СЕКВЕНЦИАЛЬНО СХОДЯЩИЕСЯ ОТОБРАЖЕНИЯ И ТЕОРЕМЫ О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ

АЛЕКСАНДР ЕФИМОВИЧ ГУТМАН

В 2009–2013 гг. появился ряд работ [1–28], посвященных обобщению известных ранее теорем о неподвижной точке на случай отображений $S\colon X \to X$, действующих в метрических и более общих пространствах X (с частичными метриками, обобщенными метриками, коническими метриками, tvs-метриками) и удовлетворяющих условиям сжатия, в которых вместо расстояния $d(x,y)$ рассматривается выражение вида $d(Tx,Ty)$, где $T\colon X \to X$ — так называемое «секвенциально сходящееся» отображение (см. [1]). Как показано ниже, основные результаты работ [1–28] являются прямыми следствиями одной общей теоремы, осуществляющей трансляцию известных фактов посредством отображения T.

Пусть X и Y — секвенциальные топологические пространства. Пространство X называется *однозначным*, если $(\forall\,\alpha \in \mathcal{S}_X)(\forall\,x,y \in X)(\alpha \to x \;\&\; \alpha \to y \;\Rightarrow\; x = y)$, где $\mathcal{S}_X$ — множество всех последовательностей в X. Положим $\mathcal{C}_X = \{\alpha \in \mathcal{S}_X : (\exists\,x \in X)(\alpha \to x)\}$. Отображение $T\colon X \to Y$ *секвенциально сходится*, если $(\forall\,\alpha \in \mathcal{S}_X)(T \circ \alpha \in \mathcal{C}_Y \;\Rightarrow\; \alpha \in \mathcal{C}_X)$, и *субсеквенциально сходится*, если $(\forall\,\alpha \in \mathcal{S}_X)\big(T \circ \alpha \in \mathcal{C}_Y \;\Rightarrow\; (\exists\,\beta \preccurlyeq \alpha)(\beta \in \mathcal{C}_X)\big)$, где запись $\beta \preccurlyeq \alpha$ означает, что β является подпоследовательностью α.

Теорема 1. *Пусть X — регулярное однозначное секвенциальное пространство, Y — пространство Фреше. Отображение $T\colon X \to Y$ секвенциально сходится тогда и только тогда, когда T инъективно и обратное отображение $T^{-1}\colon\ \operatorname{im} T \to X$ допускает продолжение до непрерывного отображения $\overline{T^{-1}}\colon\ \operatorname{cl}\operatorname{im} T \to X$.*

Теорема 2. *Пусть X — T_1-отделимое пространство, а Y — однозначное секвенциальное пространство. Следующие свойства отображения $T\colon X \to Y$ попарно равносильны:*
(1) T непрерывно и секвенциально сходится;
(2) T непрерывно, инъективно и субсеквенциально сходится;
(3) T является гомеоморфизмом X на замкнутое подпространство $\operatorname{im} T \subset Y$.

Сформулированные факты позволяют получить простые доказательства для большинства из приведенных в [1–28] теорем о неподвижных точках T-сжимающих отображений и им подобных. В качестве примера рассмотрим следующий результат, установленный в [1].

Теорема [1, 2.6]. *Пусть (X,d) — полное метрическое пространство, $S,T\colon X \to X$ — непрерывные отображения, причем T инъективно и субсеквенциально сходится, а S является T-сжимающим, т. е. $(\exists\,C\colon 0 < C < 1)\,(\forall\,x,y \in X)\ d(TSx,TSy) \leqslant C\,d(Tx,Ty)$. Тогда S имеет единственную неподвижную точку. Если, кроме того, T секвенциально сходится, то для любой точки $x_0 \in X$ последовательность итераций $S^n x_0$ сходится к неподвижной точке отображения S.*

Доказательство. Согласно теореме 2 отображение T является гомеоморфизмом X на замкнутое (и поэтому полное) подпространство $\operatorname{im} T \subset X$. Следовательно, функция $d_T\colon X^2 \to \mathbb{R}$, определенная формулой $d_T(x,y) = d(Tx,Ty)$, представляет собой метрику на X, относительно которой отображение S является сжимающим, причем пространство (X,d_T) полно и сходимость по d_T совпадает со сходимостью по d. Для завершения доказательства остается сослаться на принцип Банаха о сжимающем отображении.

Заметим также, что в формулировке теоремы [1, 2.6] оказываются излишними требование непрерывности S и дополнительное предположение о секвенциальной сходимости T.

Список литературы

[1] A. Beiranvand, S. Moradi, M. Omid, H. Pazandeh, "Two fixed-point theorems for special mappings", arXiv:0903.1504v1 [math.FA], 6 p. (2009).

[2] J.R. Morales, E. Rojas, "Cone metric spaces and fixed point theorems of T-contrative mappings", *Revista Notas de Matemática*, 4(2), No. 269, 66–78 (2008).

[3] J.R. Morales, E. Rojas, "Some results on T-Zamfirescu operators", *Revista Notas de Matemática*, 5(1), No. 274, 64–71 (2009).

[4] S. Moradi, A. Beiranvand, "A fixed-point theorem for mapping satisfying a general contractive condition of integral type depended an another function", arXiv:0903.1569v1 [math.FA], 9 p. (2009).

[5] S. Moradi, "Fixed-point theorem for mappings satisfying a general contractive condition of integral type depended an another function", arXiv:0903.1574v1 [math.FA], 6 p. (2009).

[6] S. Moradi, "Kannan fixed-point theorem on complete metric spaces and on generalized metric spaces depended an another function", arXiv:0903.1577v1 [math.FA], 6 p. (2009).

[7] J.R. Morales, E. Rojas, "Fixed point theorems for a class of mappings depending of another function and defined on cone metric spaces", arXiv:0906.2160v1 [math.FA], 11 p. (2009).

[8] J.R. Morales, E. Rojas, "T-Zamfirescu and T-weak contraction mappings on cone metric spaces", arXiv:0909.1255v1 [math.FA], 9 p. (2009).

[9] J.R. Morales, E. Rojas, "On the existence of fixed points of contraction mappings depending of two functions on cone metric spaces", arXiv:0910.4921v1 [math.FA], 9 p. (2009).

[10] J.R. Morales, E. Rojas, "Cone metric spaces and fixed point theorems of T-Kannan contractive mappings", *Int. Journal of Math. Analysis*, 4, No. 4, 175–184 (2010).

[11] R. Sumitra, V. Rhymend Uthariaraj, R. Hemavathy, "Common fixed point theorem for T-Hardy-Rogers contraction mapping in a cone metric space", *Int. Math. Forum*, 5, No. 30, 1495–1506 (2010).

[12] S. Moradi, M. Omid, "A fixed-point theorem for integral type inequality depending on another function", *Int. Journal of Math. Analysis*, 4, No. 30, 1491–1499 (2010).

[13] S. Bhatt, A. Singh, R.C. Dimri, "Fixed point theorems for certain contractive mappings in cone metric spaces", *Int. Journal of Math. Archive*, 2(4), 444–451 (2011).

[14] K.P.R. Sastry, Ch. Srinivasarao, K. Sujatha, G. Praveena, Ch. Srinivasarao, "Cone metric spaces and fixed point theorems of generalized contractive mappings", *Int. J. Comp. Sci. Math.*, 3, No. 2, 133–139 (2011).

[15] S. Moradi, D. Alimohammadi, "New extensions of Kannan fixed-point theorem on complete metric and generalized metric spaces", *Int. J. Math. Anal.*, 5, No. 47, 2313–2320 (2011).

[16] M. Sharma, R. Shrivastava, Z.K. Ansari, "On T-Ćirić type generalized contraction on cone metric space", *J. Cont. Appl. Math.*, 1, No. 1, 103–110 (2011).

[17] R. Shrivastava, Z.K. Ansari, M. Sharma, "On generalization of some common fixed point theroems for T-contraction in cone metric space", *Int. J. Phys. and Math. Sci.*, 2, No. 1, 83–87 (2011).

[18] M. Öztürk, M. Başarır, "On some common fixed point theorems for f-contraction mappings in cone metric spaces", *Int. J. Math. Anal.*, 5, No. 3, 119–127 (2011).

[19] S.K. Malhotra, S. Shukla, R. Sen, "T-Reich mapping in topological vector space-valued cone metric spaces", *Mathematica Aeterna*, 1, No. 6, 353–359 (2011).

[20] M. Abbas, H. Aydi, S. Radenović, "Fixed point of T-Hardy-Rogers contractive mappings in partially ordered partial metric spaces", *Int. J. Math. and Math. Sci.*, Article ID 313675, 11 p. (2012)

[21] V. Parvaneh, "Fixed and periodic point results for T-quasi-contractions in a partially ordered metric space", *J. Basic Appl. Sci. Res.*, 2(3), 2354–2362 (2012).

[22] V. Parvaneh, H. Hosseinzadeh, "Some common fixed point results for generalized weak C-contractions in ordered metric spaces", *J. Appl. Sci.*, 12(9), 848–855 (2012).

[23] Tran Van An, Kieu Phuong Chi, Erdal Karapınar, Tran Duc Thanh, "An extension of generalized (ψ, ϕ)-weak contractions", *Int. J. Math. and Math. Sci.*, Article ID 431872, 11 p. (2012).

[24] Erdal Karapınar, Kieu Phuong Chi, Tran Duc Thanh, "A generalization of Ćirić quasicontractions", *Abstract and Applied Analysis*, Article ID 518734, 9 p. (2012).

[25] Kieu Phuong Chi, Erdal Karapınar, Tran Duc Thanh, "A generalization of the Meir-Keeler type contraction", *Arab J. Math. Sci.*, 18, 141–148 (2012).

[26] J.R. Morales, E. Rojas, "Some generalizations of Jungck's fixed point theorem", *Int. J. Math. and Math. Sci.*, Article ID 213876, 19 p. (2012).

[27] А. Разани, В. Парванех, "Некоторые теоремы о неподвижных точках для слабо T-сжимающих по Чаттерья и по Каннану отображений", *Изв. вузов. Матем.*, No. 3, 47–55 (2013).

[28] A.K. Dubey, Rita Shukla, Dubey Ravi Prakash, "Cone metric spaces and fixed point theorems of generalized T-Zamfirescu mappings", *Int. J. Appl. Math. Res.*, 2, No. 1, 151–156 (2013).

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, 630055, Россия
E-mail address: gutman@math.nsc.ru