УДК 517.98

РЕШЕТОЧНО-МЕТРИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ МОНОТОННОГО ОПЕРАТОРА

А. Е. Гутман, А. В. Коптев

В данной заметке рассмотрено естественное понятие монотонного линейного оператора, действующего из векторной решетки в нормированное пространство, показано, что всякий такой оператор допускает «решеточно-метрическое» разложение в виде композиции решеточного гомоморфизма и линейной изометрии, и приведены несколько приложений полученных результатов к исследованию непрерывных и измеримых расслоений банаховых решеток.

Определение. Пусть X — векторная решетка, Y — нормированное пространство и $T\colon X \to Y$ — линейный оператор.

(1) Оператор T называется *монотонным*, если для любых $x_1, x_2 \in X$ из $|x_1| \leqslant |x_2|$ следует $\|Tx_1\| \leqslant \|Tx_2\|$.

(2) Тройку (Z, H, I) назовем *решеточно-метрическим разложением* оператора T, если Z — нормированная решетка, $H : X \to Z$ — сюръективный решеточный гомоморфизм, $I\colon Z \to Y$ — линейная изометрия и $T = I \circ H$.

При доказательстве первого результата пригодятся два классических факта из теории векторных решеток, которые для удобства сформулированы здесь в виде теорем A и B.

Теорема A [1, 18.7–18.9]. *Если K — порядковый идеал векторной решетки X, то векторное фактор-пространство X/K является векторной решеткой относительно порядка $\mathbf{u} \leqslant \mathbf{v}$, определяемого для классов $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X/K$ любым из следующих попарно равносильных условий:*

(1) $(\exists\, x \in \mathbf{u})\, (\exists\, y \in \mathbf{v})\ x \leqslant y$;

(2) $(\forall x \in \mathbf{u})\,(\exists y \in \mathbf{v})\; x \leqslant y$;

(3) $(\forall x \in \mathbf{u})\,(\forall y \in \mathbf{v})\,(\exists z \in K)\; x \leqslant y + z$.

При этом каноническое отображение $X \to X/K$ является решеточным гомоморфизмом: $[x] \vee [y] = [x \vee y]$ и $[x] \wedge [y] = [x \wedge y]$ для всех $x, y \in X$, где $[x] := x + K$.

Напомним, что полунорма $p : X \to \mathbb{R}$ на векторной решетке X называется *монотонной*, если для любых $x_1, x_2 \in X$ из $|x_1| \leqslant |x_2|$ следует $p(x_1) \leqslant p(x_2)$.

Теорема B [1, 62.3]. *Пусть K — порядковый идеал векторной решетки X и пусть p — монотонная полунорма на X. Тогда фактор-полунорма π, определяемая на X/K традиционной формулой $\pi(\mathbf{u}) = \inf\{p(x) : x \in \mathbf{u}\}$, монотонна. Если идеал K замкнут относительно сходимости по полунорме p, то X/K представляет собой нормированную решетку с нормой π.*

Теорема 1. *Линейный оператор, действующий из векторной решетки в нормированное пространство, монотонен тогда и только тогда, когда он имеет решеточно-метрическое разложение.*

Доказательство. Достаточность очевидна. Покажем необходимость. Пусть X — векторная решетка, Y — нормированное пространство и пусть $T : X \to Y$ — монотонный линейный оператор. Заметим, что $K := \ker T$ — порядковый идеал X: если $x \in X$, $x_0 \in K$ и $|x| \leqslant |x_0|$, то $\|Tx\| \leqslant \|Tx_0\| = 0$ и тем самым $x \in K$. По теореме A пространство $Z := X/K$ представляет собой векторную решетку относительно естественного порядка, а каноническое отображение $H : X \to Z$ является сюръективным решеточным гомоморфизмом. Монотонность оператора T означает, что $\|\cdot\| \circ T$ — монотонная полунорма на X, причем идеал K замкнут по этой полунорме: если $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$, $x \in X$ и $\|T(x_n - x)\| \to 0$, то $Tx = \lim\limits_{n\to\infty} Tx_n = 0$. Согласно теореме B пространство Z является нормированной решеткой относительно соответствующей фактор-нормы $\|\cdot\|_Z$. Осталось заметить, что линейный оператор $I : Z \to Y$, корректно определяемый формулой $I(Hx) = Tx$, является изометрией:

$$\|I(Hx)\| = \|Tx\| = \inf\{\|T(x + x_0)\| : x_0 \in K\} = \|Hx\|_Z. \quad \square$$

Следствие 1. *Пусть X — векторная решетка, Y — нормированное пространство, $T\colon X \to Y$ — сюръективный монотонный линейный оператор. Тогда на Y можно ввести такое отношение порядка, что Y превратится в нормированную решетку, а оператор T станет решеточным гомоморфизмом.*

Доказательство. Пусть (Z, H, I) — решеточно-метрическое разложение оператора T (см. теорему 1). Из сюръективности T вытекает сюръективность линейной изометрии $I\colon Z \to Y$. Введем отношение порядка на Y, полагая $y_1 \leqslant y_2 \Leftrightarrow I^{-1}y_1 \leqslant I^{-1}y_2$. Тогда, как легко видеть, Y является нормированной решеткой, а оператор I служит порядковым и метрическим изоморфизмом между Z и Y. При этом оператор T оказывается решеточным гомоморфизмом, будучи композицией решеточных гомоморфизмов H и I. $\square$

Следствие 2. *Пусть X — векторная решетка, Y — банахово пространство, и пусть $T : X \to Y$ — монотонный линейный оператор с плотным в Y образом. Тогда на Y можно ввести такое отношение порядка, что Y превратится в банахову решетку, а оператор T станет решеточным гомоморфизмом.*

Доказательство. Воспользовавшись следствием 1, снабдим образ Y_0 оператора T отношением порядка, превращающим Y_0 в нормированную решетку, а оператор $T : X \to Y_0$ — в решеточный гомоморфизм. Остается заметить, что на пополнении Y нормированной решетки Y_0 можно ввести порядок, относительно которого Y является банаховой решеткой, содержащей Y_0 в качестве векторной подрешетки (см., например, [2, 1.4]). $\square$

Лемма 1. *Пусть E — векторная решетка, X и Y — E-нормированные решетки, $T : X \to Y$ — линейная изометрия, $u, v \in X$, $|u| \wedge |v| = 0$, $Tu \geqslant Tv \geqslant 0$. Тогда $\left|u + nv\right| \leqslant \left|u + v\right|$ для всех $n \in \mathbb{N}$, а если решетка E архимедова, то $v = 0$.*

Доказательство. В случае $n = 1$ доказываемое неравенство очевидно. Предположив $\left|u+nv\right| \leqslant \left|u+v\right|$, покажем $\left|u+(n+1)v\right| \leqslant \left|u+v\right|$. В силу очевидных соотношений $-Tu \leqslant 0 \leqslant Tu - Tv$ и $-(n+1)Tv \leqslant$

$0 \leqslant nTv$ имеем

$$-Tu - nTv \leqslant Tu - (n+1)Tv \leqslant Tu + nTv.$$

Следовательно, $|Tu - (n+1)Tv| \leqslant Tu + nTv = |Tu + nTv|$, а значит,

$$\boldsymbol{|} u - (n+1)v \boldsymbol{|} = \boldsymbol{|} Tu - (n+1)Tv \boldsymbol{|} \leqslant \boldsymbol{|} Tu + nTv \boldsymbol{|} = \boldsymbol{|} u + nv \boldsymbol{|} \leqslant \boldsymbol{|} u + v \boldsymbol{|}.$$

Учитывая равенство $|u| \wedge |v| = 0$, заключаем, что $|u + (n+1)v| = |u - (n+1)v|$, поэтому $\boldsymbol{|} u + (n+1)v \boldsymbol{|} = \boldsymbol{|} u - (n+1)v \boldsymbol{|}$. Если решетка E архимедова, то из $n\boldsymbol{|} v \boldsymbol{|} = \boldsymbol{|} nv \boldsymbol{|} \leqslant \boldsymbol{|} u + nv \boldsymbol{|} + \boldsymbol{|} u \boldsymbol{|} \leqslant \boldsymbol{|} u + v \boldsymbol{|} + \boldsymbol{|} u \boldsymbol{|}$ $(n \in \mathbb{N})$ следует $\boldsymbol{|} v \boldsymbol{|} = 0$. $\square$

Замечание. Приведенное выше обоснование леммы 1 идейно повторяет фрагмент доказательства теоремы 1 из [3].

Теорема 2. *Пусть E — архимедова векторная решетка, X и Y — E-нормированные решетки и $T : X \to Y$ — положительная линейная изометрия. Тогда T является порядковым изоморфизмом X на $\operatorname{im} T$.*

Доказательство. Если $x \in X$ и $Tx \geqslant 0$, то $u := x^+$ и $v := x^-$ удовлетворяют условиям леммы 1 (в силу того, что $Tu - Tv = Tx \geqslant 0$), а значит, $v = 0$ и тем самым $x \geqslant 0$. $\square$

Следствие 3. *Если E — архимедова векторная решетка, то всякий положительный метрический изоморфизм между E-нормированными решетками является порядковым изоморфизмом.*

В случае $E = \mathbb{R}$ последнее утверждение совпадает с теоремой 1 из [3].

Теорема 3. *Пусть X — векторная решетка, Y — нормированная решетка, и пусть линейный оператор $T : X \to Y$ положителен, сюръективен и монотонен. Тогда T — решеточный гомоморфизм.*

Доказательство. По теореме 1 оператор T имеет решеточно-метрическое разложение (Z, H, I). Покажем, что оператор $I : Z \to Y$ положителен. Действительно, если $x \in X$ и $Hx \geqslant 0$, то $Hx = (Hx)^+ = H(x^+)$, а значит, $I(Hx) = IH(x^+) = T(x^+) \geqslant 0$ в силу положительности T. Кроме того, из сюръективности T вытекает сюръективность I.

Таким образом, I служит положительным метрическим изоморфизмом между нормированными решетками Z и Y. Согласно следствию 3 оператор I является порядковым изоморфизмом и, в частности, решеточным гомоморфизмом. Следовательно, композиция $T = I \circ H$ также является решеточным гомоморфизмом. $\square$

В качестве одного из приложений установленных выше фактов докажем техническую лемму о введении порядка в слоях банахова расслоения, множество сечений которого имеет заданную решеточную структуру.

Лемма 2. *Пусть Q — произвольное множество, E — векторная подрешетка $\mathbb{R}^Q$, $\mathscr{X}$ — банахово расслоение над Q, $\mathscr{U}$ — послойно плотное в $\mathscr{X}$ векторное подпространство $S(Q, \mathscr{X})$, и пусть $\leqslant$ — такое отношение порядка на $\mathscr{U}$, что $(\mathscr{U}, |\cdot|, \leqslant)$ является E-нормированной решеткой, где $|\cdot| : \mathscr{U} \to E$ — поточечная норма. Тогда в каждом слое $\mathscr{X}(q)$ можно ввести отношение порядка так, что $\mathscr{X}(q)$ превратится в банахову решетку, а $(\mathscr{U}, \leqslant)$ окажется подрешеткой $S(Q, \mathscr{X})$ относительно поточечного порядка:*

(1) $u \leqslant v \Leftrightarrow (\forall\, q \in Q)\ u(q) \leqslant v(q)$;
(2) $(u \vee v)(q) = u(q) \vee v(q)$, $(u \wedge v)(q) = u(q) \wedge v(q)$ *для всех* $q \in Q$.

Доказательство. Для произвольной точки $q \in Q$ рассмотрим линейный оператор $T_q : \mathscr{U} \to \mathscr{X}(q)$, определенный формулой $T_q u = u(q)$ и имеющий всюду плотный в $\mathscr{X}(q)$ образ. Как легко видеть, оператор T_q монотонен: если $|u| \leqslant |v|$, то $|u| \leqslant |v|$, поэтому

$$\|T_q u\| = \|u(q)\| = |u|(q) \leqslant |v|(q) = \|v(q)\| = \|T_q v\|.$$

Воспользовавшись следствием 2, снабдим $\mathscr{X}(q)$ отношением порядка, превращающим $\mathscr{X}(q)$ в банахову решетку, а оператор $T_q : \mathscr{U} \to \mathscr{X}(q)$ — в решеточный гомоморфизм. Последнее обстоятельство обеспечивает условие (2), а условие (1) вытекает из (2), поскольку

$$u \leqslant v \;\Leftrightarrow\; u \vee v = v \;\Leftrightarrow\; (\forall\, q \in Q)\ (u \vee v)(q) = v(q) \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; (\forall\, q \in Q)\ u(q) \vee v(q) = v(q) \;\Leftrightarrow\; (\forall\, q \in Q)\ u(q) \leqslant v(q). \quad \square$$

Замечание. В рамках доказательства леммы 2 совпадение порядка $\leqslant$ с поточечным порядком $\preccurlyeq$ на $\mathscr{U}$ можно также вывести из следствия 3. Действительно, тождественный метрический изоморфизм между E-нормированными решетками $(\mathscr{U}, |\cdot|, \leqslant)$ и $(\mathscr{U}, |\cdot|, \preccurlyeq)$, будучи положительным (благодаря положительности операторов T_q), является порядковым изоморфизмом.

На базе леммы 2 может быть реализована основная часть намеченной в работе [4] программы по развитию теории представлений решеток Банаха — Канторовича. В качестве простого примера приведем соответствующую реализационную теорему для случая $C(Q)$-значной нормы.

Теорема 4. *Пусть $E := C(Q)$, где Q — экстремально несвязный компакт. Всякая E-нормированная решетка Банаха — Канторовича порядково и метрически изоморфна пространству $C(Q, \mathscr{X})$ непрерывных сечений некоторого просторного непрерывного расслоения $\mathscr{X}$ банаховых решеток над Q.*

Доказательство. Согласно [5, 3.4.2] (см. также [6, 2.4.10]) для любой E-нормированной решетки Банаха — Канторовича X существует такое просторное непрерывное банахово расслоение $\mathscr{X}$ над Q, что E-нормированное пространство $(X, |\cdot|_X)$ изометрично пространству $\mathscr{U} := C(Q, \mathscr{X})$, снабженному поточечной нормой $|\cdot|$. С помощью имеющегося изоморфизма $I\colon X \to \mathscr{U}$ введем отношение порядка на $\mathscr{U}$, полагая $u_1 \leqslant u_2 \Leftrightarrow I^{-1}u_1 \leqslant_X I^{-1}u_2$. Воспользовавшись леммой 2, превратим слои расслоения $\mathscr{X}$ в банаховы решетки, а порядок на $\mathscr{U}$ — в поточечный порядок. В результате $\mathscr{X}$ окажется непрерывным расслоением банаховых решеток с решеточной непрерывной структурой $\mathscr{U}$, а E-нормированная решетка X будет изоморфна $C(Q, \mathscr{X})$ не только метрически, но и порядково. $\square$

Введение понятия лифтинга $(\cdot)_\sim : L^\infty(\Omega, \mathscr{X}) \to \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{X})$ классов измеримых сечений измеримого расслоения $\mathscr{X}$ банаховых решеток на пространстве с мерой Ω сопровождается требованием согласованности лифтинга с решеточными операциями (см. [7, определение 2.2]):

$$(\mathbf{u} \vee \mathbf{v})_\sim = \mathbf{u}_\sim \vee \mathbf{v}_\sim \quad \text{для всех } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in L^\infty(\Omega, \mathscr{X}).$$

В качестве еще одного приложения полученных выше результатов покажем, что это требование избыточно и может быть заменено условием положительности:

$$\mathbf{u}_\sim \geqslant 0 \quad \text{для положительных} \quad \mathbf{u} \in L^\infty(\Omega, \mathscr{X}).$$

Теорема 5. *Пусть* $\mathscr{X}$ *— измеримое расслоение банаховых решеток над пространством с мерой* Ω *и* $(\cdot)_\sim : L^\infty(\Omega, \mathscr{X}) \to \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{X})$ *— такой лифтинг в измеримом банаховом расслоении* $\mathscr{X}$*, что* $\mathbf{u}_\sim \geqslant 0$ *на* Ω *для положительных* $\mathbf{u} \in L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$*. Тогда* $(\mathbf{u} \vee \mathbf{v})_\sim = \mathbf{u}_\sim \vee \mathbf{v}_\sim$ *и* $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})_\sim = \mathbf{u}_\sim \wedge \mathbf{v}_\sim$ *на* Ω *для всех* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$.

Доказательство. Достаточно фиксировать произвольную точку $\omega \in \Omega$ и применить теорему 3 к векторной решетке $X := L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$, нормированной решетке $Y := \mathscr{X}(\omega)$ и оператору $T : \mathbf{u} \in X \mapsto \mathbf{u}_\sim(\omega) \in Y$, сюръективность которого следует из [5, 4.4.1] (см. также [6, 2.4.2 (5) и 2.5.10]). □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C.* Riesz spaces. V. I. Amsterdam; London: North-Holland Publ. Co., 1971.
2. *Kawai I.* Locally convex lattices // J. Math. Soc. Japan. 1957. V. 9, N 3. P. 281–314.
3. *Абрамович Ю. А.* Об изометриях нормированных решеток // Оптимизация. 1988. Вып. 43 (60). С. 74–80.
4. *Kusraev A. G., Tabuev S. N.* Banach lattices of continuous sections // Владикавк. мат. журн. 2012. Т. 14, № 4. С. 41–44.
5. *Гутман А. Е.* Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Линейные операторы, согласованные с порядком / Тр. Ин-та математики. Новосибирск: Ин-т математики, 1995. Т. 29. С. 63–211.
6. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы. М.: Наука, 2003.
7. *Ганиев И. Г.* Измеримые расслоения решеток и их приложения // Исследования по функциональному анализу и его приложениям. М.: Наука, 2005. С. 9–49.

г. Новосибирск *15 октября 2013 г.*