



КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Отображения, сохраняющие сходимость, и теоремы о неподвижной точке

А. Е. Гутман, А. В. Коптев

Сходимостью (точнее, *секвенциальной сходимостью*) на множестве X условимся называть соответствие между последовательностями и элементами X , т.е. произвольное подмножество $\mathcal{S}_X \times X$, где $\mathcal{S}_X := X^{\mathbb{N}}$. Сходимость на X является *(пред)топологической*, если она совпадает со сходимостью в какой-либо (пред)топологии на X . Как легко видеть, если $\tau: X \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \setminus \{\emptyset\}$ и $(\forall x \in X)(\forall U \in \tau(x))(x \in U)$, то сходимость

$$\alpha \rightarrow x \iff (\forall U \in \tau(x))(\exists \bar{n} \in \mathbb{N})(\forall n \geq \bar{n})(\alpha(n) \in U)$$

является предтопологической. В частности, в этот класс попадают сходимости, определяемые метриками, частичными метриками [1], обобщенными метриками [2], а также коническими метриками [3] и tvs-метриками [4].

Постоянную последовательность $\mathbb{N} \times \{x\}$ обозначим символом x^\wedge . В случае $\alpha, \beta \in \mathcal{S}_X$ введем символ $\text{mix}(\alpha, \beta)$ для такой последовательности $\gamma \in \mathcal{S}_X$, что $\gamma(2n-1) = \alpha(n)$ и $\gamma(2n) = \beta(n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тот факт, что β является подпоследовательностью α , условимся записывать в виде $\beta \preceq \alpha$. Для произвольной сходимости \rightarrow на X определим сходимость $\xrightarrow{*}$ на X , полагая

$$\alpha \xrightarrow{*} x \iff (\forall \beta \preceq \alpha)(\exists \gamma \preceq \beta)(\gamma \rightarrow x).$$

Сходимость называется *однозначной*, если

$$(\forall \alpha \in \mathcal{S}_X)(\forall x, y \in X)(\alpha \rightarrow x \ \& \ \alpha \rightarrow y \Rightarrow x = y).$$

Рассмотрим следующие свойства сходимости \rightarrow на множестве X :

- (0) $(\forall \alpha \in \mathcal{S}_X)(\forall x \in X)((\forall n \in \mathbb{N})(\alpha(n)^\wedge \rightarrow x) \Rightarrow \alpha \rightarrow x)$;
- (1) $(\forall x \in X)(x^\wedge \rightarrow x)$;
- (2) $(\forall \alpha \in \mathcal{S}_X)(\forall x \in X)(\alpha \rightarrow x \Rightarrow (\forall \beta \preceq \alpha) \beta \rightarrow x)$;
- (3) $(\forall \alpha \in \mathcal{S}_X)(\forall x \in X)(\alpha \xrightarrow{*} x \Rightarrow \alpha \rightarrow x)$.

ТЕОРЕМА 1 [5]. (а) *Сходимость является предтопологической тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям (0)–(3).*

(б) *Следующие три свойства однозначной сходимости попарно равносильны: сходимость является предтопологической; сходимость является топологической; сходимость удовлетворяет условиям (1)–(3).*

(с) *Всякая топологическая сходимость на X совпадает со сходимостью в некоторой секвенциальной топологии на X .*

Напомним, что топологическое пространство X называют *секвенциальным* в случае

$$(\forall Y \subset X)(\text{cl}_\sigma Y = Y \Rightarrow \text{cl} Y = Y)$$

и *пространством Фреше* в случае

$$(\forall Y \subset X)(\text{cl}_\sigma Y = \text{cl} Y),$$

где $\text{cl} Y$ – замыкание Y , а $\text{cl}_\sigma Y := \{x \in X : (\exists \alpha \in \mathcal{S}_Y)(\alpha \rightarrow x)\}$ – секвенциальное замыкание Y . Поскольку секвенциальная топология с данной сходимостью единственна, утверждение (с) говорит о том, что “топологическая сходимость” и “секвенциальная топология” – эквивалентные понятия.

Всюду ниже X и Y – секвенциальные топологические пространства.

Положим $\mathcal{C}_X = \{\alpha \in \mathcal{S}_X : (\exists x \in X)(\alpha \rightarrow x)\}$. Пространство с однозначной сходимостью будем называть *однозначным*. Если X – однозначное пространство и $\alpha \in \mathcal{C}_X$, то для обозначения (единственного) предела последовательности α используется традиционный символ $\lim \alpha$. Однозначность занимает промежуточную позицию между классическими условиями отделимости T_1 и T_2 , в то время как T_1 -отделимость равносильна единственности предела для постоянных последовательностей:

$$(\forall x, y \in X)(x^\wedge \rightarrow y \Rightarrow x = y).$$

Пусть $D \subset X$ и $f: D \rightarrow Y$. Говорят, что функция f *сохраняет сходимость*, если

$$(\forall \alpha \in \mathcal{S}_D)(\alpha \in \mathcal{C}_X \Rightarrow f \circ \alpha \in \mathcal{C}_Y).$$

Если пространство D секвенциально, то, как известно, непрерывность f равносильна условию

$$(\forall \alpha \in \mathcal{S}_D)(\forall x \in D)(\alpha \rightarrow x \Rightarrow f \circ \alpha \rightarrow f(x)).$$

ЛЕММА 1. *Выполнено*

$$(\forall \alpha, \beta \in \mathcal{S}_X)(\forall x \in X)(\text{mix}(\alpha, \beta) \rightarrow x \Leftrightarrow (\alpha \rightarrow x \ \& \ \beta \rightarrow x)).$$

В частности, если X однозначно, то из $\text{mix}(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}_X$ следует $\alpha, \beta \in \mathcal{C}_X$ и $\lim \alpha = \lim \beta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\alpha \rightarrow x$ и $\beta \rightarrow x$, то

$$(\forall \gamma \preceq \text{mix}(\alpha, \beta))(\exists \delta \preceq \gamma)(\delta \preceq \alpha \vee \delta \preceq \beta),$$

откуда $\text{mix}(\alpha, \beta) \xrightarrow{*} x$ и поэтому $\text{mix}(\alpha, \beta) \rightarrow x$. Обратная импликация обеспечивается соотношениями $\alpha \preceq \text{mix}(\alpha, \beta)$ и $\beta \preceq \text{mix}(\alpha, \beta)$.

ЛЕММА 2. *Пусть пространство Y является T_1 -отделимым. Функция $f: X \rightarrow Y$ сохраняет сходимость тогда и только тогда, когда f непрерывна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поясним необходимость. Пусть $\alpha \rightarrow x$. Тогда $\text{mix}(\alpha, x^\wedge) \rightarrow x$, откуда, $\text{mix}(f \circ \alpha, f(x)^\wedge) = f \circ \text{mix}(\alpha, x^\wedge) \rightarrow y$, где $y \in Y$, а значит, $f \circ \alpha \rightarrow y$ и $f(x)^\wedge \rightarrow y$. В силу T_1 -отделимости Y из $f(x)^\wedge \rightarrow y$ вытекает $f(x) = y$. Следовательно, $f \circ \alpha \rightarrow f(x)$.

Отметим, что условие T_1 -отделимости в лемме 2 нельзя ослабить до T_0 -отделимости. Действительно, пусть $X, \alpha \in \mathcal{S}_X$ и $x \in X$ таковы, что $\alpha \rightarrow x \notin \text{im} \alpha$. В качестве Y рассмотрим множество $\{0, 1\}$ с открытой топологией $\{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\}$. Тогда функция $f: X \rightarrow Y$, где $f \equiv 0$ на $X \setminus \{x\}$ и $f(x) = 1$, сохраняет сходимость и разрывна.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть X – пространство Фреше, Y – регулярное однозначное секвенциальное пространство, $D \subset X$. Функция $f: D \rightarrow Y$ сохраняет сходимость тогда и только тогда, когда f допускает продолжение до непрерывной функции $\bar{f}: \text{cl} D \rightarrow Y$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Пусть f сохраняет сходимость. Если $\alpha, \beta \in \mathcal{S}_D$ имеют общий предел, то $\text{mix}(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}_X$, откуда

$$\text{mix}(f \circ \alpha, f \circ \beta) = f \circ \text{mix}(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}_Y$$

и поэтому $\lim(f \circ \alpha) = \lim(f \circ \beta)$. Следовательно, существует такая функция $\bar{f}: \text{cl } D \rightarrow Y$, что $\lim(f \circ \alpha) = \bar{f}(x)$ для любых $x \in \text{cl } D$, $\alpha \in \mathcal{S}_D$, $\alpha \rightarrow x$. Покажем непрерывность \bar{f} . Рассуждая от противного, предположим, что $\beta \in \mathcal{S}_{\text{cl } D}$, $\beta \rightarrow x \in \text{cl } D$, но $\bar{f} \circ \beta \not\rightarrow \bar{f}(x)$. Переходя к подпоследовательности, будем считать, что $\bar{f}(x) \notin \text{cl } \text{im}(\bar{f} \circ \beta)$. В силу регулярности Y существуют непересекающиеся открытые множества $U, V \subset Y$ такие, что $\bar{f}(x) \in U$, $\text{im}(\bar{f} \circ \beta) \subset V$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ выберем $\alpha_n \in \mathcal{S}_D$, $\alpha_n \rightarrow \beta(n)$. Учитывая включение $\lim(f \circ \alpha_n) = \bar{f}(\beta(n)) \in V$, мы можем считать, что $\text{im}(f \circ \alpha_n) \subset V$. Стало быть, $f[A] \subset V$, где $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{im } \alpha_n$. Из $\text{im } \beta \subset \text{cl } A$ следует $x \in \text{cl } A$. Поскольку X – пространство Фреше, имеем $\alpha \rightarrow x$ для некоторой $\alpha \in \mathcal{S}_A \subset \mathcal{S}_D$. Тогда $\lim(f \circ \alpha) = \bar{f}(x) \in U$, в то время как $\text{im}(f \circ \alpha) \subset f[A] \subset V$.

Следующие примеры показывают, что условия теоремы 2 нельзя ослабить, потребовав от X лишь секвенциальность (даже в случае $Y = \{0, 1\}$) или заменив регулярность Y хаусдорфовостью (даже в случае, когда X – метрическое пространство).

ПРИМЕР 1. Рассмотрим предтопологию на \mathbb{R}^2 с “крестовидными” множествами

$$([s - \varepsilon, s + \varepsilon] \times \{t\}) \cup (\{s\} \times [t - \varepsilon, t + \varepsilon]), \quad \varepsilon > 0,$$

в роли базовых окрестностей точек (s, t) . Поскольку сходимость в этой предтопологии однозначна, по теореме 1 она совпадает со сходимостью в подходящей секвенциальной топологии τ на \mathbb{R}^2 . Пусть $X = (\mathbb{R}^2, \tau)$. Положим

$$D_0 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : s < 0\}, \quad D_1 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < s\}, \quad D = D_0 \cup D_1 \subset X.$$

Тогда функция $f: D \rightarrow \{0, 1\}$, равная 0 на D_0 и 1 на D_1 , сохраняет сходимость, но не допускает непрерывного продолжения на $\text{cl } D$. (Отметим, что D , будучи открытым подмножеством X , является секвенциальным пространством, причем $\text{cl } D = \text{cl}_\sigma D$.)

ПРИМЕР 2. Пусть X – классическое метрическое пространство \mathbb{R}^2 , $D = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})$. Обозначим через Y топологическое пространство с носителем \mathbb{R}^2 , в котором базовыми окрестностями точек $y \in D$ являются обычные круги $B(y, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, а базовыми окрестностями точек $y \in \mathbb{R} \times \{0\}$ служат множества вида $B(y, \varepsilon) \setminus (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup \{y\}$, $\varepsilon > 0$. Тогда тождественное вложение $f: D \rightarrow Y$ сохраняет сходимость, но не допускает непрерывного продолжения на $\text{cl } D = X$. (Отметим, что Y – хаусдорфово пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности. В частности, Y является пространством Фреше.)

Следующие два понятия введены в [6] (для случая метрических пространств). Функция $f: X \rightarrow Y$ секвенциально сходится, если

$$(\forall \alpha \in \mathcal{S}_X)(f \circ \alpha \in \mathcal{C}_Y \Rightarrow \alpha \in \mathcal{C}_X).$$

Функция $f: X \rightarrow Y$ субсеквенциально сходится, если

$$(\forall \alpha \in \mathcal{S}_X)(f \circ \alpha \in \mathcal{C}_Y \Rightarrow (\exists \beta \preceq \alpha)(\beta \in \mathcal{C}_X)).$$

ЛЕММА 3. Если X является T_1 -отделимым и функция $f: X \rightarrow Y$ секвенциально сходится, то f инъективна и обратная функция $f^{-1}: \text{im } f \rightarrow X$ непрерывна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x_1, x_2 \in X$ и $f(x_1) = f(x_2)$, то $f \circ \text{mix}(x_1^\wedge, x_2^\wedge) = f(x_1)^\wedge \in \mathcal{C}_Y$, откуда $\text{mix}(x_1^\wedge, x_2^\wedge) \in \mathcal{C}_X$ и поэтому $x_1 = x_2$. Непрерывность f^{-1} вытекает из леммы 2.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть X – регулярное однозначное секвенциальное пространство, Y – пространство Фреше. Функция $f: X \rightarrow Y$ секвенциально сходится тогда и только тогда, когда f инъективна и обратная функция $f^{-1}: \text{im } f \rightarrow X$ допускает продолжение до непрерывной функции $\bar{f}^{-1}: \text{clim } f \rightarrow X$. В частности, если образ f замкнут, то секвенциальная сходимость f равносильна существованию и непрерывности f^{-1} .

ТЕОРЕМА 3. Пусть X – T_1 -отделимое, а Y – однозначные секвенциальные пространства. Следующие свойства функции $f: X \rightarrow Y$ попарно равносильны:

- (a) f непрерывна и секвенциально сходится;
- (b) f непрерывна, инъективна и субсеквенциально сходится;
- (c) f является гомеоморфизмом X на замкнутое подпространство $\text{im } f \subset Y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (c) \Rightarrow (b) очевидна.

(b) \Rightarrow (a). Пусть $\alpha \in \mathcal{S}_X$ и $f \circ \alpha \rightarrow y \in Y$. Покажем, что $\alpha \in \mathcal{C}_X$. Благодаря субсеквенциальной сходимости f найдутся такие $\beta_0 \preceq \alpha$ и $x \in X$, что $\beta_0 \rightarrow x$. Поскольку $f \circ \beta_0 \preceq f \circ \alpha \rightarrow y$, имеем $f \circ \beta_0 \rightarrow y$, а значит, $y = f(x)$ в силу непрерывности f и однозначности Y . Намереваясь установить соотношение $\alpha \xrightarrow{*} x$, рассмотрим $\beta \preceq \alpha$ и покажем, что $(\exists \gamma \preceq \beta)(\gamma \rightarrow x)$. Заметим, что $f \circ \beta \rightarrow y$, поскольку $f \circ \beta \preceq f \circ \alpha \rightarrow y$. Вновь используя субсеквенциальную сходимость f , рассмотрим такие $\gamma \preceq \beta$ и $x' \in X$, что $\gamma \rightarrow x'$. Благодаря непрерывности f имеем $f \circ \gamma \rightarrow f(x')$. С другой стороны, из $f \circ \gamma \preceq f \circ \beta \rightarrow y$ вытекает $f \circ \gamma \rightarrow y = f(x)$. Однозначность Y позволяет заключить, что $f(x') = f(x)$, откуда $x' = x$ в силу инъективности f и поэтому $\gamma \rightarrow x$.

(a) \Rightarrow (c). С учетом T_1 -отделимости X и леммы 3 остается показать замкнутость $\text{im } f$. Итак, пусть $\beta \in \mathcal{S}_{\text{im } f}$ и $\beta \rightarrow y \in Y$. Положим $\alpha = f^{-1} \circ \beta$. Поскольку $f \circ \alpha = \beta \in \mathcal{C}_Y$, в силу секвенциальной сходимости f мы имеем $\alpha \rightarrow x \in X$, а значит, $\beta = f \circ \alpha \rightarrow f(x)$ благодаря непрерывности f . Из однозначности Y следует $y = f(x)$ и тем самым $y \in \text{im } f$.

Отметим существенность условий отделимости в последней теореме. Действительно, рассмотрим $X = \{0\} \cup \mathbb{N}$ с топологией $\{\emptyset, \{0\}, \{0\} \cup \mathbb{N}\}$ и $Y = \mathbb{N}$ с топологией $\{\emptyset, \mathbb{N}\}$. Тогда Y – замкнутое подпространство X , функция $f: X \rightarrow Y$, определенная формулой $f(x) = x + 1$, является секвенциально сходящейся непрерывной биекцией, в то время как обратная функция $f^{-1}: Y \rightarrow X$ разрывна в точке 1.

Приведенные выше факты позволяют получить простые доказательства для некоторых теорем о T -сжимающих отображениях и им подобных. В качестве примера рассмотрим следующий результат, установленный в [6].

ТЕОРЕМА 4 [6]. Пусть (X, d) – полное метрическое пространство, пусть функция $T: X \rightarrow X$ непрерывна, инъективна и субсеквенциально сходится и пусть непрерывное отображение $S: X \rightarrow X$ является T -сжимающим, т.е. удовлетворяет условию

$$(\exists C \in]0, 1[)(\forall x, y \in X) d(TSx, TSy) \leq C d(Tx, Ty).$$

Тогда S имеет единственную неподвижную точку. Если, кроме того, T секвенциально сходится, то для любой точки $x_0 \in X$ последовательность итераций $S^n x_0$ сходится к неподвижной точке отображения S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 3 функция T является гомеоморфизмом X на замкнутое (и поэтому полное) подпространство $\text{im } T \subset X$. Следовательно, функция $d_T: X^2 \rightarrow \mathbb{R}$, определенная формулой $d_T(x, y) = d(Tx, Ty)$, представляет собой метрику на X , относительно которой отображение S является сжимающим, причем пространство (X, d_T) полно и сходимость по d_T совпадает со сходимостью по d . Для завершения доказательства теоремы 4 остается сослаться на принцип Банаха о сжимающем отображении. (Заметим также, что в формулировке теоремы 4 оказываются излишними требование непрерывности S и дополнительное предположение о секвенциальной сходимости T .)

Аналогичные соображения применимы к основным результатам работ [7]–[33], каждый из которых представляет собой обобщение какого-либо ранее известного факта, полученное заменой расстояния $d(x, y)$ выражением $d(Tx, Ty)$, где T – (суб)секвенциально сходящаяся инъекция.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. G. Matthews, *Papers on General Topology and Applications*, Ann. New York Acad. Sci., **728**, New York Acad. Sci., New York, 1994, 183–197. [2] A. Branciari, *Publ. Math. Debrecen*, **57**:1-2 (2000), 31–37. [3] L.-G. Huang, X. Zhang, *J. Math. Anal. Appl.*, **332**:2 (2007), 1468–1476. [4] Z. Kadelburg, S. Radenović, V. Rakočević, *Fixed Point Theory Appl.*, 2010, Article ID 170253. [5] V. Koutník, *Convergence Structures* 1984, Math. Res., **24**, Akademie-Verlag, Berlin, 1985, 199–204. [6] A. Beiranvand, S. Moradi, M. Omid, H. Pazandeh, *Two Fixed-Point Theorems for Special Mappings*, 2009, arXiv: math.FA/0903.1504v1. [7] J. R. Morales, E. Rojas, *Notas Mat.*, **4**:2 (2008), 66–78. [8] J. R. Morales Medina, E. M. Rojas, *Notas Mat.*, **5**:1 (2009), 64–71. [9] S. Moradi, A. Beiranvand, *A Fixed-Point Theorem for Mapping Satisfying a General Contractive Condition of Integral Type Depended an Another Function*, 2009, arXiv: math.FA/0903.1569v1. [10] S. Moradi, *Fixed-Point Theorem For Mappings Satisfying a General Contractive Condition Of Integral Type Depended an Another Function*, 2009, arXiv: math.FA/0903.1574v1. [11] S. Moradi, *Kannan Fixed-Point Theorem On Complete Metric Spaces And On Generalized Metric Spaces Depended an Another Function*, 2009, arXiv: math.FA/0903.1577v1. [12] J. R. Morales, E. Rojas, *Fixed Point Theorems for a Class of Mappings Depending of Another Function and Defined on Cone Metric Spaces*, 2009, arXiv: math.FA/0906.2160v1. [13] J. R. Morales, E. Rojas, *T-Zamfirescu and T-Weak Contraction Mappings on Cone Metric Spaces*, 2009, arXiv: math.FA/0909.1255v1. [14] J. R. Morales, E. Rojas, *On the Existence of Fixed Points of Contraction Mappings Depending of Two Functions on Cone Metric Spaces*, 2009, arXiv: math.FA/0910.4921v1. [15] J. R. Morales, E. Rojas, *Int. J. Math. Anal. (Ruse)*, **4**:4 (2010), 175–184. [16] R. Sumitra, V. Rhymend Uthariaraj, R. Hemavathy, *Int. Math. Forum*, **5**:30 (2010), 1495–1506. [17] S. Moradi, M. Omid, *Int. J. Math. Anal. (Ruse)*, **4**:30 (2010), 1491–1499. [18] S. Bhatt, A. Singh, R. C. Dimri, *Int. J. Math. Archive*, **2**:4 (2011), 444–451. [19] K. P. R. Sastry, Ch. Srinivasarao, K. Sujatha, G. Praveena, Ch. Srinivasarao, *Int. J. Comp. Sci. Math.*, **3**:2 (2011), 133–139. [20] S. Moradi, D. Alimohammadi, *Int. J. Math. Anal. (Ruse)*, **5**:47 (2011), 2313–2320. [21] M. Sharma, R. Shrivastava, Z. K. Ansari, *J. Contemp. Appl. Math.*, **1**:1 (2011), 103–110. [22] R. Shrivastava, Z. K. Ansari, M. Sharma, *Int. J. Phys. and Math. Sci.*, **2**:1 (2011), 83–87. [23] M. Öztürk, M. Başarır, *Int. J. Math. Anal.*, **5**:3 (2011), 119–127. [24] S. K. Malhotra, S. Shukla, R. Sen, *Math. Aeterna*, **1**:6 (2011), 353–359. [25] M. Abbas, H. Aydi, S. Radenović, *Int. J. Math. Math. Sci.*, 2012, Article ID 313675. [26] V. Parvaneh, *J. Basic Appl. Sci. Res.*, **2**:3 (2012), 2354–2362. [27] V. Parvaneh, H. Hosseinzadeh, *J. Appl. Sci.*, **12**:9 (2012), 848–855. [28] Tran Van An, Kieu Phuong Chi, Erdal Karapınar, Tran Duc Thanh, *Int. J. Math. Math. Sci.*, 2012, Article ID 431872. [29] Erdal Karapınar, Kieu Phuong Chi, Tran Duc Thanh, *Abstr. Appl. Anal.*, 2012, Article ID 518734. [30] Kieu Phuong Chi, Erdal Karapınar, Tran Duc Thanh, *Arab J. Math. Sci.*, **18**:2 (2012), 141–148. [31] J. R. Morales, E. Rojas, *Int. J. Math. Math. Sci.*, 2012, Article ID 213876. [32] A. Разани, В. Парванех, *Изв. вузов. Матем.*, 2013, №3, 47–55. [33] A. K. Dubey, R. Shukla, R. P. Dubey, *Int. J. Appl. Math. Res.*, **2**:1 (2013), 151–156.

А. Е. Гутман

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск
Новосибирский государственный университет
E-mail: gutman@math.nsc.ru

Поступило

12.11.2013

А. В. Коптев

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск
E-mail: koptev@math.nsc.ru