

УДК 517.98

НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫЕ СЕЧЕНИЯ РАССЛОЕНИЙ БАНАХОВЫХ РЕШЕТОК

А. Е. Гутман, А. В. Коптев

В работе уточняется понятие непрерывного расслоения банаховых решеток и исследуются порядковые свойства пространства CD_0 -сечений такого расслоения.

Ключевые слова: непрерывное банахово расслоение, банахова решетка, расслоение банаховых решеток, CD_0 -сечение банахова расслоения, удвоение по Александрову.

Основная цель данной заметки — выяснить, при каких условиях непрерывная структура расслоения банаховых решеток \mathcal{X} над топологическим пространством Q согласуется с поточечными решеточными операциями. В качестве приложения мы покажем, что пространство $CD_0(Q, \mathcal{X})$ непрерывно-дискретных сечений такого расслоения \mathcal{X} является банаховой решеткой, и исследуем ее порядковые свойства. Говоря о непрерывных банаховых расслоениях, мы следуем терминологии и обозначениям из [1] и [2, § 2.4].

Пусть \mathcal{X} — дискретное банахово расслоение над каким-либо множеством Q , каждый слой $\mathcal{X}(q)$ которого является банаховой решеткой. Тогда векторное пространство $S(Q, \mathcal{X})$ всех сечений расслоения \mathcal{X} представляет собой векторную решетку относительно поточечного порядка

$$u \leq v \Leftrightarrow u(q) \leq v(q) \text{ для всех } q \in Q,$$

причем решеточные операции также вычисляются поточечно:

$$\begin{aligned}(u \vee v)(q) &= u(q) \vee v(q), & (u \wedge v)(q) &= u(q) \wedge v(q), \\ u^+(q) &= u(q)^+, & u^-(q) &= u(q)^-, & |u|(q) &= |u(q)|\end{aligned}$$

для всех $q \in Q$. Если, кроме того, Q является топологическим пространством, а \mathcal{X} — непрерывным расслоением, то решеточные операции в $S(Q, \mathcal{X})$ не всегда сохраняют непрерывность сечений. Например, если \mathcal{X} — постоянное непрерывное банахово расслоение над \mathbb{R} со слоями $\mathcal{X}(q) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, а порядок \leq_q на $\mathcal{X}(q)$ определяется правилом

$$x \leq_q y \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq y, & \text{если } q \in \mathbb{Q}; \\ x \geq y, & \text{если } q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

то положительная часть $u^+ = \chi_{\mathbb{Q}}$ непрерывного сечения $u \equiv 1$ оказывается разрывной во всех точках. В следующей теореме приведены условия, каждое из которых обеспечивает согласованность решеточной структуры слоев с непрерывной структурой расслоения.

Теорема 1. Пусть \mathcal{X} — непрерывное банахово расслоение над произвольным топологическим пространством Q , причем каждый слой $\mathcal{X}(q)$ является банаховой решеткой. Следующие утверждения попарно равносильны:

- (1) отображение $\vee_{\mathcal{X}} : ((q, x), (q, y)) \in (Q \otimes \mathcal{X})^\times \mapsto (q, x \vee y) \in Q \otimes \mathcal{X}$ непрерывно;
- (2) отображение $(\cdot)_{\mathcal{X}}^+ : (q, x) \in Q \otimes \mathcal{X} \mapsto (q, x^+) \in Q \otimes \mathcal{X}$ непрерывно;
- (3) множество $C(Q, \mathcal{X})$ является подрешеткой $S(Q, \mathcal{X})$;
- (4) существует послойно плотное в \mathcal{X} векторное подпространство $\mathcal{U} \subset C(Q, \mathcal{X})$, являющееся подрешеткой $S(Q, \mathcal{X})$;
- (5) существует послойно плотное в \mathcal{X} подмножество $\mathcal{U} \subset C(Q, \mathcal{X})$ такое, что $u_1 \vee u_2 \in C(Q, \mathcal{X})$ для любых $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$;
- (6) существует послойно плотное в \mathcal{X} подмножество $\mathcal{U} \subset C(Q, \mathcal{X})$ такое, что $u^+ \in C(Q, \mathcal{X})$ для любых $u \in \mathcal{U}$.

◁ Эквивалентность (1) \Leftrightarrow (2) обеспечивается очевидными равенствами

$$x^+ = x \vee 0, \quad x \vee y = (x - y)^+ + y$$

и непрерывностью линейных операций (см. [1, 2.1.5]), (2) влечет (3) благодаря [1, 2.1.7], импликация (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5) очевидны, а из (5) следует (6) по следующей причине: если \mathcal{U} удовлетворяет (5) и $u_0 \in \mathcal{U}$, то

$$(u - u_0)^+ = (u \vee u_0) - u_0 \in C(Q, \mathcal{X})$$

для всех $u \in \mathcal{U}$, а значит, $\mathcal{U} - u_0$ удовлетворяет (6).

Покажем, что (6) \Rightarrow (2). Пусть \mathcal{U} — множество, удовлетворяющее (6). Рассмотрим пару $(q, x) \in Q \otimes \mathcal{X}$, окрестность U точки q , сечение $u \in C(Q, \mathcal{X})$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что $(q, x^+) \in U(u, \varepsilon)$, т. е.

$$\varepsilon_0 := \|x^+ - u(q)\| < \varepsilon.$$

Нам предстоит найти такую окрестность $V(v, \delta)$ пары (q, x) , что $(\cdot)_{\mathcal{X}}^+[V(v, \delta)] \subset U(u, \varepsilon)$. Положим $\delta := (\varepsilon - \varepsilon_0)/2$ и выберем сечение $v \in \mathcal{U}$ так, чтобы

$$\|x - v(q)\| < \delta.$$

Тогда $\|x^+ - v^+(q)\| \leq \|x - v(q)\| < \delta$, откуда

$$\|u(q) - v^+(q)\| \leq \|u(q) - x^+\| + \|x^+ - v^+(q)\| < \varepsilon_0 + \delta.$$

Благодаря непрерывности u и v^+ найдется такая окрестность $V \subset U$ точки q , что

$$\|u(p) - v^+(p)\| < \varepsilon_0 + \delta \quad \text{при } p \in V.$$

Тогда $V(v, \delta)$ — искомая окрестность пары (q, x) . Действительно, если $(p, y) \in V(v, \delta)$, то $\|y^+ - v^+(p)\| \leq \|y - v(p)\| < \delta$ и поэтому

$$\|y^+ - u(p)\| \leq \|y^+ - v^+(p)\| + \|v^+(p) - u(p)\| < \delta + \varepsilon_0 + \delta = \varepsilon,$$

т. е. $(\cdot)_{\mathcal{X}}^+(p, y) \in U(u, \varepsilon)$. ▷

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Список утверждений, равносильных (1)–(6), можно расширить, подставив \wedge вместо \vee в (1) и (5), а также $(\cdot)^-$ или $|\cdot|$ вместо $(\cdot)^+$ в (2) и (6).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если считать банахову решетку топологической алгебраической системой с (непрерывными) линейными и решеточными операциями, то утверждения (1)

и (2) теоремы 1 означают, что $Q \otimes \mathcal{X}$ является расслоением таких систем в смысле определения [3, 1.5]. Отметим также, что множество \mathcal{U} , удовлетворяющее условию (4) теоремы 1, является решеточной непрерывной структурой на \mathcal{X} , а значит, пара $(\mathcal{X}, \mathcal{U})$ представляет собой непрерывное расслоение банаховых решеток согласно определению, принятому в [4], причем структура \mathcal{U} эквивалентна (см. [1, 2.1.8]) исходной непрерывной структуре расслоения \mathcal{X} . (При этом импликация (4) \Rightarrow (3) в теореме 1 совпадает с леммой [4, § 2].) Приведенные выше соображения служат основанием для следующего определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Непрерывным расслоением банаховых решеток* назовем непрерывное банахово расслоение, слои которого являются банаховыми решетками и которое удовлетворяет любому из эквивалентных условий (1)–(6) теоремы 1.

Возникшее понятие непрерывного расслоения банаховых решеток предоставляет возможность уточнить основные факты о сечениях банаховых расслоений и получить их аналоги, отражающие наличие порядка в рассматриваемых алгебраических системах. В качестве примера остановимся на исследовании порядковых свойств пространства непрерывно-дискретных сечений. (В этой части заметки мы используем термины и обозначения, введенные в [5, 6].)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть Q — непустой компакт без изолированных точек и \mathcal{X} — непрерывное расслоение банаховых решеток над Q . Как легко видеть, пространство $\ell^\infty(Q, \mathcal{X})$ всех ограниченных сечений \mathcal{X} является порядковым идеалом векторной решетки $S(Q, \mathcal{X})$, а пространство

$$c_0(Q, \mathcal{X}) = \{u \in S(Q, \mathcal{X}) : \|u\| \in c_0(Q)\}$$

является порядковым идеалом $\ell^\infty(Q, \mathcal{X})$. Кроме того, если $u, v \in S(Q, \mathcal{X})$ и $|u| \leq |v|$, то $\|u\| \leq \|v\|$, а если в добавок $v \in \ell^\infty(Q, \mathcal{X})$, то $\|u\| \leq \|v\|$. Таким образом, $\ell^\infty(Q, \mathcal{X})$, $c_0(Q, \mathcal{X})$ и $C(Q, \mathcal{X})$ представляют собой банаховы решетки относительно поточечных линейных операций, поточечного порядка и равномерной нормы. Для любого сечения $u \in S(Q, \mathcal{X})$ из очевидного равенства $\|u\| = \||u|\|$ вытекает эквивалентность $u \in c_0(Q, \mathcal{X}) \Leftrightarrow |u| \in c_0(Q, \mathcal{X})$. Напомним также, что $CD_0(Q, \mathcal{X})$ — банахово подпространство $\ell^\infty(Q, \mathcal{X})$, которое представляется в виде прямой суммы

$$CD_0(Q, \mathcal{X}) = C(Q, \mathcal{X}) \oplus c_0(Q, \mathcal{X})$$

с соответствующими линейными проекторами $(\cdot)_c$ и $(\cdot)_d$ (см. [5]).

Теорема 2. Пусть \mathcal{X} — непрерывное расслоение банаховых решеток над непустым компактом Q без изолированных точек.

(1) Пространство $CD_0(Q, \mathcal{X})$ является банаховой подрешеткой $\ell^\infty(Q, \mathcal{X})$.

(2) Линейный проектор $(\cdot)_c: CD_0(Q, \mathcal{X}) \rightarrow C(Q, \mathcal{X})$ является решеточным гомоморфизмом: $(u \vee v)_c = u_c \vee v_c$, $(u \wedge v)_c = u_c \wedge v_c$ для всех $u, v \in CD_0(Q, \mathcal{X})$.

(3) Для любых $u, v \in CD_0(Q, \mathcal{X})$ выполняется неравенство $|(u \vee v)_d| \leq |u_d| \vee |v_d|$. В частности, $\|(u \vee v)_d\| \leq \|u_d\| + \|v_d\|$ и $\|(u \vee v)_d\| \leq \|u_d\| + \|v_d\|$.

(4) Пусть \tilde{Q} и $\tilde{\mathcal{X}}$ — удвоения Q и \mathcal{X} соответственно. Тогда $\tilde{\mathcal{X}}$ представляет собой непрерывное расслоение банаховых решеток относительно естественного порядка, а отображение $u \mapsto \tilde{u}$, где $\tilde{u}(q, 0) = u_c(q)$ и $\tilde{u}(q, 1) = u(q)$ для всех $q \in Q$, является не только линейной изометрией между $CD_0(Q, \mathcal{X})$ и $C(\tilde{Q}, \tilde{\mathcal{X}})$ (см. [5, теорема 6]), но и порядковым изоморфизмом.

◁ Для любого сечения $u \in CD_0(Q, \mathcal{X})$ имеем $|u^+ - (u_c)^+| \leq |u - u_c| = |u_d| \in c_0(Q, \mathcal{X})$, а значит, $v := u^+ - (u_c)^+ \in c_0(Q, \mathcal{X})$, откуда с учетом непрерывности $(u_c)^+$ следует $u^+ = (u_c)^+ + v \in CD_0(Q, \mathcal{X})$ и $(u^+)_c = (u_c)^+$, что доказывает (1) и (2).

Приступая к обоснованию (3), предварительно покажем, что в любой архимедовой векторной решетке справедливо неравенство

$$|x_1 \vee x_2 - y_1 \vee y_2| \leq |x_1 - y_1| \vee |x_2 - y_2|. \quad (*)$$

Благодаря принципу Юдина о сохранении соотношений достаточно установить (*) для вещественных чисел. В этом случае без нарушения общности можно считать, что $x_1 = \max\{x_1, x_2, y_1, y_2\}$, а тогда $|x_1 \vee x_2 - y_1 \vee y_2| = x_1 - y_1 \vee y_2 \leq x_1 - y_1 \leq |x_1 - y_1| \vee |x_2 - y_2|$. Теперь для всех $u, v \in CD_0(Q, \mathcal{X})$ с учетом (2) и (*) имеем

$$|(u \vee v)_d| = |u \vee v - (u \vee v)_c| = |u \vee v - u_c \vee v_c| \leq |u - u_c| \vee |v - v_c| = |u_d| \vee |v_d|.$$

Для доказательства (4) заметим, что из (1) и (2) следует $\tilde{u}(q, r)^+ = (u^+)^{\sim}(q, r)$ для всех $u \in CD_0(Q, \mathcal{X})$, $(q, r) \in \tilde{Q}$, и поэтому $\tilde{\mathcal{X}}$ является непрерывным расслоением банаховых решеток. Кроме того, если $u \in CD_0(Q, \mathcal{X})$ и $u \geq 0$, то в силу (2) мы имеем $u_c \geq 0$, откуда $\tilde{u}(q, 0) = u_c(q) \geq 0$ и $\tilde{u}(q, 1) = u(q) \geq 0$ для всех $q \in Q$, а значит, $\tilde{u} \geq 0$. Если же $\tilde{u} \geq 0$, то $u(q) = \tilde{u}(q, 1) \geq 0$ для всех $q \in Q$, т. е. $u \geq 0$. ▷

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В отличие от $(\cdot)_c$ линейный проектор $(\cdot)_d: CD_0(Q, \mathcal{X}) \rightarrow c_0(Q, \mathcal{X})$ оказывается решеточным гомоморфизмом лишь в вырожденном случае $\mathcal{X} \equiv \{0\}$. Более того, если $\mathcal{X} \not\equiv \{0\}$, то $(\cdot)_d$ не является положительным оператором. Действительно, пусть $u \in C(Q, \mathcal{X})$, $u \geq 0$ и $u(p) > 0$ для некоторой точки $p \in Q$. (На роль u подходит модуль ненулевого непрерывного сечения.) Определим сечение $v \in c_0(Q, \mathcal{X})$, полагая $v(p) = u(p)$ и $v(q) = 0$ при $q \neq p$. Тогда $w := u - v \in CD_0(Q, \mathcal{X})$ и $w \geq 0$, но $w_d = -v < 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть \mathcal{X} и \mathcal{Y} — (дискретные) банаховы расслоения над произвольным множеством Q . Следуя [5, § 4], обозначим символом $S[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ векторное пространство всех сечений дискретного банахова расслоения над Q со слоями $B(\mathcal{X}(q), \mathcal{Y}(q))$. Таким образом, $S[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ состоит из всевозможных функций H , определенных на Q и сопоставляющих каждой точке $q \in Q$ ограниченный линейный оператор $H(q): \mathcal{X}(q) \rightarrow \mathcal{Y}(q)$. Для векторного подпространства $\mathcal{U} \subset S(Q, \mathcal{X})$ и сечения $H \in S[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ определим линейный оператор $H_{\mathcal{U}}: \mathcal{U} \rightarrow S(Q, \mathcal{Y})$ формулой $(H_{\mathcal{U}}u)(q) = H(q)u(q)$, $u \in \mathcal{U}$, $q \in Q$.

Теорема 3. Пусть \mathcal{X} и \mathcal{Y} — произвольные расслоения банаховых решеток над Q , $H \in S[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ и пусть \mathcal{U} — послойно плотная векторная подрешетка $S(Q, \mathcal{X})$. Оператор $H_{\mathcal{U}}: \mathcal{U} \rightarrow S(Q, \mathcal{Y})$ положителен (является решеточным гомоморфизмом) тогда и только тогда, когда оператор $H(q): \mathcal{X}(q) \rightarrow \mathcal{Y}(q)$ положителен (является решеточным гомоморфизмом) для каждой точки $q \in Q$.

◁ Достаточность очевидна. Покажем необходимость. Зафиксировав произвольную точку $q \in Q$, рассмотрим всюду плотную в $\mathcal{X}(q)$ векторную подрешетку $\mathcal{U}(q) := \{u(q) : u \in \mathcal{U}\}$ и линейный оператор $H_q := H(q)|_{\mathcal{U}(q)}: \mathcal{U}(q) \rightarrow \mathcal{Y}(q)$. Если $x \in \mathcal{U}(q)$, то для сечения $u \in \mathcal{U}$ со значением $u(q) = x$ мы имеем $u^+(q) = u(q)^+ = x^+$, откуда $H_q x^+ = H(q)u^+(q) = (H_{\mathcal{U}}u^+)(q)$. Следовательно, в случае $H_{\mathcal{U}} \geq 0$ мы получаем $H_q x \geq 0$ для $x \geq 0$, а если $H_{\mathcal{U}}$ — решеточный гомоморфизм, то для любого $x \in \mathcal{U}(q)$

$$H_q(x^+) = H_{\mathcal{U}}(u^+)(q) = (H_{\mathcal{U}}u)^+(q) = (H_{\mathcal{U}}u)(q)^+ = (H(q)u(q))^+ = (H_q x)^+.$$

Остается заметить, что из положительности (решеточной гомоморфности) сужения H_q ограниченного оператора $H_{\mathcal{U}}(q)$ на всюду плотную векторную подрешетку $\mathcal{U}(q) \subset \mathcal{X}(q)$ следует положительность (решеточная гомоморфность) самого оператора $H_{\mathcal{U}}(q)$. ▷

Пространство линейных операторов, действующих в векторных решетках, по умолчанию снабжается порядком, порожденным конусом положительных операторов. Тогда для расслоений банаховых решеток \mathcal{X} и \mathcal{Y} над Q каждое из пространств $B(\mathcal{X}(q), \mathcal{Y}(q))$ оказывается упорядоченным, и на векторном пространстве $S[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ (и его подпространствах) возникает естественный поточечный порядок.

Следствие. Если \mathcal{X} и \mathcal{Y} — непрерывные расслоения банаховых решеток над непустым компактом Q без изолированных точек, то определенные в [5] биекции между пространствами $CD_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$, $C[\tilde{\mathcal{X}}, \tilde{\mathcal{Y}}]$, $\text{Orth}(C(Q, \mathcal{X}), CD_0(Q, \mathcal{Y}))$, $\text{Orth}(C(\tilde{Q}, \tilde{\mathcal{X}}), C(\tilde{Q}, \tilde{\mathcal{Y}}))$ являются не только линейными изометриями, но и порядковыми изоморфизмами.

Литература

1. Гутман А. Е. Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Тр. Ин-та математики СО РАН.—Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1995.—Т. 29.—С. 63–211.
2. Кусраев А. Г. Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
3. Gierz G. Bundles of Topological Vector Spaces and Their Duality.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1982.—296 p.
4. Kusraev A. G., Tabuev S. N. Banach lattices of continuous sections // Владикавк. мат. журн.—2012.—Т. 14, № 4.—С. 41–44.
5. Гутман А. Е., Коптев А. В. Пространства CD_0 -сечений и CD_0 -гомоморфизмов банаховых расслоений // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. Математика, механика, информатика.—2007.—Т. 7, вып. 4.—С. 27–48.
6. Гутман А. Е., Коптев А. В. Пространства CD_0 -функций и удвоение по Александрову // Владикавк. мат. журн.—2007.—Т. 9, № 3.—С. 11–21.

Статья поступила 19 ноября 2013 г.

ГУТМАН АЛЕКСАНДР ЕФИМОВИЧ
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
заведующий лабораторией функционального анализа
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4;
Новосибирский государственный университет,
профессор кафедры математического анализа
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2
E-mail: gutman@math.nsc.ru

КОПТЕВ АЛЕКСАНДР ВИКТОРОВИЧ
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
старший науч. сотрудник лаб. функционального анализа
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4
E-mail: koptev@math.nsc.ru

CONTINUOUS-DISCRETE SECTIONS OF BUNDLES OF BANACH LATTICES

Gutman A. E., Koptev A. V.

The notion of a continuous bundle of Banach lattices is clarified and the order properties are studied of the space of CD_0 -sections of such a bundle.

Key words: continuous Banach bundle, Banach lattice, bundle of Banach lattices, CD_0 -section of a Banach bundle, Alexandroff duplicate.