ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2014, том 456, № 4, с. 387–388

МАТЕМАТИКА

УДК 517.98

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОНЕЧНОМЕРНЫХ И СЕПАРАБЕЛЬНЫХ СЛОЕВ ПРОСТОРНОГО БАНАХОВА РАССЛОЕНИЯ

© 2014 г. А. Е. Гутман, А. В. Коптев

Представлено академиком Ю.Г. Решетняком 23.10.2013 г.

Поступило 07.11.2013 г.

DOI: 10.7868/S0869565214160038

Как известно (см. [1]), всякое пространство Банаха–Канторовича $\mathcal{U}$ изоморфно фундаменту пространства $C_\infty(Q, \mathcal{X})$ расширенных непрерывных сечений подходящего просторного банахова расслоения $\mathcal{X}$ над экстремально несвязным компактом Q. При этом свойства расслоения $\mathcal{X}$ или отдельных его слоев сказываются на аналогичных глобальных и локальных свойствах пространства $\mathcal{U}$. В частности, локальная конечномерность и порядковая сепарабельность пространства $\mathcal{U}$ тесно связаны с конечномерностью и сепарабельностью слоев $\mathcal{X}$.

В данной работе изучаются топологические характеристики множества точек, в которых слои просторного банахова расслоения конечномерны или сепарабельны, исследуется связь между конечномерностью или сепарабельностью слоев расслоения и аналогичными свойствами слоев его просторной оболочки, а также устанавливается критерий существования сопряженного расслоения в сепарабельном случае.

Всюду ниже $\mathcal{X}$ – произвольное непрерывное банахово расслоение над экстремально несвязным компактом Q, $\overline{\mathcal{X}}$ – просторная оболочка расслоения $\mathcal{X}$, $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\overline{\omega} = \omega \cup \{\infty\}$. Мы следуем терминологии и обозначениям, принятым в [1, 2].

Размерностью расслоения $\mathcal{X}$ назовем отображение $\dim\mathcal{X}\colon Q \to \overline{\omega}$, сопоставляющее каждой точке $q \in Q$ размерность $\dim\mathcal{X}(q) \in \omega$ слоя $\mathcal{X}(q)$, если он конечномерен, и принимающее значение $(\dim\mathcal{X})(q) = \infty$ в противном случае. Размерность расслоения $\mathcal{X}$ ограничена (на $P \subset Q$), если $\dim\mathcal{X} \le n$ (на P) для некоторого $n \in \omega$. Размерность $\mathcal{X}$ локально ограничена на $P \subset Q$, если она ограничена в окрестности каждой точки $p \in P$. Для $F\colon Q \to \overline{\omega}$ и $d \in \overline{\omega}$ положим $\{F \le d\} := \{q \in Q\colon F(q) \le d\}$. Аналогично вводятся обозначения $\{F < d\}$, $\{F = d\}$ и т.п. Из [3, 18.1] следует, что множество $\{\dim\mathcal{X} \ge n\}$ открыто для всех $n \in \omega$.

Теорема 1. *Пусть расслоение $\mathcal{X}$ просторно.*

1. *Множество $\{\dim\mathcal{X} = n\}$ является открыто-замкнутым для любого числа $n \in \omega$. В частности, множество $\{\dim\mathcal{X} < \infty\}$ открыто и σ-замкнуто, а множество $\{\dim\mathcal{X} = \infty\}$ замкнуто и σ-открыто.*

2. *Следующие утверждения попарно равносильны*:

а) *множество $\{\dim\mathcal{X} < \infty\}$ открыто-замкнуто*;

б) *множество $\{\dim\mathcal{X} = \infty\}$ открыто-замкнуто*;

в) *множество значений $\dim\mathcal{X}$ конечно.*

Теорема 2. *Если все слои $\mathcal{X}$ конечномерны, то следующие утверждения попарно равносильны*:

1) *расслоение $\mathcal{X}$ просторно*;

2) *множество $\{\dim\mathcal{X} = n\}$ открыто для любого $n \in \omega$*;

3) *множество $\{\dim\mathcal{X} = n\}$ замкнуто для любого $n \in \omega$ и размерность расслоения $\mathcal{X}$ ограничена*;

4) *существует конечное разбиение компакта Q на открыто-замкнутые множества такое, что размерность $\mathcal{X}$ постоянна на каждом элементе этого разбиения.*

Теорема 3. *Все слои $\overline{\mathcal{X}}$ конечномерны тогда и только тогда, когда размерность $\mathcal{X}$ ограничена. В этом случае размерность $\overline{\mathcal{X}}$ также ограничена и* $\max\dim\overline{\mathcal{X}} = \max\dim\mathcal{X}$.

Теорема 4. 1. *Если $q \in Q$ и $\dim\mathcal{X}(q) = n < \infty$, то равенство $\overline{\mathcal{X}}(q) = \mathcal{X}(q)$ равносильно включению $q \in \operatorname{int}\{\dim\mathcal{X} = n\}$.*

2. *Имеют место равенства* $\{\dim\overline{\mathcal{X}} = n\} = \operatorname{cl}\operatorname{int}\{\dim\mathcal{X} = n\}$ $(n \in \omega)$ *и* $\{\dim\overline{\mathcal{X}} = 0\} = \operatorname{int}\{\dim\mathcal{X} = 0\}$.

Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской Академии наук, Новосибирск

Новосибирский государственный университет

Следующее утверждение вытекает из приведенных выше фактов с учетом [2, 3.2.9(1)].

Следствие 1. *Пусть все слои $\mathcal{X}$ конечномерны.*

1. *Слои $\mathcal{X}$ и $\overline{\mathcal{X}}$ совпадают на открытом всюду плотном множестве.*

2. *Множество* $\{\dim\overline{\mathcal{X}} < \infty\}$ *открыто*, σ*-замкнуто и всюду плотно в* Q, *а равенство* $\{\dim\overline{\mathcal{X}} < \infty\} = Q$ *равносильно ограниченности* $\dim\mathcal{X}$.

Теорема 5. *Если расслоение $\mathcal{X}$ просторно и точка $q \in Q$ не является σ-изолированной, то сепарабельность слоя $\mathcal{X}(q)$ равносильна его конечномерности.*

Следствие 2. *Следующие свойства просторного расслоения $\mathcal{X}$ попарно равносильны*:

1) *слои $\mathcal{X}$ сепарабельны во всех не σ-изолированных точках;*

2) *слои $\mathcal{X}$ конечномерны во всех неизолированных точках;*

3) *множество* $\{\dim\mathcal{X} = \infty\}$ *конечно*;

4) *существует разбиение компакта Q на открыто-замкнутые множества $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$, $n \in \omega$, такое, что на каждом из множеств $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ размерность $\mathcal{X}$ постоянна и конечна, а Q_0 — некоторое конечное множество изолированных точек.*

Напомним, что расслоение $\mathcal{X}$ называется сепарабельным, если $C(Q, \mathcal{X})$ содержит счетное послойно плотное в $\mathcal{X}$ множество сечений.

Теорема 6. *Следующие свойства просторного расслоения $\mathcal{X}$ попарно равносильны*:

1) *расслоение $\mathcal{X}$ сепарабельно*;

2) *все слои $\mathcal{X}$ сепарабельны*;

3) *слои $\mathcal{X}$ сепарабельны во всех изолированных и во всех не σ-изолированных точках*;

4) *слои $\mathcal{X}$ конечномерны всюду, кроме некоторого конечного множества изолированных точек, в которых слои $\mathcal{X}$ сепарабельны;*

5) *существует разбиение компакта Q на открыто-замкнутые множества $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$, $n \in \omega$, такое, что на каждом из множеств $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ размерность $\mathcal{X}$ постоянна и конечна, а Q_0 — некоторое конечное множество изолированных точек, в которых слои $\mathcal{X}$ сепарабельны.*

Следствие 3. *Следующие утверждения попарно равносильны*:

1) *расслоение $\overline{\mathcal{X}}$ сепарабельно*;

2) *слои $\mathcal{X}$ сепарабельны в каждой точке некоторого конечного множества $S \subset Q$ и размерность $\mathcal{X}$ ограничена на $Q \backslash S$*;

3) *слои $\mathcal{X}$ сепарабельны в каждой точке некоторого конечного множества $S \subset Q$ и размерность $\mathcal{X}$ локально ограничена на $Q \backslash S$.*

Теорема 7. *Если существует сопряженное расслоение $\mathcal{X}'$ и слой $\mathcal{X}(q)$ сепарабелен в не σ-изолированной точке $q \in Q$, то слой $\mathcal{X}(q)$ конечномерен и совпадает с $\overline{\mathcal{X}}(q)$.*

Теорема 8. *Если слои $\mathcal{X}$ во всех не σ-изолированных точках сепарабельны, то следующие утверждения попарно равносильны*:

1) *существует сопряженное расслоение $\mathcal{X}'$*;

2) *расслоение $\mathcal{X}$ просторно*;

3) *существует разбиение компакта Q на открыто-замкнутые множества $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$, $n \in \omega$, такое, что на каждом из множеств $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ размерность $\mathcal{X}$ постоянна и конечна, а Q_0 — некоторое конечное множество изолированных точек.*

В каждом из случаев (1)–(3) *справедливо равенство $\mathcal{X}'(q) = \mathcal{X}(q)'$ для всех $q \in Q$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гутман А.Е.* В сб.: Линейные операторы, согласованные с порядком / Тр. Ин-та математики. Новосибирск: СО РАН; Ин-т математики, 1995. Т. 29. С. 63–211.
2. *Гутман А.Е., Коптев А.В.* Нестандартный анализ и векторные решетки. 2-е изд. / Под ред. С. С. Кутателадзе. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2005. С. 125–201.
3. *Gierz G.* Bundles of Topological Vector Spaces and Their Duality // Lect. Notes Math. 1982. V. 955. 296 p.