

О ВКЛАДЕ А. Г. КУСРАЕВА В СУБДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И БУЛЕВОЗНАЧНЫЙ АНАЛИЗ (К ЕГО 60-ЛЕТИЮ)¹

14 февраля 2013 года исполнилось 60 лет Анатолию Георгиевичу Кусраеву — выдающемуся ученому и организатору науки.

А. Г. Кусраев принадлежит к научной школе академика Л. В. Канторовича и внес выдающийся вклад в пограничные разделы функционального анализа и оптимизации. Широкий резонанс и мировое признание получили исследования А. Г. Кусраева по векторной двойственности, субдифференциальному исчислению, теории мажорируемых операторов

и другим актуальным разделам порядкового анализа. А. Г. Кусраев — один из мировых лидеров в области применения методов математической логики к задачам анализа. Используя технику булевозначных моделей, он дал характеристики новых классов банаховых пространств и операторных алгебр, построил новые мощные версии векторного интегрирования, доказал реализационные теоремы нового типа, связанные с эффектами цикличности структуры идемпотентов. Выдающиеся результаты получены А. Г. Кусраевым в сфере оптимизации, где его техника общего положения дала возможность существенно дополнить признаки оптимальности в экстремальных задачах.

А. Г. Кусраев внес достойный вклад в развитие науки на Северном Кавказе. Он является основателем и бессменным директором Южного математического института РАН и Правительства Республики Северная Осетия-Алания, организатором и бессменным



¹Статья опубликована в журнале «Владикавказский математический журнал» (2013, Том 15, № 1, С. 90–97).

председателем Владикавказского научного центра, создателем и бессменным главным редактором научных журналов «Вестник ВНЦ» и «Владикавказский математический журнал». А. Г. Кусраев удостоен званий «Заслуженный деятель науки РСО-А», «Заслуженный деятель науки РФ», награжден «Орденом Дружбы» и «Орденом Дружбы Республики Южная Осетия». Благодаря личным усилиям А. Г. Кусраева наука юга России получила новые возможности для своего плодотворного развития.

А. Г. Кусраеву принадлежат многочисленные фундаментальные результаты в ряде разделов функционального анализа. Им опубликовано более 270 научных и публицистических трудов, в том числе 24 монографии и 16 учебных пособий. В этой заметке мы остановимся на обсуждении вклада А. Г. Кусраева в выпуклый и булевозначный анализ.

Одним из центральных понятий современного субдифференциального исчисления стало введенное А. Г. Кусраевым отношение общего положения. Конусы A и B в топологическом векторном пространстве X находятся в *общем положении*, если разность $X_0 := A - B$ является дополняемым подпространством X , причем A и B образуют несплюсненную пару в X_0 , т. е. $U \cap A - U \cap B$ — окрестность нуля в X_0 для любой окрестности нуля U в X_0 .

«Несимметричный» случай ($A \neq B$) был включен в рассмотрение по принципиальным соображениям. Ключевую роль здесь играет следующее технологическое наблюдение: конусы $A, B \subset X$ находятся в общем положении тогда и только тогда, когда в X^2 в общем положении находятся конусы $A \times B$ и $\{(x, x) : x \in X\}$. Теперь ясно, как понятие общего положения может быть распространено на любой конечный набор конусов: $A_1, \dots, A_n \subset X$ находятся в *общем положении*, если в X^n в общем положении находятся конусы $A_1 \times \dots \times A_n$ и $\{(x, \dots, x) : x \in X\}$. В результате сопутствующие понятия и факты выпуклого анализа (например, формулы субдифференцирования) распространяются с пар объектов на их произвольные конечные наборы.

Еще одним важным наблюдением служит тот факт, что выпуклые конусы находятся в общем положении тогда и только тогда, когда тем же свойством обладают их преобразования Хёрмандера $H(A) := \bigcup_{t \geq 0} (tA \times \{t\})$. Это обстоятельство позволяет расширить понятие общего положения на произвольные выпуклые множества

$A, B \subset X$, объявив их находящимися в *общем положении*, если в общем положении находятся конусы $H(A), H(B) \subset X \times \mathbb{R}$.

Использование отношения общего положения приводит к многочисленным новым результатам уже в скалярном случае — хотя бы потому, что условие общего положения оказывается способным заменить традиционное для приложений выпуклого анализа более сильное условие Слейтера и даже вытекающее из него условие внутренней точки: *если пересечение выпуклых множеств A и B содержит точку, внутреннюю для A или B , то множества A и B находятся в общем положении.*

Пусть E — топологическое пространство Канторовича с нормальным положительным конусом E^+ (например, пространство L^p или любое другое идеальное банахово пространство), $P: X \rightarrow E \cup \{+\infty\}$ — сублинейный оператор, $\text{dom } P := P^{-1}(E)$. В рассматриваемой ситуации возникает неизбежная задача об изучении *топологического субдифференциала*

$$\partial^c P := \partial P \cap \mathcal{L}(X, E),$$

где $\partial P = \{T \in L(X, E) : (\forall x \in X) Tx \leq Px\}$ — алгебраический субдифференциал P , $L(X, E)$ ($\mathcal{L}(X, E)$) — пространство всех линейных (непрерывных) операторов из X в E .

Если $\text{dom } P = X$ и оператор P непрерывен в нуле, то $\partial^c P = \partial P$. Таким образом, техника вычисления алгебраических субдифференциалов автоматически обслуживает топологический случай для всюду определенных непрерывных сублинейных операторов. Если же $\text{dom } P \neq X$, то равенство $\partial^c P = \partial P$ нельзя гарантировать даже при условии непрерывности P на $\text{dom } P$. Вместе с тем для приложений необходимы формулы субдифференцирования в топологической постановке. Каждая из таких формул по существу представляет собой тонкую форму теоремы существования, в которой при разумных дополнительных топологических ограничениях гарантируется наличие одного или нескольких непрерывных операторов с предписанными алгебраическими свойствами. Развитый А. Г. Кусраевым метод общего положения дает регулярный способ получения таких теорем существования из алгебраической техники субдифференцирования.

В основе метода общего положения лежит формула

$$\pi_E(A \cap B) = \pi_E(A) + \pi_E(B),$$

где $\pi_E(C) = \{T \in \mathcal{L}(X, E) : (\forall x \in C) Tx \leq 0\}$, A и B — конусы в X , находящиеся в общем положении. Иными словами, если $T \in \mathcal{L}(X, E)$ и $T \leq 0$ на $A \cap B$, то существуют такие операторы $T_A, T_B \in \mathcal{L}(X, E)$, что $T = T_A + T_B$, причем $T_A \leq 0$ на A , $T_B \leq 0$ на B . Технически метод общего положения состоит в последовательном использовании формулы $\pi_E(A \cap B) = \pi_E(A) + \pi_E(B)$ и вспомогательного представления $\pi_E(\Phi(C)) = \{T \in \mathcal{L}(X, E) : T \circ \Phi \in \pi_E(C)\}$, где C — конус в топологическом векторном пространстве Y и $\Phi \in \mathcal{L}(Y, X)$.

Пусть $P, Q: X \rightarrow E \cup \{+\infty\}$ — сублинейные операторы. Применение метода общего положения к конусам $\{(x, e, x, f) : x \in X, e, f \in E\}$ и $\text{epi}(P) \times \text{epi}(Q)$ в $(X \times E)^2$, где $\text{epi}(P) := \{(x, e) \in X \times E : Px \leq e\}$ — надграфик P , дает важнейшую для приложений топологическую версию формулы Моро — Рокафеллара

$$\partial^c(P + Q) = \partial^c P + \partial^c Q,$$

согласно которой для любого оператора $T \in \mathcal{L}(X, E)$, удовлетворяющего неравенству $T \leq P + Q$ на X , существуют такие операторы $T_P, T_Q \in \mathcal{L}(X, E)$, что $T = T_P + T_Q$, $T_P \leq P$ и $T_Q \leq Q$ на X . Прямым следствием формулы Моро — Рокафеллара является теорема о сэндвиче: если $-P \leq Q$ на X , то существует такой оператор $T \in \mathcal{L}(X, E)$, что $-P \leq T \leq Q$ на X . Из теоремы о сэндвиче вытекает теорема Мазура — Орлича.

Аналогичные приемы, основанные на методе общего положения, приводят к разнообразным формулам субдифференциального исчисления, справедливым в наиболее широкой из когда-либо рассматриваемых постановок. В число важнейших результатов, установленных А. Г. Кусраевым, входят формулы субдифференцирования конволюций и композиций, а также весьма плодотворное правило линейризации. Введенное и исследованное А. Г. Кусраевым понятие сублинейного оператора Магарам послужило ключом к решению задачи дезинтегрирования, унифицирующего разнообразные факты теории пространств Канторовича, в основе которых лежит теорема Радона — Никодима.

Эти и другие результаты, полученные А. Г. Кусраевым, оказываются не только более общими, но и более сильными, чем их многочисленные частные случаи и модификации, разбросанные в литературе по выпуклому анализу. Начав свою профессиональную деятельность

с изучения векторно-значных субдифференциалов Кларка (в кандидатской диссертации), А. Г. Кусраев установил ряд фундаментальных результатов в области векторной двойственности и приложений функционального анализа к задачам оптимизации и математического моделирования. В его работах субдифференциальное исчисление получило нетривиальное распространение на негладкие операторы, был развит общий метод анализа нелинейных операторов, получены формулы для двойственного описания выпуклых операторов при замене переменной и для вычисления локальных выпуклых аппроксимаций для невыпуклых негладких операторов, в качестве приложения выведены необходимые условия экстремума для нового класса оптимизационных задач, существенно расширены достижения техники, основанной на признаках оптимальности в экстремальных задачах.

Значительный цикл работ А. Г. Кусраева связан с приложениями идей алгебры и логики к задачам функционального анализа. Разработанный им метод исследования алгебраических систем основан на их реализации внутри булевозначных моделей теории множеств.

Булевозначный универсум $\mathbb{V}^{(B)}$, построенный в 1960-х годах в работах Д. Скотта и Р. Соловея, представляет собой класс, зависящий от параметра B , который в рамках теории ZFC для любой полной булевой алгебры B является моделью ZFC относительно особым образом определяемых B -значных оценок истинности $[\varphi]$ формул φ теоретико-множественной сигнатуры $\{=, \in\}$. Эти оценки сначала вводятся для атомарных формул ($x = y$ и $x \in y$), а затем рекурсивно распространяются на произвольные формулы в соответствии с правилами

$$[\varphi \vee \psi] = [\varphi] \vee_B [\psi], \quad [\varphi \wedge \psi] = [\varphi] \wedge_B [\psi], \quad [\neg\varphi] = \neg_B [\varphi], \\ [(\exists x)\varphi] = \sup_B \{[\varphi] : x \in \mathbb{V}^{(B)}\}, \quad [(\forall x)\varphi] = \inf_B \{[\varphi] : x \in \mathbb{V}^{(B)}\}.$$

Пусть $\varphi(\bar{x})$ — формула теоретико-множественной сигнатуры, $\bar{x} = x_1, \dots, x_n$. В контексте $\bar{x} \in \mathbb{V}^{(B)}$ говорят, что $\varphi(\bar{x})$ *истинно в* $\mathbb{V}^{(B)}$ или *внутри* $\mathbb{V}^{(B)}$ *выполняется* $\varphi(\bar{x})$, и пишут $\mathbb{V}^{(B)} \models \varphi(\bar{x})$, если $[\varphi(\bar{x})] = 1_B$. Класс $\mathbb{V}^{(B)}$ служит (булевозначной) моделью ZFC в том смысле, что для любой теоремы $\varphi(\bar{x})$ теории ZFC утверждение $\mathbb{V}^{(B)} \models (\forall \bar{x})\varphi(\bar{x})$ также является теоремой ZFC. Этот факт называют *принципом переноса*.

Благодаря принципу переноса записи $[\varphi(\bar{x})]$ и $\mathbb{V}^{(B)} \models \varphi(\bar{x})$ обретают смысл не только для формул φ сигнатуры теории множеств

$\{=, \in\}$, но и для формул, содержащих вхождения любых определяемых в ZFC предикатных и функциональных символов. Кроме того, в синтаксисе $\llbracket \cdot \cdot \cdot \rrbracket$ и $\mathbb{V}^{(B)} \models (\cdot \cdot \cdot)$ допускается неформальное употребление «внешних» термов. Так, в контексте $f: X \rightarrow \mathbb{V}^{(B)}$, $x_1, x_2 \in X$, $b \in B$ запись $\llbracket f(x_1) = f(x_2) \rrbracket = b$ служит удобным сокращением формулы $(\exists y_1, y_2)(y_1 = f(x_1) \wedge y_2 = f(x_2) \wedge \llbracket y_1 = y_2 \rrbracket = b)$.

Элемент $u \in \mathbb{V}^{(B)}$ называют *подъемом предиката* $p: X \rightarrow B$, где X — подмножество $\mathbb{V}^{(B)}$, если для всех $y \in \mathbb{V}^{(B)}$

$$\llbracket y \in u \rrbracket = \sup_B \{p(x) \wedge_B \llbracket y = x \rrbracket : x \in X\}.$$

Подъем предиката $p: X \rightarrow \{1_B\}$ называется *подъемом множества* X и обозначается символом $X \uparrow$. В булевозначном универсуме $\mathbb{V}^{(B)}$ существуют подъемы любых предикатов и любой элемент $\mathbb{V}^{(B)}$ является подъемом какого-либо предиката. Этот факт называют *принципом подъема*. Кроме того, $\mathbb{V}^{(B)}$ удовлетворяет *принципу максимума*: для любой формулы $\varphi(x, \bar{y})$ в ZFC доказуема формула

$$(\forall \bar{y} \in \mathbb{V}^{(B)})(\exists x_0 \in \mathbb{V}^{(B)}) \llbracket \varphi(x_0, \bar{y}) \rrbracket = \llbracket (\exists x) \varphi(x, \bar{y}) \rrbracket.$$

В силу принципов переноса и максимума для любого определяемого в ZFC терма $\tau(\bar{x})$ в ZFC доказуемо

$$(\forall \bar{x} \in \mathbb{V}^{(B)})(\exists! y \in \mathbb{V}^{(B)}) \mathbb{V}^{(B)} \models (y = \tau(\bar{x})).$$

Такой элемент $y \in \mathbb{V}^{(B)}$, служащий значением терма $\tau(\bar{x})$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, условимся обозначать символом $\llbracket \tau(\bar{x}) \rrbracket$.

Для любого элемента $X \in \mathbb{V}^{(B)}$ класс $\{x \in \mathbb{V}^{(B)} : \mathbb{V}^{(B)} \models (x \in X)\}$ является множеством, которое называют *спуском* X и обозначают символом $X \downarrow$. Если $X, Y, f, p \in \mathbb{V}^{(B)}$ таковы, что $\mathbb{V}^{(B)} \models (f: X^n \rightarrow Y, p \subset X^n)$, то *спуски* $f \downarrow: X \downarrow^n \rightarrow Y \downarrow$, $p \downarrow \subset X \downarrow^n$ определяются формулами

$$\begin{aligned} f \downarrow(x_1, \dots, x_n) &= \llbracket f(x_1, \dots, x_n) \rrbracket, \\ (x_1, \dots, x_n) \in p \downarrow &\Leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models ((x_1, \dots, x_n) \in p). \end{aligned}$$

Пусть Σ — конечная сигнатура, снабженная интерпретацией $[\cdot]_X$. Предположим, что $X \in \mathbb{V}^{(B)}$, $[s]_X \in \mathbb{V}^{(B)}$ для всех символов $s \in \Sigma$ и внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ истинно утверждение « $(X, [\cdot]_X)$ — алгебраическая система сигнатуры Σ ». Рассмотрим интерпретацию $[\cdot]_{X \downarrow}$, полагая $[s]_{X \downarrow} := [s]_X \downarrow$ для всех символов $s \in \Sigma$. Алгебраическая система

$(X\downarrow, [\cdot]_{X\downarrow})$ называется *спуском системы* X (точнее, очисткой спуска) и по традиции обозначается тем же символом $X\downarrow$. При этом

$$X\downarrow \models \varphi(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models (X \models \varphi(x_1, \dots, x_n))$$

для всех $x_1, \dots, x_n \in X\downarrow$, где $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ — произвольная формула сигнатуры Σ .

Каноническое вложение $X \mapsto X^\wedge$ класса всех множеств \mathbb{V} в универсум $\mathbb{V}^{(B)}$ определяется следующей рекурсией по принадлежности: $X^\wedge := \{x^\wedge : x \in X\}^\uparrow$. Пусть $(X, [\cdot]_X)$ — алгебраическая система конечной сигнатуры Σ . Определим интерпретацию $[\cdot]_{X^\wedge}$ сигнатуры Σ , полагая

$$\begin{aligned} [f]_{X^\wedge} &:= \{ \llbracket (x_1^\wedge, \dots, x_n^\wedge, [f]_X(x_1, \dots, x_n)^\wedge) \rrbracket : x_1, \dots, x_n \in X \}^\uparrow, \\ [p]_{X^\wedge} &:= \{ \llbracket (x_1^\wedge, \dots, x_n^\wedge) \rrbracket : (x_1, \dots, x_n) \in [p]_X \}^\uparrow \end{aligned}$$

для n -местных функциональных и предикатных символов $f, p \in \Sigma$. Тогда $(X^\wedge, [\cdot]_{X^\wedge})$ является внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ алгебраической системой сигнатуры Σ , которую называют *каноническим образом* или *стандартным именем* системы X и обозначают X^\wedge . При этом

$$X \models \varphi(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models (X^\wedge \models \varphi(x_1^\wedge, \dots, x_n^\wedge))$$

для всех $x_1, \dots, x_n \in X$, где $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ — произвольная формула сигнатуры Σ .

В основе развитого А. Г. Кусраевым метода булевозначных реализаций лежит конструкция погружения алгебраической системы в булевозначный универсум. Эта конструкция применима к системам $(X, [\cdot]_X)$ конечной сигнатуры Σ , для которых существует «естественный» способ определения булевозначной оценки истинности $[p(x_1, \dots, x_n)]_X$ формул вида $p(x_1, \dots, x_n)$, где p — предикатный символ сигнатуры Σ . Например, если X — пространство Канторовича и B — булева алгебра порядковых проекторов в X , то X можно превратить в B -значную алгебраическую систему сигнатуры $\{=, \leq, +\}$, полагая

$$[x = y]_X := \sup \{b \in B : bx = by\}, \quad [x \leq y]_X := \sup \{b \in B : bx \leq by\}.$$

Модификация подъема B -значных предикатов позволяет определить такую интерпретацию $[\cdot]_{X^\wedge}$, что $(X^\wedge, [\cdot]_{X^\wedge})$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ является алгебраической системой сигнатуры Σ , на которой отношение $\sim := [=]_{X^\wedge}$

оказывается конгруэнцией. Осуществляемая внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ факторизация X^\wedge/\sim называется *погружением* X в булевозначный универсум (или *булевозначной реализацией* системы X) и обозначается $(X^\sim, [\cdot]_{X^\sim})$ или X^\sim . При этом отображение $x \in X \mapsto x^\sim \in X^\sim \downarrow$, где $x^\sim := \llbracket \sim(x^\wedge) \rrbracket$, изоморфно вкладывает систему X в $X^\sim \downarrow$ и

$$\begin{aligned} X \models \varphi(x_1, \dots, x_n) &\Leftrightarrow X^\sim \downarrow \models \varphi(x_1^\sim, \dots, x_n^\sim) \\ &\Leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models (X^\sim \models \varphi(x_1^\sim, \dots, x_n^\sim)) \end{aligned}$$

для всех $x_1, \dots, x_n \in X$, где $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ — произвольная формула сигнатуры Σ .

Пусть $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ — классические системы натуральных, целых, рациональных и вещественных чисел сигнатуры $\{=, \leq, +, \cdot\}$, причем \mathbb{R} определяется как множество дедекиндовых сечений \mathbb{Q} . Тогда внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ системы $\mathbb{N}^\wedge, \mathbb{Z}^\wedge, \mathbb{Q}^\wedge$ совпадают с $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, а \mathbb{R}^\wedge является подполем \mathbb{R} . В частности, $\mathbb{V}^{(B)} \models (\alpha^\wedge \in \mathbb{R})$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$.

Следующий факт, установленный в начале 1970-х годов Е. И. Гордоном, является исторически первым результатом о булевозначной реализации.

(1) Спуск $X := \llbracket \mathbb{R} \rrbracket \downarrow$ представляет собой расширенное пространство Канторовича с \mathbb{R} -модульным умножением $\alpha x := \llbracket \alpha^\wedge x \rrbracket$, которое является коммутативной упорядоченной алгеброй относительно умножения $xy := \llbracket xy \rrbracket$. При этом $\llbracket 1 \rrbracket$ служит порядковой и мультипликативной единицей, $xy = 0 \Leftrightarrow x \perp y$ и имеется такой изоморфизм $b \mapsto \langle b \rangle$ из B на булеву алгебру порядковых проекторов X , что $\llbracket x = y \rrbracket = \sup \{b \in B : \langle b \rangle x = \langle b \rangle y\}$, $\llbracket x \leq y \rrbracket = \sup \{b \in B : \langle b \rangle x \leq \langle b \rangle y\}$ для $x, y \in X$.

(2) Всякое ненулевое расширенное пространство Канторовича X линейно и порядково изоморфно спуску $\llbracket \mathbb{R} \rrbracket \downarrow$ из $\mathbb{V}^{(B)}$, где B — булева алгебра порядковых проекторов X .

Теорема Гордона придает четкую формулировку выдвинутому Л. В. Канторовичем *эвристическому принципу переноса*, согласно которому элементы порядково полной векторной решетки суть обобщенные числа. (Более того, элементы такой решетки фактически являются числами — в подходящей булевозначной модели.)

Булевозначная реализация расширенных пространств Канторовича позволяет установить тесную связь между утверждениями и конструкциями, связанными с такими пространствами, и аналогичными утверждениями о вещественных числах и числовыми конструкциями. Например, если $X = \llbracket \mathbb{R} \rrbracket \downarrow$ и $A \subset X$, то ограниченность

А сверху (снизу) в X равносильна утверждению $\mathbb{V}^{(B)} \models (A \uparrow \text{ограничено сверху (снизу) в } \mathbb{R}), \sup_X A = \llbracket \sup_{\mathbb{R}} A \uparrow \rrbracket$ и $\inf_X A = \llbracket \inf_{\mathbb{R}} A \uparrow \rrbracket$. Если для последовательности $\varkappa: \mathbb{N} \rightarrow X$ положить $\varkappa \uparrow := \{ \llbracket (n^\wedge, \varkappa(n)) \rrbracket : n \in \mathbb{N} \} \uparrow$, то $\mathbb{V}^{(B)} \models (\varkappa \uparrow - \text{последовательность в } \mathbb{R})$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \varkappa(n) = x$ порядково в X тогда и только тогда, когда $\mathbb{V}^{(B)} \models \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \varkappa \uparrow(n) = x \text{ в } \mathbb{R} \right)$.

Поскольку всякая архимедова векторная решетка порядково плотно вкладывается в подходящее расширенное пространство Канторовича, булевозначная реализация предоставляет принципиальную возможность интерпретировать векторные решетки как решетки чисел. Развив соответствующий инструментарий, А. Г. Кусраев показал, что векторные решетки допускают представление в виде подпространств \mathbb{R} над \mathbb{R}^\wedge внутри $\mathbb{V}^{(B)}$.

Следующим естественным объектом булевозначной реализации служит решеточно нормированное пространство — вещественное векторное пространство, снабженное нормой, принимающей значения в какой-либо векторной решетке.

Итак, пусть X — векторное пространство над \mathbb{R} , E — векторная решетка. Отображение $|\cdot|: X \rightarrow E$ именуют *векторной (E-значной) нормой*, если

$$|x| \geq 0, \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad |\alpha x| = |\alpha| |x|, \quad |x + y| \leq |x| + |y|$$

для всех $x, y \in X$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Векторную норму $|\cdot|$ называют *d-разложимой*, если для любых $x \in X$ и $e_1, e_2 \in E^+$ из $|x| = e_1 + e_2$ и $e_1 \perp e_2$ следует существование таких $x_1, x_2 \in X$, что $x = x_1 + x_2$, $|x_1| = e_1$ и $|x_2| = e_2$. Пару $(X, |\cdot|)$ назовем *решеточно нормированным (E-нормированным) пространством*, если $|\cdot|: X \rightarrow E$ — d-разложимая векторная норма на X , причем $\{|x|: x \in X\}^\perp = \{0\}$. (Последнее требование не является обременительным, поскольку достигается заменой E компонентой $\{|x|: x \in X\}^{\perp\perp}$.) Вместо $(X, |\cdot|)$ обычно пишут X , а символ векторной нормы снабжают уточняющим индексом: $|\cdot|_X$.

Линейной изометрией между E-нормированным пространством X и F-нормированным пространством Y называется такая пара (i, j) , что $i: X \rightarrow Y$ — линейная биекция, $j: E \rightarrow F$ — линейный и порядковый изоморфизм и $|i(x)|_Y = j(|x|_X)$ для всех $x \in X$.

Говорят, что сеть $(x_\alpha) \subset X$ *сходится* к $x \in X$ и пишут $x_\alpha \rightarrow x$ или $\lim x_\alpha = x$, если $|x_\alpha - x| \rightarrow 0$ в E . Решеточно нормированное пространство X называют *полным*, если для любой сети $(x_\alpha) \subset X$ из

порядковой сходимости $\|x_\alpha - x_\beta\| \rightarrow 0$ в E следует $x_\alpha \rightarrow x$ для некоторого элемента $x \in X$. (В последнем случае E оказывается пространством Канторовича.) Полное решеточно нормированное пространство также именуют *пространством Банаха — Канторовича*. Для простоты мы ограничимся случаем, когда E является расширенным пространством Канторовича.

А. Г. Кусраеву принадлежит следующий факт о булевозначной реализации пространств Банаха — Канторовича.

(1) Пусть $\mathbb{V}^{(B)} \models (\mathcal{X} - \text{ненулевое банахово пространство с нормой } \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, $X := \mathcal{X} \downarrow$, $E := \llbracket \mathbb{R} \rrbracket \downarrow$, $|\cdot|_X := \|\cdot\|_{\mathcal{X}} \downarrow$. Тогда $(X, |\cdot|_X)$ — полное E -нормированное пространство с \mathbb{R} -модульным умножением $\alpha x := \llbracket \alpha^\wedge x \rrbracket$. Кроме того, X является модулем над E относительно умножения $ex := \llbracket ex \rrbracket$, причем $(\alpha \llbracket 1 \rrbracket)x = \alpha x$ и $|ex|_X = |e| |x|_X$ для любых $e \in E$, $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Пространство $(X, |\cdot|_X)$ называется *спуском банахова пространства* \mathcal{X} .

(2) Всякое ненулевое полное E -нормированное пространство X линейно изометрично спуску некоторого банахова пространства $\mathcal{X} \in \mathbb{V}^{(B)}$, где B — булева алгебра порядковых проекторов E . Такое банахово пространство \mathcal{X} внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ единственно с точностью до линейной изометрии. Его называют *булевозначной реализацией* X .

Доказательство утверждения (2) основано на описанной выше технике погружения. А именно, в рамках не нарушающего общность предположения $E = \llbracket \mathbb{R} \rrbracket \downarrow$ искомое банахово пространство внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ возникает в виде $\mathcal{X} := X^\sim$, где X^\sim — булевозначная реализация системы $(X, [\cdot]_X)$ сигнатуры $\{=, +\}$ с интерпретацией $[x = y]_X := \llbracket |x - y|_X = 0 \rrbracket$, а подъемы

$$\{ \llbracket (\alpha^\wedge, x^\sim, (\alpha x)^\sim) \rrbracket : \alpha \in \mathbb{R}, x \in X \rrbracket \uparrow, \quad \{ \llbracket (x^\sim, |x|) \rrbracket : x \in X \rrbracket \uparrow$$

служат умножением $\cdot_x: \mathbb{R}^\wedge \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ (по непрерывности продолжаемым на $\mathbb{R} \times \mathcal{X}$) и нормой $\|\cdot\|_x: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$.

Поскольку каждое решеточно нормированное пространство плотно вкладывается в подходящее полное E -нормированное пространство, где E — расширенное пространство Канторовича, решеточно нормированные пространства допускают представление в виде нормированных пространств над \mathbb{R}^\wedge внутри $\mathbb{V}^{(B)}$.

Разработанный А. Г. Кусраевым метод булевозначных реализаций оказывается чрезвычайно плодотворным, позволяя сводить исследование сложных алгебраических системы к рассмотрению их

простых аналогов в булевозначном универсуме. Так, решеточно упорядоченные полные решеточно нормированные пространства с монотонной нормой (называемые решетками Банаха — Канторовича) допускают булевозначное представление в виде банаховых решеток, реализацией модулей Капланского — Гильберта служат гильбертовы пространства, а произвольные AW^* -алгебры в результате булевозначного погружения «теряют» нетривиальный центр, становясь AW^* -факторами.

С помощью метода погружения удается реализовать пространство линейных ограниченных операторов, действующих в пространствах Банаха — Канторовича, в виде спуска пространства ограниченных линейных операторов в банаховых пространствах. Важно отметить, что пространство операторов $T: X \rightarrow E$ с абстрактной нормой в результате булевозначной реализации становится пространством линейных ограниченных функционалов, а операторы Магарам (положительные порядково непрерывные операторы, действующие в пространствах Канторовича и сохраняющие порядковые интервалы) превращаются в положительные непрерывные функционалы. Эти фундаментальные факты, установленные А. Г. Кусраевым, придают строгую форму методологическому тезису Л. В. Канторовича, который, иницируя изучение порядково полных векторных решеток в своей основополагающей работе 1935 года, писал: «Введение этих пространств позволяет изучать линейные операции одного общего класса (операции, значения которых принадлежат такому пространству) как линейные функционалы».

Применение методов булевозначного анализа приводит, в том числе, к разнообразным функциональным представлениям широкого класса алгебраических систем и действующих в них операторов. На этом пути удается обнаружить принципиально новые реализационные теоремы. А. Г. Кусраевым введены и детально исследованы циклические банаховы пространства, создан метод циклической компактности. Построенный аппарат применен не только к функциональным пространствам, пространствам Банаха — Канторовича и банаховым алгебрам, но и к положительным, регулярным и сублинейным векторно-значным операторам и векторным мерам. С помощью описанного подхода был решен ряд таких трудных и актуальных задач теории операторов и выпуклого анализа, как внутреннее описание субдифференциалов, построение абстрактного дезинтегрирования в пространствах Канторовича, а также доказательство операторных вариантов теоремы Радона — Никодима.

А. Г. Кусраеву принадлежат многочисленные фундаментальные результаты в области порядкового анализа. Им построена теория мажорируемых операторов в решеточно нормированных пространствах, дана изометрическая характеристика пространств со смешанной нормой и пространств Лебега — Бохнера, найдены критерии интегральной, псевдоинтегральной и мультипликативной представимости мажорируемых операторов, получена функциональная реализация решеточно нормированных пространств посредством банаховых расслоений, установлены новые результаты о продолжении и разложении мажорируемых операторов и векторных мер, полностью решена проблема Викстеда об описании векторных решеток, гарантирующих ограниченность любого действующего в них нерасширяющего оператора.

Недавние работы А. Г. Кусраева посвящены изучению *инъективных банаховых решеток* — полных нормированных решеток X , допускающих положительное продолжение $T: Y \rightarrow X$ с сохранением нормы для любого положительного линейного оператора $T_0: Y_0 \rightarrow X$, определенного на замкнутой подрешетке $Y_0 \subset Y$ какой-либо банаховой решетки Y . Итогом предпринятого А. Г. Кусраевым исследования стало полное описание класса таких решеток X . Ключом к решению этой задачи вновь послужил метод булевозначной реализации. Оказалось, что спуск любого AL -пространства является инъективной банаховой решеткой и — наоборот — каждая инъективная банахова решетка представляет собой спуск AL -пространства из $\mathbb{V}^{(B)}$, где B — булева алгебра M -проекторов в X . На основе установленной булевозначной реализации А. Г. Кусраевым были получены и другие представления инъективных банаховых решеток. В частности, результатом тонкого анализа булевозначных кардиналов стало представление любой атомной инъективной банаховой решетки в виде прямой ℓ_∞ -суммы семейства ℓ_1 -пространств.

Постоянные научные связи соединяют А. Г. Кусраева с Институтом математики им. С. Л. Соболева СО РАН и Новосибирским государственным университетом, где он прошел путь от студента до ведущего сотрудника и профессора. Коллеги и друзья Анатолия Георгиевича сердечно поздравляют его с юбилеем, желают ему успехов на всех направлениях его многогранной деятельности и надеются на новые добрые встречи и совместные дела.

С. К. Водопьянов, Е. И. Гордон, А. Е. Гутман, А. В. Коптев,
С. С. Кутателадзе, С. А. Малюгин, Ю. Г. Решетняк