ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЙ ЛИФТИНГ В ИЗМЕРИМОМ РАССЛОЕНИИ БАНАХОВЫХ РЕШЕТОК

POSITIVE LIFTING IN A MEASURABLE BUNDLE OF BANACH LATTICES

Гутман А. Е.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
gutman@math.nsc.ru

Определение лифтинга $(\cdot)_\sim\colon L^\infty(\Omega,\mathcal{X})\to\mathcal{L}^\infty(\Omega,\mathcal{X})$ классов измеримых сечений измеримого расслоения $\mathcal{X}$ банаховых решеток на пространстве с мерой Ω сопровождается требованием решеточности лифтинга: $(\mathbf{u}\vee\mathbf{v})_\sim=\mathbf{u}_\sim\vee\mathbf{v}_\sim$ на Ω для всех $\mathbf{u},\mathbf{v}\in L^\infty(\Omega,\mathcal{X})$ (см. [1, определение 2.2]). Мы покажем, что это требование является избыточным и может быть заменено условием положительности: $\mathbf{u}_\sim\geqslant 0$ на Ω для положительных $\mathbf{u}\in L^\infty(\Omega,\mathcal{X})$.

Лемма. *Пусть X — векторная решетка, Y — нормированная решетка, и пусть $T\colon X\to Y$ — такой сюръективный положительный линейный оператор, что для любых $x_1,x_2\in X$ из $|x_1|\leqslant|x_2|$ следует $\|Tx_1\|\leqslant\|Tx_2\|$. Тогда T является решеточным гомоморфизмом.*

Доказательство. Поскольку $\ker T$ – порядковый идеал X, согласно [2, 18.9] фактор-пространство $\widetilde{X}:=X/\ker T$ представляет собой векторную решетку относительно естественного порядка, а каноническое отображение $\varphi\colon X\to\widetilde{X}$ является решеточным гомоморфизмом. Кроме того, $\|\cdot\|_Y\circ T$ — решеточная полунорма на X, а значит, в силу [2, 62.3] пространство $\widetilde{X}$ является нормированной решеткой относительно фактор-нормы $\|\cdot\|_{\widetilde{X}}$, причем $\|\cdot\|_{\widetilde{X}}=\|\cdot\|_Y\circ\widetilde{T}$, где $\widetilde{T}:=T\circ\varphi^{-1}\colon\widetilde{X}\to Y$ — линейная биекция. Таким образом, оператор $\widetilde{T}$ служит положительной изометрией между нормированными решетками $\widetilde{X}$ и Y и поэтому является решеточным гомоморфизмом (см. [3, теорема 1]). Следовательно, оператор $T=\widetilde{T}\circ\varphi$ также является решеточным гомоморфизмом.

Теорема. *Пусть $\mathcal{X}$ — измеримое расслоение банаховых решеток над пространством с мерой Ω и $(\cdot)_\sim\colon L^\infty(\Omega,\mathcal{X})\to\mathcal{L}^\infty(\Omega,\mathcal{X})$ — такой лифтинг в измеримом банаховом расслоении $\mathcal{X}$, что $\mathbf{u}_\sim\geqslant 0$ на Ω для положительных $\mathbf{u}\in L^\infty(\Omega,\mathcal{X})$. Тогда $(\mathbf{u}\vee\mathbf{v})_\sim=\mathbf{u}_\sim\vee\mathbf{v}_\sim$ и $(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})_\sim=\mathbf{u}_\sim\wedge\mathbf{v}_\sim$ на Ω для всех $\mathbf{u},\mathbf{v}\in L^\infty(\Omega,\mathcal{X})$.*

Доказательство. Достаточно фиксировать произвольную точку $\omega\in\Omega$ и применить доказанную выше лемму к векторной решетке $X:=L^\infty(\Omega,\mathcal{X})$, нормированной решетке $Y:=\mathcal{X}(\omega)$ и оператору $T\colon\mathbf{u}\in X\mapsto\mathbf{u}_\sim(\omega)\in Y$, сюръективность которого следует из [4, 4.4.1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ганиев И. Г.* Измеримые расслоения решеток и их приложения // Исследования по функциональному анализу и его приложениям. М.: Наука, 2005. С. 9–49.
2. *Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C.* Riesz spaces. Vol. I. Amsterdam; London: North-Holland Publishing Co., 1971.
3. *Абрамович Ю. А.* Об изометриях нормированных решеток // Оптимизация. 1988. Вып. 43 (60). С. 74–80.
4. *Гутман А. Е.* Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Линейные операторы, согласованные с порядком. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1995. С. 63–211.