Владикавказский математический журнал
2013, Том 15, Выпуск 4, С. 12–13

УДК **517.98**

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЙ ЛИФТИНГ В ИЗМЕРИМОМ РАССЛОЕНИИ БАНАХОВЫХ РЕШЕТОК

А. Е. Гутман

Показано, что всякий положительный лифтинг в измеримом расслоении банаховых решеток является решеточным гомоморфизмом.

Ключевые слова: банахова решетка, решеточный гомоморфизм, банахово расслоение, лифтинг.

Определение лифтинга $(\cdot)_\sim\colon L^\infty(\Omega,\mathscr{X}) \to \mathscr{L}^\infty(\Omega,\mathscr{X})$ классов измеримых сечений измеримого расслоения $\mathscr{X}$ банаховых решеток на пространстве с мерой Ω сопровождается требованием решеточности лифтинга: $(\mathbf{u}\vee\mathbf{v})_\sim = \mathbf{u}_\sim \vee \mathbf{v}_\sim$ на Ω для всех $\mathbf{u},\mathbf{v} \in L^\infty(\Omega,\mathscr{X})$ (см. [1, определение 2.2]). Мы покажем, что это требование является избыточным и может быть заменено условием положительности: $\mathbf{u}_\sim \geqslant 0$ на Ω для положительных $\mathbf{u} \in L^\infty(\Omega,\mathscr{X})$.

Теорема 1. *Пусть X — векторная решетка, Y — нормированная решетка и пусть $T\colon X \to Y$ — такой сюръективный положительный линейный оператор, что для любых $x_1, x_2 \in X$ из $|x_1| \leqslant |x_2|$ следует $\|Tx_1\| \leqslant \|Tx_2\|$. Тогда T является решеточным гомоморфизмом.*

$\lhd$ Поскольку $\ker T$ — порядковый идеал X, согласно [2, 18.9] фактор-пространство $\widetilde{X} := X/\ker T$ представляет собой векторную решетку относительно естественного порядка, а каноническое отображение $\varphi\colon X \to \widetilde{X}$ является решеточным гомоморфизмом. Кроме того, $\|\cdot\|_Y \circ T$ — решеточная полунорма на X, а значит, в силу [2, 62.3] пространство $\widetilde{X}$ является нормированной решеткой относительно фактор-нормы $\|\cdot\|_{\widetilde{X}}$, причем $\|\cdot\|_{\widetilde{X}} = \|\cdot\|_Y \circ \widetilde{T}$, где $\widetilde{T} := T\circ\varphi^{-1}\colon \widetilde{X} \to Y$ — линейная биекция. Таким образом, оператор $\widetilde{T}$ служит положительной изометрией между нормированными решетками $\widetilde{X}$ и Y и поэтому является порядковым изоморфизмом (см. [3, теорема 1]) и, в частности, решеточным гомоморфизмом. Следовательно, оператор $T = \widetilde{T}\circ\varphi$ также является решеточным гомоморфизмом. $\rhd$

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{X}$ — измеримое расслоение банаховых решеток над пространством с мерой Ω и $(\cdot)_\sim\colon L^\infty(\Omega,\mathscr{X}) \to \mathscr{L}^\infty(\Omega,\mathscr{X})$ — такой лифтинг в измеримом банаховом расслоении $\mathscr{X}$, что $\mathbf{u}_\sim \geqslant 0$ на Ω для положительных $\mathbf{u} \in L^\infty(\Omega,\mathscr{X})$. Тогда $(\mathbf{u}\vee\mathbf{v})_\sim = \mathbf{u}_\sim \vee \mathbf{v}_\sim$ и $(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})_\sim = \mathbf{u}_\sim \wedge \mathbf{v}_\sim$ на Ω для всех $\mathbf{u},\mathbf{v} \in L^\infty(\Omega,\mathscr{X})$.*

$\lhd$ Достаточно фиксировать произвольную точку $\omega \in \Omega$ и применить доказанную выше теорему 1 к векторной решетке $X := L^\infty(\Omega,\mathscr{X})$, нормированной решетке $Y := \mathscr{X}(\omega)$ и оператору $T\colon \mathbf{u} \in X \mapsto \mathbf{u}_\sim(\omega) \in Y$, сюръективность которого следует из [4, 4.4.1]. $\rhd$

Литература

1. *Ганиев И. Г.* Измеримые расслоения решеток и их приложения // Исследования по функциональному анализу и его приложениям.—М.: Наука, 2005.—С. 9–49.
2. *Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C.* Riesz Spaces. Vol. I.—Amsterdam–London: North-Holland Publ. Co., 1971.
3. *Абрамович Ю. А.* Об изометриях нормированных решеток // Оптимизация.—1988.—Вып. 43 (60).—С. 74–80.
4. *Гутман А. Е.* Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Линейные операторы, согласованные с порядком.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1995.—С. 63–211.

Статья поступила 13 октября 2013 г.

Гутман Александр Ефимович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
заведующий лабораторией функционального анализа
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4;

Новосибирский государственный университет,
профессор кафедры математического анализа
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2
E-mail: gutman@math.nsc.ru

POSITIVE LIFTING IN A MEASURABLE BUNDLE OF BANACH LATTICES

Gutman A. E.

We show that every positive lifting in a measurable bundle of Banach lattices is a lattice homomorphism.

Key words: Banach lattice, lattice homomorphism, Banach bundle, lifting.