Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2014. Том 55, № 2

УДК 517.98

КОНЕЧНОМЕРНОСТЬ И СЕПАРАБЕЛЬНОСТЬ СЛОЕВ БАНАХОВЫХ РАССЛОЕНИЙ

А. Е. Гутман, А. В. Коптев

Аннотация. Исследованы топологические характеристики множества точек, в которых слои просторного банахова расслоения над экстремально несвязным компактом конечномерны или сепарабельны. Установлена связь между конечномерностью или сепарабельностью слоев расслоения и аналогичными свойствами слоев его просторной оболочки. Получен новый критерий существования сопряженного расслоения.

Ключевые слова: непрерывное банахово расслоение, просторная оболочка, экстремально несвязный компакт, σ-изолированная точка.

Как известно (см. [1]), всякое пространство Банаха — Канторовича $\mathscr{U}$ изоморфно фундаменту пространства $C_\infty(Q, \mathscr{X})$ расширенных непрерывных сечений подходящего просторного банахова расслоения $\mathscr{X}$ над экстремально несвязным компактом Q. При этом свойства расслоения $\mathscr{X}$ или отдельных его слоев сказываются на аналогичных глобальных и локальных свойствах пространства $\mathscr{U}$. В частности, локальная конечномерность и порядковая сепарабельность пространства $\mathscr{U}$ тесно связаны с конечномерностью и сепарабельностью слоев $\mathscr{X}$.

В данной работе изучаются топологические характеристики множества точек, в которых слои просторного банахова расслоения конечномерны или сепарабельны, исследуется связь между конечномерностью или сепарабельностью слоев расслоения и аналогичными свойствами слоев его просторной оболочки, а также устанавливается критерий существования сопряженного расслоения в сепарабельном случае.

Всюду ниже $\mathscr{X}$ — произвольное непрерывное банахово расслоение над экстремально несвязным компактом Q, $\overline{\mathscr{X}}$ — просторная оболочка расслоения $\mathscr{X}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\overline{\omega} = \omega \cup \{\infty\}$. Используются терминология и обозначения, принятые в [1, 2].

§ 1. Предварительные сведения

1.1. *Размерностью* расслоения $\mathscr{X}$ назовем отображение $\dim \mathscr{X} : Q \to \overline{\omega}$, сопоставляющее каждой точке $q \in Q$ размерность $\dim \mathscr{X}(q) \in \omega$ слоя $\mathscr{X}(q)$, если он конечномерен, и принимающее значение $(\dim \mathscr{X})(q) = \infty$ в противном случае. Размерность расслоения $\mathscr{X}$ *ограничена* (на $P \subset Q$), если $\dim \mathscr{X} \leq n$ (на P) для некоторого $n \in \omega$. Размерность $\mathscr{X}$ *локально ограничена* на $P \subset Q$, если она ограничена в окрестности каждой точки $p \in P$.

Для любых $F, G : Q \to \overline{\omega}$ и $d \in \overline{\omega}$ положим $\{F \leq d\} := \{q \in Q : F(q) \leq d\}$. Аналогично вводятся обозначения $\{F < d\}$, $\{F = d\}$, $\{F = G < d\}$ и т. п.

1.2. (1) *Пусть $u_1, \dots, u_n \in C(Q, \mathscr{X})$ и $q \in Q$. Если $u_1(q), \dots, u_n(q)$ линейно независимы, то $u_1, \dots, u_n$ поточечно линейно независимы в некоторой окрестности точки q.*

(2) *Для любого $n \in \omega$ множества $\{\dim \mathscr{X} < n\}$ и $\{\dim \mathscr{X} \le n\}$ замкнуты, а множества $\{\dim \mathscr{X} > n\}$ и $\{\dim \mathscr{X} \ge n\}$ открыты.*

$\triangleleft$ (1) Следует из [3, 18.1].

(2) Достаточно показать открытость множества $\{\dim \mathscr{X} \ge n\}$. Случай $n = 0$ тривиален. В случае $n > 0$ для любой точки $q \in \{\dim \mathscr{X} \ge n\}$ слой $\mathscr{X}(q)$ содержит n линейно независимых элементов, которые по теореме Дюпре [4, 1.1] являются значениями n сечений из $C(Q, \mathscr{X})$. Тогда в силу (1) точка q входит в $\{\dim \mathscr{X} \ge n\}$ вместе с некоторой своей окрестностью. $\triangleright$

Замечание. Утверждение 1.2 справедливо для любого топологического пространства Q.

1.3. *Для $n \in \omega$ рассмотрим пять условий:*

$$
\begin{array}{ll}
\{\dim \mathscr{X} = n\} \text{ открыто;} & \\
\{\dim \mathscr{X} < n\} \text{ открыто;} & \{\dim \mathscr{X} \le n\} \text{ открыто;} \\
\{\dim \mathscr{X} > n\} \text{ замкнуто;} & \{\dim \mathscr{X} \ge n\} \text{ замкнуто.}
\end{array} \tag{$*$}
$$

Если все слои $\mathscr{X}$ конечномерны, то следующие утверждения равносильны:

(1) *одно из условий $(*)$ выполнено для всех $n \in \omega$;*

(2) *каждое из условий $(*)$ выполнено для всех $n \in \omega$;*

(3) *упомянутые в $(*)$ множества открыто-замкнуты для всех $n \in \omega$;*

(4) *$\{\dim \mathscr{X} = n\}$ замкнуто для всех $n \in \omega$ и размерность $\mathscr{X}$ ограничена;*

(5) *существует конечное разбиение Q на открыто-замкнутые множества такое, что размерность $\mathscr{X}$ постоянна на каждом элементе этого разбиения.*

$\triangleleft$ Утверждения (1)–(3) попарно равносильны в силу [2, 3.2.8]. Из (3) следует (5), поскольку множества $\{\dim \mathscr{X} = n\}$, $n \in \omega$, составляют разбиение и, в частности, покрытие компакта Q. Импликации (5)$\Rightarrow$(4)$\Rightarrow$(1) очевидны. $\triangleright$

Замечание. Утверждение 1.3 справедливо для любого компакта Q.

1.4. *Для любого открыто-замкнутого множества $U \subset Q$ ограничение просторной оболочки $\overline{\mathscr{X}}|_U$ является просторной оболочкой ограничения $\mathscr{X}|_U$.*

§ 2. Конечномерность слоев банаховых расслоений

Данный параграф посвящен изучению топологических характеристик множества точек, в которых слои банахова расслоения конечномерны, а также установлению взаимосвязи между конечномерностью слоев расслоения $\mathscr{X}$ и слоев его просторной оболочки $\overline{\mathscr{X}}$.

2.1. Теорема. *Если расслоение $\mathscr{X}$ просторно, то множество $\{\dim \mathscr{X} = n\}$ открыто-замкнуто для любого числа $n \in \omega$.*

$\triangleleft$ Достаточно для каждого числа $n \in \mathbb{N}$ показать, что множество $P := \{\dim \mathscr{X} \ge n\}$ открыто-замкнуто.

Случай $P = \varnothing$ тривиален. Пусть $P \ne \varnothing$. Сначала с каждой точкой $p \in P$ свяжем некоторые сечения $u_1^p, \dots, u_n^p \in C(Q, \mathscr{X})$ и некоторую открыто-замкнутую окрестность U_p точки p.

Итак, пусть $p \in P$. Поскольку $\dim \mathscr{X}(p) \geq n$, привлекая лемму об ε-перпендикуляре [5, 8.4.1], в $\mathscr{X}(p)$ можно подобрать элементы $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющие следующим условиям: $\|x_1\| = \cdots = \|x_n\| = 1$, и если $n \neq 1$, то для всех $k \in \{2, \ldots, n\}$ и $x \in \operatorname{lin}\{x_1, \ldots, x_{k-1}\}$ выполнено неравенство

$$\|x_k - x\| \geq \tfrac{1}{2}.$$

По теореме Дюпре существуют сечения $u_1^p, \ldots, u_n^p \in C(Q, \mathscr{X})$ со значениями $u_1^p(p) = x_1, \ldots, u_n^p(p) = x_n$. Вследствие леммы из [6] имеется такая окрестность U_p точки p, что

$$\tfrac{1}{2}|\!|\!| u |\!|\!|(p) \leq |\!|\!| u |\!|\!| \leq \tfrac{3}{2}|\!|\!| u |\!|\!|(p) \text{ на } U_p \text{ для всех } u \in \operatorname{lin}\{u_1^p, \ldots, u_n^p\}.$$

При этом окрестность U_p можно считать открыто-замкнутой. Далее,

$$|\!|\!| u_1^p |\!|\!| \leq \tfrac{3}{2}, \ \ldots, \ |\!|\!| u_n^p |\!|\!| \leq \tfrac{3}{2} \text{ и } |\!|\!| u_1^p |\!|\!| \geq \tfrac{1}{2} \text{ на } U_p,$$

и если $n \neq 1$, то

$$|\!|\!| u_k^p - u |\!|\!| |_{U_p} \geq \tfrac{1}{2}|\!|\!| u_k^p - u |\!|\!|(p) = \tfrac{1}{2}\|x_k - u(p)\| \geq \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}$$

для всех $k \in \{2, \ldots, n\}$ и $u \in \operatorname{lin}\{u_1^p, \ldots, u_{k-1}^p\}$.

В силу принципа исчерпывания (см., например, [1, 1.2.1, 1.2.8]) существует семейство $(V_p)_{p\in P}$ попарно не пересекающихся открыто-замкнутых подмножеств Q такое, что $V_p \subset U_p$ для всех $p \in P$ и

$$\operatorname{cl} \bigcup_{p\in P} V_p = \operatorname{cl} \bigcup_{p\in P} U_p.$$

Для каждого $k \in \{1, \ldots, n\}$ определим сечение u_k над $\bigcup\limits_{p\in P} V_p$, положив $u_k = u_k^p$ на V_p для всех $p \in P$. В таком случае

$$|\!|\!| u_1 |\!|\!| \leq \tfrac{3}{2}, \ \ldots, \ |\!|\!| u_n |\!|\!| \leq \tfrac{3}{2} \text{ и } |\!|\!| u_1 |\!|\!| \geq \tfrac{1}{2}$$

и если $n \neq 1$, то

$$|\!|\!| u_k - u |\!|\!| \geq 1/4 \text{ для всех } k \in \{2, \ldots, n\}, \quad u \in \operatorname{lin}\{u_1, \ldots, u_{k-1}\}. \qquad (**)$$

Благодаря просторности расслоения $\mathscr{X}$ сечения $u_1, \ldots, u_n$ продолжаются до непрерывных сечений $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n$ над $\operatorname{cl} \bigcup\limits_{p\in P} V_p$. При этом $|\!|\!| \bar{u}_1 |\!|\!| \geq 1/2$ и, если $n \neq 1$, то, как легко убедиться, для $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n$ имеет место аналог соотношений $(**)$. Отсюда вытекает поточечная линейная независимость сечений $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n$. В частности, $\operatorname{cl} \bigcup\limits_{p\in P} V_p \subset P$. С другой стороны,

$$P \subset \operatorname{cl} P \subset \operatorname{cl} \bigcup_{p\in P} U_p \subset \operatorname{cl} \bigcup_{p\in P} V_p.$$

Таким образом, $P = \operatorname{cl} \bigcup\limits_{p\in P} V_p$ — открыто-замкнутое множество. $\triangleright$

Замечание. Как видно из только что завершенного доказательства, если расслоение $\mathscr{X}$ просторно, то для любого числа $n \geq 1$ найдутся поточечно линейно независимые на $\{\dim \mathscr{X} \geq n\}$ сечения $u_1, \ldots, u_n \in C(Q, \mathscr{X})$.

2.2. Следствие. *Пусть расслоение $\mathscr{X}$ просторно.*

(1) *Если все слои $\mathscr{X}$ конечномерны, то существует конечное разбиение компакта Q на открыто-замкнутые множества такое, что на каждом элементе этого разбиения размерность $\mathscr{X}$ постоянна.*

(2) *Множество $\{\dim \mathscr{X} < \infty\}$ открыто и σ-замкнуто, а $\{\dim \mathscr{X} = \infty\}$ — замкнуто и σ-открыто.*

(3) *Следующие утверждения попарно равносильны:*

(а) *множество $\{\dim \mathscr{X} < \infty\}$ открыто-замкнуто;*

(б) *множество $\{\dim \mathscr{X} = \infty\}$ открыто-замкнуто;*

(в) *множество значений $\dim \mathscr{X}$ конечно.*

(4) *Если слой $\mathscr{X}(q)$ в σ-изолированной точке $q \in Q$ бесконечномерен, то слои $\mathscr{X}$ бесконечномерны в некоторой окрестности точки q.*

$\triangleleft$ Утверждение (1) следует из 2.1 и 1.3 (см. (1)⇒(4)); (2) непосредственно вытекает из 2.1; в (3) равносильность (а)⇔(б) очевидна, импликация (а)⇒(в) следует из (1) и 1.4, а 2.1 обеспечивает импликацию (в)⇒(а). Для доказательства (4) заметим, что если σ-изолированная точка не принадлежит открытому σ-замкнутому множеству (каковым согласно (2) является $\{\dim \mathscr{X} < \infty\}$), то она не может быть точкой прикосновения этого множества (см., например, [1, 1.1.8]). $\triangleright$

2.3. *Все слои $\overline{\mathscr{X}}$ конечномерны тогда и только тогда, когда размерность $\mathscr{X}$ ограничена. В этом случае размерность $\overline{\mathscr{X}}$ также ограничена и* $\max\dim \overline{\mathscr{X}} = \max\dim \mathscr{X}$.

$\triangleleft$ Если все слои $\overline{\mathscr{X}}$ конечномерны, то в силу 2.2 (1) размерность $\overline{\mathscr{X}}$ ограничена, а тогда ограничена и размерность $\mathscr{X}$.

Пусть теперь размерность $\mathscr{X}$ ограничена и $\max\dim \mathscr{X} = n > 0$ (случай $n = 0$ тривиален). Предположим, что в произвольной точке $q \in Q$ слой расслоения $\overline{\mathscr{X}}$ содержит k линейно независимых элементов. По теореме Дюпре эти элементы являются значениями некоторых сечений $u_1, \dots, u_k \in C(Q, \overline{\mathscr{X}})$. Согласно 1.2 (1) сечения $u_1, \dots, u_k$ поточечно линейно независимы в некоторой окрестности U точки q. Кроме того, поскольку $\mathscr{X}$ — всюду плотное подрасслоение $\overline{\mathscr{X}}$, для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ множество $D_j := \{p \in Q : u_j(p) \in \mathscr{X}(p)\}$ является котощим в Q (см. [1, 2.5.8]), а значит, котощим в Q является и пересечение $\bigcap\limits_{j=1}^{k} D_j$. Тогда $\bigcap\limits_{j=1}^{k} D_j$ всюду плотно в компакте Q и имеет с окрестностью U некоторую общую точку p. Получаем, что $u_1(p), \dots, u_k(p)$ линейно независимы и лежат в $\mathscr{X}(p)$. Стало быть, $k \le n$. Следовательно, размерность любого слоя расслоения $\overline{\mathscr{X}}$ не превосходит n. $\triangleright$

2.4. Следствие. *Если $\mathscr{X}$ имеет постоянную конечную размерность, то $\mathscr{X}$ — просторное расслоение.*

$\triangleleft$ Согласно 2.3 в рассматриваемом случае имеем $\dim \overline{\mathscr{X}} \equiv \dim \mathscr{X} < \infty$, а значит, $\overline{\mathscr{X}} = \mathscr{X}$. $\triangleright$

2.5. Теорема. *Если все слои $\mathscr{X}$ конечномерны, то следующие утверждения попарно равносильны:*

(1) *расслоение $\mathscr{X}$ просторно;*

(2) *множество $\{\dim \mathscr{X} = n\}$ открыто-замкнуто для любого $n \in \omega$;*

(3) *существует конечное разбиение Q на открыто-замкнутые множества такое, что размерность $\mathscr{X}$ постоянна на каждом элементе этого разбиения.*

(См. также равносильные условия 1.3.)

$\triangleleft$ Условие (1) влечет (3) благодаря 2.2 (1); импликация (3)$\Rightarrow$(2) очевидна (см. также 1.3); для обоснования (2)$\Rightarrow$(1) достаточно заметить, что в случае (2) из 2.4 и 1.4 следует совпадение $\mathscr{X}$ с $\overline{\mathscr{X}}$ на множествах $\{\dim \mathscr{X} = n\}$. $\triangleright$

2.6. (1) *Имеют место равенства*

$$\{\mathscr{X} = \overline{\mathscr{X}}\} \cap \{\dim \mathscr{X} < \infty\} = \{\mathscr{X} = \overline{\mathscr{X}}\} \cap \{\dim \overline{\mathscr{X}} < \infty\}$$
$$= \{\dim \mathscr{X} = \dim \overline{\mathscr{X}} < \infty\} = \bigcup_{n\in\omega} \{\dim \mathscr{X} = \dim \overline{\mathscr{X}} = n\} = \bigcup_{n\in\omega} \operatorname{int}\{\dim \mathscr{X} = n\}.$$

(2) *Если* $q \in Q$ *и* $\dim \mathscr{X}(q) = n < \infty$, *то слои* $\mathscr{X}(q)$ *и* $\overline{\mathscr{X}}(q)$ *совпадают тогда и только тогда, когда* $\dim \mathscr{X} = n$ *в окрестности точки* q.

(3) *Справедливы равенства*

$$\begin{aligned}
\{\dim \overline{\mathscr{X}} = 0\} &= \operatorname{int}\{\dim \mathscr{X} = 0\};\\
\{\dim \overline{\mathscr{X}} = n\} &= \operatorname{cl}\operatorname{int}\{\dim \mathscr{X} = n\} \text{ для всех } n \in \omega;\\
\{\dim \overline{\mathscr{X}} < \infty\} &= \bigcup_{n\in\omega} \operatorname{cl}\operatorname{int}\{\dim \mathscr{X} = n\}\\
&= \operatorname{int}\{\dim \mathscr{X} = 0\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl}\operatorname{int}\{\dim \mathscr{X} = n\}.
\end{aligned}$$

$\triangleleft$ (1) Первые три равенства достаточно очевидны. Докажем последнее.

«$\subset$» Пусть $\dim \overline{\mathscr{X}}(q) = \dim \mathscr{X}(q) = n < \infty$ для некоторой точки $q \in Q$. Ясно, что $q \in \{\dim \overline{\mathscr{X}} = n\} \cap \{\dim \mathscr{X} \geq n\} \subset \{\dim \mathscr{X} = n\}$. При этом множества $\{\dim \overline{\mathscr{X}} = n\}$ и $\{\dim \mathscr{X} \geq n\}$ открыты в силу 2.1 и 1.2 (2) соответственно. Стало быть, $q \in \operatorname{int}\{\dim \mathscr{X} = n\}$.

«$\supset$» Предположим, что $n \in \omega$ и $\operatorname{int}\{\dim \mathscr{X} = n\} \neq \varnothing$. Рассмотрим произвольное непустое открыто-замкнутое множество $U \subset \operatorname{int}\{\dim \mathscr{X} = n\}$. Вследствие 1.4 и 2.4 имеем $\overline{\mathscr{X}}|_U = \mathscr{X}|_U$. Поскольку открыто-замкнутые множества составляют базу топологии Q, заключаем, что $\overline{\mathscr{X}} = \mathscr{X}$ на $\operatorname{int}\{\dim \mathscr{X} = n\}$, т. е. $\operatorname{int}\{\dim \mathscr{X} = n\} \subset \{\overline{\mathscr{X}} = \mathscr{X}\}$.

Утверждение (2) непосредственно вытекает из (1).

(3) Пусть $n \in \omega$. В силу (1) имеем $\operatorname{int}\{\dim \mathscr{X} = n\} \subset \{\dim \overline{\mathscr{X}} = n\}$, откуда ввиду замкнутости множества $\{\dim \overline{\mathscr{X}} = n\}$ (см. 2.1) следует, что $\operatorname{cl}\operatorname{int}\{\dim \mathscr{X} = n\} \subset \{\dim \overline{\mathscr{X}} = n\}$. Обратное включение очевидно в случае $\{\dim \overline{\mathscr{X}} = n\} = \varnothing$. Пусть теперь $q \in \{\dim \overline{\mathscr{X}} = n\}$ и U — произвольная окрестность q. С учетом 2.1 можно считать, что $U \subset \{\dim \overline{\mathscr{X}} = n\}$ и что окрестность U открыто-замкнута. Из 1.4 и 2.3 немедленно вытекает равенство $\dim \mathscr{X}(p) = \dim\big(\mathscr{X}|_U\big)(p) = n$ для некоторой точки $p \in U$. Тогда $p \in \operatorname{int}\{\dim \mathscr{X} = n\}$ в силу (1). Следовательно, $U \cap \operatorname{int}\{\dim \mathscr{X} = n\} \neq \varnothing$, откуда $q \in \operatorname{cl}\operatorname{int}\{\dim \mathscr{X} = n\}$. Таким образом, $\{\dim \overline{\mathscr{X}} = n\} \subset \operatorname{cl}\operatorname{int}\{\dim \mathscr{X} = n\}$.

Остается заметить, что множество $\{\dim \mathscr{X} = 0\}$ замкнуто (см. 1.2 (2)) и что в экстремально несвязном пространстве внутренности замкнутых множеств замкнуты. $\triangleright$

2.7. Следствие. *Слой* $\overline{\mathscr{X}}(q)$ *в точке* $q \in Q$ *конечномерен тогда и только тогда, когда размерность* $\mathscr{X}$ *ограничена в некоторой окрестности точки* q. *В этом случае* $\dim \mathscr{X} \leq \dim \overline{\mathscr{X}}(q)$ *в окрестности точки* q.

$\triangleleft$ Если $\dim \overline{\mathscr{X}}(q) = n < \infty$, то в силу 2.1 множество $U := \{\dim \overline{\mathscr{X}} = n\}$ является (открыто-замкнутой) окрестностью точки q, причем на U справедливы соотношения $\dim \mathscr{X} \le \dim \overline{\mathscr{X}} = n = \dim \overline{\mathscr{X}}(q)$. Обратно, если $\dim \mathscr{X} \le n < \infty$ на открыто-замкнутой окрестности U точки q, то с учетом 1.4 и 2.3 имеем $\dim \overline{\mathscr{X}} < \infty$ на U и, в частности, $\dim \overline{\mathscr{X}}(q) < \infty$. $\triangleright$

2.8. Следствие. *Пусть все слои $\mathscr{X}$ конечномерны.*

(1) *Слои $\mathscr{X}$ и $\overline{\mathscr{X}}$ совпадают на открытом всюду плотном множестве.*

(2) *Множество $\{\dim \overline{\mathscr{X}} < \infty\}$ открыто, σ-замкнуто и всюду плотно в Q, а равенство $\{\dim \overline{\mathscr{X}} < \infty\} = Q$ равносильно ограниченности $\dim \mathscr{X}$.*

$\triangleleft$ С учетом [2, 3.2.9 (1)] утверждение (1) вытекает из 2.6 (1), а утверждение (2) — из 2.6 (3) и 2.3. $\triangleright$

§ 3. Сепарабельность слоев банаховых расслоений

В этом параграфе приведены условия сепарабельности слоев просторного банахова расслоения и установлен критерий сепарабельности просторной оболочки $\overline{\mathscr{X}}$ расслоения $\mathscr{X}$.

3.1. Теорема. *Если расслоение $\mathscr{X}$ просторно и $q \in Q$ — не σ-изолированная точка, то сепарабельность слоя $\mathscr{X}(q)$ равносильна его конечномерности.*

$\triangleleft$ Пусть слой $\mathscr{X}(q)$ бесконечномерен. Покажем, что никакое его счетное подмножество $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ не является всюду плотным.

Обозначим через B открытый единичный шар $\mathscr{X}(q)$. Поскольку в бесконечномерных банаховых пространствах шары не предкомпактны, для некоторого числа $0 < \varepsilon < 1$ в $\mathscr{X}(q)$ нет конечной ε-сети для B. Поэтому для каждого натурального n найдется элемент $y_n \in B$, удаленный от множества $\{x_1, \dots, x_n\}$ больше, чем на ε. По теореме Дюпре для любого $n \in \mathbb{N}$ имеются сечения $u_n, v_n \in C(Q, \mathscr{X})$, принимающие значения $u_n(q) = x_n$ и $v_n(q) = y_n$. Для каждого n подберем такую открыто-замкнутую окрестность U_n точки q, что

$$\lvert\!\lvert\!\lvert v_n - u_1 \rvert\!\rvert\!\rvert \ge \varepsilon, \ \dots, \ \lvert\!\lvert\!\lvert v_n - u_n \rvert\!\rvert\!\rvert \ge \varepsilon \ \text{ и } \ \lvert\!\lvert\!\lvert v_n \rvert\!\rvert\!\rvert \le 1 \ \text{ на } U_n.$$

Согласно утверждению 12 из [6] существует последовательность $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ попарно не пересекающихся открыто-замкнутых подмножеств Q, удовлетворяющая следующим условиям:

$$D_k \subset U_k, \quad q \in \operatorname{cl} \bigcup_{n \ge k} D_n \ \text{ для всех } k \in \mathbb{N}, \quad q \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n.$$

Рассмотрим открытое множество $D_0 := Q \setminus \operatorname{cl} \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} D_n$ и определим на открытом всюду плотном подмножестве $D_0 \cup \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} D_n$ компакта Q сечение v, полагая $v = 0$ на D_0 и $v = v_n$ на D_n для каждого $n \in \mathbb{N}$. Как легко видеть, это сечение непрерывно и ограничено, а значит, ввиду просторности $\mathscr{X}$ оно продолжается до глобального непрерывного сечения $\bar{v}$. Для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\lvert\!\lvert\!\lvert \bar{v} - u_k \rvert\!\rvert\!\rvert\,|_{D_n} = \lvert\!\lvert\!\lvert v_n - u_k \rvert\!\rvert\!\rvert\,|_{D_n} \ge \varepsilon \ \text{ для всех } n \ge k,$$

откуда $\lim\limits_{p\to q} \lvert\!\lvert\!\lvert \bar{v} - u_k \rvert\!\rvert\!\rvert(p) \ge \varepsilon$. Следовательно,

$$\|\bar{v}(q) - x_k\| = \lvert\!\lvert\!\lvert \bar{v} - u_k \rvert\!\rvert\!\rvert(q) = \lim_{p\to q} \lvert\!\lvert\!\lvert \bar{v} - u_k \rvert\!\rvert\!\rvert(p) \ge \varepsilon \ \text{ для всех } k \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, множество $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ не является всюду плотным в $\mathscr{X}(q)$. $\triangleright$

3.2. Лемма. (1) *Любой бесконечный экстремально несвязный компакт (и, в частности, любое бесконечное открыто-замкнутое подмножество такого компакта) содержит не σ-изолированную точку.*

(2) *Всякое конечное σ-открытое подмножество экстремально несвязного компакта состоит из изолированных точек.*

(3) *Если замкнутое σ-открытое подмножество экстремально несвязного компакта бесконечно, то оно несчетно.*

$\triangleleft$ (1) Если q — предельная точка бесконечного счетного множества $P \subset Q$, то пересечение окрестностей $Q\backslash\{p\}$ $(p \in P\backslash\{q\})$ точки q не содержит отличного от q элемента P и тем самым не является окрестностью точки q.

(2) Достаточно показать, что множество $\{q\}$ может быть σ-открытым лишь для изолированной точки $q \in Q$. Как легко видеть, в случае σ-открытости множества $\{q\}$ существует такое семейство $(U_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ попарно не пересекающихся непустых открыто-замкнутых подмножеств Q, что $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} U_n = Q\backslash\{q\}$. Если q — неизолированная точка, то $q \in \operatorname{cl} Q\backslash\{q\}$. Не нарушая общности, можно считать, что $q \in \operatorname{cl} \bigcup\limits_{n<0} U_n$. Тогда открытые множества $\operatorname{cl} \bigcup\limits_{n<0} U_n, U_0, U_1, \dots$ образуют покрытие компакта Q, не имеющее конечного подпокрытия.

(3) Допустим, что замкнутое подмножество $\{q_0, q_1, \dots\} \subset Q$, состоящее из попарно различных точек q_n, представляется в виде пересечения $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ открытых подмножеств $U_n \subset Q$. Поскольку все точки бесконечного компактного множества не могут быть изолированными, можно считать, что q_0 — неизолированная точка. С другой стороны, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n\backslash\{q_n\} = \{q_0\}$ вопреки (2). $\triangleright$

3.3. Следствие. *Следующие свойства просторного расслоения $\mathscr{X}$ попарно равносильны:*

(1) *слои $\mathscr{X}$ сепарабельны во всех не σ-изолированных точках;*

(2) *слои $\mathscr{X}$ конечномерны во всех неизолированных точках;*

(3) *множество $\{\dim \mathscr{X} = \infty\}$ счетно;*

(4) *множество $\{\dim \mathscr{X} = \infty\}$ конечно;*

(5) *существует разбиение компакта Q на открыто-замкнутые множества $Q_0, Q_1, \dots, Q_n$ $(n \in \omega)$ такое, что на каждом из множеств $Q_1, \dots, Q_n$ размерность $\mathscr{X}$ постоянна и конечна, а Q_0 — некоторое конечное множество изолированных точек, в которых слои $\mathscr{X}$ бесконечномерны.*

$\triangleleft$ Согласно 2.2 (2) множество $Q_0 := \{\dim \mathscr{X} = \infty\}$ замкнуто и σ-открыто.

(1)$\Rightarrow$(2). Благодаря 3.1 в случае (1) множество Q_0 состоит из σ-изолированных точек, а значит, в силу 2.2 (4) является открытым. Учитывая 3.2 (1), заключаем, что открыто-замкнутое множество Q_0 конечно и поэтому содержит только изолированные точки.

(2)$\Rightarrow$(4). Множество Q_0, будучи замкнутым в Q, компактно, а компактное множество, состоящее из изолированных точек, конечно.

(4)$\Rightarrow$(5). Если множество Q_0 конечно, то согласно 3.2 (2) оно состоит из изолированных точек. Тогда множества Q_0 и $Q\backslash Q_0$ открыто-замкнуты и в случае $Q_0 \neq Q$ к просторному расслоению $\mathscr{X}|_{Q\backslash Q_0}$ можно применить 2.2 (1).

Импликация (5)$\Rightarrow$(1) очевидна, а равносильность утверждений (3) и (4) вытекает из 3.2 (3). $\triangleright$

Напомним, что расслоение $\mathscr{X}$ называется *сепарабельным*, если $C(Q, \mathscr{X})$ содержит счетное послойно плотное в $\mathscr{X}$ множество сечений.

3.4. Теорема. *Следующие свойства просторного расслоения $\mathscr{X}$ попарно равносильны:*

(1) *расслоение $\mathscr{X}$ сепарабельно;*

(2) *все слои $\mathscr{X}$ сепарабельны;*

(3) *слои $\mathscr{X}$ сепарабельны во всех изолированных и во всех не σ-изолированных точках;*

(4) *слои $\mathscr{X}$ конечномерны всюду, кроме некоторого конечного множества изолированных точек, в которых слои $\mathscr{X}$ сепарабельны;*

(5) *существует разбиение компакта Q на открыто-замкнутые множества $Q_0, Q_1, \dots, Q_n$ ($n \in \omega$) такое, что на каждом из множеств $Q_1, \dots, Q_n$ размерность $\mathscr{X}$ постоянна и конечна, а Q_0 — некоторое конечное множество изолированных точек, в которых слои $\mathscr{X}$ сепарабельны.*

$\lhd$ Импликации (1)$\Rightarrow$(2) и (2)$\Rightarrow$(3) очевидны, а (3)$\Rightarrow$(4) и (4)$\Rightarrow$(5) вытекают из 3.3 ((1)$\Rightarrow$(5)) и 3.3 ((4)$\Rightarrow$(5)) соответственно. Остается показать, что (5)$\Rightarrow$(1).

Пусть $Q_0, Q_1, \dots, Q_n$ — упомянутое в (5) разбиение. Достаточно для каждого множества Q_i предъявить счетное подмножество $C(Q, \mathscr{X})$, послойно плотное в $\mathscr{X}$ на Q_i. Будем считать, что Q_i непустые.

Счетное множество непрерывных сечений, послойно плотное в $\mathscr{X}$ на Q_0, можно получить, взяв в каждом слое $\mathscr{X}$ над Q_0 по счетному всюду плотному подмножеству этого слоя и воспользовавшись теоремой Дюпре.

Пусть теперь $i \in \{1, \dots, n\}$ и $\dim \mathscr{X} \equiv m$ на Q_i. Случай $m = 0$ тривиален. Предположим, что $m > 0$. Ввиду замечания 2.1 существуют поточечно линейно независимые на Q_i сечения $u_1, \dots, u_m \in C(Q, \mathscr{X})$. Ясно, что совокупность линейных комбинаций $\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j u_j$ с рациональными коэффициентами λ_j послойно плотна в $\mathscr{X}$ на Q_i. $\rhd$

Следствие. *Всякое просторное расслоение с конечномерными слоями сепарабельно.*

3.5. Теорема. *Следующие утверждения попарно равносильны:*

(1) *расслоение $\overline{\mathscr{X}}$ сепарабельно;*

(2) *слои $\mathscr{X}$ сепарабельны на некотором конечном множестве $Q_0 \subset Q$ изолированных точек и размерность $\mathscr{X}$ ограничена на $Q \backslash Q_0$;*

(3) *слои $\mathscr{X}$ сепарабельны на некотором конечном подмножестве $S \subset Q$ и размерность $\mathscr{X}$ локально ограничена на $Q \backslash S$.*

$\lhd$ Импликация (1)$\Rightarrow$(2) вытекает из 3.4 ((1)$\Rightarrow$(5)) в силу $\mathscr{X}(q) \subset \overline{\mathscr{X}}(q)$. Импликация (2)$\Rightarrow$(3) очевидна.

Переходя к доказательству (3)$\Rightarrow$(1), рассмотрим конечное подмножество $S \subset Q$, удовлетворяющее условию (3). Благодаря 2.7 из ограниченности $\dim \mathscr{X}$ в окрестности каждой точки $Q \backslash S$ следует, что $\dim \overline{\mathscr{X}} < \infty$ на $Q \backslash S$, и поэтому слои $\overline{\mathscr{X}}$ сепарабельны на $Q \backslash S$. Кроме того, согласно 3.3 конечность множества $\{\dim \overline{\mathscr{X}} = \infty\} \subset S$ обеспечивает конечномерность и, в частности, сепарабельность слоев $\overline{\mathscr{X}}$ во всех неизолированных точках, а если точка $q \in S$ изолирована, то слой $\overline{\mathscr{X}}(q) = \mathscr{X}(q)$ сепарабелен по предположению (3). Таким образом, расслоение $\overline{\mathscr{X}}$ удовлетворяет условию 3.4 (2), а значит, сепарабельно. $\rhd$

§ 4. Существование сопряженного расслоения

В данном параграфе после доказательства нескольких вспомогательных фактов о гомоморфизмах банаховых расслоений устанавливается связь между конечномерностью и сепарабельностью слоев расслоения $\mathscr{X}$ и существованием сопряженного расслоения $\mathscr{X}'$.

Всюду ниже $\mathscr{R}$ — постоянное расслоение над Q со слоем $\mathbb{R}$.

4.1. Теорема. *Для любого банахова подрасслоения $\mathscr{X}_0$ расслоения $\mathscr{X}$ и любого гомоморфизма $H_0 \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}_0, \mathscr{R})$ существует такой гомоморфизм $H \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$, что $H(q)\big|_{\mathscr{X}_0(q)} = H_0(q)$ для всех $q \in Q$ и $\|H\| = \|H_0\|$.*

◁ Пусть $H_0 \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}_0, \mathscr{R})$. Достаточно рассмотреть случай $\|H_0\| = 1$.

Ясно, что линейный оператор $T_0 : C(Q, \mathscr{X}_0) \to C(Q)$, определяемый формулой $T_0 u = \langle u \mid H_0 \rangle$, удовлетворяет неравенству

$$T_0 u \leq |\!|\!| u |\!|\!| \quad \text{для всех } u \in C(Q, \mathscr{X}_0).$$

Согласно теореме Хана — Банаха — Канторовича (см., например, [7, 1.4.13 (1)]) T_0 продолжается до линейного оператора $T : C(Q, \mathscr{X}) \to C(Q)$ такого, что

$$Tu \leq |\!|\!| u |\!|\!| \quad \text{для всех } u \in C(Q, \mathscr{X}).$$

Тогда с учетом равенства $\{u(q) : u \in C(Q, \mathscr{X})\} = \mathscr{X}(q)$, справедливого по теореме Дюпре, для каждой точки $q \in Q$ формула

$$\langle u(q) \mid H(q) \rangle = (Tu)(q), \quad u \in C(Q, \mathscr{X}),$$

корректно определяет функционал $H(q) \in \mathscr{X}(q)'$. Благодаря теореме [1, 2.4.7] отображение $q \mapsto H(q)$ принадлежит $\operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ и, как легко видеть, является искомым гомоморфизмом. ▷

4.2. Следствие. *Для любой точки $q \in Q$, любого сепарабельного банахова подпространства $X \subset \mathscr{X}(q)$ и любого функционала $x' \in X'$ существует такой гомоморфизм $H \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$, что $H(q)\big|_X = x'$ и $\|H(q)\| = \|x'\|$.*

◁ Пусть $X \subset \mathscr{X}(q)$ — сепарабельное банахово подпространство, и пусть $x' \in X'$. В силу теоремы Дюпре существует такая счетная совокупность сечений $\mathscr{U} \subset C(Q, \mathscr{X})$, что $\{u(q) : u \in \mathscr{U}\}$ — всюду плотное подмножество X. Линейная оболочка множества $\mathscr{U}$ индуцирует некоторое подрасслоение $\mathscr{X}_0$ расслоения $\mathscr{X}$ (см. [1, 2.2.2]). При этом $\mathscr{X}_0(q) = X$. Ясно, что совокупность всех рациональных линейных комбинаций элементов $\mathscr{U}$ представляет собой счетное послойно плотное в $\mathscr{X}_0$ подмножество $C(Q, \mathscr{X}_0)$. В таком случае, как следует из [3, следствие 19.16], найдется гомоморфизм $H_0 \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}_0, \mathscr{R})$, удовлетворяющий равенствам $H_0(q) = x'$ и $\|H_0\| = \|x'\|$. Применение 4.1 дает гомоморфизм $H \in \operatorname{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$, удовлетворяющий соотношениям

$$H(q)\big|_X = H(q)\big|_{\mathscr{X}_0(q)} = H_0(q) = x';$$
$$\|H(q)\| \leq \|H\| = \|H_0\| = \|x'\|;$$
$$\|H(q)\| \geq \Big\| H(q)\big|_{\mathscr{X}_0(q)} \Big\| = \|H_0(q)\| = \|x'\|. \ ▷$$

4.3. Следствие. *Если $\mathscr{X}$ просторно, то для любой точки $q \in Q$, любого сепарабельного банахова подпространства $X \subset \mathscr{X}(q)$ и любого функционала $x' \in X'$ существует такой элемент $\bar{x}' \in \mathscr{X}'(q)$, что $\bar{x}'\big|_X = x'$ и $\|\bar{x}'\| = \|x'\|$.*

4.4. Теорема. *Если существует сопряженное расслоение $\mathscr{X}'$ и слой $\mathscr{X}(q)$ в не σ-изолированной точке $q \in Q$ сепарабелен, то $\mathscr{X}(q)$ конечномерен и совпадает с $\overline{\mathscr{X}}(q)$.*

$\lhd$ Допустим вопреки доказываемому, что сепарабельный слой $\mathscr{X}(q)$ бесконечномерен. В силу 3.1 слой $\overline{\mathscr{X}}(q)$ не является сепарабельным. Поэтому существует такое сепарабельное банахово подпространство $X \subset \overline{\mathscr{X}}(q)$, что $\mathscr{X}(q) \subset X$ и $\mathscr{X}(q) \neq X$. Привлекая теорему отделимости, рассмотрим ненулевой функционал $x' \in X'$, зануляющийся на $\mathscr{X}(q)$. Согласно 4.3 найдется элемент $\bar{x}' \in \overline{\mathscr{X}}'(q)$, удовлетворяющий равенствам $\bar{x}'|_X = x'$ и $\|\bar{x}'\| = \|x'\|$. При этом

$$\|\bar{x}'|_{\mathscr{X}(q)}\| = \|x'|_{\mathscr{X}(q)}\| = 0 < \|x'\| = \|\bar{x}'\|.$$

Тогда по теореме [2, 3.3.5] расслоение $\mathscr{X}$ не имеет сопряженного расслоения.

Итак, в условиях доказываемой теоремы пространство $\mathscr{X}(q)$ конечномерно. Остается сослаться на предложение [2, 3.4.11]. $\rhd$

4.5. Теорема. *Если слои $\mathscr{X}$ во всех не σ-изолированных точках сепарабельны, то следующие утверждения попарно равносильны:*

(1) *существует сопряженное расслоение $\mathscr{X}'$;*

(2) *расслоение $\mathscr{X}$ просторно;*

(3) *существует разбиение компакта Q на открыто-замкнутые множества $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ $(n \in \omega)$ такое, что на каждом из множеств $Q_1, \ldots, Q_n$ размерность $\mathscr{X}$ постоянна и конечна, а Q_0 — некоторое конечное множество изолированных точек.*

В каждом из случаев (1)–(3) справедливо равенство $\mathscr{X}'(q) = \mathscr{X}(q)'$ для всех $q \in Q$.

$\lhd$ (1)$\Rightarrow$(2). Из (1) и 4.4 непосредственно следует, что слои $\overline{\mathscr{X}}$ конечномерны во всех не σ-изолированных точках. Согласно 3.3 слои $\overline{\mathscr{X}}$ конечномерны на множестве всех неизолированных точек. Тогда на этом множестве $\mathscr{X} = \overline{\mathscr{X}}$ в силу [2, 3.4.11]. Кроме того, слои $\mathscr{X}$ и $\overline{\mathscr{X}}$ совпадают в изолированных точках. Таким образом, $\mathscr{X} = \overline{\mathscr{X}}$.

Импликация (2)$\Rightarrow$(3) вытекает из 3.3 ((1)$\Rightarrow$(5)).

(3)$\Rightarrow$(1). Пусть $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ удовлетворяют условию (3). Для каждого индекса $i \in \{0, \ldots, n\}$ совокупность $\{u|_{Q_i} : u \in C(Q, \mathscr{X})\}$ представляет собой послойно плотное в $\mathscr{X}|_{Q_i}$ подмножество $C(Q_i, \mathscr{X}|_{Q_i})$, а значит, согласно [2, 3.2.12] любой гомоморфизм $H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{R})$ удовлетворяет условию $|\!|\!|H|_{Q_i}|\!|\!| \in C(Q_i)$ и, следовательно, $|\!|\!|H|\!|\!| \in C(Q)$. По теореме [2, 3.3.2] существует $\mathscr{X}'$.

Равенство $\mathscr{X}'(q) = \mathscr{X}(q)'$ в неизолированных точках $q \in Q$ следует из [2, 3.4.10 (2), 3.4.4 (8)]. $\rhd$

4.6. Следствие. *Если все слои $\mathscr{X}$ сепарабельны, то существование сопряженного расслоения $\mathscr{X}'$ равносильно просторности $\mathscr{X}$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гутман А. Е.* Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Линейные операторы, согласованные с порядком. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1995. С. 63–211.
2. *Гутман А. Е., Коптев А. В.* Сопряженное банахово расслоение // Нестандартный анализ и векторные решетки. Изд. 2-е. Под ред. С. С. Кутателадзе. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2005. С. 125–201.
3. *Gierz G.* Bundles of topological vector spaces and their duality. Berlin etc.: Springer-Verl., 1982. (Lecture Notes in Math.; 955).

4. *Коптев А. В.* Несколько классов банаховых расслоений с непрерывными слабо непрерывными сечениями // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 3. С. 600–612.
5. *Кутателадзе С. С.* Основы функционального анализа. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2006.
6. *Коптев А. В.* Критерий рефлексивности слоев банахова расслоения // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 4. С. 851–856.
7. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциальное исчисление. Новосибирск: Наука, 1987.

Статья поступила 17 декабря 2013 г.

Гутман Александр Ефимович, Коптев Александр Викторович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`gutman@math.nsc.ru`, `koptev@math.nsc.ru`