} \in \mathbb{V}^{(B)}\big)\big(\exists\, x_0 \in \mathbb{V}^{(B)}\big)\ [\![\varphi(x_0, \bar{y})]\!] = [\![(\exists\, x)\, \varphi(x, \bar{y})]\!].$$

В силу принципов переноса и максимума для любого определяемого в ZFC терма $\tau(\bar{x})$ в ZFC доказуемо $(\forall\, \bar{x} \in \mathbb{V}^{(B)})(\exists!\, y \in \mathbb{V}^{(B)})\ \mathbb{V}^{(B)} \models \big(y = \tau(\bar{x})\big)$. Такой элемент $y \in \mathbb{V}^{(B)}$, служащий значением терма $\tau(\bar{x})$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, условимся обозначать символом $[\![\tau(\bar{x})]\!]$.

Для любого элемента $X \in \mathbb{V}^{(B)}$ класс $\{x \in \mathbb{V}^{(B)} : \mathbb{V}^{(B)} \models (x \in X)\}$ является множеством, которое называют *спуском* X и обозначают символом $X{\downarrow}$. Если $X, Y, f, p \in \mathbb{V}^{(B)}$ таковы, что $\mathbb{V}^{(B)} \models (f\colon X^n \to Y,\ p \subset X^n)$, то *спуски* $f{\downarrow}\colon X{\downarrow}^n \to Y{\downarrow}$, $p{\downarrow} \subset X{\downarrow}^n$ определяются формулами

$$f{\downarrow}(x_1, \dots, x_n) = [\![f(x_1, \dots, x_n)]\!], \quad (x_1, \dots, x_n) \in p{\downarrow} \Leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models \big((x_1, \dots, x_n) \in p\big).$$

Пусть Σ — конечная сигнатура, снабженная интерпретацией $[\cdot]_X$. Предположим, что $X \in \mathbb{V}^{(B)}$, $[s]_X \in \mathbb{V}^{(B)}$ для всех символов $s \in \Sigma$ и внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ истинно утверждение «$(X, [\cdot]_X)$ — алгебраическая система сигнатуры Σ». Рассмотрим интерпретацию $[\cdot]_{X{\downarrow}}$, полагая $[s]_{X{\downarrow}} := [s]_X{\downarrow}$ для всех символов $s \in \Sigma$. Алгебраическая система $(X{\downarrow}, [\cdot]_{X{\downarrow}})$ называется *спуском системы* X (точнее, очисткой спуска) и по традиции обозначается тем же символом $X{\downarrow}$. При этом

$$X{\downarrow} \models \varphi(x_1, \dots, x_n) \ \Leftrightarrow\ \mathbb{V}^{(B)} \models \big(X \models \varphi(x_1, \dots, x_n)\big)$$

для всех $x_1, \dots, x_n \in X{\downarrow}$, где $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ — произвольная формула сигнатуры Σ.

Каноническое вложение $X \mapsto X^\wedge$ класса всех множеств $\mathbb{V}$ в универсум $\mathbb{V}^{(B)}$ определяется следующей рекурсией по принадлежности: $X^\wedge := \{x^\wedge : x \in X\}{\uparrow}$. Пусть $(X, [\cdot]_X)$ — алгебраическая система конечной сигнатуры Σ. Определим интерпретацию $[\cdot]_{X^\wedge}$ сигнатуры Σ, полагая

$$[f]_{X^\wedge} := \big\{ [\![\big(x_1^\wedge, \dots, x_n^\wedge, [f]_X(x_1, \dots, x_n)^\wedge\big)]\!] : x_1, \dots, x_n \in X \big\}{\uparrow},$$
$$[p]_{X^\wedge} := \big\{ [\![(x_1^\wedge, \dots, x_n^\wedge)]\!] : (x_1, \dots, x_n) \in [p]_X \big\}{\uparrow}$$

для n-местных функциональных и предикатных символов $f, p \in \Sigma$. Тогда $(X^\wedge, [\cdot]_{X^\wedge})$ является внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ алгебраической системой сигнатуры Σ, которую называют *каноническим образом* или *стандартным именем* системы X и обозначают $X^\wedge$. При этом

$$X \vDash \varphi(x_1, \dots, x_n) \ \Leftrightarrow\ \mathbb{V}^{(B)} \vDash \big(X^\wedge \vDash \varphi(x_1^\wedge, \dots, x_n^\wedge)\big)$$

для всех $x_1, \dots, x_n \in X$, где $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ — произвольная формула сигнатуры Σ.

В основе развитого А. Г. Кусраевым метода булевозначных реализаций лежит конструкция погружения алгебраической системы в булевозначный универсум. Эта конструкция применима к системам $(X, [\cdot]_X)$ конечной сигнатуры Σ, для которых существует «естественный» способ определения булевозначной оценки истинности $[p(x_1, \dots, x_n)]_X$ формул вида $p(x_1, \dots, x_n)$, где p — предикатный символ сигнатуры Σ. Например, если X — пространство Канторовича и B — булева алгебра порядковых проекторов в X, то X можно превратить в B-значную алгебраическую систему сигнатуры $\{=, \leqslant, +\}$, полагая

$$[x = y]_X := \sup\{b \in B :\ bx = by\}, \quad [x \leqslant y]_X := \sup\{b \in B :\ bx \leqslant by\}.$$

Модификация подъема B-значных предикатов позволяет определить такую интерпретацию $[\cdot]_{X^\wedge}$, что $(X^\wedge, [\cdot]_{X^\wedge})$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ является алгебраической системой сигнатуры Σ, на которой отношение $\sim\ := [=]_{X^\wedge}$ оказывается конгруэнцией. Осуществляемая внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ факторизация $X^\wedge/{\sim}$ называется *погружением* X в булевозначный универсум (или *булевозначной реализацией* системы X) и обозначается $(X^\sim, [\cdot]_{X^\sim})$ или $X^\sim$. При этом отображение $x \in X \mapsto x^\sim \in X^\sim\!\downarrow$, где $x^\sim := [\![\sim\!(x^\wedge)]\!]$, изоморфно вкладывает систему X в $X^\sim\!\downarrow$ и

$$X \vDash \varphi(x_1, \dots, x_n) \ \Leftrightarrow\ X^\sim\!\downarrow \vDash \varphi(x_1^\sim, \dots, x_n^\sim) \ \Leftrightarrow\ \mathbb{V}^{(B)} \vDash \big(X^\sim \vDash \varphi(x_1^\sim, \dots, x_n^\sim)\big)$$

для всех $x_1, \dots, x_n \in X$, где $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ — произвольная формула сигнатуры Σ.

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ — классические системы натуральных, целых, рациональных и вещественных чисел сигнатуры $\{=, \leqslant, +, \cdot\}$, причем $\mathbb{R}$ определяется как множество дедекиндовых сечений $\mathbb{Q}$. Тогда внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ системы $\mathbb{N}^\wedge$, $\mathbb{Z}^\wedge$, $\mathbb{Q}^\wedge$ совпадают с $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, а $\mathbb{R}^\wedge$ является подполем $\mathbb{R}$. В частности, $\mathbb{V}^{(B)} \vDash (\alpha^\wedge \in \mathbb{R})$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$.

Следующий факт, установленный в начале 1970-х годов Е. И. Гордоном, является исторически первым результатом о булевозначной реализации.

(1) *Спуск $X := [\![\mathbb{R}]\!]\!\downarrow$ представляет собой расширенное пространство Канторовича с $\mathbb{R}$-модульным умножением $\alpha x := [\![\alpha^\wedge x]\!]$, которое является коммутативной упорядоченной алгеброй относительно умножения $xy := [\![xy]\!]$. При этом $[\![1]\!]$ служит порядковой и мультипликативной единицей, $xy = 0 \Leftrightarrow x \perp y$ и имеется такой изоморфизм $b \mapsto \langle b \rangle$ из B на булеву алгебру порядковых проекторов X, что $[\![x = y]\!] = \sup\{b \in B : \langle b\rangle x = \langle b\rangle y\}$, $[\![x \leqslant y]\!] = \sup\{b \in B : \langle b\rangle x \leqslant \langle b\rangle y\}$ для $x, y \in X$.*

(2) *Всякое ненулевое расширенное пространство Канторовича X линейно и порядково изоморфно спуску $[\![\mathbb{R}]\!]\!\downarrow$ из $\mathbb{V}^{(B)}$, где B — булева алгебра порядковых проекторов X.*

Теорема Гордона придает четкую формулировку выдвинутому Л. В. Канторовичем *эвристическому принципу переноса*, согласно которому элементы порядково полной векторной решетки суть обобщенные числа. (Более того, элементы такой решетки фактически являются числами — в подходящей булевозначной модели.)

Булевозначная реализация расширенных пространств Канторовича позволяет установить тесную связь между утверждениями и конструкциями, связанными с такими пространствами, и аналогичными утверждениями о вещественных числах и числовыми конструкциями. Например, если $X = [\![\mathbb{R}]\!]{\downarrow}$ и $A \subset X$, то ограниченность A сверху (снизу) в X равносильна утверждению $\mathbb{V}^{(B)} \models \big(A{\uparrow}$ ограничено сверху (снизу) в $\mathbb{R}\big)$, $\sup_X A = [\![\sup_{\mathbb{R}} A{\uparrow}]\!]$ и $\inf_X A = [\![\inf_{\mathbb{R}} A{\uparrow}]\!]$. Если для последовательности $\varkappa\colon \mathbb{N} \to X$ положить $\varkappa{\updownarrow} := \big\{\big[\!\big[\big(n^{\wedge}, \varkappa(n)\big)\big]\!\big] : n \in \mathbb{N}\big\}{\uparrow}$, то $\mathbb{V}^{(B)} \models (\varkappa{\updownarrow}$ — последовательность в $\mathbb{R})$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \varkappa(n) = x$ порядково в X тогда и только тогда, когда $\mathbb{V}^{(B)} \models \Big(\lim\limits_{n\to\infty} \varkappa{\updownarrow}(n) = x$ в $\mathbb{R}\Big)$.

Поскольку всякая архимедова векторная решетка порядково плотно вкладывается в подходящее расширенное пространство Канторовича, булевозначная реализация предоставляет принципиальную возможность интерпретировать векторные решетки как решетки чисел. Развив соответствующий инструментарий, А. Г. Кусраев показал, что векторные решетки допускают представление в виде подпространств $\mathcal{R}$ над $\mathbb{R}^{\wedge}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$.

Следующим естественным объектом булевозначной реализации служит решеточно нормированное пространство — вещественное векторное пространство, снабженное нормой, принимающей значения в какой-либо векторной решетке.

Итак, пусть X — векторное пространство над $\mathbb{R}$, E — векторная решетка. Отображение $|\!\cdot\!|\colon X \to E$ именуют *векторной* (E*-значной*) *нормой*, если

$$|x| \geqslant 0, \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad |\alpha x| = |\alpha|\,|x|, \quad |x+y| \leqslant |x| + |y|$$

для всех $x, y \in X$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Векторную норму $|\!\cdot\!|$ называют *d-разложимой*, если для любых $x \in X$ и $e_1, e_2 \in E^+$ из $|x| = e_1 + e_2$ и $e_1 \perp e_2$ следует существование таких $x_1, x_2 \in X$, что $x = x_1 + x_2$, $|x_1| = e_1$ и $|x_2| = e_2$. Пару $(X, |\!\cdot\!|)$ назовем *решеточно нормированным* (E*-нормированным*) *пространством*, если $|\!\cdot\!|\colon X \to E$ — d-разложимая векторная норма на X, причем $\{|x| : x \in X\}^{\perp} = \{0\}$. (Последнее требование не является обременительным, поскольку достигается заменой E компонентой $\{|x| : x \in X\}^{\perp\perp}$.) Вместо $(X, |\!\cdot\!|)$ обычно пишут X, а символ векторной нормы снабжают уточняющим индексом: $|\!\cdot\!|_X$.

Линейной изометрией между E-нормированным пространством X и F-нормированным пространством Y называется такая пара (i, j), что $i\colon X \to Y$ — линейная биекция, $j\colon E \to F$ — линейный и порядковый изоморфизм и $|i(x)|_Y = j(|x|_X)$ для всех $x \in X$.

Говорят, что сеть $(x_\alpha) \subset X$ *сходится* к $x \in X$ и пишут $x_\alpha \to x$ или $\lim x_\alpha = x$, если $|x_\alpha - x| \to 0$ в E. Решеточно нормированное пространство X называют *полным*, если для любой сети $(x_\alpha) \subset X$ из порядковой сходимости $|x_\alpha - x_\beta| \to 0$ в E следует $x_\alpha \to x$ для некоторого элемента $x \in X$. (В последнем случае E оказывается пространством Канторовича.) Полное решеточно нормированное пространство также именуют *пространством Банаха — Канторовича*. Для простоты мы ограничимся случаем, когда E является расширенным пространством Канторовича.

А. Г. Кусраеву принадлежит следующий факт о булевозначной реализации пространств Банаха — Канторовича.

(1) *Пусть $\mathbb{V}^{(B)} \models (\mathscr{X}$ — ненулевое банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_{\mathscr{X}})$, $X := \mathscr{X}{\downarrow}$, $E := [\![\mathbb{R}]\!]{\downarrow}$, $|\!\cdot\!|_X := \|\cdot\|_{\mathscr{X}}{\downarrow}$. Тогда $(X, |\!\cdot\!|_X)$ — полное E-нормированное пространство с $\mathbb{R}$-модульным умножением $\alpha x := [\![\alpha^{\wedge} x]\!]$. Кроме того, X является модулем над E относительно умножения $ex := [\![ex]\!]$, причем $(\alpha[\![1]\!])x = \alpha x$ и $|ex|_X = |e|\,|x|_X$ для любых $e \in E$, $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Пространство $(X, |\!\cdot\!|_X)$ называется спуском банахова пространства $\mathscr{X}$.*

(2) *Всякое ненулевое полное E-нормированное пространство X линейно изометрично спуску некоторого банахова пространства $\mathscr{X} \in \mathbb{V}^{(B)}$, где B — булева алгебра порядковых проекторов E. Такое банахово пространство $\mathscr{X}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ единственно с точностью до линейной изометрии. Его называют булевозначной реализацией X.*

Доказательство утверждения (2) основано на описанной выше технике погружения. А именно, в рамках не нарушающего общность предположения $E = [\![\mathbb{R}]\!]{\downarrow}$ искомое банахово пространство внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ возникает в виде $\mathscr{X} := X^{\sim}$, где $X^{\sim}$ — булевозначная реализация системы $(X, [\cdot]_X)$ сигнатуры $\{=, +\}$ с интерпретацией $[x = y]_X := [\![\,|x - y|_X = 0]\!]$, а подъемы

$$\bigl\{[\![\bigl(\alpha^{\wedge}, x^{\sim}, (\alpha x)^{\sim}\bigr)]\!] : \alpha \in \mathbb{R},\ x \in X\bigr\}{\uparrow}, \quad \{[\![(x^{\sim}, |x|)]\!] : x \in X\}{\uparrow}$$

служат умножением $\cdot_{\mathscr{X}} \colon \mathbb{R}^{\wedge} \times \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ (по непрерывности продолжаемым на $\mathbb{R} \times \mathscr{X}$) и нормой $\|\cdot\|_{\mathscr{X}} \colon \mathscr{X} \to \mathbb{R}$.

Поскольку каждое решеточно нормированное пространство плотно вкладывается в подходящее полное E-нормированное пространство, где E — расширенное пространство Канторовича, решеточно нормированные пространства допускают представление в виде нормированных пространств над $\mathbb{R}^{\wedge}$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$.

Разработанный А. Г. Кусраевым метод булевозначных реализаций оказывается чрезвычайно плодотворным, позволяя сводить исследование сложных алгебраических системы к рассмотрению их простых аналогов в булевозначном универсуме. Так, решеточно упорядоченные полные решеточно нормированные пространства с монотонной нормой (называемые решетками Банаха — Канторовича) допускают булевозначное представление в виде банаховых решеток, реализацией модулей Капланского — Гильберта служат гильбертовы пространства, а произвольные AW^*-алгебры в результате булевозначного погружения «теряют» нетривиальный центр, становясь AW^*-факторами.

С помощью метода погружения удается реализовать пространство линейных ограниченных операторов, действующих в пространствах Банаха — Канторовича, в виде спуска пространства ограниченных линейных операторов в банаховых пространствах. Важно отметить, что пространство операторов $T \colon X \to E$ с абстрактной нормой в результате булевозначной реализации становится пространством линейных ограниченных функционалов, а операторы Магарам (положительные порядково непрерывные операторы, действующие в пространствах Канторовича и сохраняющие порядковые интервалы) превращаются в положительные непрерывные функционалы. Эти фундаментальные факты, установленные А. Г. Кусраевым, придают строгую форму методологическому тезису Л. В. Канторовича, который, инициируя изучение порядково полных векторных решеток в своей основополагающей работе 1935 г., писал: «Введение этих пространств позволяет изучать линейные операции одного общего класса (операции, значения которых принадлежат такому пространству) как линейные функционалы».

Применение методов булевозначного анализа приводит, в том числе, к разнообразным функциональным представлениям широкого класса алгебраических систем и действующих в них операторов. На этом пути удается обнаружить принципиально новые реализационные теоремы. А. Г. Кусраевым введены и детально исследованы циклические банаховы пространства, создан метод циклической компактности. Построенный аппарат применен не только к функциональным пространствам, пространствам Банаха — Канторовича и банаховым алгебрам, но и к положительным, регулярным и сублинейным векторно-значным операторам и векторным мерам. С помощью описанного подхода был решен ряд таких трудных и актуальных задач теории операторов и выпуклого анализа, как внутреннее описание субдифференциалов (совместно с С. С. Кутателадзе), построение абстрактного дезинтегрирования в пространствах Канторовича, а также доказательство операторных вариантов теоремы Радона — Никодима.

А. Г. Кусраеву принадлежат многочисленные фундаментальные результаты в области порядкового анализа. Им построена теория мажорируемых операторов в решеточно нормированных пространствах, дана изометрическая характеризация пространств со смешанной нормой и пространств Лебега — Бохнера, найдены критерии интегральной, псевдоинтегральной и мультипликативной представимости мажорируемых операторов, получена функциональная реализация решеточно нормированных пространств посредством банаховых расслоений, установлены новые результаты о продолжении и разложении мажорируемых операторов и векторных мер, найдено новое решение проблемы Викстеда об описании векторных решеток, гарантирующих ограниченность любого действующего в них нерасширяющего оператора.

Недавние работы А. Г. Кусраева посвящены изучению *инъективных банаховых решеток* — полных нормированных решеток X, допускающих положительное продолжение $T\colon Y \to X$ с сохранением нормы для любого положительного линейного оператора $T_0\colon Y_0 \to X$, определенного на замкнутой подрешетке $Y_0 \subset Y$ какой-либо банаховой решетки Y. Итогом предпринятого А. Г. Кусраевым исследования стало полное описание класса таких решеток X. Ключом к решению этой задачи вновь послужил метод булевозначной реализации. Оказалось, что спуск любого AL-пространства является инъективной банаховой решеткой и — наоборот — каждая инъективная банахова решетка представляет собой спуск AL-пространства из $\mathbb{V}^{(B)}$, где B — булева алгебра M-проекторов в X. В результате тонкого анализа булевозначных кардиналов А. Г. Кусраевым была найдена полная система инвариантов, определяющих инъективную банахову решетку с точностью до порядковой изометрии, а также получено представление инъективных банаховых решеток в виде прямой суммы банаховых решеток непрерывных вектор-функций со значениями в пространствах Лебега суммируемых функций.

Постоянные научные связи соединяют А. Г. Кусраева с Институтом математики им. С. Л. Соболева СО РАН и Новосибирским государственным университетом, где он прошел путь от студента до ведущего сотрудника и профессора. Коллеги и друзья Анатолия Георгиевича сердечно поздравляют его с юбилеем, желают ему успехов на всех направлениях его многогранной деятельности и надеются на новые добрые встречи и совместные дела.

С. К. Водопьянов, Е. И. Гордон, А. Е. Гутман, А. В. Коптев,
С. С. Кутателадзе, С. А. Малюгин, Ю. Г. Решетняк