РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С. Л. СОБОЛЕВА

Тезисы Международной конференции

«ДНИ ГЕОМЕТРИИ В НОВОСИБИРСКЕ – 2014»,

посвященной 85-летию академика

Юрия Григорьевича Решетняка

24 – 27 сентября 2014 года

Новосибирск, 2014

УДК 514, 515.1, 517.518, 517.54, 517.938, 517.958

ББК 22.15

Д 548

ДНИ ГЕОМЕТРИИ В НОВОСИБИРСКЕ – 2014: Тезисы Международной конференции, посвященной 85-летию академика Ю. Г. Решетняка. Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2014. — 126 с.

ISBN 978-5-86134-145-5

Настоящее издание содержит тезисы докладов Международной конференции «Дни геометрии в Новосибирске – 2014», посвященной 85-летию академика Юрия Григорьевича Решетняка (г. Новосибирск, 24-27 сентября 2014 г.). Основная тематика докладов относится к следующим актуальным направлениям современной математики: дифференциальная геометрия, геометрия и топология малых размерностей, геометрический анализ, квазиконформный анализ и функциональные пространства, приложения геометрии и топологии.

Сборник представляет интерес для научных работников и аспирантов, интересующихся современными проблемами геометрии, топологии и анализа.

Конференция проводится при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 14-01-20056), Фонда некоммерческих программ "Династия" и Лаборатории геометрической теории управления ИМ СО РАН (грант правительства РФ № 14.B25.31.0029).

Редакторы: И. А. Тайманов, А. Ю. Веснин

Ответственный редактор: Н. В. Абросимов

Верстка сборника: А. В. Маслей

GEOMETRY DAYS IN NOVOSIBIRSK – 2014: Abstracts of the International Conference dedicated to 85th anniversary of academician Yuri Grigor'evich Reshetnyak. Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 2014. — 126 p.

Editors I. A. Taimanov, A. Yu. Vesnin, N. V. Abrosimov

$$Д\ \frac{1602050000 - 1}{Я82(03) - 2014}$$

ISBN 978-5-86134-145-5

Содержание

ЮРИЮ ГРИГОРЬЕВИЧУ РЕШЕТНЯКУ 85 ЛЕТ

26 сентября 2014 г. — 85-й день рождения академика Решетняка. Долгий путь пройден, многое сделано, есть чем поделиться и что оставить другим.

Решетняк — математик, представитель ленинградской-петербургской математической школы, ученик А. Д. Александрова, создатель собственной оригинальной школы геометрического анализа, учитель многих поколений выпускников мехмата НГУ.

Термин «геометрический анализ» появился в науке недавно. Так стали называть математическую дисциплину на стыке геометрии, теории уравнений в частных производных, теории меры, теории функций и функционального анализа. Решетняк — один из всемирно признанных лидеров этого направления. Для его творчества характерны глубина, лапидарность, нетривиальность и оригинальность подходов. Стиль Решетняка прост и глубок, лишен цветистости и украшательств, точен в деталях и свободен для перспективы. Математическая техника Решетняка разнообразна и виртуозна.

Решетняку принадлежат ставшие классическими результаты в теории пространственных отображений, в теории функций вещественной переменной, в вариационном исчислении, в геометрии выпуклых поверхностей. Им решена знаменитая проблема М. А. Лаврентьева об устойчивости в теореме Лиувилля, получено удивительное описание изотермических координат на многообразиях ограниченной кривизны, построена теория негладких кривых. Всего и не перечислишь.

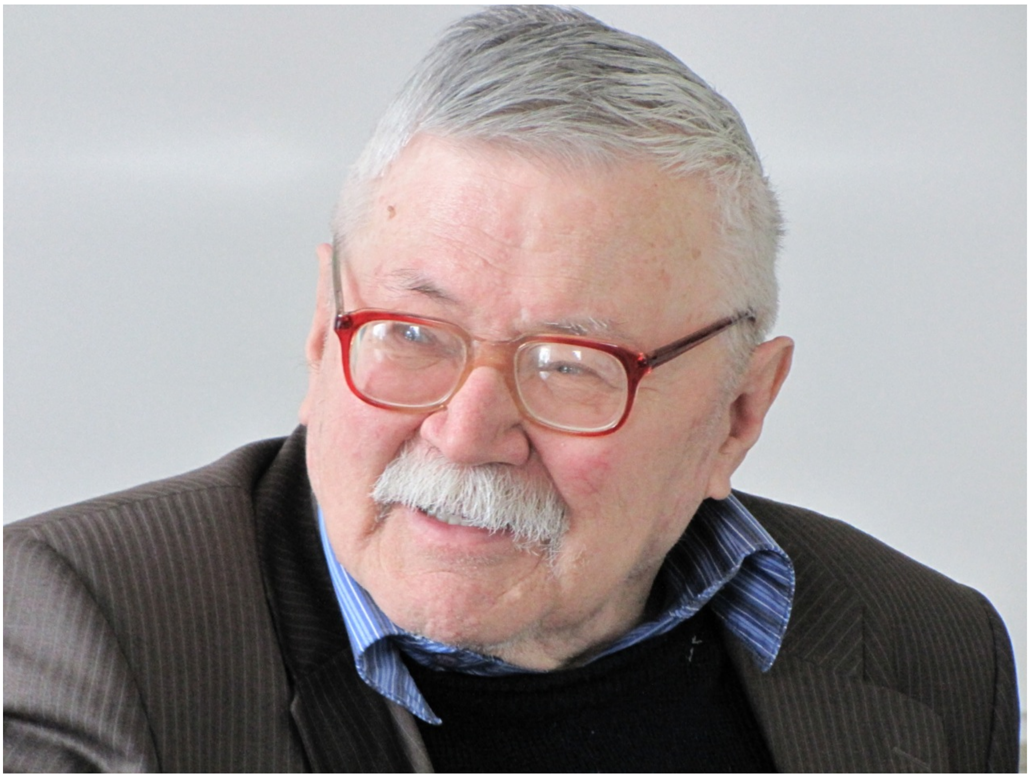
Математиков много — это массовая профессия наших дней. Среди математиков много образованных и профессиональных людей, вносяших посильную лепту в науку. Есть и малая фракция людей, обладающих специальным математическим даром. Дар проявляется в способности мгновенно понять суть проблемы и магистраль ее решения, предвидеть препятствия и способы их преодоления. К сожалению, математический дар не всегда сочетается с трудолюбием и умением доводить дело до конца. Решетняк не таков — его трудоспособность и преданность любимому делу практически безграничны.

Математический дар проявляется рано. Многие даровитые люди купаются в волнах юношеского восторга от первых проявлений своего таланта и быстро скисают. Математика, как и любая точная наука, старается избавиться от всего субъективного в своем содержании. Именно поэтому занятия математикой далеко не всегда способствуют гармоничному развитию личности, часто рождают фанаберию и иллюзию исключительности.

Решетняк из редкой плеяды тех, кто лишен каких бы то ни было иллюзий. Отличительные особенности Решетняка — преданность истине, абсолютная порядочность во всем, открытость и уважительность к людям, надежность и принципиальность — качества столь же ценные, как и редкие. В них причина его творческого долголетия, сохранения юношеской страсти к математике. В них причина яркости и привлекательности его личности.

Общение с Решетняком всегда доставляет удовольствие его родным, близким, ученикам и коллегам. В юбилейные дни все они желают Юрию Григорьевичу здоровья, благополучия, творческих успехов, новых внуков и правнуков.

С. С. Кутателадзе



Юрий Григорьевич Решетняк

МНОЖЕСТВО ИЗГИБАЕМЫХ НЕВЫРОЖДЕННЫХ МНОГОГРАННИКОВ ДАННОГО КОМБИНАТОРНОГО СТРОЕНИЯ НЕ ВСЕГДА ЯВЛЯЕТСЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ

ВИКТОР АЛЕКСЕЕВИЧ АЛЕКСАНДРОВ

Мы приводим пример замкнутого неизгибаемого невырожденного многогранника P в трехмерном евклидовом пространстве, который является пределом последовательности неизометричных ему изгибаемых невырожденных многогранников, имеющих одинаковое с P комбинаторное строение. Отсюда мы выводим, что множество всех изгибаемых невырожденных многогранников, имеющих одинаковое с P комбинаторное строение, не является алгебраическим.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090
E-mail address: alex@math.nsc.ru

ОБ УПЛОЩАЮЩИХСЯ 6-МЕРНЫХ ЭРМИТОВЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЯХ АЛГЕБРЫ КЭЛИ

ГАЛИНА АНАТОЛЬЕВНА БАНАРУ, МИХАИЛ БОРИСОВИЧ БАНАРУ

Пусть $\mathbf{O} \equiv \mathbf{R^8}$ – алгебра Кэли. Как известно [1], в ней определены два неизоморфных 3-векторных произведения:

$$P_1(X,\ Y,\ Z\,) = -X(\bar{Y}Z) + \langle X,\ Y\rangle\, Z + \langle Y,\ Z\rangle\, X - \langle Z, X\rangle\, Y;$$

$$P_2(X,\ Y,\ Z\,) = -(X\bar{Y})Z + \langle X,\ Y\rangle\, Z + \langle Y,\ Z\rangle\, X - \langle Z, X\rangle\, Y.$$

Здесь $X,\ Y,\ Z \in \mathbf{O}$; $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ – скалярное произведение в $\mathbf{O}$, $X \to \bar{X}$ – оператор сопряжения в $\mathbf{O}$. При этом любое другое 3-векторное произведение в алгебре октав изоморфно одному из вышеуказанных.

Пусть $M^6 \subset \mathbf{O}$ – 6-мерное ориентируемое подмногообразие алгебры Кэли. Тогда на нем индуцируется почти эрмитова структура $\{J_\alpha, g = \langle\cdot,\ \cdot\rangle\}$, определяемая в каждой точке $p \in M^6$ соотношением:

$$J_\alpha(X) = P_\alpha(X,\ e_1,\ e_2), \quad \alpha = 1,\ 2,$$

где $\{e_1,\ e_2\}$ – произвольный ортонормированный базис нормального к M^6 подпространства в точке p, $X \in T_p(M^6)$[1]. Подмногообразие M^6 называется эрмитовым, если индуцируемая на нем почти эрмитова структура интегрируема, и келеровым, если $\nabla F = 0$[2]. Напомним [1, 2, 3], что точка $p \in M^6$ называется общей, если $e_0 \notin T_p(M^6)$, где e_0 – единица алгебры Кэли. Подмногообразия, состоящие только из общих точек, называются подмногообразиями общего типа [1, 2]. Все рассматриваемые далее подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$ подразумеваются подмногообразиями общего типа. 6-мерное подмногообразие $M^6 \subset \mathbf{O}$ называется уплощающимся, если оно содержится в гиперплоскости алгебры октав [3].

Напомним, что почти эрмитово многообразие удовлетворяет аксиоме 1-косимплектических гиперповерхностей, если через каждую точку такого многообразия проходит косимплектическая гиперповерхность с типовым числом 1.

С помощью анализа структурных уравнений Картана почти контактной метрической структуры на гиперповерхности 6-мерного уплощающегося эрмитова подмногообразия алгебры октав [4, 5] получен такой результат.

Теорема. *Если уплощающееся 6-мерное эрмитово подмногообразие алгебры Кэли удовлетворяет аксиоме 1-косимплектических гиперповерхностей, то оно является келеровым многообразием.*

Отметим, что данная теорема имеет отношение к характеризации гиперповерхностей почти эрмитовых многообразий в терминах типового числа (характеризации Такаджи-Курихары [4, 5]).

Список литературы

[1] В. Ф. Кириченко, “Классификация келеровых структур, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли”, *Известия вузов. Математика*, No. 8, 32–38 (1980).

[2] В. Ф. Кириченко, *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях*, Одесса: Печатный дом, (2013).

[3] M. Banaru, G. Banaru, “A note on six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra”, *Известия Академии наук Республики Молдова. Математика*, No. 1(74), 23–32 (2014).

[4] М. Б. Банару, “О типовом числе косимплектических гиперповерхностей 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли”, *Сибирский математический журнал*, Т. 44, No. 5, 981–991 (2003).

[5] М. Б. Банару, “ О сасакиевых гиперповерхностях 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли”, *Математический сборник*, Т. 194, No. 8, 13–24 (2003).

Смоленский государственный университет, ул. Пржевальского, 4, Смоленск, 214000
E-mail address: `mihail.banaru@yahoo.com`

АКСИОМА САСАКИЕВЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ ДЛЯ 6-МЕРНЫХ ЭРМИТОВЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ АЛГЕБРЫ КЭЛИ

МИХАИЛ БОРИСОВИЧ БАНАРУ

Существование 3-векторных произведений Грея-Брауна в алгебре Кэли дает исследователю весьма интересные, содержательные и разнообразные примеры почти эрмитовых структур. Каждое из таких 3-векторных произведений индуцирует почти эрмитову структуру на 6-мерном ориентируемом подмногообразии алгебры октав. Подобные почти эрмитовы структуры изучались систематически с 60-х годов прошлого века известнейшим американским геометром Альфредом Греем, а затем замечательным отечественным специалистом В. Ф. Кириченко и многими другими. В. Ф. Кириченко, например, получил полную классификацию 6-мерных локально симметрических эрмитовых типа Риччи подмногообразий алгебры Кэли [1], имеющих непосредственное отношение к представленному здесь результату.

Настоящая работа является частью исследований автора о 6-мерных почти эрмитовых подмногообразиях алгебры Кэли, начатых в начале 90-х годов прошлого века под руководством В. Ф. Кириченко и продолжающихся по настоящее время. В частности, в [2] содержится такой результат относительно 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры октав: доказано, что если 6-мерное эрмитово подмногообразие M^6 алгебры Кэли удовлетворяет аксиоме u-сасакиевых гиперповерхностей (то есть если через всякую точку M^6 проходит вполне омбилическая сасакиева гиперповерхность), то M^6 – келерово многообразие.

Сейчас условие быть вполне омбилической для гиперповерхности Сасаки снято. Цель работы – выяснить, какими свойствами обладает 6-мерное эрмитово подмногообразие алгебры октав, удовлетворяющее аксиоме сасакиевых гиперповерхностей. Основной результат содержит

Теорема. *Всякое 6-мерное эрмитово подмногообразие алгебры Кэли, удовлетворяющее аксиоме сасакиевых гиперповерхностей, является локально симметрическим подмногообразием типа Риччи.*

Отметим, что особый интерес, разумеется, представляет лишь случай, соответствующий отличному от келерова 6-мерному локально симметрическому подмногообразию типа Риччи. В этом случае, согласно [1], $M^6 \subset \mathbf{O}$ локально голоморфно изометрично произведению келеровых многообразий C^2 и CH^1, "скрученному" вдоль CH^1. (Здесь через C^2 обозначено двумерное комплексное евклидово пространство, а через CH^1 – комплексное гиперболическое пространство).

Заметим также, что в [2] доказано (Теорема 5 на стр.23), что сасакиева гиперповерхность некелерова 6-мерного эрмитова локально симметрического подмногообразия типа Риччи не может быть вполне омбилической. В келеровом же случае, согласно построениям Д. Блэра [3], сасакиева гиперповерхность будет с необходимостью вполне омбилической.

Поскольку ранее было доказано [4], что 6-мерные локально симметрические подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$ типа Риччи являются уплощающимися, то из доказанной теоремы вытекает такое

Следствие. *Всякое 6-мерное эрмитово подмногообразие алгебры Кэли, удовлетворяющее аксиоме сасакиевых гиперповерхностей, является уплощающимся подмногообразием.*

Отметим, что сасакиева структура определяется на нечетномерном многообразии N тождеством

$$\nabla_X(\Phi)Y = \langle X, Y\rangle\,\xi - \eta(Y)X, X, Y \in \aleph(N).$$

Другой важнейший вид почти контактной метрической структуры – структура Кенмоцу – определяется очень похожим условием:

$$\nabla_X(\Phi)Y = \langle \Phi X, Y\rangle\,\xi - \eta(Y)\Phi X, X, Y \in \aleph(N).$$

В. Ф. Кириченко обратил внимание на то, что несмотря на внешнее сходство тождеств определяющих эти структуры, свойства многообразий Кенмоцу в определенном смысле противоположны свойствам сасакиевых многообразий [5].

Не оспаривая ни в коей мере это мотивированное утверждение, заметим только, что и сходство между свойствами многообразий Сасаки и Кенмоцу тоже немалое (см. [2] и [6–10]). Например, результат из новой статьи о гиперповерхностях Кенмоцу 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры октав [10] является полным аналогом приведенной выше теоремы.

Теорема [10]. *Всякое 6-мерное эрмитово подмногообразие алгебры Кэли, удовлетворяющее аксиоме гиперповерхностей Кенмоцу, является локально симметрическим подмногообразием типа Риччи.*

Список литературы

[1] В. Ф. Кириченко, “Эрмитова геометрия 6-мерных симметрических подмногообразий алгебры Кэли”, *Вестник МГУ. Сер. матем. механ.*, No. 3, 6–13 (1994).

[2] М. Б. Банару, “ О сасакиевых гиперповерхностях 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли”, *Математический сборник*, Т. 194, No. 8, 13–24 (2003).

[3] D. E. Blair, “The theory of quasi-Sasakian structures”, *J. Diff. Geom.*, Vol. 1, 331–345(1967).

[4] M. Banaru, “On the type number of six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra”, *Kyungpook Math. J.*, Vol. 43, No. 1, 27–35. (2003).

[5] В. Ф. Кириченко, “О геометрии многообразий Кенмоцу”, *ДАН*, Т. 380, No. 5, 585–587 (2001).

[6] M. Banaru, “On minimality of a Sasakian hypersurface in a W_3-manifold”, *Saitama Math. J.*, Vol. 20, 1–7 (2002).

[7] М. Б. Банару, “О гиперповерхностях Кенмоцу специальных эрмитовых многообразий”, *Сибирский математический журнал*, Т. 45, No. 1, 11–15 (2004).

[8] A. Abu-Saleem, M. Banaru, “Two theorems on Kenmotsu hypersurfaces in a W_3-manifold”, *Studia Univ. «Babes-Bolyai». Math. Cluj-Napoca*, Vol. 51, No. 3, 3–11 (2005).

[9] M. Banaru, “The U-Kenmotsu hypersurfaces axiom and six-dimensional Hermitian submani-folds of Cayley algebra”, *Journal of Sichuan University of Science and Engineering*, Vol. 26, No. 3, 1–5 (2013).

[10] М. Б. Банару, “Аксиома гиперповерхностей Кенмоцу для 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли”, *Сибирский математический журнал*, Т. 55, No. 2, 261–266 (2014).

Смоленский государственный университет, ул. Пржевальского, 4, Смоленск, 214000
E-mail address: mihail.banaru@yahoo.com

ЯВНАЯ ФОРМУЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭНТРОПИИ КОС ИЗ ТРЕХ НИТЕЙ

ОЛЕГ НИКОЛАЕВИЧ БИРЮКОВ

Рассматривается классическая группа кос Артина из 3 нитей:

$$B_3 = \langle\, \sigma_1, \sigma_2 \mid \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \,\rangle$$

и её гомоморфизм (см. [3]) в группу классов отображений (гомеотопий) компактной ориентированной двумерной поверхности M рода нуль с 4 компонентами края:

$$\varphi : B_3 \to \mathrm{Homeot}(M).$$

Поверхность M является гиперболической, а гомеотопии любой гиперболической поверхности в соответствии с классификацией Нильсена-Тёрстона (см. [1]) делятся на три типа: периодические, псевдоаносовские и приводимые. Соответственно различают аналогичные типы кос.

Тип косы из трёх нитей можно определить, используя так называемое гомологическое представление группы кос:

$$\psi : B_3 \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \qquad \sigma_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема. (см. [1] и [2]) *Для периодической косы β из трёх нитей след матрицы $\psi(\beta)$ по абсолютной величине меньше 2, для приводимой косы — равен 2, для псевдоаносовской косы — больше 2.*

Определение. *Энтропией косы* β называется точная нижняя грань топологической энтропии гомеоморфизмов в классе $\varphi(\beta)$.

Энтропия косы определяет минимальный хаос в поведении траекторий при действии гомеоморфизмов, принадлежащих классу $\varphi(\beta)$.

Известно, что энтропия периодических и приводимых кос из трёх нитей равна нулю, а энтропия псевдоаносовской косы $\beta \in B_3$ может быть вычислена через след матрицы $\psi(\beta)$:

$$h(\beta) = \log \frac{|\mathrm{tr}\,\psi(\beta)| + \sqrt{\mathrm{tr}^2\,\psi(\beta) - 4}}{2}.$$

Теорема. *Для произвольной косы из трёх нитей $\beta = \sigma_1^{k_1}\sigma_2^{m_1}\sigma_1^{k_2}\sigma_2^{m_2}\dots\sigma_1^{k_s}\sigma_2^{m_s} \in B_3$ имеет место равенство*

$$\mathrm{tr}\,\psi(\beta) = 2 + \sum_{i=1}^{s} (-1)^i P_s^i,$$

где P_s^i есть многочлен степени $2i$ от $2s$ переменных $k_1, m_1, k_2, m_2, \dots, k_s, m_s$. Многочлен P_s^i представляет собой сумму всевозможных мономов, получаемых из монома $k_1m_1k_2m_2\dots k_sm_s$ путём удаления $2s-2i$ переменных, причём удалять переменные разрешается только парами, расположенными рядом относительно циклического порядка.

Пример. Для косы $\beta = \sigma_1^{k_1}\sigma_2^{m_1}\sigma_1^{k_2}\sigma_2^{m_2}\sigma_1^{k_3}\sigma_2^{m_3}\sigma_1^{k_4}\sigma_2^{m_4} \in B_3$ имеем $s = 4$ и

$$\mathrm{tr}\,\psi(\beta) = 2 - P_4^1 + P_4^2 - P_4^3 + P_4^4,$$

где $P_4^1 = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)$,

$P_4^2 = k_1m_1k_2m_2 + m_1k_2m_2k_3 + k_2m_2k_3m_3 + m_2k_3m_3k_4 + k_3m_3k_4m_4 + m_3k_4m_4k_1 + k_4m_4k_1m_1 + m_4k_1m_1k_2 + k_1m_1k_3m_3 + m_1k_2m_3k_4 + k_2m_2k_4m_4 + m_2k_3m_4k_1 + k_1m_1k_2m_3 + m_1k_2m_2k_4 + k_2m_2k_3m_4 + m_2k_3m_3k_1 + k_3m_3k_4m_1 + m_3k_4m_4k_2 + k_4m_4k_1m_2 + m_4k_1m_1k_3,$

$P_4^3 = k_1m_1k_2m_2k_3m_3 + m_1k_2m_2k_3m_3k_4 + k_2m_2k_3m_3k_4m_4 + m_2k_3m_3k_4m_4k_1 + k_3m_3k_4m_4k_1m_1 + m_3k_4m_4k_1m_1k_2 + k_4m_4k_1m_1k_2m_2 + m_4k_1m_1k_2m_2k_3$,

$P_4^4 = k_1m_1k_2m_2k_3m_3k_4m_4$.

Список литературы

[1] Э. Кэссон, С. Блейлер, *Теория автоморфизмов поверхностей по Нильсену и Тёрстону*, М.: ФАЗИС, (1998).

[2] J. E. Andersen, G. Masbaum, K. Ueno, "Topological Quantum Field Theory and The Nielsen-Thurston Classification of M(0,4)", *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, Vol. 141, No. 03, 477–488 (2006).

[3] D. Bernardete, Z. Nitecki, M. Gutierrez, "Braids and the Nielsen-Thurston classification", *J. Knot Theory and its Ramifications*, Vol. 4, 549–618 (1995).

Московский государственный областной социально-гуманитарный институт (МГОСГИ), ул. Зелёная, 30, г. Коломна, 140410, Россия

E-mail address: oleg_biryukov@mail.ru

СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ HG–ДЕФОРМАЦИЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ С КРАЕМ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

АНДРЕЙ ИВАНОВИЧ БОДРЕНКО

Пусть E^3 — трехмерное евклидово пространство, (y^1, y^2, y^3) — декартовы прямоугольные координаты в E^3. Обозначим через D область на евклидовой плоскости E^2, через ∂D — границу области D.

Пусть F — двумерная односвязная ориентируемая поверхность в E^3 с краем ∂F. Пусть поверхность F в E^3 задана погружением $f : D \to E^3$:

$$y^\sigma = f^\sigma(x^1, x^2), \quad (x^1, x^2) \in D, \quad \sigma = 1, 2, 3.$$

На поверхности F порождается риманова метрика, задаваемая формулой $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$, где

$$g_{ij} = \delta_{\alpha\beta}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j},$$

$\delta_{\alpha\beta}$— символ Кронекера. Здесь и далее считаем, что индексы суммирования $\alpha, \beta, \sigma, \ldots$ пробегают значения от 1 до 3, индексы $i, j, \ldots$ пробегают значения от 1 до 2, и действует правило суммирования Эйнштейна.

Пусть b_{ij} — компоненты тензора второй фундаментальной формы поверхности F, $g = det||g_{ij}||$, $b = det||b_{ij}||$. Обозначим через

$$d\sigma(x) = \sqrt{g}\ dx^1 \wedge dx^2$$

элемент площади поверхности F.

Пусть (x^1, x^2) — декартовы прямоугольные координаты в E^2. Без ограничения общности будем считать, что $\overline{D} = D \cup \partial D$ — круг единичного радиуса в E^2 с центром в начале координат. Отождествим точки погружения поверхности F с соответствующими координатными наборами в E^3.

Пусть $F \in C^{m,\nu}$, $\partial F \in C^{m+1,\nu}$, $\nu \in (0; 1)$, $m \geq 4$.

Рассмотрим деформацию $\{F_t\}$ поверхности F, определенную уравнениями:

$$y_t^\sigma = y^\sigma + z^\sigma(t), \quad z^\sigma(0) \equiv 0, \quad t \in [0; t_0], \quad t_0 > 0.$$

Пусть поверхность F не имеет действительных асимптотических направлений.

Обозначим через k_1 и k_2 главные кривизны поверхности F. Будем считать, что $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ на F. Обозначим через $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ среднюю кривизну поверхности F в E^3.

Введем обозначение $\Delta(f) \equiv f(t) - f(0)$.

Определение 1. *Деформация $\{F_t\}$ называется непрерывной деформацией, сохраняющей среднюю кривизну H (или, коротко, $H-$деформацией), если выполняются следующие условия: $\Delta(H) = 0$, и $z^\sigma(t)$ непрерывны по t.*

Деформация $\{F_t\}$ порождает следующий набор кривых в E^3:

$$u^{\alpha_0}(\tau) = (y^{\alpha_0} + z^{\alpha_0}(\tau)),$$

где $z^{\alpha_0}(0) \equiv 0$, $\tau \in [0; t]$, $t \in [0; t_0]$, $t_0 > 0$.

Определение 2. *Деформация $\{F_t\}$ называется $G-$деформацией, если каждый нормальный вектор поверхности F переносится параллельно вдоль траектории деформации $\{F_t\}$ для каждой точки поверхности.*

Пусть вдоль ∂F задано векторное поле, касательное к F:

$$v^\alpha = l^i y^\alpha_{,i},$$

где символом $_{,i}$ обозначена ковариантная производная в метрике поверхности F.

Рассмотрим краевое условие:

$$\delta_{\alpha\beta} z^{\alpha} v^{\beta} = \tilde{\gamma}(s,t), \quad s \in \partial D,$$

где функции v^{α} и $\tilde{\gamma}$ принадлежат классу $C^{m-2,\nu}$.

Положим:

$$\tilde{\lambda}_k = \delta_{\alpha\beta} y^{\alpha}_{,k} v^{\beta}, \qquad k = 1, 2,$$

$$\lambda_k = \frac{\tilde{\lambda}_k}{(\tilde{\lambda}_1)^2 + (\tilde{\lambda}_2)^2}, \quad k = 1, 2,$$

$$\lambda(s) = \lambda_1(s) + i\lambda_2(s), \quad s \in \partial D.$$

Пусть N — индекс данного краевого условия:

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial D} \arg \lambda(s).$$

Теорема. *Пусть $F \in C^{m,\nu}, \nu \in (0;1), m \geq 4$, $\partial F \in C^{m+1,\nu}$. Пусть $v^{\beta}, \tilde{\gamma} \in C^{m-2,\nu}(\partial D)$ и при этом, функция $\tilde{\gamma}$ непрерывно дифференцируема по t. Пусть в точке $(x^1_{(0)}, x^2_{(0)})$ области D выполняется условие: $z^{\sigma}(t) \equiv 0 \, \forall t$.*

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если $N > 0$, то существуют $t_0 > 0$ и $\varepsilon(t_0) > 0$ такие, что для любой допустимой функции $\tilde{\gamma}$, удовлетворяющей условию $\|\dot{\tilde{\gamma}}\|_{m-2,\nu} \leq \varepsilon(t_0)$, для всех $t \in [0, t_0)$ существует HG–деформация класса $C^{m-2,\nu}(\overline{D})$, непрерывная по t, непрерывно зависящая от $(2N-1)$ произвольных действительных непрерывных функций $c_i(t)$, $i = 1, \ldots, (2N-1)$, удовлетворяющих условиям $c_i(0) = 0$, $i = 1, \ldots, (2N-1)$.

2. Если $N \leq 0$, то существуют $t_0 > 0$ и $\varepsilon(t_0) > 0$ такие, что для любой допустимой функции $\tilde{\gamma}$, удовлетворяющей условию $\|\dot{\tilde{\gamma}}\|_{m-2,\nu} \leq \varepsilon(t_0)$, для всех $t \in [0, t_0)$ существует не более одной HG–деформации класса $C^{m-2,\nu}(\overline{D})$, непрерывной по t.

Доказательство теоремы проводится с помощью методов, разработанных в работе [1] (см.: [1, § 9]).

Список литературы

[1] А. И. Бодренко, “Непрерывные MG–деформации поверхностей с краем в евклидовом пространстве”, *Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1: Математика. Физика*, No. 1 (18), 6–23 (2013).

Волгоградский государственный университет, проспект Университетский, 100, Волгоград, 400062, Российская Федерация

E-mail address: bodrenko@bodrenko.com

ОБОБЩЕННЫЕ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ДАРБУ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

ИРИНА ИВАНОВНА БОДРЕНКО

Пусть $M^{n+1}(\widetilde{c})$ — $(n+1)$-мерное $(n \geq 2)$ пространство постоянной кривизны. Рассмотрим в $M^{n+1}(\widetilde{c})$ гиперповерхность F^n, заданную в окрестности каждой своей точки $x \in F^n$ уравнениями

$$x^\alpha = f^\alpha(u^1, \ldots, u^n), \quad (u^1, \ldots, u^n) \in D, \quad \alpha = \overline{1, n+1},$$

где D — некоторая область параметрического пространства $(u^1, \ldots, u^n)$, $f^\alpha \in C^3(D)$.

Гиперповерхность F^n в пространстве постоянной кривизны $M^{n+1}(\widetilde{c})$ имеет n главных направлений $\{Y_i\}_1^n$ в каждой точке $x \in F^n$. Обозначим через k_i кривизну F^n в главном направлении Y_i, $i = \overline{1, n}$.

Определение 1. *Функцию*

$$K = \prod_{i=1}^{n} k_i$$

при $n > 2$ назовем гауссовой кривизной гиперповерхности $F^n \subset M^{n+1}(\widetilde{c})$.

Замечание 1. *Если $\widetilde{c} \neq 0$ и $n = 2$, то функция $K = k_1 k_2$ называется внешней кривизной поверхности F^2 в $M^3(\widetilde{c})$.*

Пусть $I = g_{ij} du^i du^j$ и $II = b_{ij} du^i du^j$ соответственно — первая и вторая квадратичные формы гиперповерхности $F^n \subset M^{n+1}(\widetilde{c})$.

Будем считать, что гиперповерхность $F^n \subset M^{n+1}(\widetilde{c})$ не имеет асимптотических направлений среди главных. Тогда на F^n можно определить симметрический трижды ковариантный тензор третьей валентности $\Theta_{(n)}$ формулой:

$$\Theta_{(n)ijm} = \nabla_m b_{ij} - \frac{b_{ij} \nabla_m K + b_{jm} \nabla_i K + b_{mi} \nabla_j K}{(n+2)K}, \qquad i, j, m = \overline{1, n},$$

где ∇_i — операция ковариантного дифференцирования относительно тензора g_{ij}.

Замечание 2. *Для гиперповерхностей F^n в евклидовом пространстве E^{n+1} тензор $\Theta_{(n)}$ при $n > 2$ введен в [1].*

Определение 2. *Тензор $\Theta_{(n)}$ при $n > 2$ назовем обобщенным тензором Дарбу гиперповерхности F^n в пространстве постоянной кривизны $M^{n+1}(\widetilde{c})$.*

Обозначим через $D_{(n)}$ множество гиперповерхностей F^n $(n \geq 2)$ в пространстве постоянной кривизны $M^{n+1}(\widetilde{c})$, на которых определен и тождественно равен нулю тензор $\Theta_{(n)}$:

$$\Theta_{(n)ijm} \equiv 0, \qquad i, j, m = \overline{1, n}.$$

Определение 3. *Гиперповерхность F^n из множества $D_{(n)}$ при $n > 2$ назовем обобщенной гиперповерхностью Дарбу в пространстве постоянной кривизны $M^{n+1}(\widetilde{c})$.*

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть гиперповерхность $F^n \subset M^{n+1}(\widetilde{c})$ не имеет асимптотических направлений среди главных. F^n принадлежит множеству $D_{(n)}$ тогда и только тогда, когда F^n является объединением замыканий своих областей, в каждой из которых существует координатная сеть линий кривизны $(u^1, \ldots, u^n)$ такая, что главные кривизны k_1, k_2, $\ldots$, k_n удовлетворяют соотношениям*

$$k_2 k_3 \ldots k_n = \psi_{(1)}(u^1) k_1^{n+1},$$

$$k_1 k_3 \ldots k_n = \psi_{(2)}(u^2) k_2^{n+1},$$

$$\dots,$$
$$k_1 k_2 \dots k_{n-1} = \psi_{(n)}(u^n) k_n^{n+1},$$

где $\psi_{(i)}(u^i) \neq 0$ *— некоторые функции,* $i = \overline{1, n}$.

Замечание 3. *Для гиперповерхностей F^n в евклидовом пространстве E^{n+1} при $n > 2$ теорема доказана в [2].*

Из теоремы получим следующее утверждение.

Следствие. *Пусть гиперповерхность $F^n \subset M^{n+1}(\widetilde{c})$ не имеет асимптотических направлений среди главных. Если F^n принадлежит множеству $D_{(n)}$, то F^n является объединением замыканий своих областей, в каждой из которых существует координатная сеть линий кривизны $(u^1, \dots, u^n)$ такая, что выполнено уравнение*

$$|K(u^1, \dots, u^n)| = \frac{1}{\sqrt{\psi_{(1)}(u^1)\psi_{(2)}(u^2) \dots \psi_{(n)}(u^n)}},$$

где $\psi_{(i)}(u^i) \neq 0$ *— некоторые функции,* $i = \overline{1, n}$.

Список литературы

[1] И. И. Бодренко, *Обобщенные поверхности Дарбу в пространствах постоянной кривизны*, Saarbrücken, Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing, (2013).

[2] И. И. Бодренко, "Обобщение теоремы Бонне о поверхностях Дарбу", *Математические заметки*, Т. 95, No. 6, 812–820 (2014).

Волгоградский государственный университет, проспект Университетский, 100, Волгоград, 400062, Российская Федерация

E-mail address: irina@bodrenko.org

К УСТОЙЧИВОСТИ В СОБОЛЕВСКИХ НОРМАХ КЛАССОВ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

ВАЛЕНТИНА АЛЕКСАНДРОВНА БУКРЕЕВА

В работах [1, 2] А. П. Копыловым была исследована устойчивость в C-норме класса $\mathcal{K}$, состоящего из отображений областей пространства $\mathbb{R}^N$ в пространство $\mathbb{R}^n$, $N > n \geq 2$, конформных относительно группы n первых переменных и постоянных по остальным переменным. В докладе рассматривается вопрос об устойчивости класса $\mathcal{K}$ в соболевских нормах.

Будем говорить, что непрерывное отображение f области $U \subset \mathbb{R}^N$ в пространство $\mathbb{R}^n$ является *отображением класса* $\mathcal{K}(\varepsilon), \varepsilon \geq 0$, если:

(1) $f \in W^1_{n,loc}(U, \mathbb{R}^n)$;

(2) a) для почти всех τ из области $U_{N-n} = \{\tau' \in \mathbb{R}^{N-n} | \exists t \in \mathbb{R}^n, (t, \tau') \in U\} \subset \mathbb{R}^{N-n}$ отображение $f(\cdot, \tau)$ сохраняет ориентацию и имеет ограниченное искажение по Решетняку, причем коэффициент искажения удовлетворяет неравенству

$$K(f(\cdot, \tau)) \leq 1 + \varepsilon,$$

b) $\|f'_\tau(t;\tau)\| \leq \varepsilon \|f'_t(t;\tau)\|$ для почти всех $(t;\tau) = (t_1, \dots, t_n; \tau_1, \dots, \tau_{N-n}) \in U$, где $f'_t(t;\tau) = \left(\frac{\partial f}{\partial t_1}(t;\tau), \dots, \frac{\partial f}{\partial t_n}(t;\tau)\right)$, $f'_\tau(t;\tau) = \left(\frac{\partial f}{\partial \tau_1}(t;\tau), \dots, \frac{\partial f}{\partial \tau_{N-n}}(t;\tau)\right)$.

Заметим, что $\mathcal{K} = \mathcal{K}(0)$.

Рассмотрим вспомогательный класс $\mathcal{F}_q(C) = \{f \in W^1_{q,loc}(U, \mathbb{R}^n) | \int_{B(a,r)} |f'(t,\tau)|^q \, dt \, d\tau \leq r^{N-q} C \cdot (\operatorname{diam} f(B(a,r)))^q$ для любого $B(a,r) \subset U\}$, $q \geq 1$, $C > 0$.

Теорема. *Пусть* $\rho \in (0,1), q > N$ *и* $C > 0$. *Существуют число* $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_{\rho,C,q} \in (\rho, 1)$ *и функция* $\omega(\varepsilon) = \omega_{\rho,C,q}(\varepsilon)$, *определенная для* $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ *и такая, что* $\lim_{\varepsilon \to 0} \omega(\varepsilon) = \omega(0) = 0$ *и для любого отображения* $f : B(a,r) \to \mathbb{R}^n$ *шара* $B(a,r) \subset \mathbb{R}^N$ *из класса* $\mathcal{K}(\varepsilon) \cap \mathcal{F}_q(C)$ *с некоторым* $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ *найдется отображение* $g : B(a, \tilde{\rho} r) \to \mathbb{R}^n$ *класса* $\mathcal{K}$ *такое, что для любого* $n \leq p < \tilde{p}$, *где* $\tilde{p} = \tilde{p}_{\rho,C,q,\varepsilon} > n$, *выполняется неравенство:*

$$||f-g||^0_{W^1_p(B(a,\rho r))} = ||f-g||_{L^p(B(a,\rho r))} + |B(a,\rho r)|^{1/n} ||f'-g'||_{L^p(B(a,\rho r))} \leq r\omega(\varepsilon) ||g'||_{L^p(B(a,\rho r))}.$$

При доказательстве теоремы мы используем результаты об отображениях с ограниченным удельным колебанием из монографии Ю. Г. Решетняка [3].

Список литературы

[1] А. П. Копылов, К устойчивости классов конформных отображений II // *Сиб. мат. журн.* 1997. Т. 38, № 2. С. 326—343.

[2] А. П. Копылов, К устойчивости классов конформных отображений III // *Сиб. мат. журн.* 1997. Т. 38, № 4. С. 825–842.

[3] Ю. Г. Решетняк, *Теоремы устойчивости в геометрии и анализе.* 2-е изд., перераб. Новосибирск: Изд-во Ин-та матем. СО РАН, 1996.

НГУ, ул. Пирогова, д. 2, г. Новосибирск, 630090, Россия
E-mail address: bukreevav1@gmail.com

Работа выполнена при поддержки Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (грант НШ-2263.2014.1).

ТЕОРИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ ИСКАЖЕНИЕМ: ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ

СЕРГЕЙ КОНСТАНТИНОВИЧ ВОДОПЬЯНОВ

Отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ класса Соболева $W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, называется *отображением с ограниченным искажением*, если

$$|Df(x)|^n \leq KJ(x,f) \text{ для п. вс. } x \in \Omega,$$

где постоянная $K < \infty$ не зависит от x, $J(x,f) = \det Df(x)$.

Известно, что аналитические функции суть таковы при $K = 1$; $n = 2$.

В 1966 году Ю. Г. Решетняк доказал, что всякое непостоянное отображение с ограниченным искажением непрерывно открыто и дискретно [1].

В последовавших за этим открытием работах были установлены различные свойства этого класса отображений, изложенные в многочисленных монографиях и статьях. Кроме того, были предприняты неоднократные попытки обобщения этого класса отображений. Цель доклада состоит в том, чтобы показать один из возможных путей такого обобщения. Предлагаемый подход свободен от обременительных аналитических предположений, присущих предыдущим работам.

Определение. Пусть $\theta : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ — измеримая функция: $0 < \theta < \infty$ п. вс. Отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, называется *отображение с ограниченным θ-весовым (p,q)-искажением,* $n-1 < q \leq p < \infty$, если:

1) $f \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$ непрерывно открыто и дискретно, и $J(x,f) \geq 0$;

2) θ-весовая функция (q,p)-искажения

$$\Omega \ni x \mapsto K^{\theta}_q(x,f) = \begin{cases} \frac{\theta^{\frac{1}{q}}(x)|Df(x)|}{J(x,f)^{\frac{1}{p}}}, & \text{если } \ J(x,f) > 0, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

принадлежит $L_{\kappa}(\Omega)$, где $\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ($\kappa = \infty$ при $p = q$).

Очевидно, что в случае $\theta \equiv 1$, $q = p = n$ мы получаем отображение с ограниченным искажением. Если дополнительно f — гомеоморфизм, то f — квазиконформное отображение.

Будет показано, что новый класс отображений наследует многие свойства отображений с ограниченным искажением:

1) обобщенную лемму Полецкого [2];

2) оценки [3] для емкости образа кольцевой области, доказательство которых основывается на работах [2,4];

3) теорему Лиувилля [3];

4) устранимость множеств

и др. результаты.

Список литературы

[1] Ю. Г. Решетняк, *Пространственные отображения с ограниченным искажением*, Новосибирск: Наука, (1982).

[2] С. К. Водопьянов, “О регулярности функции Полецкого при слабых аналитических предположениях исходного отображения”, *Докл. АН*, Т. 455, № 2, 130–134 (2014).

[3] А. Н. Байкин, С. К. Водопьянов, “Теоремы типа Лиувилля для отображений с ограниченным искажением”, *Сиб. мат. жс.*, Т. 56 (2015) (в печати).

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (код проекта № 14-01-00552).

[4] С. К. Водопьянов, “О регулярности отображений, обратных к соболевским”, *Матем. сб.*, Т. 203, № 10, 3–32 (2012).

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр-т Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail address: vodopis@math.nsc.ru

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ПОДОБНО ОДНОРОДНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВ С ВНУТРЕННЕЙ МЕТРИКОЙ

ИВАН АНАТОЛЬЕВИЧ ГУНДЫРЕВ

Обозначим через $\mathbb{R}_+$ мультипликативную группу положительных вещественных чисел. Для произвольных топологических групп G_1, G_2 обозначим через $G_1 \leftthreetimes G_2$ полупрямое произведение групп, снабженное топологией произведения на пространстве $G_1 \times G_2$.

Определение 1. *Биекция $f\colon X \to X$ метрического пространства (X, ρ) на себя называется α-подобием ($\alpha \in \mathbb{R}_+$), если для любых точек $x, y \in X$ выполняется равенство:*

$$\rho(f(x), f(y)) = \alpha\rho(x, y).$$

Биекция $f\colon X \to X$ называется подобием, если f – α-подобие при некотором $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Определение 2. *Метрическое пространство X называется однородным (подобно однородным), если группа его изометрий (подобий) действует транзитивно на X.*

Начало изучения подобно однородных пространств с внутренней метрикой положено в статье [1]. Согласно теореме 2.1 из [1], локально компактное подобно однородное метрическое пространство однородно тогда и только тогда, когда оно полно. Сформулированная в [1] гипотеза о строении локально компактных подобно однородных неоднородных пространств с внутренней метрикой доказана в статье [2].

Для получения новых результатов используется введенное в [1] конформное изменение метрики (см. определение 3) и теорема 1.1 статьи [3].

Определение 3. *Пусть (X, ρ) — пространство с внутренней метрикой, задана положительная непрерывная вещественная функция $\lambda = \lambda(x)$, $x \in X$ на этом пространстве. Для каждого параметризованного длиной дуги спрямляемого пути $\xi = \xi(s), 0 \leq s \leq a$, в (X, ρ) определим новую его длину $l(\xi, \lambda) := \int_0^a \lambda(\xi(s))\,ds$. Затем определим новую (внутреннюю) метрику ρ_λ на X, полагая $\rho_\lambda(z, y)$ для $z, y \in X$ равным точной нижней границе длин $l(\xi, \lambda)$ по всем спрямляемым в метрике ρ путям ξ, соединяющим точки z, y. Будем говорить при этом, что метрика ρ_λ получена конформным изменением метрики ρ с коэффициентом конформности λ.*

Теорема (1.1, [3]) *Пусть G — хаусдорфова локально компактная связная группа с первой аксиомой счетности, H — компактная подгруппа в группе G. Если фактор-пространство G/H — локально связно, то оно допускает метрику кривизны $\geq k$ по А. Д. Александрову, инвариантную относительно действия группы G.*

Основным результатом является

Теорема 1. *Пусть $X = G/H$ — эффективное локально компактное фактор-пространство связной полной топологической группы G с компактно-открытой топологией относительно канонического левого действия G на G/H. Пространство X допускает внутреннюю метрику с группой подобий G (включающей и элементы, не являющиеся изометриями) относительно этого действия тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1. *G — хаусдорфова связная локально компактная группа с первой аксиомой счетности;*
2. *H — компактная подгруппа в G;*
3. *G/H — локально связно;*
4. *Для некоторой подгруппы I в G существует изоморфизм топологических групп $\Phi\colon G \to (\mathbb{R}_+, \cdot) \leftthreetimes I$.*

Необходимость. Пункт 1 доказывается с помощью перехода к группе движений конформно эквивалентного однородного локально компактного пространства с внутренней метрикой (такое пространство существует согласно теореме 1.2 из [1]). Пункт 2 следует из того, что группа G действует собственно (см. определение в [5]). Пункт 3 очевидно выполняется для пространств с внутренней метрикой. Пункт 4 доказан в [2].

Для доказательства достаточности этих условий используются классические результаты в теории топологических групп, теорема 1.1 из [3] и конформное изменение метрики.

Список литературы

[1] Берестовский В. Н., “Подобно однородные локально полные пространства с внутренней метрикой”, *Изв. вузов. Матем.*, № 11, 3–22 (2004).

[2] Гундырев И. А., “Строение подобно однородных неоднородных локально компактных пространств с внутренней метрикой”, *Матем. тр.*, том 17, № 2, 1-10 (2014).

[3] Berestovskii V., Plaut C., “Homogeneneous Spaces of Curvature Bounded Below”, *The Journal of Geometric Analysis.* Vol. 9., No 2, 203–219 (1999).

[4] Берестовский В. Н., “О структуре однородных локально компактных пространств с внутренней метрикой”, *Сиб. матем. журн.*, Т. 30, № 1, 23–34 (1989).

[5] Берестовский В. Н., “Однородные G-пространства Буземана”, *Сиб. матем. журн.*, Т. 23, № 2, 3–15 (1982).

Омский государственный университет имени Ф. М. Достоевского, пр. Мира, 55 А, Омск, 644077, Россия

E-mail address: `ivangundyrev@yandex.ru`

СОЗДАНИЕ УСЛОВИЙ ДЛЯ ОБРАЗОВАНИЯ ВРЕМЕННЫХ ПЕТЕЛЬ В 5-МЕРНОМ ЛОРЕНЦЕВОМ МНОГООБРАЗИИ

АЛЕКСАНДР КОНСТАНТИНОВИЧ ГУЦ

Теория абсолютного пространства-времени представляет многообразие всевозможных событий прошлого, настоящего и будущего в форме n-мерного псевдориманова пространства M^n лоренцевой сигнатуры $(+ - ...-)$. В классической версии Минковского размерность псевдориманова пространства $n = 4$. Начиная с работ Калуцы и Клейна, размерность пространства-времени берется отличной от 4.

Принцип абсолютного характера пространства-времени означает, что события прошлого, настоящего и будущего (с точки зрения земного наблюдателя) рассматриваются как равноправные. В таком случае временные петли, т. е. замкнутые гладкие времениподобные кривые являются путем перехода от настоящего к прошлому. Другими словами, как первым об этом написал Курт Гёдель [1], временные петли – это геометрическая конструкция машины времени.

Однако временные петли существуют не во всяком 4-мерном лоренцевом многообразии. Иначе говоря, если в качестве геометрической модели окружающей нас эволюционирующей Вселенной используется конкретное 4-мерное лоренцево многообразие, то лишь в редких случаях оно априори содержит временные петли, а если и содержит, как было в случае космологической модели Курта Гёделя [1], то они мало что дают для реализации (комфортных) путешествий в прошлое.

Переход к 5-мерному пространству-времени M^5 позволяет найти удовлетворительное решение проблемы искусственного образования временных петель. В монографии [2] описывается проект машины времени, в котором переход в прошлое осуществляется за счет создания 4-мерной кротовой норы, т. е. приклеивания 3-ручки $H_1^4 = D^3 \times D^1$, ведущей из настоящего в прошлое в едином потоке 5-мерного времени. Другими словами, 4-мерное пространство-время $(M^4, g^{(4)})$ рассматривается как слой (брана) в 5-мерном замкнутом лоренцевом многообразии $(M^5, g^{(5)})$, $g^{(4)} = g^{(5)}|_{M^4}$, со слоением, расположенной в M^5 так, что можно соединить событие $a \in M^4$, принадлежащее настоящему, с событие b, лежащим в прошлом, с помощью направленной в будущее времениподобной (относительно 5-метрики $g^{(5)}$) гладкой кривой, лежащий внутри приклееной к M^4 3-ручки H_1^4.

С точки зрения геометрии такая ситуация возможна, если M^4 реализуется в M^5 как так называемый *пружинный слой* гладкого слоения $\mathbf{F} = \{F_\alpha\}$, которое разбивает M^5 на множество слоев F_α, т. е. связных подмножеств

$$M^5 = \bigcup_\alpha F_\alpha, \qquad F_\alpha \cap F_\beta = \emptyset \ (\alpha \neq \beta),$$

одним из которых является наше пространство-время M^4, обладающих следующим свойством: для произвольной точки x многообразия M^n найдется локальная карта $\varphi : U \to (x^1, ..., x^n)$, $x \in U$, принадлежащая выбранной гладкой структуре многообразия M^n и такая, что связные компоненты пересечений $U \cap F_\alpha$ с областью определения U этой локальной карты задаются уравнениями вида $x^{p+1} = const, ..., x^n = const$.

Пружинный слой слоения $\mathbf{F}$ – это слой, который бесконечно наматывается сам на себя.

В [2] анализировался случай, когда пространство-время не оказывалось пружинным слоем, и случай, когда пружинные слои в слоении вообще отсутствуют. Было показано, что можно добиться появления пружинных слоев за счет разного рода неинтегрируемых деформаций слоения $\mathbf{F}$ в новое слоение $\mathbf{F}'$, и были оценены необходимые для этого затраты энергии.

Для того чтобы образовались пружинные слои необходимо, например, деформировать слоение так, чтобы оно превратилось в *расширяющееся* (expansive) слоение, в котором каждый слой убегает прочь от ближайшего к нему другого слоя. Ясно, что для этого нужно включить источник энергии, способствующий отталкиванию одного слоя, т. е. одной браны от от другого слоя, т. е. другой браны. (Отталкивание затрагивает и траектории в слоях). Естественным необходимым источником энергии для данной деформации является темная энергия в балке. Отметим, что современное разбегание галактик в нашей Вселенной объясняется действием темной энергии.

Убегание слоя F_x, проходящего через точку x, от слоя F_y, проходящего через точку y, измеряется следующим образом [3]. Возьмем $R > 0$ и рассмотрим путь γ_x в F_x с началом x и с длиной не большей, чем R, и спроектируем его локально на F_y, начиная с точки x. Пусть $p_{loc}(\gamma_x)$ результирующий путь в F_y. Проделаем это же с аналогичным путем γ_y в F_y с началом y и спроецируем его на F_x. Пусть

$$d_1 = \sup_{\gamma_x,\ l(\gamma_x)\le R}\ \sup_t d(\gamma_x(t), p_{loc}\gamma_x(t)), \quad d_2 = \sup_{\gamma_y,\ l(\gamma_y)\le R}\ \sup_t d(\gamma_y(t), p_{loc}\gamma_y(t)),$$

$$d_R(x,y) = \max(d_1, d_2).$$

Слоение $\mathbf{F}$ риманова многообразия $(M^5, h^{(5)})$ называется *расширяющимся*, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для каждой пары точек x и y в M^5, достаточно близких, чтобы допускалась вышеописанная конструкция, найдется $R > 0$, для которого $d_R(x,y) > \varepsilon$. (Независимое от метрики $h^{(5)}$ определение расширяющегося слоения дано в [4]).

Inaba и Tsuchiya [4] доказали, что расширяющееся слоение коразмерности 1 замкнутого многообразия обладает пружинным слоем. Можно также показать, что в таких слоениях пружинные слои плотны [3, p. 64], и, следовательно, в такой геометрической 5-мерной Вселенной условий для создания временных петель предостаточно и, следовательно, машина времени распространенное космическое явление [2, с. 156].

Если дополнительно учесть, что квантовые флуктуации 5-метрики $g^{(5)}$ и топологии (образование 4-ручек) в 5-мерном пространстве-времени

$$\Delta g^{(5)} \sim \frac{L^*}{L}\sqrt{\frac{T}{L_0}},$$

где $L^* \sim 10^{-33}$ *см* – постоянная Планка, а $L^4 \times L_0$ – характерный размер 5-мерной области, T – константа с размерностью [*см*], связанная с 5-м измерением, могут иметь макроскопический характер [5], то вероятность обнаруживать спонтанные природные временные петли крайне высока.

Наконец, отметим, что необходимые расчеты геометрии слоев можно делать, привлекая результаты по псевдоримановой геометрии слоений псевдоримановых многообразий, изложенные в [6].

Список литературы

[1] K. Gödel, “An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein’s Field Equtions of Gravitation”, *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 21, No. 3. 447–450, (1949).

[2] А. Гуц, *Физика реальности*, Омск: Изд-во КАН, (2012).

[3] R. Langevin, “A List of Questions about Foliations”, Workshop on Topology "Differential topology, foliations, and group actions". January 6-17,1992. Rio de Janeiro, Brazil. AMS Publ., (1994).

[4] N. Inaba, N. Tsuchiya, “Expansive foliations”, *Hokkaido Math. J.*, Vol 21, 39–49 (1992).

[5] А. Гуц, *Элементы теории времени*, М.: Издательство ЛКИ, (2011).

[6] A. Bejancu, H.R. Farran, *Foliations and Geometric Structures*, Springer Publ., (2006).

Омский государственный университет им. Ф.М.Достоевского, пр. Мира, 55-а, Омск, 644077, Россия

E-mail address: aguts@mail.ru

О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПОЧТИ ЭРМИТОВЫХ СТРУКТУР НА СТРОГО ПРИБЛИЖЕННО КЕЛЕРОВОМ 6-МНОГООБРАЗИИ

НАТАЛИЯ АЛЕКСАНДРОВНА ДАУРЦЕВА

Пусть (M, g, I) – строго приближенно келерово (SNK) 6-многообразие, и ω келерова 2-форма $\omega(X, Y) = g(IX, Y)$. Рассмотрим пространство A^+_ω всех почти комплексных структур J положительно ассоциированных с формой ω, то есть удовлетворяющих условиям:

$$\omega(JX, JY) = \omega(X, Y), \qquad \omega(X, JX) > 0, \text{ если } X \neq 0.$$

Каждой почти комплексной структуре $J \in A^+_\omega$ соответствует метрика $g_J(X, Y) = \omega(X, JY)$. В работе изучается вопрос о совместимости SNK структуры (g, I) на 6-многообразии с почти эрмитовыми структурами (g_J, J), $J \in A^+_\omega$, определяющими другие классы почти эрмитовых многообразий по классификации Грэя-Хервеллы [1]

Напомним, что SNK структура в этой классификации соответствует классу $\mathcal{W}_1$. Наиболее широкий класс, принадлежность которому исключает принадлежность $\mathcal{W}_1$ это, очевидно, $\mathcal{G}_2 = \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3 \oplus \mathcal{W}_4$. Структуры этого класса изучались в работах [2, 3]. Несовместимость $\mathcal{W}_1$ с $\mathcal{G}_2$ распространяется и на другие почти эрмитовы структуры, а именно, доказана

Теорема. *На строго приближенно келеровом 6-многообразии (M, g, I, ω) всякая почти эрмитова структура (g_J, J), где $J \in A^+_\omega$ не может быть $\mathcal{G}_2$-структурой.*

Список литературы

[1] A. Gray, L. M. Hervella , “The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants”, *Ann.Mat.Pura Appl.*, Vol. 123, 35–58 (1980).

[2] L. M. Hervella, E. Vidal “Nouvelles géométries pseudo-kählériennes G_1 et G_2”, *C.R. Acad. Sci. Paris*, Vol. 283, 115–118 (1976).

[3] L. M. Hervella, E. Vidal “New classes of almost Hermitian manifolds”, *Tensor*, Vol. 33, No. 3, 293–299 (1979).

Кемеровский государственный университет, Красная, 6, Кемерово, 650043, Россия
E-mail address: `natali0112@ngs.ru`

Работа поддержана РФФИ, грант 12-01-00873-а, а также грантом Президента РФ по поддержке научных школ, проект НШ-4382.2014.1.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АЛГЕБРАИЧЕСКИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ КВАНТОВЫХ ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

АЛЕКСАНДР БОРИСОВИЧ ЖЕГЛОВ

Рассмотрим k-алгебру (где k — поле характеристики 0) дифференциальных операторов от n переменных

$$D_n = k[[x_1, \dots, x_n]][\partial_1, \dots, \partial_n]$$

Как описать (классифицировать) все коммутативные k-подалгебры в D_n?

Это очень трудная задача, и в общем виде она не решена до сих пор. Наиболее полный ответ есть для $n = 1$, и в этом случае он связан с обширной теорией точно решаемых нелинейных уравнений. В случае $n = 2$ можно классифицировать подалгебры в пополненной алгебре дифференциальных операторов в терминах модифицированных геометрических данных Паршина или в терминах подпространств специального вида в двумерном локальном поле. Возникает вопрос: какие геометрические данные описывают коммутативные подалгебры в D_2? Можно ли построить явные примеры таких подалгебр хотя бы в случае ранга один (такие подалгебры являются алгебраически интегрируемыми квантовыми вполне интегрируемыми системами по определению, введенному Бравермана, Этингофом и Гайтсгори)? Какие геометрические данные описывают уже известные примеры?

В нашем докладе мы расскажем о последних достижениях в решении этих задач в случае $n = 2$.

Доклад основан на результатах совместных работ с Х. Курке и И. Бурбаном.

МГУ им. М. В. Ломоносова
E-mail address: azheglov@math.msu.su

ТАБУЛИРОВАНИЕ ЗАУЗЛЕННЫХ ДУГ СЛОЖНОСТИ НЕ БОЛЕЕ 4 В УТОЛЩЕННОМ ПРОКОЛОТОМ ТОРЕ

ИЛЬИНА ЯНА КОНСТАНТИНОВНА

Определение 1. *Под утолщенным проколотым тором $T_0 \times I$ понимается прямое произведение проколотого тора T_0, то есть тора с удаленным открытым диском, и отрезка I.*

Определение 2. *Заузленной дугой в $T_0 \times I$ называется простая кривая с двумя конечными точками a,b, фиксированными на утолщенном крае $\partial T_0 \times I$ проколотого тора.*

Определение 3. *Будем говорить, что две заузленные дуги L_1, L_2 эквивалентны, если существует гомеоморфизм $h : (T_0 \times I, L_1) \to (T_0 \times I, L_2)$, такой что конечные точки остаются неподвижными, а дуга L_1 переходит в дугу L_2.*

Будем рассматривать проколотый тор T_0 как квадрат с удаленным открытым диском и попарно отождествленными противоположными сторонами.

Определение 4. *Проекцией заузленной дуги называется граф в T_0 с несколькими вершинами валентности 4 и двумя вершинами валентности 1, такой что проход всех вершин валентности 4 по правилу "прямо-вперед" определяет обход по всем ребрам графа от одной вершины валентности 1 до другой.*

Определение 5. *Диаграмма заузленной дуги получается из проекции указанием разрывов в перекрестках, то есть вершинах валентности 4.*

Определение 6. *Диаграмма зазуленной дуги в $T_0 \times I$ называется минимальной, если ее сложность (число перекрестков) не превосходит сложности любой диаграммы любой заузленной дуги, эквивалентной данной. Проекция минимальна, если ей соответствует хотя бы одна минимальная диаграмма.*

Табулирование заузленных дуг в утолщенном проколотом торе $T_0 \times I$ осуществлялось в 3 шага:

(1) Строились все абстрактные графы без петель с не более чем 4 вершинами валентности 4 и двумя вершинами валентности 1;
(2) По данным абстрактным графам строились проекции дуг в проколотом торе T_0;
(3) По проекциям восстанавливались диаграммы заузленных дуг в $T_0 \times I$.

В таблицу заузленных дуг в $T_0 \times I$ не включались следующие диаграммы:

(1) Локальные диаграммы (диаграммы, лежащие внутри проколотого диска);
(2) Кольцевые диаграммы (диаграммы, лежащие внутри проколотого кольца);
(3) Связные суммы локальных и кольцевых диаграмм.

Лемма 1. *Существует 8 абстрактных графов без петель с не более чем 4 вершинами валентности 4 и двумя вершинами валентности 1.*

Лемма 2. *Существует 15 минимальных проекций заузленных дуг сложности не более 4 в проколотом торе T_0*

Теорема. *Существует 67 заузленных дуг сложности не более 4 в утолщенном проколотом торе $T_0 \times I$.*

Определение 7. *Пусть $L \subset T_0 \times I$ — диаграмма заузленной дуги в $T_0 \times I$. Как и в [1], разрешение каждого ее состояния s задает в T_0 набор кривых без пересечений и самопересечений. Тогда обобщенный полином Кауффмана имеет вид:*

$X(L) = (-a)^{-3\omega(K)} \sum_s a^{\alpha(s)-\beta(s)}(-a^{-2} - a^2)^{\gamma(s)} d^{\delta(s)} e^{\nu(s)} f^{\lambda(s)} g^{\mu(s)}$,

Работа поддержана лабораторией квантовой топологии ЧелГУ (грант правительства РФ №14.Z50.31.0020).

где числа γ, δ, μ, ν и λ показывают, сколько кривых различных типов получается при разрешении диаграммы.

Свойства обобщенного полинома Кауффмана и доказательства его инвариантности относительно движений Райдемайстера для дуг в $T_0 \times I$ полностью совпадают с классическим случаем, описанным в статье [1].

Определение 8. *Гауссовой диаграммой заузленной дуги называется ориентированная окружность с удаленным участком, на которой отмечены образы всех перекрестков диаграммы. Каждая пара точек, отвечающая одному и тому же перекрестку, соединена стрелкой, ориентированной от верхнего прохода по перекрестку к нижнему проходу. Каждая стрелка снабжена знаком соответствующего ей перекрестка.*

Инвариант Кассона находится следующим образом:

(1) Для каждой диграммы заузленной дуги строится соответствующая ей гауссова диаграмма;
(2) На гауссовой диаграмме находятся все пары стрелок, таких что удаленный участок окружности лежит между их началами;
(3) Для каждой найденной в п.2 пары находится знак пары как произведение знаков входящих в данную пару стрелок;
(4) Полученные в п.3 знаки суммируются, полученное число обозначается v_2 и называется инвариантом Кассона данной заузленной дуги.

Список литературы

[1] L. Kauffman, "State models and the Jones polynomal", *Topology*, Vol. 26, No. 3, 395–407 (1987).

Челябинский государственный университет, ул. Братьев Кашириных, 129, г. Челябинск, 454001, Россия

E-mail address: ykilyina@gmail.com

ПРИМЕР АТТРАКТОРА ДЛЯ ЛОКАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ РАСТЯГИВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

ПАВЕЛ АЛЕКСЕЕВИЧ ИСТОМИН

Самоподобные множества являются аттракторами систем сжимающих подобий в полных метрических пространствах [1]. Для систем растягивающих отображений аттрактор не может существовать. Для локальных систем отображений, введенных Барнсли [2], такой жесткой зависимости нет. Мы строим локальную систему $S = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ растягивающих отображений на отрезке $[-1, 1]$ со следующими свойствами:

(1) Существует множество $A = [-a, a]$ такое, что $A = \varphi_1(A) \bigcup \varphi_2(A)$.
(2) Для любой точки $x : a < |x| < 1$ точки ее орбиты, начиная с некоторого номера, лежат в A.
(3) Для любого $x, 0 < |x| < a$, его орбита плотна в A.

Из этих свойств мы получаем, что множество A является (компактным) аттрактором системы растягивающих отображений S.

Список литературы

[1] J. Hutchinson, “Fractals and self-similarity”, *Indiana Univ. Math. J.*, Vol. 30, No. 5, 713–747 (1981).
[2] M. F. Barnsley, M. Hegland, P. Massopust, “Numerics and Fractals”, http://arxiv.org/abs/1309.0972, 2013.

Горно-Алтайский государственный университет, ул. Социалистическая, 32, г. Горно-Алтайск, 649000, Россия
E-mail address: istomin.pawel@gmail.com

ВЕКТОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ АБЕЛЕВЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ НАД ПРОСТРАНСТВОМ ТЕЙХМЮЛЛЕРА

АЛЕНА АЛЕКСЕЕВНА КАЗАНЦЕВА

В настоящей работе построены основные виды элементарных однозначных $q-$дифференциалов. В двух важных фактор пространствах построены явные базисы, локально голоморфно зависящие от модулей $[\mu]$ римановых поверхностей $F' = F\backslash\{P_1, ..., P_n\}$ типа (g, n), $n \geq 1$, $g \geq 2$. Любая комплексно-аналитическая структура F'_μ может быть отождествлена с некоторым дифференциалом Бельтрами μ.

Теорема 1. *Векторные расслоения* $\bigcup \Omega_2(F'_\mu)/\Omega_{2,e}(F'_\mu)$ *является голоморфным векторным расслоением ранга* $2g + n - 1$ *над базой* $\mathbb{T}_{g,n}$ *при* $g \geq 2$, $n \geq 1$. *При этом наборы классов смежности дифференциалов* $\zeta_1, ..., \zeta_g, \tau_{P_1}^{(n_1+1)}, ..., \tau_{P_1}^{(n_g+1)}$, $\tau_{P_2P_1}, ..., \tau_{P_nP_1}$ *или* $\zeta_1, ..., \zeta_g, \tau^{(2)}_{\widetilde{P}_1}, ..., \tau^{(2)}_{\widetilde{P}_g}, \tau_{P_2P_1}, ..., \tau_{P_nP_1}$ *задают базисы локально голоморфных сечений этого расслоения, где* $n_1, \ldots, n_g$ *– пробелы Вейерштрасса в* P_1, $r(\frac{1}{\widetilde{P}_1 \ldots \widetilde{P}_g}) = 1$ *на* F_μ, *и* $\widetilde{P}_1, \ldots, \widetilde{P}_g \in F'_\mu$.

Теорема 2. *Векторное расслоение* $\bigcup \Omega(\frac{1}{Q_1Q_2 \ldots Q_s}; F'_\mu)/\Omega_e(1; F'_\mu)$ *является голоморфным векторным расслоением ранга* $2g + n + s - 1$ *над базой* $\mathbb{T}_{g,n}$ *при* $g \geq 2$, $n \geq 1$, $s \geq 1$. *При этом набор классов смежности дифференциалов* $\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_g, \tau_{P_1}^{(n_1+1)}, \tau_{P_1}^{(n_2+1)}, ..., \tau_{P_1}^{(n_g+1)}$, $\tau_{P_2P_1}, \tau_{P_3P_1}, ..., \tau_{P_nP_1}, \tau_{Q_1P_1}, \tau_{Q_2P_1}, ..., \tau_{Q_sP_1}$ *задаёт базис локально голоморфных сечений этого расслоения.*

Список литературы

[1] R. C. Gunning, "On the period classes of Prym differentials", *J. Reine Angew. Math.*, Vol. 319, 153–171 (1980).

[2] В. В. Чуешев, *Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности*, Ч.2, Кемерово: КемГУ, (2003).

Горно-Алтайский государственный университет, ул. Ленкина 1, г. Горно-Алтайск, 649000, Россия

E-mail address: albesik@mail.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, код проекта 14-01-31109 мол-а.

НЕЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ИЗОМЕТРИИ ГИПЕРПРОСТРАНСТВ И ПОРЯДКОВЫЕ ТИПЫ МЕТРИЧЕСКИХ 4-ТОЧЕЧНИКОВ

КИРИЛЛ ГЛЕБОВИЧ КАМАЛУТДИНОВ

Множество всех компактных непустых подмножеств метрического пространства (X, ρ), наделенное некоторой допустимой метрикой (обычно метрикой Хаусдорфа), называется гиперпространством $\mathcal{C}(X)$ над метрическим пространством X.

Метрика Хаусдорфа задается формулой: $h(A, B) = \max\{\sup\limits_{a \in A} \rho(a, B), \sup\limits_{b \in B} \rho(A, b)\}$

Метрическим n-точечником назовем метрическое пространство мощности n.

Отображение $f\colon X \to Y$ метрических пространств сохраняет метрический порядок, если для любых четырёх точек a, b, c, d пространства X отношение $\rho_X(a, b) < \rho_X(c, d)$ влечёт $\rho_Y(f(a), f(b)) < \rho_Y(f(c), f(d))$. Когда существует биекция $f\colon X \to Y$ метрических пространств, сохраняющая порядок в обе стороны, мы говорим, что X и Y порядково эквивалентны. Классы по отношению порядковой эквивалентности называются порядковыми типами метрических пространств.

Изометрия $F\colon \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(X)$ гиперпространства $\mathcal{C}(X)$ называется элементарной, если существует порождающая её изометрия $f\colon X \to X$ пространства X, т. е. такая что для любого элемента A гиперпространства $\mathcal{C}(X)$ выполняется $F(A) = f(A)$.

П. М. Грубер и Дж. Летти в 1979 г. показали, что все изометрии гиперпространства с метрикой Хаусдорфа над Евклидовым пространством — элементарны. Позже К. Бандт в 1986 г. показал, что это верно и для любой выпуклой области Евклидова пространства. В работе [1] В. В. Асеева, А. В. Тетенова и А. П. Максимовой была введена обобщенная метрика Помпейю и доказано, что всякая изометрия гиперпространства с этой метрикой над компактным подмножеством числовой прямой — элементарна. А. Атачкин и Ю. Бушуев в 2009 г. показали что гиперпространство с метрикой Хаусдорфа над метрическим 3-точечником содержит по крайней мере одну неэлементарную изометрию. Кроме того, ими были приведены примеры метрических 4-точечников, допускающих и не допускающих неэлементарные изометрии гиперпространств.

Нами была доказана теорема, связывающая проблему неэлементарных изометрий с порядковыми типами:

Теорема. *Если конечные метрические пространства X и Y порядково эквивалентны, то множества неэлементарных изометрий гиперпространств $\mathcal{C}(X)$ и $\mathcal{C}(Y)$ равномощны.*

Нами были перечислены все порядковые типы метрических 4-точечников — 225 типов; из них перечислены те, которые не допускают неэлементарных изометрий гиперпространств. Для решения этих задач нами построены алгоритмы перечисления изометрий в конечных метрических пространствах, существенно сокращающие время поиска во многих случаях.

Список литературы

[1] В. В. Асеев, А. В. Тетенов, А. П. Максимова, Обобщенная метрика Помпейю в проблеме изометрии гиперпространств, *Математические заметки*, том 78, вып. 2, 163-170. (2005).

Горно-Алтайский Государственный Университет, ул. Ленкина, 1, Горно-Алтайск, 649000, Россия
E-mail address: kirdan15@mail.ru

О ГАРМОНИЧНОСТИ ТЕНЗОРА КОНЦИРКУЛЯРНОЙ КРИВИЗНЫ МЕТРИЧЕСКИХ ГРУПП ЛИ МАЛОЙ РАЗМЕРНОСТИ

ПАВЕЛ НИКОЛАЕВИЧ КЛЕПИКОВ, ОЛЕСЯ ПАВЛОВНА ХРОМОВА

Особый интерес в дифференциальной геометрии представляют конциркулярные преобразования (т.е. нетривиальные конформные преобразования, сохраняющие геодезические окружности), введенные К. Яно в [1]. Обусловлено это их важностью в геометрии некоторых F-структур: комплексных, почти комплексных, кэлеровых, почти кэлеровых, контактных, почти контактных, а также в теории относительности.

Инвариантом конциркулярного преобразования является тензор конциркулярной кривизны [1]. Исследованию его гармонических (бездивергентных) свойств на отдельных классах многообразий посвящены работы [2-4].

В данной работе изучены концирκуляно-гармонические свойства метрических групп Ли малых размерностей и получены следующие результаты:
1) классифицированы трехмерные группы Ли с левоинваринтной (псевдо)римановой метрикой и гармоническим тензором концирκулярой кривизны;
2) дана полная классификация четырехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой и гармоническим тензором конциркулярной кривизны.

Список литературы

[1] K. Yano, "Concircular geometry, I-IV", *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, Vol. 16, 195–200, 354–360, 442–448, 505–511 (1940).

[2] Z. Ahsan, S. A. Siddiqui, "Concircular Curvature Tensor and Fluid Spacetimes", *Int. J. Theor. Phys.*, Vol. 48, 3202—3212 (2009).

[3] U. C. De, G. Pathak, "On a type of contact manifolds", *Math. Balk.*, New Ser. 7, No. 2, 113–118 (1993).

[4] J. P. Srivastava, S. Khajuria, "Concircular curvature tensor and relativistic gravitation", *Jnanabha*, Vol. 26, 113–114 (1996).

Алтайский государственный университет, пр. Ленина, 61, Барнаул, 656064, Россия
E-mail address: askingnetbarnaul@gmail.com, khromova.olesya@gmail.com

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ (грант НШ–2263.2014.1), гранта Правительства РФ (госконтракт № 14.B25.31.0029), Министерства образования и науки РФ (код проекта: 1148), а также в рамках программы стратегического развития ФГБОУ ВПО «АлтГУ» (№ 2014.312.1.4).

ОБ АППРОКСИМАЦИИ УРАВНЕНИЯ МИНИМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ТРИАНГУЛИРОВАННОЙ ОБЛАСТИ

АЛЕКСЕЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ КЛЯЧИН

Пусть область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ представляет собой многогранник, разбитый на тэтраэдры T_k, $k = 1, ..., N$. Обозначим через $P_1, P_2, ..., P_M$ вершины этих тетраэдров. Символом P' будем обозначать множество тех вершин, которые расположены внутри многогранника Ω, а через P'' - множество граничных вершин. Зададим в каждой вершине P_i произвольное значение f_i. На основе этих значений построим кусочно-линейную функцию $f^N(x)$ такую, что $f^N(P_i) = f_i, i = 1, ..., M$. Тогда в каждом тэтраэдре T_k функция $f^N(x) = a_1^k x_1 + ... + a_n^k x_n + b^k$, поэтому $\nabla f^N(x) \equiv \mathrm{const}$ в T_k.

Через $\varphi_i(x), i = 1, ..., N$, обозначим такую кусочно-линейную функцию, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$\varphi_i(P_j) = 0 \text{ при } j \neq i,\ \varphi_i(P_j) = 1 \text{ при } j = i.$$

Тогда, очевидно, что

$$f^N(x) = \sum_{i=1}^{M} f_i \varphi_i(x),$$

при этом $\max\limits_{\overline{\Omega}} |f^N(x)| = \max\limits_{1 \leq i \leq M} |f_i|$.

Следуя работам [1, 2] уклонением кусочно-линейного почти-решения f^N уравнения минимальной поверхности

$$Q[u] \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{u_{x_i}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0$$

будем называть величину

$$\varepsilon_Q(f^N) = \sup \left| \int\limits_{\Omega} \frac{\langle \nabla f^N, \nabla h \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla f^N|^2}} dx \right|,$$

где точная верхняя грань берется по всем кусочно-линейным функциям вида

$$h(x) = \sum_{i=1}^{M} h_i \varphi_i(x)$$

таким, что $|h_i| \leq 1$ для всех $i = 1, ..., M$ и $h_i = 0$ для $P_i \in P''$ (т.е. для граничных вершин).

Зафиксируем произвольно $i = \overline{1, M}$. Пусть $T_1^i, T_2^i, ..., T_{k(i)}^i$ те тетраэдры, у которых вершиной будет точка P_i. Выходящие из этой вершины грани тетраэдра T_j^i, $j = 1, 2, ..., k(i)$, обозначим Γ_{j1}^i, Γ_{j2}^i, ..., Γ_{jn}^i и пусть Γ_{jn+1}^i оставшаяся грань тетраэдра T_j^i, противоположная вершине P_i. Обозначим через ν_{j1}^i, ν_{j2}^i, ..., ν_{jn}^i, ν_{jn+1}^i – внешние по отношению к тетраэдру T_j^i нормали этих граней. Так как в тетраэдре функция f^N линейна, то $\nabla f^N = \xi_j^i \equiv \mathrm{const}$. Ниже $|E|$ означает $(n-1)$-мерную меру множества E. Тогда, как показано в работе [2], выполнено равенство

$$\varepsilon_Q(f^N) = \frac{1}{n} \sum_{\text{внутр. } P_i} \left| \sum_{j=1}^{k(i)} \frac{\langle \xi_j^i, \nu_{jn+1}^i \rangle}{\sqrt{1 + |\xi_j^i|^2}} |\Gamma_{jn+1}^i| \right|.$$

Работа поддержана РФФИ (грант № 13-01-97034 р_поволжье_а).

Выясним, как себя ведет величина $\varepsilon_Q(f^N)$ при $N \to \infty$ на следующем частном примере плоской области. Рассмотрим область Ω, которая имеет вид

$$\Omega = \{(x, y) : a < x < b,\ \varphi(x) < y < \psi(x)\},$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ заданные на отрезке $[a, b]$ липшицевы функции. Пусть $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ – разбиение отрезка $[a, b]$. Положим $g_\tau(x) = \tau\psi(x) + (1 - \tau)\varphi(x)$. Разобьем отрезок $[0, 1]$ точками $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_m = 1$ и в области Ω рассмотрим сетку, задаваемую системой точек

$$A_{ij}(x_i, y_{ij}) = (x_i, g_{\tau_j}(x_i)),\ i = 0, ..., n,\ j = 0, ..., m.$$

Ясно, что все точки $(x_i, y_{ij}) \in \overline{\Omega}$. Разобъем на два треугольника одной из диагоналей все трапеции вида $A_{ij}A_{i+1j}A_{ij+1}A_{i+1j+1}$, где $i = 0, ...n - 1,\ j = 0, ..., m - 1$, получим триангуляцию области Ω. Пусть в области Ω задана дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(x, y)$. Далее, обозначим через $u^{nm}(x, y)$ кусочно-линейную функцию, которая определяется значениями в вершинах сетки следующим образом $u^{nm}(x_i, y_{ij}) = u(x_i, y_{ij})$.

Теорема. *Пусть $u \in C^2(\Omega)$, где Ω – область описанного выше вида. Тогда*

$$\lim_{n,m\to\infty} \varepsilon_Q(u^{nm}) = \iint\limits_{\Omega} \left| \frac{(1 + (u'_y)^2)u''_{xx} - 2u'_x u'_y u''_{xy} + (1 + (u'_x)^2)u''_{yy}}{(1 + (u'_x)^2 + (u'_y)^2)^{3/2}} \right| dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u'_x}{\sqrt{1 + u'^2_x + u'^2_y}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u'_y}{\sqrt{1 + u'^2_x + u'^2_y}}\right) \right| dxdy.$$

Отметим, что в работе [2] было доказано аналогичное утверждение для прямоугольника с таким же разбиением на треугольники. Данная теорема показывает, что уравнение $\varepsilon_Q(u^N) = 0$ аппроксимирует уравнение минимальной поверхности и может быть использовано для расчета формы поверхностей минимальной площади [3].

Список литературы

[1] В. М. Миклюков, *Геометрический анализ. Дифференциальные формы, почти-решения, почти квазиконформные отображения*, Изд-во ВолГУ, (2007).

[2] А. А. Клячин, “О кусочно-линейных почти-решениях эллиптических уравнений”, *Вестник ВолГУ, Серия 1. Математика. Физика*, №2(19), 19-26 (2013).

[3] А. А. Клячин, “Расчёт формы поверхностей минимальной площади”, *Проблемы и перспективы физико-математического и технического образования: сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции (с международным участием) отв. ред. Т. С. Мамонтова.* – Ишим: Изд-во ИГПИ им. П. П. Ершова, 22-27 (2013).

Волгоградский государственный университет, проспект Университетский, 100, Волгоград, 400062, Россия

E-mail address: klyachin-aa@yandex.ru

О ФУНКЦИЯХ, ПОРОЖДАЮЩИХ ТРИАНГУЛЯЦИЮ

ВЛАДИМИР АЛЕКСАНДРОВИЧ КЛЯЧИН

Напомним, что k-мерным симплексом $S = S(A_0, A_1, ..., A_k)$ в $\mathbb{R}^n$ называется выпуклая оболочка $k+1$ точек $A_i, i = 0, ..., k \leq n$ таких, что векторы $A_1 - A_0, A_2 - A_0, ..., A_k - A_0$ линейно независимы.

Пусть $P_i, i = 1, ..., N$ – некоторый набор P точек $P_i \in \mathbb{R}^n$ таких, что любой n-мерный симплекс в вершинах из $\{P_i\}$ является невырожденным. Триангуляцией T заданного набора точек называется набор n-мерных симплексов $S_1, ..., S_m$, таких что:

1) каждая точка P_i заданного набора является вершиной одного из симплексов $S \in T$;
2) каждая вершина любого симплекса $S \in T$ является одной из точек $P_i, i = 1, ..., N$;
3) внутренность пересечения любых двух симплексов пуста.

Один из первых алгоритмов триангуляции с использованием условия пустого шара было предложено Б. Н. Делоне в его работе [1] (перевод см. [2]). Условие пустого шара было обобщено в работе [3], где шар был заменен произвольным выпуклым множеством. В настоящем докладе предлагается другой подход к построению триангуляции, основанный на поиске минимума некоторой функции.

Будем рассматривать непрерывные функции $H(p_0, p_1, ..., p_n)$, $p_i \in \mathbb{R}^n$ обладающие следующим свойством.

$$H(p_0, ...p_{k-1}, x, p_{k+1}, ..., p_n) < H(p_0, p_1, ..., p_n) \quad \forall x \in S(p_0, p_1, ..., p_n). \tag{1}$$

Другими словами, такая функция внутри и на гранях всякого симплекса принимает значения, строго меньшие значений этой функции в вершинах симплекса. Это свойство является базовым свойством, позволяющим построить симплекс триангуляции. Действительно, если зафиксировать произвольные n точек из заданного набора и в качестве $(n+1)$-й выбрать ту, на которой достигается минимум функции H, то внутри полученного симплекса не будет ни одной точки из набора $\{P_i\}$. Это означает, что построенный симплекс может быть включен в триангуляцию. Однако указанного свойства не достаточно, поскольку новый симплекс может пересекать уже построенные симплексы триангуляции. В докладе обсуждаются необходимые и достаточные условия на функцию H, которые обеспечивали бы построения симплекса, заведомо не пересекающего уже построенные симплексы триангуляции.

Список литературы

[1] B. N. Delaunay, Sur la sphere vide. A la memoire de Georges Voronoi, *Известия АН СССР*, No. 6, 793 – 800 (1934).

[2] Б. П. Делоне, О пустой сфере. К мемуару Георгия Вороного // Перевод с фр. А. Ю.Игумнов. В сб. Записки семинара "Сверхмедленные процессы". Выпуск 1. с. 147 – 153.

[3] В. А. Клячин, Об одном обобщении условия Делоне // *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.*, № 1, 48-50 (2008).

Волгоградский государственный университет, пр-кт Университетский, 100, г. Волгоград, 400062, Россия

E-mail address: klchnv@mail.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-97034 р_поволжье_а).

ГОМОМОРФИЗМЫ БАНАХОВЫХ РАССЛОЕНИЙ И ОТДЕЛИМЫЕ СХОДЯЩИЕСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

АЛЕКСАНДР ВИКТОРОВИЧ КОПТЕВ, АЛЕКСАНДР ЕФИМОВИЧ ГУТМАН

Говоря о непрерывных банаховых расслоениях (НБР), мы используем терминологию и обозначения из [1].

Пусть $\mathcal{X}$ — НБР над топологическим пространством Q. Обозначим символом $\mathcal{X}^*$ множество всех гомоморфизмов H, действующих из $\mathcal{X}$ в постоянное НБР со слоем $\mathbb{R}$, т. е. всех локально ограниченных отображений $H\colon\ q \in Q \ \mapsto\ H(q) \in \mathcal{X}(q)'$ таких, что $Hu \in C(Q)$ при $u \in C(Q,\mathcal{X})$ (см. [1, 2.4.4]). Для каждой точки $q \in Q$ рассмотрим подпространство $\mathcal{X}^*(q) := \{H(q) : H \in \mathcal{X}^*\}$ сопряженного банахова пространства $\mathcal{X}(q)'$.

В теории НБР остается открытым вопрос о представительности $\mathcal{X}^*(q)$ в $\mathcal{X}(q)'$. Так, имеются разнообразные широкие классы расслоений $\mathcal{X}$ (см. [2, 3.4.4]), для которых в каждой точке $q \in Q$ пространство $\mathcal{X}^*(q)$ является нормирующим, т. е. удовлетворяет условию

$$\|x\| = \sup_{\substack{h\in\mathcal{X}^*(q)\\ \|h\|\leqslant 1}} |hx|, \quad x \in \mathcal{X}(q),$$

но пока не обнаружен ни один случай нарушения этого условия. Более того, находится под вопросом возможность равенства $\mathcal{X}^* = \{0\}$ для ненулевого расслоения $\mathcal{X}$, в то время как во всех известных на данный момент расслоениях справедливо соотношение

$$\|x\| = \sup_{h\in B_{\mathcal{X}^*}(q)} |hx|, \quad x \in \mathcal{X}(q),$$

где $B_{\mathcal{X}^*} := \{H \in \mathcal{X}^* : \|H\|_\infty \leqslant 1\}$, $B_{\mathcal{X}^*}(q) := \{H(q) : H \in B_{\mathcal{X}^*}\}$.

В этой связи сохраняют актуальность общие методы построения гомоморфизмов НБР, обладающих теми или иными аппроксимирующими свойствами. К их числу относятся упомянутые ниже факты о существовании гомоморфизмов H, принимающих наперед заданные значения $H(q_n) \in \mathcal{X}^*(q_n)$ в точках сходящейся последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Q$.

Определение. Последовательность $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Q$ условимся называть *инъективно сходящейся* к точке $q \in Q$, если $q_n \to q$, $q_n \neq q_m$ при $n \neq m$ и $q_n \neq q$ для всех $n \in \mathbb{N}$. *Отделяющим покрытием* последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ назовем такую последовательность замкнутых окрестностей U_n точек q_n, что

$$U_n \cap \operatorname{cl} \bigcup_{m>n} U_m = \varnothing \ \ \text{для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Несложно показать, что в регулярном пространстве всякая инъективно сходящаяся последовательность допускает отделяющее покрытие. Если же пространство является вполне регулярным, то наличие отделяющего покрытия сходящейся последовательности $q_n \to q$ позволяет легко конструировать непрерывные вектор-функции, сечения и гомоморфизмы, принимающие наперед заданные значения в точках q_n и q.

Предложение. Пусть $q_n \to q$ — инъективно сходящаяся последовательность во вполне регулярном пространстве Q.

(1) *Если X — топологическое векторное пространство и $x_n \to x$ в X, то существует такая непрерывная функция $f\colon Q \to X$, что $f(q_n) = x_n$ $(n \in \mathbb{N})$ и $f(q) = x$.*

(2) *Если $\mathcal{X}$ — НБР над Q, $x_n \in \mathcal{X}(q_n)$ $(n \in \mathbb{N})$, $x \in \mathcal{X}(q)$ и $(q_n, x_n) \to (q, x)$ в $Q \otimes X$, то существует такое ограниченное сечение $u \in C(Q,\mathcal{X})$, что $u(q_n) = x_n$ $(n \in \mathbb{N})$ и $u(q) = x$.*

(3) *Если $\mathcal{X}$ — НБР над Q, $(H_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X}^*$ и $\|H_n\|_\infty \to 0$, то существует такой ограниченный гомоморфизм $H \in \mathcal{X}^*$, что $H(q_n) = H_n(q_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ и $H(q) = 0$.*

Условие $\|H_n\|_\infty \to 0$ в утверждении (3) является довольно ограничительным. В рассматриваемом контексте более естественно выглядит требование $H_n(q_n)u(q_n) \to 0$ для достаточно представительного набора сечений $u \in C(Q, \mathcal{X})$. Существование искомого гомоморфизма H в этом случае удается обеспечить за счет «более аккуратного» отделяющего покрытия последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Определение. Отделяющее покрытие $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходящейся последовательности $q_n \to q$ назовем *аккуратным*, если q является единственной собственной предельной точкой объединения $U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$, т. е. $\mathrm{cl}\, U = U \cup \{q\}$. Сходящуюся последовательность назовем (*аккуратно*) *отделимой*, если она допускает (аккуратное) отделяющее покрытие.

Теорема. *Пусть $\mathcal{X}$ — НБР над вполне регулярным пространством Q, $q_n \to q$ — аккуратно отделимая последовательность в Q, $h_n \in B_{\mathcal{X}^*}(q_n)$ и $h_n u(q_n) \to 0$ для всех элементов u некоторого счетного множества $\mathcal{U} \subset C(Q, \mathcal{X})$ такого, что $\mathrm{cl}\{u(q) : u \in \mathcal{U}\} = \mathcal{X}(q)$. Тогда существует гомоморфизм $H \in B_{\mathcal{X}^*}$, принимающий значения $H(q_n) = h_n$ $(n \in \mathbb{N})$ и $H(q) = 0$.*

Следует отметить, что в последней теореме аккуратная отделимость последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ является существенным требованием. Имеется пример, показывающий, что одной лишь отделимости последовательности недостаточно для существования искомого гомоморфизма H — даже в случае компактного пространства Q.

В завершение перечислим несколько фактов, характеризующих аккуратную отделимость последовательности в регулярном пространстве.

В метризуемом пространстве всякая инъективно сходящаяся последовательность аккуратно отделима. Кроме того, как уже было отмечено, отделимость, вообще говоря, не влечет аккуратную отделимость (даже в случае компактного пространства).

Предложение. *Для любой инъективно сходящейся последовательности $q_n \to q$ в регулярном пространстве Q следующие условия попарно равносильны:*

(а) *последовательность $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ аккуратно отделима;*

(б) *существуют открытая окрестность U множества $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ и последовательность окрестностей V_n точки q такие, что $\mathrm{cl}\, U \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \{q\}$;*

(в) *существует такая последовательность окрестностей U_n точек q_n, что $\mathrm{cl}\, U \setminus U = \{q\}$, где $U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$.*

Определение. *Сходящимся к q покрытием* последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ назовем последовательность окрестностей U_n точек q_n, удовлетворяющую следующему условию: для любой окрестности V точки q найдется такой номер $\bar{n} \in \mathbb{N}$, что $U_n \subset V$ для всех $n \geqslant \bar{n}$.

Предложение. *Пусть Q — регулярное пространство.*

(1) *Всякая инъективно сходящаяся последовательность $q_n \to q$ в Q, допускающая сходящееся к q покрытие, является аккуратно отделимой.*

(2) *Пусть $q_n \to q$ — аккуратно отделимая последовательность в Q. Любое аккуратное отделяющее покрытие последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к q тогда и только тогда, когда пространство Q счетно компактно.*

Список литературы

[1] А. Е. Гутман, Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств, в кн. *Линейные операторы, согласованные с порядком*, Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 63–211 (1995).

[2] А. Е. Гутман, А. В. Коптев, Сопряженные банаховы расслоения, в кн. *Нестандартный анализ и векторные решетки*, изд. 2-е, Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 125–201 (2005).

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия; Новосибирский государственный университет, Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail address: koptev@math.nsc.ru, gutman@math.nsc.ru

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СЕТЯХ НА ПСЕВДОСФЕРАХ

АНДРЕЙ ВИКТОРОВИЧ КОСТИН

Полную псевдосферу — поверхность вращения прямой вокруг параллельной ей прямой пространства Лобачевского — можно изометрически вложить в плоское трёхмерное пространство, имеющее внутри цилиндра евклидову метрику, а вне его — псевдоевклидову. На евклидовой части псевдосферы существует вещественная асимптотическая сеть, на псевдоевклидовой — мнимая. Вместо этой мнимой сети можно ввести вещественную сеть в метрике де Ситтера. Наряду с внешней частью псевдосферы удобно привлечь ещё одну псевдосферу псевдоевлидова пространства, на которой метрика де Ситтера индуцируется метрикой внешнего пространства. Параметризовав псевдосферы координатами карты Пуанкаре, все рассуждения можно вести, апеллируя к свойствам модели. На универсальной накрывающей полной псевдосферы внутри граничного орицикла, накрывающего ребро возврата, берётся положительно определённая метрика, вне его — индефинитная. Это позволяет, в частности, распространить формулу Хаццидакиса для вычисления площади чебышёвского четырёхугольника через сетевые углы, обобщаемую на сетевые многоугольники, на всю гиперболическую плоскость. Совместное рассмотрение положительно определённых и индефинитных метрик (Лобачевского и де Ситтера, Евклида и Минковского) позволяет просто интерпретировать, например, гудерманиан и антигудерманиан одновременно и как длины соответствующих дуг евклидовой и псевдоевклидовой окружностей, и как длины отрезков прямых плоскостей Лобачевского и де Ситтера. Выражаемый через эти функции угол между асимптотической и меридианом псевдосфер с метрикой Лобаческого и де Ситтера можно трактовать также как угол параллельности дуги асимптотической от ребра возврата.

ЕФ КНИТУ-КАИ им. А. Н. Туполева, ул. Строителей, 16, г. Елабуга, 423602, Россия
E-mail address: kostin_andrei@mail.ru

ОБЩИЕ СВОЙСТВА МНОГОУГОЛЬНИКОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

НАТАЛЬЯ НИКОЛАЕВНА КОСТИНА, ЕВГЕНИЯ АНДРЕЕВНА КОСТИНА

В пространствах постоянной кривизны существуют метрические соотношения, имеющие один и тот же вид и в евклидовой, и в сферической, и в гиперболической геометрии. В качестве примера приведём следующее свойство многоугольника самого общего вида в этих трёх геометриях.

Теорема. *Пусть* $A_1A_2\ldots A_n$ *— произвольный многоугольник,* $M_k (k = 1,\ldots,n)$ *— ортогональные проекции точки* M *на прямые, содержащие стороны многоугольника. Тогда имеют место равенства:*

$$\cos A_1MM_1 \cdot \cos A_2MM_2 \cdot \ \ldots \ \cdot \cos A_nMM_n = \cos A_2MM_1 \cdot \cos A_3MM_2 \cdot \ \ldots \ \cdot \cos A_1MM_n,$$
$$\sin MA_1A_2 \cdot \sin MA_2A_3 \cdot \ \ldots \ \cdot \sin MA_nA_1 = \sin MA_2A_1 \cdot \sin MA_3A_2 \cdot \ \ldots \ \cdot \sin MA_1A_n.$$

В евклидовой геометрии доказательства требует только одно из них. В сферической и гиперболической геометриях оба равенства требуют независимого доказательства.

Список литературы

[1] A. V. Kostin, I. Kh. Sabitov, “Smarandache Theorem in Hyperbolic Geometry”, *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*, **2** (2014), 221–232.

ЕФ КНИТУ-КАИ им. А.Н.Туполева, ул. Строителей, 16, г.Елабуга, 423602, Россия
E-mail address: natnikost@mail.ru

Школа СОлНЦе, ул.Кави Наджми, 18, г.Казань, 420008, Россия
E-mail address: zene4ka@mail.ru

СВЯЗЬ УГЛОВ И СТОРОН ЕВКЛИДОВА И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ОКТАЭДРОВ С $\overline{3}m$-СИММЕТРИЕЙ

ЕКАТЕРИНА СЕРГЕЕВНА КУДИНА

Цель работы — определить связь между сторонами и двугранными углами евклидова и гиперболического октаэдров с $\overline{3}m$ симметрией.

Сначала рассмотрим евклидов случай. Возьмем, согласно [1], октаэдр в $\mathbb{R}^3$ с $\overline{3}m$ симметрией. С учетом данной симметрии октаэдра, его вершины можно расположить следующим образом:

$$(p,q,r);\left(-\frac{p}{2}-\frac{\sqrt{3}q}{2},\frac{\sqrt{3}p}{2}-\frac{q}{2},r\right);\left(-\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{3}q}{2},-\frac{\sqrt{3}p}{2}-\frac{q}{2},r\right);$$
$$(-p,-q,-r);\left(\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{3}q}{2},-\frac{\sqrt{3}p}{2}+\frac{q}{2},-r\right);\left(\frac{p}{2}-\frac{\sqrt{3}q}{2},\frac{\sqrt{3}p}{2}+\frac{q}{2},-r\right).$$

Выражая координаты p, r через длины сторон a, c октаэдра, получим следующую теорему.

Теорема. *Для евклидова октаэдра с $\overline{3}m$ и двугранными углами α, γ справедливы следующие соотношения:*

$$\cos^2\alpha = -\frac{a^2}{3(a^2-4c^2)};$$
$$\cos^2\gamma = \frac{(a^2-2c^2)^2}{(a^2-4c^2)^2}.$$

Теперь рассмотрим гиперболический случай. Возьмем гиперболический октаэдр с $\overline{3}m$ симметрией. Здесь будет рассматриваться проективная модель, согласно [2], и вершины октаэдра будут располагаться следующим образом:

$$(p,0,r,1);\left(-\frac{p}{2},\frac{\sqrt{3}p}{2},r,1\right);\left(-\frac{p}{2},-\frac{\sqrt{3}p}{2},r,1\right);$$
$$(-p,0,-r,1);\left(\frac{p}{2},-\frac{\sqrt{3}p}{2},-r,1\right);\left(\frac{p}{2},\frac{\sqrt{3}p}{2},-r,1\right).$$

Теорема. *Для гиперболического октаэдра с $\overline{3}m$ симметрией и двугранными углами α, γ справедливы следующие соотношения:*

$$\cos^2\alpha = -\frac{(1+\operatorname{ch}a)(-1+\operatorname{ch}a+\operatorname{ch}c)^2}{(-1+2cha)(-1+cha+2chc^2)};$$
$$\cos^2\gamma = \frac{(-1+chc+chachc+chc^2)^2}{(-1+cha+2chc^2)^2}.$$

Список литературы

[1] Р. В. Галиулин, С. Н. Михалев, И. Х. Сабитов, “Некоторые приложения формулы для объема октаэдра”, *Математические заметки*, Vol. 76, No. 1, 27–43 (2001).

[2] Д. В. Алексеевский, Э. Б. Винберг, А. С. Солодовников, *Геометрия пространства постоянной кривизны*, Итоги науки и техники. Фундаментальные направления, Vol. 1, (1988).

ГОУ ВПО "Горно-Алтайский государственный университет ул.Ленкина, 1, г.Горно-Алтайск, 649000, Россия

E-mail address: eskudina@hotmail.com

КОНФОРМНО-ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ

МАРИЯ ВИКТОРОВНА КУРКИНА, ЕВГЕНИЙ ДМИТРИЕВИЧ РОДИОНОВ,
ВИКТОР ВЛАДИМИРОВИЧ СЛАВСКИЙ

Определение. *Обозначим через* $P_1(R^n)$ *множество неотрицательных функций* $f : R^n \to R^+$ *таких, что конформно-плоская метрика* $ds^2 = dx^2/f^2(x)$, $x \in R^n$, *имеет неотрицательную одномерную секционную кривизну [1,2]*

$$K(f,\xi) = f(x)\, d^2 f(\xi,\xi) - \frac{1}{2}\|\nabla f\|^2 \|\xi\|^2 \geq 0.$$

Здесь градиент $\|\nabla f\|^2$ *и норма* $\|\xi\|$ *вычисляется относительно евклидова пространства* R^n, *вектор* ξ *произвольный.*

Теорема. *Пусть* $f \in P_1(R^n)$, *тогда для любых трех точек* $\{x, x_1, x_2\} \in R^n$ *выполняется неравенство:*

$$\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{f(x_1)}\frac{\|x_2 - x\|}{\|x_2 - x_1\|} + \sqrt{f(x_2)}\frac{\|x - x_1\|}{\|x_2 - x_1\|}.$$

Определение. *Назовем неотрицательную функцию* $g(x)$ *на* R^n *конформно-выпуклой, если для любых трех точек* $\{x, x_1, x_2\} \in R^n$ *выполняется* $g(x) \leq g(x_1)\|x_2 - x\| / \|x_2 - x_1\| + g(x_2)\|x - x_1\| / \|x_2 - x_1\|$.

Множество конформно-выпуклых функций на R^n *обозначим через* $\boldsymbol{P}$.

Свойства конформно-выпуклых функций.

- $g(x) = const \in \boldsymbol{P}$.
- $g_1, g_2 \in \boldsymbol{P} \Rightarrow \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 \in \boldsymbol{P}$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$.
- $g_1, g_2 \in \boldsymbol{P} \Rightarrow \max\{g_1, g_2\} \in \boldsymbol{P}$.
- $g \in \boldsymbol{P}$ *и* $g(x_1) = g(x_2) = 0$ *при* $x_1 \neq x_2$, *тогда* $g(x) \equiv 0$.
- $g(x) = O(\|x - a\|^\alpha), \alpha > 1 \Rightarrow g(x) \equiv 0$.

Пример. *Функция* $\delta(x) = \lambda_1\|x - x_1\| + \lambda_2\|x - x_2\| \in \boldsymbol{P}$, *где* $x_1, x_2 \in R^n$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, *конформно-выпуклая (это следует из неравенства Птолемея). Функцию такого вида назовем диполем.*

В случае плоскости двумерная метрика $ds^2 = dx^2/\delta^4(x)$ имеет положительную гауссову кривизну, и в каждой точке имеется направление с нулевой одномерной кривизной. Отвечающая этой метрике выпуклая двухмерная поверхность в трехмерном евклидовом пространстве представляет собой поверхность вращения циклоиды (см. Рис. 1).

Список литературы

[1] Балащенко В. В., Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В. В., *Однородные пространства: теория и приложения: монография*, Ханты-Мансийск: Полиграфист (2008).

[2] Родионов Е. Д., Славский В. В., "Одномерная секционная кривизна римановых многообразий", *Доклады академии наук*, Vol. 387, No. 4 (2002).

Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, Россия
E-mail address: mavi@inbox.ru, slavsky2004@mail.ru

Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия
E-mail address: edr2002@mail.ru

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ (грант НШ–2263.2014.1), гранта Правительства РФ (госконтракт № 14.B25.31.0029), Министерства образования и науки РФ (код проекта: 1148).

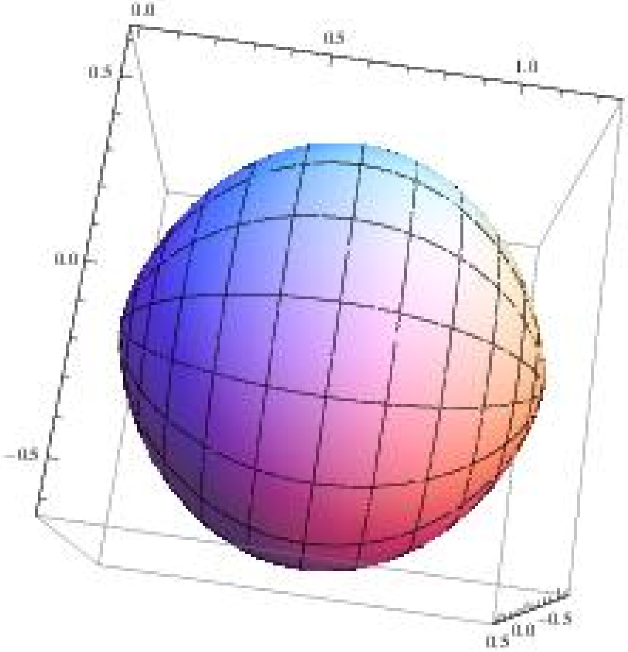


Рис. 1. Поверхность с метрикой диполя.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНВАРИАНТОВ ДЕЙКГРАФА-ВИТТЕНА НАД Z_2 ДЛЯ МНОГООБРАЗИЙ ЗЕЙФЕРТА

МАТВЕЕВ СЕРГЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ

Инварианты Дейкграафа-Виттена n-мерных топологических многообразий были построены в 1990 году. Каждый такой инвариант определяется выбором конечной группы G и нетривиального элемента ее группы n-мерных когомологий с коэффициентами в некоторой подгруппе U унитарной группы $U(1)$. В докладе рассматривается случай, когда данное многообразие M трехмерно, а группы G и U имеют порядок 2 и поэтому могут быть отождествлены с группой $\mathbb{Z}_2$. Как показано в [1], в этом случае инвариант Дейкграафа-Виттена тесно связан с Арф-инвариантом специальной квадратичной формы на группе $H^1(M;\mathbb{Z}_2)$. В докладе будет изложен метод вычисления инвариантов Дейкграафа-Виттена для ориентируемых трехмерных многообразий Зейферта с базой сфера.

Список литературы

[1] С. В. Матвеев, В. Г. Тураев, “Инварианты Дейкграафа-Виттена над Z_2 для 3-многообразий”, *Доклады Академии Наук, 2014* (в печати).

Лаборатория квантовой топологии, Челябинский государственный университет, улица Братьев Кашириных, 129, Челябинск, 454001, Россия

E-mail address: `matveev@csu.ru`

Автор поддержан лабораторий квантовой топологии Челябинского государственного университета (грант правительства РФ 14.Z50.31.0020).

ДИВЕРГЕНТНЫЕ ФОРМУЛЫ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

АЛЕКСАНДР ГРАЙРОВИЧ МЕГРАБОВ

Рассматриваются семейство $\{S_\tau\}$ поверхностей S_τ с единичной нормалью $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(x,y,z)$, главными направлениями $\boldsymbol{l}_1$ и $\boldsymbol{l}_2$, главными кривизнами k_1 и k_2, средней кривизной $H \overset{\text{def}}{=} (k_1 + k_2)/2$ и гауссовой кривизной $K \overset{\text{def}}{=} k_1k_2$, а также семейство $\{L_\tau\}$ кривых L_τ с базисом Френе $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta})$ ($\boldsymbol{\tau}$ — орт касательной, $\boldsymbol{\nu}$ — главной нормали, $\boldsymbol{\beta}$ — бинормали), кривизной k и кручением $\varkappa$. Все величины $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$, k_1, k_2, H, K и $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$, k, $\varkappa$ являются векторными и скалярными полями в области D евклидова пространства x, y, z, которую сплошным образом заполняют поверхности S_τ и кривые L_τ. Главное направление представляем единичным вектором $\boldsymbol{l}_i$ $(i = 1, 2)$ с соответствующим направлением; вектор $\boldsymbol{l}_i$ является касательным ортом линии кривизны L_i на S_τ. Условия на семейство $\{S_\tau\}$: (A) через каждую точку $(x,y,z) \in D$ проходит одна и только одна поверхность $S_\tau \in \{S_\tau\}$; (B) в каждой точке $(x,y,z) \in D$ существует (правая) система взаимно ортогональных ортов $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$ для поверхности S_τ, проходящей через эту точку. Для этого достаточно, чтобы каждая поверхность $S_\tau \in \{S_\tau\}$ была C^2-регулярной; (C) $\boldsymbol{\tau} \in C^2(D)$, $\boldsymbol{l}_i \in C^1(D)$, $i = 1, 2$. Условия на семейство кривых $\{L_\tau\}$: (D) через каждую точку $(x,y,z) \in D$ проходит одна и только одна кривая $L_\tau \in \{L_\tau\}$; (E) в каждой точке (x,y,z) любой кривой $L_\tau \in \{L_\tau\}$ существует (правый) базис Френе $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta})$; (F) $\boldsymbol{\tau}(x,y,z) \in C^2(D)$. Формулы связи между характеристиками поверхностей $S_\tau \in \{S_\tau\}$ и характеристиками кривых L_τ в случае их взаимной ортогональности дает

Теорема 1. *Пусть для семейства $\{S_\tau\}$ поверхностей S_τ с единичной нормалью $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(x,y,z)$ выполнены условия (A)–(C) и для семейства $\{L_\tau\}$ кривых L_τ, ортогональных к $\{S_\tau\}$, выполнены условия (D)–(F). Тогда в каждой точке $(x,y,z) \in D$ главные направления $\boldsymbol{l}_1$ и $\boldsymbol{l}_2$, главные кривизны k_1 и k_2, средняя кривизна H и гауссова кривизна K поверхности S_τ, проходящей через эту точку, выражаются через орты Френе $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$, кривизну k и кручение $\varkappa$ кривых L_τ по формулам $\boldsymbol{l}_1 = \cos\omega\,\boldsymbol{\nu} + \sin\omega\,\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{l}_2 = -\sin\omega\,\boldsymbol{\nu} + \cos\omega\,\boldsymbol{\beta}$, $\operatorname{tg} 2\omega = -\frac{A}{B} \Leftrightarrow (\boldsymbol{l}_1 \cdot \operatorname{rot}\boldsymbol{l}_1) = (\boldsymbol{l}_2 \cdot \operatorname{rot}\boldsymbol{l}_2)$, $k_1 = -\{\operatorname{div}\boldsymbol{\tau} \pm \sqrt{A^2+B^2}\}/2 = -(\boldsymbol{l}_2 \cdot \operatorname{rot}\boldsymbol{l}_1)$, $k_2 = -\{\operatorname{div}\boldsymbol{\tau} \mp \sqrt{A^2+B^2}\}/2 = (\boldsymbol{l}_1 \cdot \operatorname{rot}\boldsymbol{l}_2)$, $\Rightarrow K \overset{\text{def}}{=} k_1k_2 = \{(\operatorname{div}\boldsymbol{\tau})^2 - (A^2+B^2)\}/4$, $K = (\boldsymbol{\tau}\cdot[\operatorname{rot}\boldsymbol{\nu}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}]) - \varkappa^2 = -\{(\boldsymbol{\nu}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\nu}) + A^2/4\} = (\boldsymbol{\tau}\cdot[\operatorname{rot}\boldsymbol{l}_1\times\operatorname{rot}\boldsymbol{l}_2]) - (\operatorname{rot}\boldsymbol{l}_i\cdot\boldsymbol{l}_i)^2$, $i = 1, 2$, $K = -(\boldsymbol{\tau}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{R}^*)$, $\boldsymbol{R}^* \overset{\text{def}}{=} \varkappa\boldsymbol{\tau} + k\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}\operatorname{div}\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{\nu}\operatorname{div}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\Phi} + \boldsymbol{S}^*\times\boldsymbol{\tau} = \varkappa\boldsymbol{\tau} + (\boldsymbol{\tau}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu} + (\boldsymbol{\tau}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}$, $\Rightarrow H \overset{\text{def}}{=} (k_1+k_2)/2 = -\operatorname{div}\boldsymbol{\tau}/2$, $K = -\operatorname{div}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau})/2$, где $A \overset{\text{def}}{=} (\boldsymbol{\nu}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\nu}) - (\boldsymbol{\beta}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta})$, $B \overset{\text{def}}{=} (\boldsymbol{\beta}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\nu}) - (\boldsymbol{\nu}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta})$, $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{rot}\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\operatorname{div}\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{K}_\tau + \boldsymbol{K}_{g1} + \boldsymbol{K}_{g2}$ — сумма трех векторов кривизны $\boldsymbol{K}_\tau = (\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla)\boldsymbol{\tau} = \operatorname{rot}\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\tau} = k\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{K}_{gi} = k_{gi}\boldsymbol{\tau}$ $(i = 1, 2)$ векторной линии L_τ поля $\boldsymbol{\tau}$ и двух геодезических линий с кривизнами k_{gi} на поверхности S_τ, проведенных в любых двух взаимно ортогональных направлениях, $\boldsymbol{\Phi} \overset{\text{def}}{=} = \varkappa\boldsymbol{\tau} + k\boldsymbol{\beta}$ — вектор Дарбу, $\boldsymbol{S}^* \overset{\text{def}}{=} = \boldsymbol{K}_\tau + \boldsymbol{K}_\nu + \boldsymbol{K}_\beta$ — сумма трех векторов кривизны $\boldsymbol{K}_\tau$, $\boldsymbol{K}_\nu = (\boldsymbol{\nu}\cdot\nabla)\boldsymbol{\nu} = \operatorname{rot}\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{K}_\beta = (\boldsymbol{\beta}\cdot\nabla)\boldsymbol{\beta} = \operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\beta}$ векторных линий L_τ, L_ν, L_β векторных полей ортов Френе $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ соответственно. Если L_τ — векторные линии векторного поля $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x,y,z) = |\boldsymbol{v}|\boldsymbol{\tau}$ с направлением $\boldsymbol{\tau}$, то $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{grad}\ln|\boldsymbol{v}| + \{\operatorname{rot}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{v}\}/|\boldsymbol{v}|^2$.*

Теорема 2 (плоский случай). *Пусть $\{L_\tau\}$ — семейство плоских кривых в области D таких, что: через каждую точку $(x,y) \in D$ проходит одна и только одна кривая $L_\tau \in$*

Работа поддержана РФФИ (грант № 12-01-00648).

$\{L_\tau\}$; в каждой точке (x,y) любой кривой $L_\tau \in \{L_\tau\}$ существует базис Френе $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(x,y)$, $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}(x,y)$ ($\boldsymbol{\tau}$ — орт касательной, $\boldsymbol{\nu}$ — нормали); $\boldsymbol{\tau}(x,y) \in C^2(D)$. Тогда в D справедливо тождество (закон сохранения) $\operatorname{div} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div} \boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{\tau}) = 0$, где $\boldsymbol{S}^* \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{K}_\tau + \boldsymbol{K}_\nu = (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla)\boldsymbol{\tau} + (\boldsymbol{\nu} \cdot \nabla)\boldsymbol{\nu}$ — сумма векторов кривизны $\boldsymbol{K}_\tau$ и $\boldsymbol{K}_\nu$ двух плоских кривых L_τ и L_ν из взаимно ортогональных семейств $\{L_\tau\}$ и $\{L_\nu\}$ (т. е. $\boldsymbol{S}^*$ — соленоидальное поле в D), причем $\boldsymbol{S}^* = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) = -\operatorname{rot}\{\alpha(x,y)\boldsymbol{k}\}$, $\alpha = \alpha(x,y)$ — угол наклона вектора $\boldsymbol{\tau}$ к оси Ox. Векторные линии полей $\boldsymbol{S}^*$ и $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau})$ совпадают с линиями уровня скалярного поля $\alpha(x,y)$.

Теорема 3 (трехмерный случай). *Имеют место равносильные дивергентные тождества (закон сохранения) для любого поля единичных векторов $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(x,y,z) \in C^2(D)$ ($\boldsymbol{\tau} = \cos\alpha_1 \boldsymbol{i} + \cos\alpha_2 \boldsymbol{j} + \cos\alpha_3 \boldsymbol{k}$): $\operatorname{div}\{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) - \boldsymbol{\Phi}_i\} = 0$, $i = 1,2$; $\boldsymbol{\Phi}_1 \stackrel{\text{def}}{=} 2\{\cos\alpha_3 \operatorname{rot}(\cos\alpha_2 \boldsymbol{i}) + \cos\alpha_1 \operatorname{rot}(\cos\alpha_3 \boldsymbol{j}) + \cos\alpha_2 \operatorname{rot}(\cos\alpha_1 \boldsymbol{k})\}$, $\boldsymbol{\Phi}_2 \stackrel{\text{def}}{=} -2\{\cos\alpha_2 \operatorname{rot}(\cos\alpha_3 \boldsymbol{i}) + \cos\alpha_3 \operatorname{rot}(\cos\alpha_1 \boldsymbol{j}) + \cos\alpha_1 \operatorname{rot}(\cos\alpha_2 \boldsymbol{k})\}$. Если $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(x,y,z)$ — поле касательных ортов пространственных кривых L_τ семейства $\{L_\tau\}$ или поле единичных нормалей поверхностей S_τ семейства $\{S_\tau\}$, то это тождество можно рассматривать как закон сохранения для семейства кривых $\{L_\tau\}$ или семейства поверхностей $\{S_\tau\}$. В плоском случае $\operatorname{div} \boldsymbol{\Phi}_i = 0$. При условиях (A)–(C) для гауссовой кривизны K поверхности S_τ имеем: $K = -(1/2)\operatorname{div} \boldsymbol{\Phi}_i$.*

Найдены также законы сохранения вида $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0$ для семейства $\{L_\tau\}$ пространственных кривых L_τ со свойствами (D)–(F), где векторное поле $\boldsymbol{F}$ выражается через орты Френе $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$, кривизну k и кручение $\varkappa$ кривых L_τ (в конечном итоге — через поле $\boldsymbol{\tau}$): $\operatorname{div}\{\boldsymbol{\tau} \operatorname{div} \boldsymbol{S}^* - \varkappa \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau} - k \operatorname{rot} \boldsymbol{\beta}\} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div}\{(1/2)\boldsymbol{\tau} \operatorname{div} \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\tau}) - k\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\nu} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{\beta}) - k\boldsymbol{\beta}[(\boldsymbol{\beta} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{\beta}) + \varkappa]\} = 0$. Здесь выражение в $\{\ \}$ всюду равно $\operatorname{rot} \boldsymbol{R}^*$. Найдены законы сохранения вида $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0$ для семейства $\{S_\tau\}$ поверхностей S_τ со свойствами (A)–(C), где векторное поле $\boldsymbol{F}$ выражается через нормаль $\boldsymbol{\tau}$ к S_τ, ее главные направления $\boldsymbol{l}_1$ и $\boldsymbol{l}_2$, главные кривизны k_1 и k_2, среднюю кривизну H, гауссову кривизну K. Например, $\operatorname{div}\{K\boldsymbol{\tau} + k_2(\boldsymbol{l}_2 \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau})\boldsymbol{l}_1 - k_1(\boldsymbol{l}_1 \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau})\boldsymbol{l}_2\} = 0$, где выражение в $\{\ \}$ равно $\{-\operatorname{rot} \boldsymbol{R}^*\}$.

С помощью этих общих геометрических формул получены дифференциальные законы сохранения и другие формулы в плоском и в трехмерном случаях для решений уравнения эйконала (для поля времен в кинематической сейсмике (геометрической оптике)), уравнения Пуассона, гидродинамических уравнений Эйлера и уравнений Максвелла. При этом роль кривых L_τ и поверхностей S_τ играют векторные линии полей решений и ортогональные к ним поверхности. Найдена связь между уравнением Монжа-Ампера и уравнением плоского движения несжимаемой жидкости для функции тока. Систематически исследована группа Ли, являющаяся расширением группы конформных преобразований трехмерного пространства на пространство шести переменных и одновременно — группой эквивалентности трехмерного уравнения эйконала и других уравнений математической физики. Найдена связь ее дифференциальных инвариантов с геометрическими понятиями и вышеупомянутыми формулами. В двумерном случае найденные формулы переходят в результаты, полученные автором в статьях в ДАН: 1984, т. 275, № 3; 2004, т. 395, № 2; 2009, т. 424, № 5; 2010, т. 433, № 3 и 4; 2011, т. 441, № 3.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail address: mag@sscc.ru

ТАБУЛИРОВАНИЕ УЗЛОВ В УТОЛЩЕННОЙ БУТЫЛКЕ КЛЕЙНА

ЛИЛИЯ РУСЛАНОВНА НАБЕЕВА

Под утолщенной бутылкой Клейна будем понимать ориентированное косое произведение $K^2\tilde{\times}I$ бутылки Клейна K^2 на отрезок.

Узел в $K^2\tilde{\times}I$ — простая замкнутая кривая в $K^2\tilde{\times}I$. Два узла $K_1, K_2 \subset (K^2\tilde{\times}I)$ эквивалентны, если существует гомеоморфизм пар $h : (K^2\tilde{\times}I, K_1) \to (K^2\tilde{\times}I, K_2)$.

Узел в $K^2\tilde{\times}I$ локальный, если он содержится в некотором шаре в $K^2\tilde{\times}I$. Узел составной в $K^2\tilde{\times}I$, если он представим в виде связной суммы узлов в $K^2\tilde{\times}I$ и локальных узлов.

Узел называется примарным в $K^2\tilde{\times}I$, если он не является локальным и составным узлом в $K^2\tilde{\times}I$ и его нельзя заключить в утолщенное кольцо или в утолщенный лист Мебиуса.

Как и в случае классических узлов в S^3, узлы в $K^2\tilde{\times}I$ можно задавать диаграммами и проекцией.

Диаграмма узла K в $K^2\tilde{\times}I$ называется минимальной, если ее сложность (т. е. число двойных точек) не превосходит сложности любой диаграммы любого узла, эквивалентного узлу K. Проекция $G \subset K^2$ называется минимальной, если минимальна хотя бы одна из отвечающих ей диаграмм.

Теорема 1. *Существуют ровно 33 различных примарных узла в $K^2\tilde{\times}I$, минимальные диаграммы которых имеют не более трех двойных точек.*

Теорема 2. *Существует не более 69 различных примарных проекций узлов в $K^2\tilde{\times}I$ с не более чем четырьмя двойными точками.*

Список литературы

[1] А. Б. Сосинский, *Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия*, М.: МЦНМО, (1997).

Челябинский Государственный Университет, ул. Братьев Кашириных, 129, г. Челябинск, 454021, Россия

E-mail address: liya.nabeyeva@yandex.ru

Работа выполнена при поддержке лаборатории Квантовой топологии ЧелГУ (грант правительства РФ №14.Z50.31.0020) и РФФИ (грант №14-01-00441-а).

СИММЕТРИЧНЫЕ РЕШЕНИЯ БЕЗДИСПЕРСИОННОЙ 2D ТОДА ИЕРАРХИИ, ЧИСЛА ГУРВИЦА И КОНФОРМНАЯ ДИНАМИКА

СЕРГЕЙ МИРОНОВИЧ НАТАНЗОН

Интегрируемая система бездисперсионная 2D Тода иерархия впервые возникла в теоретической физике в связи с моделями гравитации. В последствии оказалось, что специальные решения этой системы связаны с двумя совсем не похожими друг на друга классическими проблемами: вычислением чисел Гурвица и построением биголоморфной функции, отображающей произвольную область на комплексной плоскости в стандартный диск. В обоих случаях нужные решения относятся к специальному важному классу решений. В докладе будет рассказано как найти все решения этого класса, выделить среди них решения, связанные с числами Гурвица и конформной динамикой, и с их помощью значительно продвинуться в решении этих классических проблем. Доклад основан на совместной работе с А. В. Забродиным.

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», ул. Вавилова, 7, Москва, 117312, Россия
E-mail address: natanzons@mail.ru

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОСНАЩЕННЫМИ ЗАЦЕПЛЕНИЯМИ МНОГООБРАЗИЙ С КРАЕМ ТОР, ИМЕЮЩИХ СПЕЦИАЛЬНЫЕ СПАЙНЫ С 3 ВЕРШИНАМИ

МИХАИЛ АЛЕКСЕЕВИЧ ОВЧИННИКОВ

Двумерный полиэдр P называется *спайном* компактного трехмерного многообразия M, если существует вложение i полиэдра P в многообразие M такое, что $M \backslash i(P)$ гомеоморфно $\partial M \times [0,1)$, либо трехмерной клетке. Двумерный полиэдр называется *специальным полиэдром*, если каждая его точка имеет окрестность, вложимую в полиэдр $Q = \Sigma K_4$ (надстройка над полным графом с 4 вершинами), и все 1- и 2-мерные компоненты полиэдра являются клетками. Спайн называется *специальным спайном*, если он является специальным полиэдром. Известно, что по своему специальному спайну трехмерное многообразие восстанавливается однозначно [1].

Множество сингулярных точек специального полиэдра составляет регулярный граф степени 4. Вершины сингулярного графа называются также *вершинами специального полиэдра (специального спайна)*. Существует лишь конечное число специальных полиэдров с данным числом вершин. Актуальным является систематическое исследование специальных спайнов в порядке возрастания числа их вершин [2–4].

Работа посвящена исследованию специального спайна P_1 с тремя вершинами и задаваемого им многообразия M_1 с краем тор. Спайн P_1 является склейкой трех многоугольников, которая кратко описывается комбинаторно посредством трех слов $12\bar{6}\bar{3}$, $1135\bar{4}5\bar{2}$, $2\bar{4}6\bar{5}6\bar{4}\bar{3}$. Наглядно эта склейка задается диаграммой на рис 1.

Оснащенное зацепление L_1 (см рис. 1) представляет собой переплетенные трилистник и тривиальный узел. Оно задает многообразие с краем тор, т. к. содержит одну неоснащенную компоненту (тривиальный узел), изображающую удаленный из трехмерной сферы полный тор.

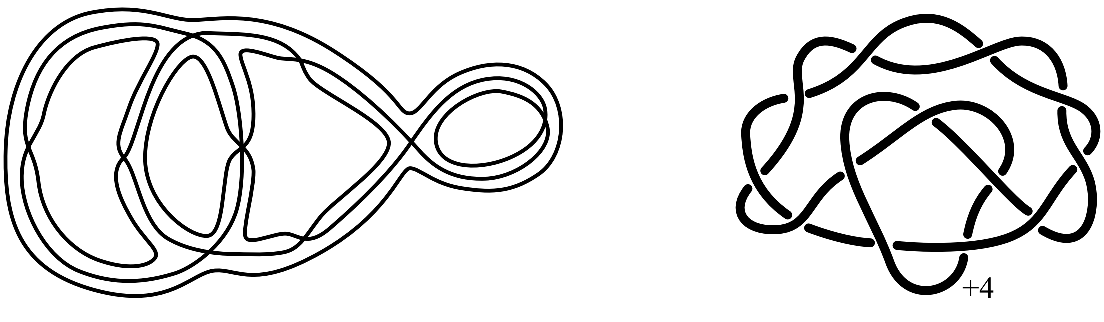


Рис. 1. Полиэдры P_1 и оснащенное зацепление L_1

Теорема. *Спайн P_1 и оснащенное зацепление L_1 задают одно и то же многообразие M_1.*

Данный пример показывает, что для довольно простого специального спайна (вершин всего три) соответствующее оснащенное зацепление может оказываться весьма сложным (13 точек пересечения на диаграмме зацепления). В данном случае число вершин и число точек пересечения не могут быть уменьшены.

В работе описывается способ, как, меняя оснащение зацепления L_1 на произвольное рациональное оснащение, получить соответствующий специальный спайн локальной переделкой спайна P_1.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 14-01-00441 и гранта НШ-1015.2014.1 по государственной поддержке ведущих научных школ.

В работе представлены и обсуждаются еще некоторые аналогичные результаты.

Список литературы

[1] S. V. Matveev, “Complexity theory of three-dimensional manifolds”, *Acta Applicandae Mathematicae*, Vol. 19, No. 2, 101–130 (1990).

[2] С. В. Матвеев, “Сложность трехмерных многообразий и их перечисление в порядке возрастания сложности”, *Доклады Академии Наук СССР*, Т. 301, № 2, 280–283 (1988).

[3] S. V. Matveev, “Tables of spines and 3-manifolds up to complexity 7”, *Preprint Max-Planck-Institute for Mathematics. Bonn.*, No. 71, 65 pp. (2002).

[4] С. В. Матвеев, “Табулирование трехмерных многообразий”, *Успехи математических наук*, Т. 60, № 4, 97–122 (2005).

Челябинский государственный университет, ул. Братьев Кашириных, д. 129, г. Челябинск, 454121, Россия

E-mail address: ovch@csu.ru

О ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ КОНФОРМНО ПОЛУПЛОСКИХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ НУЛЕВОЙ СКАЛЯРНОЙ КРИВИЗНЫ

СВЕТЛАНА ВЛАДИМИРОВНА ПАСТУХОВА, ОЛЕСЯ ПАВЛОВНА ХРОМОВА

Тензор Вейля W на ориентированном четырехмерном римановом многообразии разлагается на две компоненты W^+ и W^-, неприводимые относительно действия специальной ортогональной группы. Многообразия, для которых одна из этих компонент обращается в нуль, называются конформно полуплоскими.

В [1] изучались 4-мерные конформно плоские римановы пространства ($W = 0$) нулевой скалярной кривизны. Настоящая работа посвящена исследованию конформно полуплоских 4-мерных римановых многообразий нулевой скалярной кривизны и их поведению при конформных деформациях римановых метрик.

Список литературы

[1] Х. Ким, Дж. Ким, “Об одном эквивалентном условии плоской метрики”, *Сибирский математический журнал*, Т. 44, №. 5, 1046–1050 (2003).

Алтайский государственный университет, пр. Ленина, 61, Барнаул, 656064, Россия
E-mail address: pastukhova.svetlana.1992@gmail.com, khromova.olesya@gmail.com

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ (грант НШ–2263.2014.1), гранта Правительства РФ (госконтракт № 14.B25.31.0029), Министерства образования и науки РФ (код проекта: 1148), а также в рамках программы стратегического развития ФГБОУ ВПО «АлтГУ» (№ 2014.312.1.4).

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ КОНФОРМНО ПЛОСКИХ РИМАНОВЫХ МЕТРИК

ЕВГЕНИЙ ДМИТРИЕВИЧ РОДИОНОВ, ВИКТОР ВЛАДИМИРОВИЧ СЛАВСКИЙ, ОЛЕСЯ ПАВЛОВНА ХРОМОВА

В данной работе исследованы свойства конформно плоских n-мерных римановых метрик обобщенной кривизны в смысле А. Д. Александрова [1]. В определенном смысле данную работу можно рассматривать как попытку перенести часть результатов Ю. Г. Решетняка [2-3] по двумерным многообразиям ограниченной интегральной кривизны (в смысле А. Д. Александрова) на размерность $n > 2$. В размерности $n = 2$ любая риманова метрика автоматически конформно-плоская и с аналитической точки зрения определяется одной функцией (конформным фактором) в изотермической системе координат. Это обстоятельство указывает на конформно-плоские римановы пространства, как на наиболее подходящий объект аналитических исследований по обобщенным римановым пространствам. Кроме того, конформно плоские римановы многообразия являются важным подклассом в классе локально конформно однородных пространств [4-5].

В работе исследовано строение и свойства многогранных конформно плоских римановых метрик - важного подкласса в классе конформно плоских римановых метрик. Получены аналоги теорем об экстраполяции и интерполяции для функций, являющихся конформным фактором в конформно плоских римановых метриках ограниченной кривизны [6], а также неотрицательной кривизны [7]. В случае групп Ли исследованы конформно полуплоские однородные римановы пространства [8].

Исследован спектр оператора секционной кривизны конформно плоских римановых метрик, его изменение в случае конформных деформаций исходной метрики. В случае трех и четырехмерных конформно плоских метрических групп Ли получены явные формулы для вычисления спектра оператора секционной кривизны, решения изоспектральной задачи.

Получена классификация четырехмерных метрических групп Ли с гармоническим тензором Вейля [9-10].

Список литературы

[1] Александров А. Д., Берестовский В. Н., Николаев И. Г., “Обобщенные римановы пространства”, *Упехи мат. наук*, Т. 41, № 3, 3–44 (1986).

[2] Решетняк Ю. Г., “Изотермические координаты в многообразиях ограниченной кривизны. I”, *Сиб. мат. журн.*, Т. 1, № 1, 88–116 (1960).

[3] Решетняк Ю. Г., “Изотермические координаты в многообразиях ограниченной кривизны. II”, *Сиб. мат. журн.*, Т. 1, № 2, 248–276 (1960).

[4] Бессе А., *Многообразия Эйнштейна, М.: Мир, (1990).*

[5] Родионов Е. Д., Славский В. В., Чибрикова Л. Н. , “Локально конформно однородные псевдоримановы пространства”, *Математические труды*, Т. 9, № 1, 130—168 (2006).

[6] Куркина М. В., Родионов Е. Д., Славский В. В., “Численные методы интерполяции для решения некоторых задач выпуклой геометрии в пространстве Лобачевского”, *Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., ин-форм.*, Т. 13, № 1, 76—90 (2013).

[7] Славский В. В., “Конформно плоские метрики неотрицательной кривизны”, *Сиб. мат. журн.*, Т. 30, № 5, 187–201 (1989).

[8] Гладунова О. П., Родионов Е. Д., Славский В. В., “О конформно полуплоских 4-мерных группах Ли ”, *Владикавказский математический журнал.*, Т. 13, Вып. 3, 3–16 (1996).

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ (грант НШ–2263.2014.1), гранта Правительства РФ (госконтракт № 14.B25.31.0029), Министерства образования и науки РФ (код проекта: 1148), программы стратегического развития Алтайского государственного университета (№ 2014.312.1.4).

[9] Rodionov E. D., Voronov D. S., “Left-invariant Riemannian metrics on four-dimensioanal nonunimodular Lie groups with zero-divergence Weyl tensor”, *Doklady Mathematics*, Vol. 81, No 3, 392–394 (2010).

[10] Гладунова О. П., Славский В. В., “О гармоничности тензора Вейля левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных унимодулярных группах Ли”, *Математические труды*, Т. 14, № 1, 1–20 (2011).

Алтайский государственный университет, пр. Ленина, 61, Барнаул, 656064, Россия

Югорский государственный университет, ул. Чехова, 16, Тюменская область, ХМАО-Югра, г. Ханты-Мансийск, 628012, Россия

E-mail address: edr2002@mail.ru, slavsky2004@mail.ru, khromova.olesya@gmail.com

ОБ ОДНОРАНГОВЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ РИМАНОВЫХ МЕТРИК, СОХРАНЯЮЩИХ ТЕНЗОР КРИВИЗНЫ

ЕВГЕНИЙ ДМИТРИЕВИЧ РОДИОНОВ, ВИКТОР ВЛАДИМИРОВИЧ СЛАВСКИЙ, ОЛЕСЯ ПАВЛОВНА ХРОМОВА

Деформации ранга один римановых метрик и поведение основных тензорных полей римановых многообразий при деформациях данного вида изучались в работах [1, 2]. В настоящей работе определены одноранговые деформации римановых многообразий, сохраняющие тензор кривизны.

Пусть θ — произвольная функция на римановом многообразии M^n класса C^∞. Будем говорить, что метрика $d\bar{s}^2$ получена деформацией ранга один из метрики ds^2, если

$$d\bar{s}^2 = ds^2 + d\theta \otimes d\theta.$$

Теорема. *Если в некоторой локальной системе координат деформация ранга один $d\bar{s}^2$ метрики ds^2 сохраняет компоненты тензора кривизны риманова многообразия M^n, то в качестве функции θ, участвующей в определении деформации ранга один метрики ds^2, может быть выбрана одна из функций следующего списка:*

$$1)\ \theta = f(x_i) + \sum_{j \neq i} C_j x_j,\ i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$2)\ \theta = f(C + C_i x_i + C_j x_j) + \sum_{k \neq i,j} C_k x_k,\ i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\},\ j > i,$$

$$3)\ \theta = f(C + C_i x_i + C_j x_j + C_k x_k) + \sum_{s \neq i,j,k} C_s x_s,\ i, j, k, s \in \{1, 2, \ldots, n\},\ k > j > i,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$n)\ \theta = f(C + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i),$$

где C, C_i, C_j, C_k, C_s — произвольные постоянные, f — некоторая гладкая функция на M^n, $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ — локальная система координат в M^n.

Список литературы

[1] Е. Д. Родионов, В. В. Славский, “Конформные и одноранговые деформации римановых метрик с площадками нулевой кривизны на компактном многообразии ”, *Труды конференции "Геометрия и приложения посвященной 70-летию В. А. Топоногова, 13-16 марта 2000 г*, 171–182 (2000).

[2] В.В. 2. Балащенко, Е. Д. Родионов, В. В. Славский, О. П. Хромова, “О деформациях тензорных полей на многообразиях ”, *Труды всероссийской молодежной школы-семинара «Анализ, геометрия и топология», Барнаул, 2-4 октября, 2013*, Ч. 1, 188–196 (2013).

Алтайский государственный университет, пр. Ленина, 61, Барнаул, 656064, Россия; Югорский государственный университет, Чехова, 16, Ханты-Мансийск, 628012, Россия

E-mail address: edr2002@mail.ru, slavsky2004@mail.ru, khromova.olesya@gmail.com

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ (грант НШ–2263.2014.1), гранта Правительства РФ (госконтракт № 14.B25.31.0029), Министерства образования и науки РФ (код проекта: 1148), а также в рамках программы стратегического развития ФГБОУ ВПО «АлтГУ» (№ 2014.312.1.4).

О РАЗБИЕНИЯХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ ПРАВИЛЬНЫМИ ОРИЦИКЛИЧЕСКИМИ N-ТРАПЕЦИЯМИ

ЛЮДМИЛА НИКОЛАЕВНА РОМАКИНА

В работах [1, 2] построены первые разбиения гиперболической плоскости $\widehat{H}$ положительной кривизны [3, 4]. Простые разбиения на $\widehat{H}$ [1] (см. также [4]), ячейкой которых является простой 4-контур, являются моноэдральными, но не являются нормальными и не являются правильными. В статье [2] построены первые нормальные разбиения плоскости $\widehat{H}$, в том числе первые триангуляции данной плоскости, но описанные в этой статье разбиения, названные веерными, не являются моноэдральными. Нерешенной до настоящего времени оставалась обозначенная в работе [2] задача построения нормальных моноэральных разбиений плоскости $\widehat{H}$.

В докладе представим серии нормальных моноэдральных разбиений плоскости $\widehat{H}$, не являющихся правильными. Аналогичные разбиения плоскости Лобачевского построены венгерским математиком К. Берецким [5] и приведены в статье [6] В. С. Макарова как ответ на сформулированный применительно к плоскости Лобачевского второй вопрос восемнадцатой проблемы Гильберта о существовании моноэдральных разбиений, ячейка которых не является фундаментальной областью дискретной группы симметрий разбиения. Ответ на данный вопрос применительно к плоскости $\widehat{H}$ дают простые разбиения [1, 4] и разбиения правильными орициклическими n-трапециями, причем последние разбиения удовлетворяют более жесткому требованию: из их ячеек нельзя составить фундаментальную область дискретной группы симметрий разбиения.

Пусть ω_q, ω_p — орициклы плоскости $\widehat{H}$ с центром K; AB — внутренняя эллиптическая хорда орицикла ω_p; n — натуральное число. Точки пересечения орицикла ω_q с параллельными прямыми AK и BK обозначим соответственно Q_0, Q_n. На дуге Q_0Q_n орицикла ω_q, начиная от точки Q_0, построим последовательно точки $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-1}$ так, чтобы прямые $Q_{j-1}Q_j$, $j = \overline{1, n}$, были эллиптическими. Обозначим b_j внутреннюю хорду орицикла ω_q на прямой $Q_{j-1}Q_j$. Совокупность отрезков $AQ_0, b_1, \ldots, b_n, Q_nB, BA$, циклически соединяющих точки $A, Q_0, Q_1, \ldots, Q_{n-1}, Q_n, B$, назовем *$n$-трапецией, вписанной в кольцо между орициклами ω_q, ω_p*, или, кратко, *орициклической n-трапецией.*

Обозначение: AQ_0Q_nB — орициклическая n-трапеция.

Точки $A, Q_0, Q_1, \ldots, Q_{n-1}, Q_n, B$ назовем *вершинами*, отрезок AB — *основным ребром*, или *основанием*, а отрезки AQ_0, BQ_n на параллельных гиперболических прямых — *боковыми ребрами* орициклической n-трапеции AQ_0Q_nB. Ломаную, составленную из всех отрезков $b_1, \ldots, b_n$ эллиптических прямых, назовем *куполом*, а каждый из отрезков $b_1, \ldots, b_n$ — *ребром купола* орициклической n-трапеции AQ_0Q_nB. Прямую, содержащую основание, ребро купола или боковое ребро орициклической n-трапеции, назовем соответственно *стороной основания*, *стороной купола* или *боковой стороной.*

Орицикл ω_p (ω_q) назовем *основным* (*купольным*) орициклом орициклической n-трапеции AQ_0Q_nB. Орициклическую n-трапецию назовем *простой*, если она не имеет точек самопересечения. *Правильной орициклической n-трапецией* назовем простую орициклическую n-трапецию, все купольные ребра которой конгруэнтны основанию.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *На плоскости $\widehat{H}$ для каждого натурального значения n, $n > 1$, существует и притом однопараметрическое семейство определенных с точностью до движения правильных орициклических n-трапеций.*

Теорема 2. *Правильная орициклическая n-трапеция плоскости $\widehat{H}$ симметрична относительно серединного перпендикуляра к основанию.*

Теорема 3. *Правильная орициклическая n-трапеция плоскости $\widehat{H}$ принадлежит полностью замыканию своего основного орицикла.*

Теорема 4. *Правильная орициклическая n-трапеция на $\widehat{H}$ не является выпуклой.*

Теорема 5. *Длина b бокового ребра правильной орициклической n-трапеции плоскости $\widehat{H}$ радиуса кривизны ρ, $\rho \in \mathbb{R}_+$, однозначно определена числом n: $b = \rho \ln n$.*

Теорема 6. *Длина a каждого эллиптического ребра правильной орициклической n-трапеции плоскости $\widehat{H}$ радиуса кривизны ρ при четном значении n принадлежит интервалу $(0; \rho \arccos((2-n^2)/n^2))$, а при нечетном — интервалу $(0; \pi\rho)$.*

Теорема 7. *Каждое эллиптическое ребро правильной орициклической n-трапеции плоскости $\widehat{H}$ при четном n является отрезком, не достигающим по длине внешнюю хорду орицикла, стягивающую n-ную часть его параболической дуги, при нечетном n — отрезком, не достигающим содержащую его эллиптическую прямую.*

Теорема 8. *На плоскости $\widehat{H}$ радиуса кривизны ρ площадь S правильной орициклической n-трапеции с основанием длиной a может быть вычислена по формуле*

$$S = 2\rho^2(n-1) \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{4\rho} \right).$$

Теорема 9. *На плоскости $\widehat{H}$ радиуса кривизны ρ площадь S правильной орициклической n-трапеции с мерой A внутреннего квазиугла при основании может быть вычислена по формуле*

$$S = 2\rho^2(n-1) \left(i\frac{\pi}{2} - A \right).$$

Теорема 10. *На плоскости $\widehat{H}$ внутренний квазиугол при основании правильной орициклической n-трапеции является эллиптическим квазиуглом.*

Рассмотрим бесконечный трехвершинник ABK, образованный лучами AK, BK и отрезком AB, являющимся основанием правильной орициклической n-трапеции AQ_0Q_nB с точкой K пересечения боковых сторон. Замыкание трехвершинника ABK назовем *бесконечным трехреберником* плоскости $\widehat{H}$, *смежным* с n-трапецией AQ_0Q_nB.

Теорема 11. *На плоскости $\widehat{H}$ площадь S правильной орициклической n-трапеции в $n-1$ раз превышает площадь S_0 смежного с ней бесконечного трехреберника: $S = (n-1)S_0$.*

Теорема 12. *Каждое нормальное разбиение плоскости $\widehat{H}$ правильной орициклической n-трапецией является неправильным.*

Список литературы

[1] Л. Ромакина, “Простые разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны”, *Матем. сб.*, Vol. 203, No. 9, 83–116 (2012).

[2] Л. Ромакина, “Веерные триангуляции гиперболической плоскости положительной кривизны”, *Матем. тр.*, Vol. 16, No. 2, 142–168 (2013).

[3] Л. Ромакина, *Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны: в 4 ч. Ч. 1: Тригонометрия*, Изд-во Сарат. ун-та, (2013).

[4] Л. Ромакина, *Геометрия гиперболической плоскости положительной кривизны: в 4 ч. Ч. 2: Преобразования и простые разбиения*, Изд-во Сарат. ун-та, (2013).

[5] K. Boroczky, “Gombkitoltesek allando gorbuletu terekben, I”, *Mat. lapok*, Vol. 25, 265–306 (1974).

[6] В. Макаров, “Об одном неправильном разбиении n-мерного пространства Лобачевского конгруэнтными многогранниками”, *Тр. МИАН СССР*, Vol. 196, 93–96 (1991).

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, ул. Астраханская, д. 83, г. Саратов, 412410, Россия

E-mail address: romakinaln@mail.ru

О ТЕОРЕМАХ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ СОБОЛЕВСКИХ ФУНКЦИЙ В ОБЛАСТЯХ С ГЕЛЬДЕРОВЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

АЛЕКСАНДР СЕРГЕЕВИЧ РОМАНОВ

Хорошо известно, что в евклидовых областях $G \subset R^n$ с достаточно гладкой границей пространство Соболева $W_p^1(G)$ $(1 < p < n)$ непрерывно вложено в пространство Лебега $L_{q_n}(G)$, где $\frac{1}{q_n} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$. Для областей с гельдеровыми особенностями на границе показатель суммируемости в теоремах вложения оказывается меньшим и зависящим от показателя гельдеровости γ и структуры множества особенностей, т.е. $W_p^1(G_\gamma) \subset L_{q_\gamma}(G_\gamma)$, где $q_\gamma < q_n$. С другой стороны всякая функция $u \in W_p^1(G_\gamma)$ в малой окрестности произвольной внутренней точки $x \in G_\gamma$ суммируема в степени $q_n > q_\gamma$.

В этой ситуации представляется целесообразным изучение вложений соболевских пространств в различные функциональные классы с переменными характеристиками, учитывающими строение области: в весовые пространства, в пространства функций с переменной степенью суммируемости и понимаемой в обобщенном смысле переменной гладкостью.

Известно, что в стандартном нулевом пике

$$P_\lambda = \{(x, y) \in R^n \mid 0 < x < 1, |y| < x^\lambda,\ \lambda > 1\}$$

с гельдеровой особенностью порядка λ вложение пространства Соболева $W_p^1(P_\lambda)$ в классическое пространство Лебега $L_q(P_\lambda)$ возможно при $q \le q_\lambda = p\frac{1+(n-1)\lambda}{1+(n-1)\lambda - p}$, $\ p < 1 + (n-1)\lambda$. При этом существует непрерывное вложение в пространство Лебега с переменным показателем суммируемости $L_{q(x)}(P_\lambda)$, где $q_\lambda < q(x) \le q_n$ во всех точках $x \in P_\lambda$. Условия на функцию $q(x)$ формулируются в терминах сходимости соответсвующего интеграла.

Аналогичным образом обстоит ситуация и с вложениями пространства следов соболевских функций на границе пика. Получены также вложения в обобщенные гельдеровы пространства с переменной степенью суммируемости и в гельдеровы классы относительно анизотропной метрики, учитывающей строение пика.

Список литературы

[1] D. Edmunds, J. Rakosnik, Sobolev embeddings with variable exponent // Studia Math. Vol. 143. № 3. 267-293 (2000).

[2] А. С. Романов, Функции соболевского типа с переменным показателем суммируемости на метрических пространствах с мерой // Сиб. мат. журн., Т. 55. № 1. 178-194 (2014).

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, пр. Коптюга, 4, г. Новосибирск, 630090, Россия

E-mail address: asrom@math.nsc.ru

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 14-01-00552 и интеграционного проекта СО РАН – ДВО РАН № 56.

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ИЗГИБАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ С УПЛОЩЕНИЯМИ В ПОЛЮСАХ

ИДЖАД ХАКОВИЧ САБИТОВ

1. Исследование бесконечно малых изгибаний (б.м.и.) поверхностей вообще и, в частности, поверхностей вращения, является одной из основной тем метрической теории поверхностей, в которой есть важные результаты С.-Э. Кон-Фоссена, А. Д. Александрова, Н. В. Ефимова, А. В. Погорелова, Э. Г. Позняка, Ю. Г. Решетняка, Д. А. Троценко, З. Д. Усманова, В. Т. Фоменко и многих других российских и зарубежных авторов. Основная трудность в этих задачах связана с поведением поля б.м.и. в окрестности полюса или полюсов поверхности вращения (в случае поверхности рода 0) или в окрестности параболической параллели (в случае поверхности рода 1). Поэтому в случае полюса обычно предполагается, что меридиан не имеет в точке полюса уплощения, или же рассматриваются выпуклые меридианы с простейшими уплощениями степенного порядка, а в случае наличия параболической параллели предполагается выпуклость меридиана в соответствующей малой окрестности. При этом на гладкость и поверхности, и поля б.м.и. обычно накладывается условие их принадлежности по крайней мере классу C^2. Мы же изучаем вопросы существования б.м.и. 1-го и 2-го порядков начиная с минимально допустимой гладкости класса C^1 и поверхности, и полей б.м.и. Отметим, что в классах гладкости C^2 и выше часть наших результатов пересекается с результатами работы [4].

2. Итак, предполагается, что поверхность S получена вращением вокруг оси Oz некоторого меридиана L с уравнением в окрестности полюса $z = \varphi(\rho) \in C^n, n \geq 1$ где $\varphi'(0) = 0, \varphi'(\rho| > 0, \rho \in [0, a]$, а искомые в окрестности полюса поля б.м.и. 1-го и 2-го порядков предполагаются имеющими минимально возможную гладкость C^1. Известно, что для поверхностей вращения б.м.и. определяются гармониками с номерами $m \geq 2$, а их нахождение сводится к нахождению функций $\alpha_m(\rho)$, являющихся коэффициентами Фурье вертикальной компоненты поля б.м.и. Мы получаем теоремы, дающие достаточные условия существования и единственности решений соответствующих систем дифференциальных уравнений 1-го порядка. Приведем некоторые примеры таких условий из [2].

Теорема 1. *Если решения системы соответствуют гармонике $\alpha_m(\rho)$ б.м. изгибания класса гладкости C^1, тогда для их единственности достаточно. чтобы при некотором $\rho_0 > 0$ было выполнено условия*

$$\inf_{0\leq\varepsilon\leq1} \sup_{0<\rho\leq\rho_0} \frac{m^2(m^2-1)\rho^{-m^2-\varepsilon+1}}{(m^2-\varepsilon)\varphi'(\rho)} \int_0^\rho \varphi'(t)t^{m^2-2+\varepsilon}dt \leq 1 \tag{1}$$

с достижением инфимума при его равенстве 1.

Условие (1) выполняется для любого выпуклого C^1-гладкого меридиана, а также для меридианов с условием $\varphi'(\rho) \sim \rho^a$ *при* $\rho \to 0, a > 0$, без предположения их выпуклости.

Что касается вопроса существования, то верна следующая теорема

Теорема 2. *а) Поверхность вращения с C^1-гладким выпуклым меридианом допускает в окрестности полюса C^1-гладкое б.м. изгибание с гармоникой с любым номером $m \geq 2$. б) Пусть для C^1-гладкого меридиана $z = \varphi(\rho)$ выполнено условие $\varphi'(\rho) \sim C\rho^a, C \neq 0, \rho \to 0$, с представлением $\varphi'(\rho) = C\rho^a + g(\rho)O(\rho^a)$, где $a > 0$ и $g(\rho)$ – произвольная положительная монотонная б.м. функция при $\rho \to 0$. Тогда соответствующая поверхность вращения допускает C^1-гладкое б.м. изгибание с гармоникой $\alpha_m(\rho) \sim \rho^\nu$ с любым номером $m \geq 2$, где число $\nu > 1$ определяется уравнением $\nu(\nu-1) + a\nu - am^2 = 0$.*

Чтобы подчеркнуть нетривиальность случая a), отметим, что C^2-гладкая выпуклая поверхность вращения даже локально может быть C^2-жесткой.

Для локальной продолжаемости C^1-гладких гармоник б.м.и. 1-го порядка с данным номером в C^1-гладкие б.м.и. 2-го порядка мы тоже имеем ряд необходимых или достаточных признаков или полных критериев продолжаемости, но они довольно громоздкие и их можно будет найти в [3].

3. В аналитическом классе результаты получаются более обозримыми.

Теорема 3. *Для того, чтобы аналитическая поверхность вращения с меридианом $z = \varphi(\rho) \sim C\rho^{2k}$ допускала в окрестности полюса аналитическое б.м. изгибание, необходимо и достаточно, чтобы диофантово уравнение $x^2 - (2k-1)y^2 = (k-1)^2$ имело решения с $y \geq 2$. Тогда эти значения y и только они дают номера $m = y$ нетривиальных гармоник поля б.м. изгибания.*

При выполнении условия теоремы получаем значения $x = m + k - 1 + p$ с неотрицательным четным p. Оказывается, для локальной продолжаемости гармоники с номером m в аналитическое б.м.и. 2-го порядка необходимо и достаточно, чтобы это число p было не меньше чем k (при дополнительном условии, что число $\nu_{2m} = 1 - k + \sqrt{4m^2(2k-1) + (k-1)^2}$ не является целым) .

4. В случае замкнутой поверхности вращения рода 0 с уплощениями в обоих полюсах для ее нежесткости в аналитическом классе деформаций необходимо, чтобы была разрешима диофантова система уравнений Пелля:

$$x_1^2 - (2k_1-1)y^2 = (k_1-1)^2, \; x_2^2 - (2k_2-1)y^2 = (k_2-1)^2, \tag{2}$$

где $(2k_1 - 2) > 0$ и $(2k_2 - 2) > 0$ – порядки уплощений в полюсах с $k_1 \neq k_2$. Если система (2) имеет решение с $y \geq 2$, тогда мы называем порядки уплощений *согласованными.* Таким образом, поверхности с несогласованными порядками уплощений являются жесткими. Показывается, что для любой согласованной пары порядков уплощений существуют нежесткие поверхности вращений с соответствующими полюсами и любая поверхность с согласованными порядками уплощений в полюсах может иметь б.м.и. лишь с конечным числом гармоник. В [4] предложен алгоритм вычисления номеров этих гармоник.

Для продолжаемости б.м.и. поверхностей с согласованными порядками уплощений в полюсах в б.м.и. 2-го порядка необходимо, чтобы меридиан поверхности вращения проектировался однозначно на ось вращения. При этом условии для возможности продолжения гармоники с номером m в б.м.и. 2-го порядка необходимо и достаточно, чтобы такая продолжаемость была в окрестности каждого полюса.

Список литературы

[1] И. Иванова-Каратопраклиева, И. Х. Сабитов, Бесконечно малые изгибаия 2-го порядка поверхностей вращения с уплощеним в полюсе, *Математические заметки*, Т. 45, вып. 1, 28-35 (1989).

[2] И. Х. Сабитов, Жесткость и неизгибаемость "в малом" и "в целом" поверхностей вращения с уплощениями в полюсах, *Матем. сборник*, Т. 204, №10, 127-160 (2013).

[3] И. Х. Сабитов, Бесконечно малые изгибания 2-го порядка поверхностей вращения с уплощениями в полюсах, *Матем. сборник* (принято в печать).

[4] А. Ю. Нестеренко, Нахождение целочисленных решений связанных уравнеий Пелля, *Математические заметки*, Т. 86, вып. 4, 588-600 (2009).

Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Ленинские Горы, 119992, Москва, Россия

E-mail address: isabitov@mail.ru

ДЕФОРМАЦИЯ $SO(3)$-СТРУКТУРЫ НА ПЯТИМЕРНОЙ ГРУППЕ ЛИ

СЕДЫХ АННА ГЕННАДЬЕВНА

Неприводимой $SO(3)$-структурой на $\mathbb{R}^5$ называется [1] симметричная 3-линейная форма $\mathbb{T}$, для которой соответствующее линейное отображение

$$\mathbb{R}^5 \ni X \mapsto \mathbb{T}_X \in End(\mathbb{R}^5),$$

удовлетворяет следующим свойствам:

1) Симметричность, $g(X, \mathbb{T}_Y Z) = g(Z, \mathbb{T}_Y X) = g(X, \mathbb{T}_Z Y)$.

2) Нулевой след, $tr(\mathbb{T}_X) = 0$.

3) Для любого вектора $X \in \mathbb{R}^5$,

$$\mathbb{T}_X^2 X = g(X, X)X.$$

Можно выбрать адаптированный базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, в котором метрика g и тензор $\mathbb{T}$ будут иметь канонический вид, а именно, $g_{ij} = \delta_{ij}$ и

$$\mathbb{T} = \frac{1}{2}e^1(6(e^2)^2 + 6(e^4)^2 - 2(e^1)^2 - 3(e^3)^2 - 3(e^5)^2) + \frac{3\sqrt{3}}{2}e^4((e^5)^2 - (e^3)^2) + 3\sqrt{3}e^2e^3e^5.$$

Здесь $\{e^1, \dots, e^5\}$ – дуальный репер. Из этого выражения мы получаем ненулевые компоненты тензора $\mathbb{T}$ в адаптированном репере:

$$t_{111} = -1,\ t_{122} = 1,\ t_{144} = 1,\ t_{133} = -\frac{1}{2},\ t_{155} = -\frac{1}{2},\ t_{433} = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ t_{455} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ t_{235} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Множество неприводимых $SO(3)$-структур на $\mathbb{R}^5$ является однородным семимерным пространством Берже $SO(5)/SO(3)$ с римановой структурой, полученной из биинвариантного скалярного произведения на $SO(5)$: $\langle A, B\rangle = -\operatorname{trace} A \cdot B,\ A, B \in so(5)$.

Рассмотрены деформации структурного тензора $\mathbb{T}$, которые соответствуют геодезическим g_t однородного пространства $SO(5)/SO(3)$. Это позволяет рассмотреть такие деформации в случае левоинвариантной $SO(3)$-структуры на пятимерной группе G. Для таких деформированных структур вычислена ковариантная дивергенция, исследовано свойство приблизительной интегрируемости

Список литературы

[1] M. Bobienski, P. Nurovski, "Irreducible $SO(3)$ geometry in dimension five", *Math.*, Vol. 43, No. 605, 51–93 (2007).

[2] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, Москва, (1981).

Кемеровский институт (филиал) РЭУ им. Плеханова, пр. Кузнецкий, 39, Кемерово, 650992, Россия

E-mail address: sedykh-anna@mail.ru

МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ АВТОМОФНЫЕ ФОРМЫ И ИНТЕГРАЛЫ ЭЙХЛЕРА НА КОМПАКТНОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

ОЛЬГА АЛЕКСЕЕВНА СЕРГЕЕВА

Пусть $\left[F, \{a_k, b_k\}_{k=1}^h\right]$ – отмеченная компактная риманова поверхность рода $h \geq 1$, где $\{a_k, b_k\}_{k=1}^h$ – канонический базис гомотопических классов петель из точки P_0 на F, задающий отмечание поверхности F. Первая фундаментальная группа с базисной точкой P_0 на F имеет алгебраическое представление

$$\pi_1(F, P_0) = \left\langle a_1, \ldots, a_h, b_1, \ldots, b_h : \prod_{j=1}^{h} a_j b_j a_j^{-1} b_j^{-1} = 1 \right\rangle.$$

Эта группа изоморфна отмеченной фуксовой группе Γ первого рода, инвариантно действующей на единичном диске $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ так, что Δ – универсальная накрывающая для F и Γ – группа преобразований наложения для естественной проекции $\pi : \Delta \to \Delta/\Gamma = F$. Выбор образующих в фундаментальной группе на F определяет специальный выбор образующих в группе Γ.

Рассмотрим $Hom(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ – группу всех одномерных комплексных характеров группы Γ, т. е. всех гомоморфизмов $\rho : \Gamma \to \mathbb{C}^*$, где $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, с естественной операцией умножения. Каждый характер однозначно определяется своими значениями на образующих группы Γ. Поэтому любой характер ρ однозначно задается строкой

$$(\rho(A_1), ..., \rho(A_h),\ \rho(B_1), ..., \rho(B_h)) \in [\mathbb{C}^*]^{2h},$$

а всё множество $Hom(\Gamma, C^*)$ отождествляется с пространством строк $[\mathbb{C}^*]^{2h}$.

Пусть D – открытое множество в $\overline{\mathbb{C}}$, конформно эквивалентное единичному кругу Δ. Возьмем G – отмеченную конечнопорожденную разрывную группу дробно-линейных преобразований A множества $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ вида

$$A(z) = \frac{az + b}{cz + d},\ \text{где } a, b, c, d \in \mathbb{C},\ z \in D \text{ и } ad - bc = 1,$$

такую, что $D/G = F$. Очевидно, что G изоморфна фуксовой группе Γ.

Определение 1. *Измеримой мультипликативной автоморфной формой порядка q с характером ρ на F ((q, ρ)-формой) называется однозначная измеримая функция φ на D с условием:*

$$\varphi(Az)A'(z)^q = \rho(A)\varphi(z), A \in G, z \in D, D/G = F.$$

Мультипликативная автоморфная форма f нулевого порядка с характером ρ называется *мультипликативной функцией для ρ*. Если f_1 – мультипликативная функция для ρ_1 без нулей и полюсов на D, то характер ρ_1 будет несущественным [1, 2], а сама такая функция f_1 называется *мультипликативной единицей для ρ_1*.

Для любых $A \in G$ и целого $q \geq 1$ определим оператор, действующий на функциях $f : A(D) \to \overline{\mathbb{C}}$ по формуле

$$(A^*_{q,\rho} f)(z) = \frac{f(Az)A'(z)^q}{\rho(A)},\ \ \rho \in Hom(G, \mathbb{C}^*).$$

Тогда условие автоморфности (q, ρ)-формы φ будет иметь вид

$$A^*_{q,\rho}\varphi = \varphi,\ \text{для любого } A \in G.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ № 12-01-31256 мол_ а.

Множество голоморфных форм, удовлетворяющих этому условию, будем обозначать $\mathcal{A}_{q,\rho}(D,G)$ [3, 4].

Определение 2. *Мультипликативная голоморфная функция F на D для характера ρ называется голоморфным (q,ρ)-интегралом Эйхлера на D относительно группы G, если существует форма $\varphi \in \mathcal{A}_{q,\rho}(D,G)$ такая, что $\varphi = \frac{\partial^{2q-1}F}{\partial z^{2q-1}}$.*

Используя интегральную формулу Коши и свойство инвариантности относительно группы G: $(A\zeta - Az)^2 = (\zeta - z)^2 A'(\zeta)A'(z)$, $z \in D$, $A \in G$, получим лемму:

Лемма 1. *Для оператора дифференцирования $\frac{\partial^{2q-1}}{\partial z^{2q-1}}$ и любого дробно-линейного отображения $A \in G$ справедливо равенство*

$$\frac{\partial^{2q-1}}{\partial z^{2q-1}} \circ A^*_{1-q,\rho} = A^*_{q,\rho} \circ \frac{\partial^{2q-1}}{\partial z^{2q-1}}.$$

Пусть Π_{2q-2} – векторное пространство полиномов от одного комплексного переменного z степени $\leq 2q-2$.

Теорема 1. *Для голоморной функции F на D производная $\frac{\partial^{2q-1}F}{\partial z^{2q-1}} \in \mathcal{A}_{q,\rho}(D,G)$ тогда и только тогда, когда для каждого $A \in G$ $(2q-1)$-я производная по z функции $\Phi(z) = (A^*_{1-q,\rho}F)(z) - F(z)$ равна нулю, то есть функция $\Phi(z)$ принадлежит Π_{2q-2}.*

Из теоремы заключаем, что F будет (q,ρ)-интегралом Эйхлера, тогда и только тогда, когда

$$P_A = A^*_{1-q,\rho}F - F \in \Pi_{2q-2} \quad \text{для любого} \;\; A \in G.$$

Следствие. *Для целого $q \geq 1$ и характера $\rho \in Hom(G,\mathbb{C}^*)$ имеем линейное отображение*

$$\frac{\partial^{2q-1}}{\partial z^{2q-1}} : \Upsilon_{q,\rho}(D,G) \to \mathcal{A}_{q,\rho}(D,G),$$

где $\Upsilon_{q,\rho}(D,G)$ – пространство (q,ρ)-интегралов Эйхлера.

Теорема 2. *Для целого $q \geq 1$ и характера $\rho \in Hom(G,\mathbb{C}^*)$ имеет место вложение*

$$\mathcal{A}_{1-q,\rho}(D,G) \hookrightarrow \Upsilon_{q,\rho}(D,G).$$

Список литературы

[1] H. M. Farkas, I. Kra, "Riemann Surfaces", *Graduate Texts in Mathematic*, Springer-Verlag, No. 71, −366 p. (1992).

[2] В. В. Чуешев *Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности*, – Ч. 2, Кемерово: КемГУ, −247 с., (2003).

[3] О. А. Сергеева, "Теоремы вложения для пространств мультипликативных автоморфных форм", *Труды всероссийской молодежной школы-семинара "Анализ, геометрия и топология"*, – Барнаул, Ч. 1, 83–94 (2013).

[4] О. А. Сергеева, "Банаховы пространства мультипликативных автоморфных форм", *Вестник НГУ*, Т. V, Вып. 4, 45−63 (2005).

Кемеровский государственный университет, ул. Красная 6, г. Кемерово, 650043, Россия
E-mail address: `Okoin@yandex.ru`

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ТОЧНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ КОГОМОЛОГИЙ КАТЕГОРНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

СКУРИХИН ЕВГЕНИЙ ЕВГЕНЬЕВИЧ

В рамках общих понятий, введённых и разработанных А. Гротендиком: топологии Гротендика τ на категории, τ-пучка, когомологий, как производных функторов для точных слева функторов, принимающих значение в абелевой категории τ-пучков, появилась теория категорных топологических пространств. Любой объект, включённый, за счёт абстрагирования его изучаемых свойств, в некоторую категорию K, представляется предпучком множеств, и, следовательно, ему сопоставляется предпучок множеств (контравариантный функтор) на этой категории. Любая топология Гротендика на K задаёт на этом предпучке структуру категорного топологического пространства, что делает понятие категорного топологического пространства универсальным. (Ко)гомологии любых объектов могут, таким образом, описываться, как (ко)гомологии категорных топологических пространств.

Категорные топологические пространства сопоставлялись топологическим пространствам, равномерным пространствам, пространствам Чу и в этих случаях, как выяснилось, группы когомологий Гротендика характеризуют многие важные свойства указанных объектов, позволяют иногда получать более тонкие результаты для более общих объектов. Сопоставляя категорные топологические пространства информационным системам, структурам событий, информационным матрицам биологических объектов, мы убедились, что и в этих случаях, пока ещё далеких от сколько-нибудь детальной разработки, группы когомологий Гротендика могут отражать глобальные свойства исходных объектов, либо получившихся из них в результате развития.

Пусть τ топология Гротендика на категории K, $k \in Ob(K)$ объект категории K, D предпучок множеств на K, $\Gamma_{\tau,k}, \Gamma_{\tau,D} : \mathcal{S}_\tau \to Ab$ - (точные слева аддитивные) функторы из категории абелевых τ-пучков на K в категорию абелевых групп, задаваемые равенствами $\Gamma_{\tau,k}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}(k)$, $\Gamma_{\tau,D}(\mathcal{A}) = Hom_{\hat{K}}(D,\mathcal{A})$ – группа естественных преобразований функтора D в функтор $\mathcal{A}$. По определению, $H^n_\tau(k,\mathcal{A}) = (R^n\Gamma_{\tau,k})(\mathcal{A})$, $H^n_\tau(D,\mathcal{A}) = (R^n\Gamma_{\tau,D})(\mathcal{A})$, где R^n обозначает операцию взятия n-го правого производного функтора.

Пусть $\mu \subset \tau$, то есть топология Гротендика μ на K является более грубой, чем τ. Определим группы когомологий $H^n_{\tau\mu}(D,\mathcal{A})$, полагая

$$H^n_{\tau\mu}(D,\mathcal{A}) = colim\{H^n_\mu(S,\mathcal{A}) \mid [S]_\tau = D\},$$

где индуктивный предел берётся по упорядоченному по включению множеству всех τ-плотных в D подпредпучков D.

Группы $H^n_\tau(k,\mathcal{A})$ являются частными случаями групп $H^n_\tau(D,\mathcal{A})$, которые, в свою очередь, являются частными случаями групп $H^n_{\tau\mu}(D,\mathcal{A})$. Эти и другие связи между введёнными группами когомологий и другими объектами гомологической алгебры и топологии перечисляются в лемме 1.

Лемма 1. *1. Пусть $\mu = \tau$. Тогда*

a).$H^n_{\tau\mu}(D,\mathcal{A}) = H^n_\tau(D,\mathcal{A})$.

b).Если D функтор, представляющий объект k, то $H^n_{\tau\mu}(D,\mathcal{A}) = H^n_\tau(k,\mathcal{A})$.

2. Пусть K категория с расслоенными произведениями, μ грубейшая топология Гротендика на K, D функтор, представляющий объект k. Тогда $H^n_{\tau\mu}(D,\mathcal{A}) = \check{H}^n_\tau(k,\mathcal{A})$ - когомологии Чеха.

Работа поддержана грантом ДВО РАН 12-III-А-01М-004 Гомологический анализ целочисленных характеристик математических объектов.

3. Пусть $D = 1_K$ терминальный объект категории предпучков множеств на K, то есть $D(k)$ одноэлементное множество для всякого объекта k. Тогда $\Gamma_{\tau,D}(\mathcal{A}) = \lim \mathcal{A}$ - (обратный) предел функтора $\mathcal{A}$. Если при этом τ грубейшая топология на K, то $H^n_\tau(D, \mathcal{A}) = \lim^n \mathcal{A}$ - n-й производный функтор обратного предела.

4. Пусть X топологическое пространство, OX частично упорядоченное по включению множество всех открытых подмножеств X.

a). Если τ каноническая топология Гротендика на OX, то $H^n_\tau(1_{OX}, \mathcal{A}) = H^n(X, \mathcal{A})$ - обычные когомологии Гротендика топологического пространства X.

b). Если τ нормальная топология Гротендика на OX, то $H^n_\tau(1_{OX}, \mathcal{A}) = \check{H}^n_\tau(X, \mathcal{A}) \equiv colim H^n(\alpha, \mathcal{A})$, где индуктивный предел берётся по всем нормальным ($\equiv$ нумерируемым) покрытиям пространства X.

5. Пусть X равномерное пространство, OX частично упорядоченное по включению множество всех открытых подмножеств X относительно топологии, индуцированной равномерной структурой, τ топология Гротендика на OX, порождённая классом конечных равномерных покрытий элементов OX. Тогда $H^n_\tau(1_{OX}, \mathcal{A}) = \check{H}^n_\tau(X, \mathcal{A}) \equiv colim H^n(\alpha, \mathcal{A})$, где индуктивный предел берётся по всем конечным равномерным открытым покрытиям пространства X.

Связи между рассматриваемыми когомологиями описываются следующими спектральными последовательностями:

Теорема 1. *Пусть $i_{\tau\mu} : \mathcal{S}_\tau \to \mathcal{S}_\mu$ функтор включения категории τ-пучков в категорию μ-пучков.*

1. Пусть E - τ-плотный подпредпучок D. Существует спектральная последовательность со вторым членом $E_2^{pq} = H^p_\mu(E, (R^q i_{\tau\mu})(\mathcal{A}))$, сходящаяся к $H^*_\tau(D, \mathcal{A})$.

2. Существует спектральная последовательность со вторым членом $E_2^{pq} = H^p_{\tau\mu}(D, (R^q i_{\tau\mu})(\mathcal{A}))$, сходящаяся к $H^*_\tau(D, \mathcal{A})$.

Определим для абелева предпучка $\mathcal{A}$ и предпучка множеств A абелевы предпучки $\mathcal{A}^A$ и $\mathcal{A}^{A'}$, полагая $\mathcal{A}^A(k) = \mathcal{A}(k)$, если $A(k) \neq \emptyset$, и $\mathcal{A}^A(k) = 0$, если $A(k) = \emptyset$, предпучок $\mathcal{A}^{A'}$ определим из точной последовательности предпучков $0 \to \mathcal{A}^A \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{A'} \to 0$. Через $\mathcal{A}_{A'}$ и $\mathcal{A}_A$ обозначим μ-пучки, порождённые предпучками $\mathcal{A}^{A'}$ и $\mathcal{A}^A$ соответственно, так что имеется точная последовательность μ-пучков $0 \to \mathcal{A}_A \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}_{A'} \to 0$. Отметим, что группы $H^n_\mu(D, \mathcal{A}_A)$ и $H^n_\mu(D, \mathcal{A}_{A'})$ являются обобщениями на категорные топологические пространства и аналогами соответственно когомологий пары (X, B) и B, где B замкнутое подмножество топологического пространства X.

В силу сказанного, а также результатов леммы 1, содержащиеся в нижеследующей теореме аддиционные точные последовательности, то есть последовательности типа Майера-Вьеториса, относятся, в частности, к замкнутым и открытым подмножествам топологических пространств, подмножествам равномерных пространств, пространств Чу, а также к различным видам когомологий, в том числе производным функторам обратного предела.

Теорема 2. *Имеют место следующие точные последовательности когомологий:*

(1) $$... \to H^n_\mu(A \cup B, \mathcal{A}) \to H^n_\mu(A, \mathcal{A}) \oplus H^n_\mu(B, \mathcal{A}) \to H^n_\mu(A \cap B, \mathcal{A}) \to H^{n+1}_\mu(A \cup B, \mathcal{A}) \to ...$$

(2)
$$... \to H^n_{\tau\mu}(D, \mathcal{A}_{A\cap B}) \to H^n_{\tau\mu}(D, \mathcal{A}_A) \oplus H^n_{\tau\mu}(D, \mathcal{A}_B) \to H^n_{\tau\mu}(D, \mathcal{A}_{A\cup B}) \to H^{n+1}_{\tau\mu}(D, \mathcal{A}_{A\cap B}) \to ...$$

(3)
$$... \to H^n_{\tau\mu}(D, \mathcal{A}_{(A\cap B)'}) \to H^n_{\tau\mu}(D, \mathcal{A}_{A'}) \oplus H^n_{\tau\mu}(D, \mathcal{A}_{B'}) \to H^n_{\tau\mu}(D, \mathcal{A}_{(A\cup B)'}) \to H^{n+1}_{\tau\mu}(D, \mathcal{A}_{(A\cap B)'}) \to ...$$

ИПМ ДВО РАН, ул. Радио,7, Владивосток, 690041, Россия; ДВФУ (Дальневосточный Федеральный Университет) ул. Суханова, 8, Владивосток, 690950, Россия.

E-mail address: eeskur@gmail.com, eesku@iam.dvo.ru

О КАСАТЕЛЬНОМ КОНУСЕ К Σ-ПРОСТРАНСТВУ

СТАРОСТИНА ВЕРА ВАЛЕРЬЕВНА

В статье П. Д. Андреева [1] доказывается, что всякое G-пространство Буземана неположительной кривизны является топологическим многообразием. Основная конструкция, используемая в [1] — это конструкция касательного конуса.

В книге Буземана и Фадке [2] понятие G-пространства обобщается на случай пространств с выделенным семейством отрезков. Там же для указанного класса пространств вводится понятие G-пространств неположительной кривизны относительно выделенного семейства отрезков Σ. Для краткости мы называем Σ-пространством конечно компактное геодезическое пространство (X, d), в котором выделено семейство отрезков Σ, удовлетворяющее следующим требованиям.

(1) Любые две точки $x, y \in X$ соединяются единственным отрезком $[xy] \in \Sigma$. Далее запись $[xy]$ обозначает именно отрезок семейства Σ, соединяющий точки $x, y \in X$.
(2) Если $[xy] \in \Sigma$ и $u, v \in [xy]$, то $[uv] \subset [xy]$;
(3) Для любой точки $x \in X$ определено такое число $r_x > 0$, что если $d(x, y), d(x, z) < r_x$, то существует такая отличная от z точка $w \in X$, что $[yz] \subset [yw]$;
(4) Для произвольных различных точек $x, y, u, v \in X$, если $[xy] \subset [xu]$ и $[xy] \subset [xv]$, то либо $[xu] \subset [xv]$, либо $[xv] \subset [xu]$;
(5) Если m — середина отрезка $[xy]$ и n — середина отрезка $[xz]$, то $d(m, n) \leq 1/2d(y, z)$.

Перечисленные свойства называются аксиомами Σ-пространства. Свойство 3 — это аксиома локальной продолжаемости отрезков семейства Σ, свойство 4 — аксиома единственности продолжения отрезков Σ, а свойство 5 — аксиома неположительности кривизны относительно Σ. Пространство (X, d), в котором зафиксировано такое выделенное семейство Σ обозначается как тройка (X, d, Σ).

Пусть (X, d, Σ) — Σ-пространство с отмеченной точкой $p \in X$. Для произвольной точки $x \in X$ и числа $t \geq 1$ обозначим x_t точку отрезка $[px]$, для которой $d(p, x_t) = 1/td(p, x)$. Через d_t обозначается метрика $d_t(x, y) = t \cdot d(x_t, y_t)$.

Лемма 1. *Для любых точек $x, y \in X$ существует предел*

$$d^*(x, y) = \lim_{t\to\infty} d_t(x, y),$$

причём функция d^* является метрикой на X.

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть (X, d, Σ) — Σ-пространство. Тогда (X, d^*) — конечно компактное геодезическое пространство, причём отображение* $\mathrm{Id} : X \to X$ *является гомеоморфизмом (X, d) на (X, d^*), и на X существует такое выделенное семейство отрезков Σ_*, что пространство (X, d^*, Σ_*) является Σ-пространством.*

По аналогии с терминологией в [1] Σ-пространство (X, d^*, Σ_*) называется касательным конусом к Σ-пространству (X, d, Σ).

Список литературы

[1] П. Д. Андреев, “Доказательство гипотезы Буземана для G-пространств неположительной кривизны”, *Алг. Ан.*, Vol. 26, No. 2, 1–20 (2014).

[2] H. Busemann, B. B. Phadke, *Spaces with distinguished geodesics*, Dekker Inc., (1987).

Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова, наб. Северной Двины, д. 17, Архангельск, 163002, Российская Федерация

E-mail address: irrefragable@yandex.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 14-01-00219 А.

РАССЛОЕНИЯ ВЕЙЛЯ С СИНЕКТИЧЕСКИМИ СВЯЗНОСТЯМИ И ОЦЕНКА РАЗМЕРНОСТЕЙ ИХ АЛГЕБР ЛИ АФФИННЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

АДГАМ ЯХИЕВИЧ СУЛТАНОВ

Синектические расширения полных лифтов линейных связностей в касательных расслоениях были введены профессором Казанского университета А. П. Широковым в 70-е годы прошлого столетия. Эти связности являются линейными и были получены при изучении им гладких структур над алгеброй дуальных чисел на касательных расслоениях. А. П. Широков доказал существование таких структур над алгеброй плюральных чисел на касательных расслоениях произвольного порядка, затем и на произвольных расслоениях А. Вейля [1]. В работе [2] показано, что синектические расширения можно построить на любом расслоении А. Вейля. Эти синектические расширения полного лифта будем называть синектическими связностями А. П. Широкова.

В настоящей работе отмечаются некоторые свойства этих связностей и приводятся оценки сверху размерностей алгебр Ли аффинных векторных полей на расслоениях Вейля, снабженных связностями А. П. Широкова.

Приведем необходимые понятия и сведения. Пусть M – связное гладкое многообразие класса C^∞, $C^\infty(M)$ – алгебра C^∞-гладких функций, заданных на M, $\mathbb{A}$ – конечномерная алгебра А. Вейля над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Будем считать, что единица алгебры $\mathbb{A}$ отождествлена с единицей поля $\mathbb{R}$ и она включена в базис: $(\epsilon^0 = 1, \epsilon^1, ..., \epsilon^{m-1})$. Обозначим через $\mathbb{A}^*$ векторное пространство линейных форм, заданных на $\mathbb{A}$ и принимающих значения в $\mathbb{R}$. На $\mathbb{A}^*$ определим еще одну внешнюю операцию $(a^*, b) \mapsto a^* \cdot b$ по правилу $a^* \cdot b(c) = a^*(bc)$ для всех $a^* \in \mathbb{A}, b, c \in \mathbb{A}$. В пространстве $\mathbb{A}$ выберем базис $(\epsilon_0, \epsilon_1, ..., \epsilon_{m-1})$, дуальный к базису $(\epsilon^0, \epsilon^1, ..., \epsilon^{m-1})$. Обозначим через $M^{\mathbb{A}}$ расслоение А. Вейля. Точки расслоения $M^{\mathbb{A}}$ представляют собой гомоморфизмы $j_q : C^\infty(M) \to \mathbb{A}$, удовлетворяющие условию $j_q(f) = f(q)(mod\mathbb{I})$, где $\mathbb{I}$ – радикал алгебры $\mathbb{A}$. Для любой функции $f \in C^\infty(M)$ функция $f^{\mathbb{A}}$ на M^∞ определяется условием $f^{\mathbb{A}}(j_q) = j_q(f)$. Каждая линейная форма $a^* \in \mathbb{A}^*$ позволяет определить для произвольной функции $f \in C^\infty(M)$ функцию $f_{(a^*)} = a^* \circ f^{\mathbb{A}}$, которая называется ее (a^*)-лифтом. С помощью этих лифтов функций можно построить (a)-лифты гладких векторных полей X из M в $\mathbb{A}$, где a – некоторый элемент алгебры $\mathbb{A}$ следующим условием: $X^{(a)} f_{(b^*)} = (Xf)_{(b^* \cdot a)}$ для каждой функции $f \in C^\infty(M)$ [2].

Предположим, что на базе M расслоения А. Вейля заданы линейная связность $\nabla = \Gamma_0$ и тензорные поля Γ_λ типа (1,2) $(\lambda = 1, 2, ..., m-1)$. Тогда на $M^{\mathbb{A}}$ существует единственная линейная связность ∇^{Sh} синектическая связность А. П. Широкова такая, что

$$\nabla^{Sh}_{X^{(a)}} Y^{(b)} = (\Gamma_\alpha(X, Y))^{(\epsilon^\alpha ab)}$$

для всех $a, b \in \mathbb{A}$, векторных полей X, Y на M. Если тензорные поля $\Gamma_\lambda(\lambda = 1, 2, ..., m-1)$ нулевые, то связность ∇^{Sh} называется полным лифтом линейной связности ∇, заданной на базе M расслоения Вейля. Тензорные поля кручения T^{Sh} и кривизны R^{Sh} связности ∇^{Sh} удовлетворяют следующим тождествам:

$$T^{Sh}(X^{(a)}, Y^{(b)}) = (T_\alpha(X, Y))^{(\epsilon^\alpha ab)}, \tag{$*$}$$

$$R^{Sh}(X^{(a)}, Y^{(b)}) Z^{(c)} = (R_\alpha(X, Y, Z))^{(\epsilon^\alpha abc)}, \tag{$**$}$$

где a, b, c – произвольные элементы, ϵ^α – элементы базиса алгебры $\mathbb{A}$; по индексу α ведется суммирование от 0 до $m-1$. Тензорные поля T_α, R_α определены условиями: T_0, R_0 –

тензорные поля кручения T и кривизны R, соответственно, связности ∇, а при $\alpha = \lambda \neq 0$

$$T_\lambda(X,Y) = \Gamma_\lambda(X,Y) - \Gamma_\lambda(Y,X) \quad (\lambda = 1,2,...,m-1),$$

$$R_\lambda(X,Y,Z) = \nabla_X\Gamma_\lambda(Y,Z) - \nabla_Y\Gamma_\lambda(X,Z) + \Gamma_\lambda(T(X,Y),Z) + \gamma_\lambda^{\tau\mu}(\Gamma_\tau(X,\Gamma_\mu(Y,Z)) - \\ -\Gamma_\tau(Y,\Gamma_\mu(X,Z))),$$

где по $\tau, \mu \neq 0$ ведется суммирование от 1 до $m-1$.

Обозначим через $\tilde{I}$ единичный аффинор на $M_n^{\mathbb{A}}$. Имеет место

Теорема 1. *Если существует хотя бы одно тензорное поле T_α, отличное от нуля, то $T^{Sh} \neq \tilde{I} \otimes \tilde{\Phi} - \tilde{\Phi} \otimes \tilde{I}$ для всех 1-форм $\tilde{\Phi}$ на $M_n^{\mathbb{A}}$.*

Если линейная связность ∇^{Sh} не имеет кручения, то есть $T^{Sh} = 0$, то имеет место

Теорема 2. *Если $R^\alpha \neq 0$ для некоторого $\alpha \in \{0,1,...,m-1\}$, то тензорное поле W^{Sh} Г. Вейля проективной кривизны связности ∇^{Sh} отлично от нулевого.*

Эти две теоремы и известные результаты И. П. Егорова о размерности групп аффинных преобразований позволяет получить оценки размерностей алгебр Ли аффинных векторных полей на расслоениях Вейля $M^{\mathbb{A}}$ с синектической связностью ∇^{Sh}. Напомним, что векторное поле V на гладком многообразии N размерности d, снабженном линейной связностью $\tilde{\nabla}$ называется аффинным, если $L_V\tilde{\nabla} = 0$, где L_V – символ производной Ли относительно векторного поля V.

В 1950 году И. П. Егоров опубликовал следующий результат: наибольший порядок полных групп движений пространств A_n общей несимметрической связности равняется точно $n^2 - 2n + 6$, где n – размерность пространства [3]. В этой теореме полная группа движений понимается как максимальная группа, не являющаяся собственной подгруппой некоторой группы движений данного пространства, а порядок групп аффинных преобразований – ее размерность. Для доказательства этой теоремы И. П. Егоровым была получена указанная оценка для размерностей алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований (иначе, аффинных векторных полей).

Из теоремы 1 и приведенного результата И. П. Егорова следует

Теорема 3. *Если существует хотя бы одно тензорное поле T^α, входящее в тождество (*), то размерность алгебры Ли аффинных векторных полей расслоения Вейля $M^{\mathbb{A}}$, снабженного связностью ∇^{Sh} не больше, чем $(mn)^2 - 2(mn) + 6$, где n – размерность многообразия M, m – размерность алгебры А. Вейля $\mathbb{A}$.*

Для пространств аффинной связности без кручения И. П. Егоровым получен следующий результат: порядок полных групп пространств аффинной связности, не являющихся проективно-евклидовыми (то есть с отличным от нуля тензорным полем проективной кривизны W Г. Вейля) не превосходит $n^2 - 2n + 5$, где n – размерность пространства [4].

Этот результат И. П. Егорова и теорема 2 позволяют сделать следующее заключение.

Теорема 4. *Размерность алгебры Ли аффинных векторных полей расслоения $\mathbb{A}$ со связностью ∇^{Sh} не больше, чем $(mn)^2 - 2mn + 5$, если хотя бы одно тензорное поле R_α, входящее в тождество (**), отлично от нуля.*

Список литературы

[1] А. Широков "Геометрия касательных расслоений и пространств над алгебрами."Проблемы геометрии (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР, М.), No. 12, 61-95 (1980).

[2] А. Султанов "Продолжения тензорных полей и связностей в расслоение Вейля."Изв. вузов. Математика, No. 19, 64-72 (1999).

[3] И. Егоров "О группах движений пространств общей несимметрической аффинной связности". ДАН СССР, М.: МГУ, 1950, 73, №2. – С.265-267.

[4] И. Егоров "О коллинеациях пространств проективной связности". Труды семинара по векторному и тензорному анализу, 1950. VIII, с. 9-10.

Пензенский государственный университет, ул. Красная, 40, г. Пенза, 440026, Россия

E-mail address: sultanovaya@rambler.ru

САМОПОДОБНЫЕ ЖОРДАНОВЫ ДУГИ НЕ УДОВЛЕТВОРЯЮЩИЕ УСЛОВИЮ WSP

АНДРЕЙ ВИКТОРОВИЧ ТЕТЕНОВ

Исследования свойств фрактальных кривых играют важную роль в развитии фрактальной геометрии, начиная с самого её зарождения. Размерность и мера самоподобной кривой $\gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{m} S_i(\gamma)$, заданной системой сжимающих подобий $\mathcal{S} = \{S_1, ..., S_m\}$, могут быть явно определены, если для системы $\mathcal{S}$ выполняется условие открытого множества (OSC) или его более общий аналог — слабое условие отделимости (WSP). Последнее условие является по существу алгебраическим — оно требует, чтобы для полугруппы подобий $G(\mathcal{S})$, задающей γ, единица Id была изолированной точкой в семействе подобий $G^{-1} \circ G$. Вопрос о нахождении явных геометрических условий, обеспечивающих выполнение условий (WSP) и (OSC), является предметом более чем 30-летних дискуссий, не утихающих и поныне.

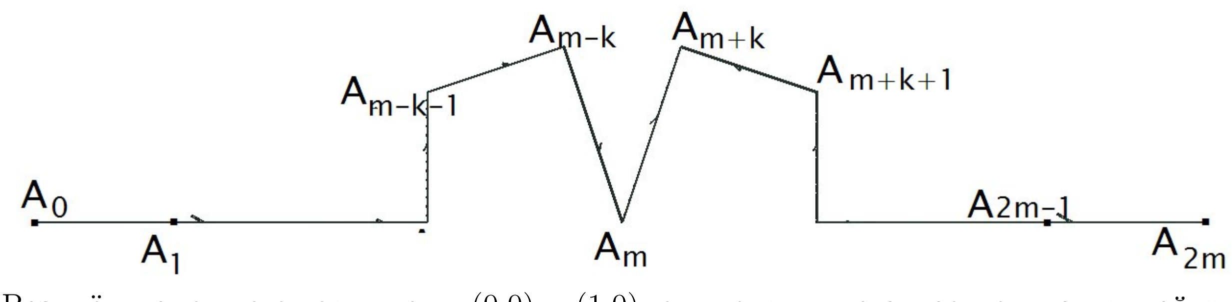
Одним из таких возможных геометрических условий является *свойство конечности пересечений*:
Если $\mathcal{S} = \{S_1, ..., S_m\}$ — система, задающая самоподобное множество K, то для любых различных i, j пересечение копий $S_i(K) \cap S_j(K)$ конечно.

В 2007 году К. Бандтом и Х. Рао [2] было доказано, что если самоподобное множество K на плоскости связно и обладает свойством конечности пересечений, то система $\mathcal{S}$ удовлетворяет условию (OSC).

В случае самоподобных жордановых дуг автором в 2004 г. было получено, что всякая самоподобная жорданова дуга на плоскости удовлетворяет условию (OSC)[3], и что всякая самоподобная жорданова дуга является аттрактором самоподобного мультиціппера, и тем самым, задающая её граф-ориентированная система подобий обладает свойством одноточечного пересечения [4] (2006).

В свете перечисленных причин, вопрос о существовании самоподобных кривых γ в пространстве $\mathbb{R}^n, n \geq 3$ для которых не выполняется условие (WSP), оставался открытым с 2006 года.

В 2009 году автором был предложен пример самоподобной кривой, не удовлетворяющей условию (WSP), однако основная трудность заключалась в том, чтобы доказать существование параметров, при котором такая кривая является жордановой. Этот пример является развитием конструкции В. В. Асеева [1] самоподобной жордановой кривой с неограниченным искривлением.



Возьмём ломаную с вершинами (0,0) и (1,0), симметричную относительно прямой $x = 1/2$, и построим такое ее разбиение на отрезки с вершинами $A_0, ..., A_{2m}$, что:

1) для любого $j, ||A_j - A_{j-1}|| < 1/8$.

Проект поддержан грантом РФФИ 13-01-00513.

2) для любого j, $\left|\dfrac{ln|A_j - A_{j-1}|}{ln(2m)}\right| > 8/9$

3) число $\dfrac{ln|A_1 - A_0|}{ln|A_{2m} - A_{2m-1}|}$ иррационально.

4) Для некоторых $v_1, v_{2m} \in (0,1)$, мультипликативная группа, порожденная комплексными числами $||A_1 - A_0||e^{iv_1}$ и $w_{2m} = ||A_{2m} - A_{2m-1}|| + e^{iv_{2m}}$ плотна в $\mathbb{C}$. Пусть $\mathcal{S}$ – самоподобный циппер с вершинами $A_1, ..., A_{2m}$, в котором углы поворотов отображений S_1, S_{2m} равны v_1, v_{2m} соответственно, а γ - его аттрактор. В силу построения, пересечение $S_j(\gamma) \cap S_{j-1}(\gamma)$ является одноточечным для любого $j = 1, ..., 2m$, за исключением, возможно, случая, когда $j = m+1$. В этом случае для некоторой последовательности чисел l_k, n_k, $S_{2m+1}(\gamma) \cap S_{2m}(\gamma) \setminus \{A_m\} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} S_m S_1^{n_k}(\gamma) \cap S_{m+1} S_{2m}^{l_k}(\gamma)$. На основании теоремы об общем положении для семейств фрактальных кривых, параметры отображений S_{2m}, S_{2m+1} могут быть выбраны так, чтобы каждое из пересечений в правой части было пустым. При этом $(S_m S_1^{n_k})^{-1} S_{m+1} S_{2m}^{l_k} \to \mathrm{Id}$.

Список литературы

[1] В. В. Асеев, А. В. Тетенов, А. С. Кравченко., “О самоподобных жордановых кривых на плоскости”, *Сиб. матем. журнал*, Vol. 44, No. 3, 481–492 (2003).

[2] C. Bandt and H. Rao, “Topology and separation of self-similar fractals in the plane”, *Nonlinearity*, Vol. 20, 1463–1474 (2007).

[3] А. В. Тетенов, “О жордановых самоподобных дугах на плоскости”, *Сибирский журнал индустриальной математики*, Vol. 7, No. 3, 148-155 (2004).

[4] А. В. Тетенов, “О самоподобных жордановых кривых на плоскости”, *Сиб. матем. журнал*, Vol. 47, No. 5, 1147–1153 (2006).

Горно-Алтайский университет, Ленкина, 1, Горно-Алтайск, 649000, Россия
E-mail address: atet@mail.ru

КВАЗИОКРУЖНОСТИ И ОДНОРОДНЫЕ ОБЛАСТИ КАК РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ В $\overline{R}^3$

ДМИТРИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ ТРОЦЕНКО

Юрию Григорьевичу Решетняку, моему учителю.

В [1] Ф. Джон рассматривал области в R^n с условием криволинейного конуса. В своих работах по теории устойчивости отображений с ограниченным искажением (например, [2]) Ю. Г. Решетняк доказал, что $(1+\varepsilon)$-квазиконформное отображение области с условием Джона в R^n при $n \geq 3$ и $\varepsilon \leq \varepsilon_0(n)$ аппроксимируется мебиусовым отображением. О. Мартио и Дж. Сарвас в [3] определили классы однородных областей и, опираясь на работы Решетняка, доказали, что $(1+\varepsilon)$-квазиконформное отображение однородной области инъективно. Автор в [4,5] доказал, что в этих же предположениях $(1+\varepsilon)$-квазиконформное отображение области продолжается до $(1+\varepsilon)$-квазиконформного отображения R^n на себя.

Квазиокружности, то есть образы окружностей — популярнейший объект теории плоских квазиконформных отображений. Хорошо известно, что граница односвязной однородной области в R^2 есть квазиокружность. Также известно, что область в $\overline{R}^2$ допускает квазиконформное отражение тогда и только тогда, когда ее граница есть квазиокружность. В пространстве квазисфера допускает квазиконформное отражение. В обратную сторону это не верно, как следует из [6].

Кривая в R^n, обоими концами уходящая в ∞, удовлетворяет M-условию, если для любой тройки ее точек x, y, z, таких, что y лежит между x и z, выполнено неравенство

$$|x - y| \leq M|x - z|.$$

На плоскости класс кривых с M-условием совпадает с классом неограниченных квазиокружностей.

Квазиокружности и границы однородных областей задаются похожими геометрическими условиями. Автору не известны задачи, где бы эти объекты присутствовали одновременно.

Квазиконформные отображения с коэффициентом, близким к единице, обладают рядом особых свойств. Эти свойства нельзя описать, используя M-условие или обычные определения однородных областей. Они не гарантируют близость кривой к прямой и поверхности к сфере. M-условие при $M = 1$ позволяет кривой иметь углы вплоть до прямого. Аналогично, круг и квадрат на плоскости имеют наименьшие константы однородности.

Нам понадобятся устойчивые определения (См. [7].) Вместо M-условия для кривой потребуем выполнения неравенства $|x - y| + |y - z| \leq M|x - z|$.

Видно, что при M=1 кривая является прямой.

Для определения неограниченной границы C-однородной области потребуем, чтобы для каждой ее точки для любого $r > 0$ нашелся шар $B(y(r), r)$, лежащий в области и такой, что $y(r)$ зависит от r непрерывно и $|x - y(r)| \leq r$.

Для ограниченной квазиокружности и границы однородной области определения усложняются, см. [7].

Теорема. *Множество $N \subset \overline{R}^3$ является множеством неподвижных точек $(1+\varepsilon)$-квазиконформной инволюции $f : \overline{R}^3 \to \overline{R}^3$ при малых $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ тогда и только тогда, когда оно есть одно из 4 типов:*
1) пара точек,
2) $(1+\varepsilon)$-квазиокружность,

3) граница $(1-\varepsilon)$*-однородной области,*

4) все пространство $\overline{R}^3$*.*

Кажется правдоподобным, что результат обобщается на пространства всех размерностей.

Список литературы

[1] F. John, Rotation and Strain, *Comm. Pure Appl. Math*, Vol. 14, 391–413, (1961).
[2] Ю. Г. Решетняк *Теоремы устойчивости в геометрии и анализе*, Новосибирск: Наука, (1982).
[3] O. Martio, J. Sarvas, "Injectivity theorems in plane and space." *Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. Al* , Vol. 4, 383-401 (1978/79).
[4] Д. А. Троценко, "Фрактальные прямые и квазисимметрии." *Сиб. мат. ж.*, Vol. 36, No. 6, 1217-1231, (1995).
[5] Д. А. Троценко. "Фрактальные прямые и квазиконформные отображения."*Сиб. мат. журн.*, Vol. 38, No. 6, 1387-1396, (1997).
[6] P. Tukia, "A quasiconformal group not isomorphic to a Mӧbius group." *Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. Al* , Vol. 6, 149 - 160 (1981).
[7] Д. А. Троценко, "Однородные области, близкие к шару." *Сиб. мат. ж.*, Vol. 52, No. 5, 937 - 950, (2011).

ИМ СО РАН, 630090 Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4
E-mail address: trotsenk@math.nsc.ru, trotsenk@yandex.ru

РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОР-РЕШЕНИЯ В РЯД ПРИ ВАРИАЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ КВАДРАТИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

МАРИНА ИВАНОВНА ТУЛИНА

Пусть F – компактная риманова поверхность рода $g \geq 2$, D – открытый круг на плоскости $\mathbb{C}$. Обозначим через Γ фуксову группу первого рода, униформизирующую F в круге D, т. е. F конформно эквивалентно D/Γ. Пусть $U(z) = (u(z), \upsilon(z), w(z))^T$ – вектор-решение задачи Коши в точке $z_0 \in D$, т.е. с условиями (1):

$$\begin{pmatrix} u(z_0) \\ \upsilon(z_0) \\ w(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u'(z_0) \\ \upsilon'(z_0) \\ w'(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u''(z_0) \\ \upsilon''(z_0) \\ w''(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

для невозмущенного уравнения, т. е. при $\lambda = 0$ и $\mu = 0$.

Обозначим через $V(z) = W^T(z)$, где $W^T(z) = \begin{pmatrix} W_1(z) & 0 & 0 \\ 0 & W_2(z) & 0 \\ 0 & 0 & W_3(z) \end{pmatrix}$, решение сопряженного по Лагранжу невозмущенного уравнения третьего порядка на D/Γ.

Рассмотрим возмущенное векторное уравнение

$$U^{(3)}(z) + (Q_0(z) - \lambda q(z))U^{(1)}(z) + R_0(z)U(z) = 0, \tag{2}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < \varepsilon$, ε – достаточно малое число, и голоморфный квадратичный дифференциал $q(z)dz^2$ не равен нулю на D/Γ.

Обозначим через $U(z, \lambda) = \begin{pmatrix} u(z,\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & \upsilon(z,\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & \omega(z,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(z,\lambda) \\ \upsilon(z,\lambda) \\ \omega(z,\lambda) \end{pmatrix}$ – вектор-решение задачи Коши (1) в точке z_0 с указанными условиями для возмущенного уравнения (2).

Теорема. *Для вектор-решения уравнения* $U^{(3)}(z) + (Q_0(z) - \lambda q(z))U^{(1)}(z) + R_0(z)U(z) = 0$ *с условиями (1) на компактной римановой поверхности* F *рода* $g \geq 2$ *верна точная вариационная формула*

$$U(z, \lambda) = \Big[E + \lambda A_0(z) + \lambda^2 A_1(z) + \ldots + \lambda^n A_{n-1}(z) + \ldots\Big] U(z),$$

где $z \in D, |\lambda| < \varepsilon$ *и*

$A_n(z) = \int_{z_0}^{z} \Big[A(x)D^n(x) + A_0(x)A(x)D^{n-1}(x) + A_1(x)A(x)D^{n-2}(x) + \ldots + A_{n-2}(x)A(x)D(x) + A_{n-1}(x)A(x)\Big] dx,\ A(x) = q(x)U^{(1)}(x)V(x)$,

$D(x) = q(x)U(x)V(x),\ A_0(z) = \displaystyle\int_{z_0}^{z} A(x)dx, E$ – *единичная матрица порядка 3.*

Список литературы

[1] D. A. Hejhal, “Monodromy groups for higher-order differentials equation. ”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 81, No. 3, 590–592 (1975).

[2] В. В. Чуешев, "Точная вариационная формула для группы монодромии на компактной римановой поверхности."*Математические труды Института математики им. С.Л. Соболева, СО РАН*, Т. 7, No. 2, 126–158 (2004).

Горно-Алтайский государственный университет
E-mail address: aniram.ru@googlemail.com

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-31109 мол-а).

КРИТЕРИИ ОГРАНИЧЕННОСТИ ОПЕРАТОРОВ ХАРДИ–СТЕКЛОВА В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА НА ПОЛУОСИ, ВЫРАЖЕННЫЕ В ТЕРМИНАХ ПРЯМОГО И ДВОЙСТВЕННОГО ФАРВАТЕРОВ

ЕЛЕНА ПАВЛОВНА УШАКОВА

Пусть заданы числовые параметры $p > 1$ и $q > 0$, а также две неотрицательные весовые функции v и w на $(0, \infty)$. В работе рассматриваются интегральные операторы с двумя переменными пределами интегрирования (операторы Харди–Стеклова) вида

$$\mathcal{H}f(x) = w(x) \int_{a(x)}^{b(x)} f(y)v(y)\,\mathrm{d}y, \tag{1}$$

действующие в пространствах Лебега $L^p := \Big\{ f\colon \|f\|_p := \Big(\int_0^\infty |f(t)|^p \,\mathrm{d}t \Big)^{1/p} < \infty \Big\}$. Предполагается, что заданные функции $a, b \in C^1(0, \infty)$ в определении оператора $\mathcal{H}$ строго возрастают и таковы, что $a(0) = b(0) = 0$, $a(x) < b(x)$ для $x > 0$ и $a(\infty) = b(\infty) = \infty$.

Изучение операторов Харди–Стеклова берет начало в работах [1, 3, 4], где были получены первые критерии ограниченности для (1). Следующий этап в изучении операторов данного вида связан с попыткой придать их характеристикам ограниченности более удобную форму. С этой целью в [2] было введено понятие фарватера — строго возрастающей функции $\sigma(x)$ на $(0, \infty)$, балансирующей между $a(x)$ и $b(x)$, и удовлетворяющей уравнению

$$\int_{a(x)}^{\sigma(x)} [v(y)]^{p/(p-1)} \,\mathrm{d}y = \int_{\sigma(x)}^{b(x)} [v(y)]^{p/(p-1)} \,\mathrm{d}y \qquad \text{для всех } x > 0. \tag{2}$$

С помощью фарватера σ авторам работы [2] удалось получить несколько типов критериев ограниченности $\mathcal{H}$ из L^p в L^q для различных $p > 1$ и $q > 0$. Также, в терминах σ, были найдены критерии компактности $\mathcal{H} : L^p \to L^q$ и некоторые другие характеристики [5, 7].

Двойственная форма критериев ограниченности для оператора $\mathcal{H}$ была впервые сформулирована в [6] и опиралась на понятие фарватера, двойственного к $\sigma(x)$.

Определение. Для заданных граничных функций a, b и локально интегрируемой на $(0, \infty)$ весовой функции $w(x)$ такой, что $0 < w^q(x) < \infty$ для п.в. $x \in (0, \infty)$, определим *двойственный фарватер* $\rho(y)$ таким образом, что $b^{-1}(y) < \rho(y) < a^{-1}(y)$ на $(0, \infty)$ и

$$\int_{b^{-1}(y)}^{\rho(y)} [w(x)]^q \,\mathrm{d}x = \int_{\rho(y)}^{a^{-1}(y)} [w(x)]^q \,\mathrm{d}x \qquad \text{для всех } y > 0. \tag{3}$$

Здесь $a^{-1}(y)$ и $b^{-1}(y)$ обозначают функции, обратные к $a(x)$ и $b(x)$, соответственно.

Аналогично $\sigma(x)$, функция $\rho(y)$ также дифференцируема и строго возрастает на $(0, \infty)$.

"Двойственный" критерий ограниченности $\mathcal{H}$ из L^p в L^q, сформулированный в [6], напрямую следовал из результатов работы [2], однако, мог применяться только для $p, q > 1$.

В настоящей работе доказано, что двойственная форма критериев ограниченности оператора Харди–Стеклова $\mathcal{H}$ из L^p в L^q, выраженная с помощью $\rho(y)$, имеет место и для $p > 1$, $0 < q < 1$ (см. (7) и (11), (12)). Также показано, что такая форма критерия может быть получена и в терминах первоначального фарватера $\sigma(x)$ для всех $p > 1$, $q > 0$ (см. (5) и (9)). В качестве дополнения установлено, что критерии ограниченности в их первоначальной форме (недвойственной) могут быть сформулированы как в терминах $\sigma(x)$ (см. (4) и (8)), так и с помощью $\rho(y)$ (см. (6) и (10)) для $p > 1$ и $q > 0$.

Теорема. *Пусть $p > 1$ и $q > 0$. Предположим, что $\sigma(x)$ — фарватер–функция на $(0, \infty)$, удовлетворяющая условию (2), и $\rho(y)$ — двойственный фарватер на $(0, \infty)$ такой, что* *выполнено* (3). *Тогда для нормы* $\|\mathcal{H}\|_{L^p\to L^q}$ *оператора* $\mathcal{H}$ *верны следующие утверждения. Если* $1<p\le q<\infty$, *то* $\|\mathcal{H}\|_{L^p_v\to L^q_w}\approx\mathcal{A}_\sigma\approx(\mathcal{A}_{\sigma^{-1}})^*\approx\mathcal{A}_{\rho^{-1}}\approx(\mathcal{A}_\rho)^*$, *где*

$$\mathcal{A}_\sigma=\sup_{t>0}\left(\int_{b^{-1}(\sigma(t))}^{a^{-1}(\sigma(t))}[w(x)]^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{a(t)}^{b(t)}[v(y)]^{p/(p-1)}\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{p-1}{p}}, \tag{4}$$

$$(\mathcal{A}_{\sigma^{-1}})^*=\sup_{t>0}\left(\int_{b^{-1}(t)}^{a^{-1}(t)}[w(x)]^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{a(\sigma^{-1}(t))}^{b(\sigma^{-1}(t))}[v(y)]^{p/(p-1)}\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{p-1}{p}}, \tag{5}$$

$$\mathcal{A}_{\rho^{-1}}=\sup_{t>0}\left(\int_{b^{-1}(\rho^{-1}(t))}^{a^{-1}(\rho^{-1}(t))}[w(x)]^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{a(t)}^{b(t)}[v(y)]^{p/(p-1)}\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{p-1}{p}}, \tag{6}$$

$$(\mathcal{A}_\rho)^*=\sup_{t>0}\left(\int_{b^{-1}(t)}^{a^{-1}(t)}[w(x)]^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{a(\rho(t))}^{b(\rho(t))}[v(y)]^{p/(p-1)}\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{p-1}{p}}. \tag{7}$$

Если $0<q<p<\infty$ *и* $p>1$, *то* $\|\mathcal{H}\|_{L^p_v\to L^q_w}\approx\mathcal{B}_\sigma\approx(\mathcal{B}_{\sigma^{-1}})^*\approx\mathcal{B}_{\rho^{-1}}\approx(\mathcal{B}^-_\rho)^*+(\mathcal{B}^+_\rho)^*$, *где*

$$\mathcal{B}_\sigma=\left(\int_0^\infty\left[\int_{b^{-1}(\sigma(t))}^{a^{-1}(\sigma(t))}[w(x)]^q\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{q}{p-q}}\left[\int_{a(t)}^{b(t)}[v(y)]^{p/(p-1)}\,\mathrm{d}y\right]^{\frac{q(p-1)}{p-q}}[w(t)]^q\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{p-q}{pq}}, \tag{8}$$

$$(\mathcal{B}_{\sigma^{-1}})^*=\left(\int_0^\infty\left[\int_{b^{-1}(t)}^{a^{-1}(t)}[w(x)]^q\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{p}{p-q}}\left[\int_{a(\sigma^{-1}(t))}^{b(\sigma^{-1}(t))}[v(y)]^{p/(p-1)}\,\mathrm{d}y\right]^{\frac{p(q-1)}{p-q}}[v(t)]^{p/(p-1)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{r}}, \tag{9}$$

$$\mathcal{B}_{\rho^{-1}}=\left(\int_0^\infty\left[\int_{b^{-1}(\rho^{-1}(t))}^{a^{-1}(\rho^{-1}(t))}[w(x)]^q\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{q}{p-q}}\left[\int_{a(t)}^{b(t)}[v(y)]^{p/(p-1)}\,\mathrm{d}y\right]^{\frac{q(p-1)}{p-q}}[w(t)]^q\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{p-q}{pq}}, \tag{10}$$

$$(\mathcal{B}^-_\rho)^*=\left(\int_0^\infty\left[\int_{b^{-1}(t)}^{\rho(t)}[w(x)]^q\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{p}{p-q}}\left[\int_{a(\rho(t))}^{t}[v(y)]^{p/(p-1)}\,\mathrm{d}y\right]^{\frac{p(q-1)}{p-q}}[v(t)]^{p/(p-1)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{p-q}{pq}}, \tag{11}$$

$$(\mathcal{B}^+_\rho)^*=\left(\int_0^\infty\left[\int_{\rho(t)}^{a^{-1}(t)}[w(x)]^q\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{p}{p-q}}\left[\int_{t}^{b(\rho(t))}[v(y)]^{p/(p-1)}\,\mathrm{d}y\right]^{\frac{p(q-1)}{p-q}}[v(t)]^{p/(p-1)}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{p-q}{pq}}. \tag{12}$$

Результаты данной работы позволяют выбирать из нескольких характеристик $\mathcal{A}_\sigma$, $(\mathcal{A}_{\sigma^{-1}})^*$, $\mathcal{A}_{\rho^{-1}}$, $(\mathcal{A}_\rho)^*$ (или $\mathcal{B}_\sigma$, $(\mathcal{B}_{\sigma^{-1}})^*$, $\mathcal{B}_{\rho^{-1}}$, $(\mathcal{B}^-_\rho)^*+(\mathcal{B}^+_\rho)^*$) в зависимости от того, какая из двух пар — $(v,p/(p-1))$ или (w,q) — более удобна для нахождения фарватера (см. (2) и (3)).

Список литературы

[1] Э. Н. Батуев, В. Д. Степанов, "О весовых неравенствах типа Харди", *Сиб. матем. журнал*, Т. 30, 13–22 (1989).

[2] В. Д. Степанов, Е. П. Ушакова, "Об интегральных операторах с переменными пределами интегрирования", *Труды Матем. ин–та им. В.А. Стеклова*, Т. 232, 298–317 (2001).

[3] H. P. Heinig, G. Sinnamon, "Mapping properties of integral averaging operators", *Studia Math.*, Vol. 129, 157–177 (1998).

[4] A. Gogatishvili, J. Lang, "The generalized Hardy operators with kernel and variable integral limits in Banach function spaces", *J. Inequal. Appl.*, Vol. 4, 1–16 (1999).

[5] V. D. Stepanov, E. P. Ushakova, "Kernel operators with variable intervals of integration in Lebesgue spaces and applications", *Math. Inequal. Appl.*, Vol. 13, No. 3, 449–510 (2010).

[6] V. D. Stepanov, E. P. Ushakova, "On boundedness of a certain class of Hardy–Steklov type operators in Lebesgue spaces", *Banach J. Math. Anal.*, Vol. 4, No. 1, 28–52 (2010).

[7] E. P. Ushakova, "Estimates for Schatten–von Neumann norms of Hardy–Steklov operators", *L. Approx. Theory*, Vol. 173, 158–176 (2013).

Вычислительный центр ДВО РАН, ул. Ким Ю Чена, 65, г. Хабаровск, 680000, Россия
E-mail address: `elenau@inbox.ru`

АБСОЛЮТНЫЕ ОКРЕСТНОСТНЫЕ ω-РЕТРАКТЫ И НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ

ПАВЕЛ ВАСИЛЬЕВИЧ ЧЕРНИКОВ

Замкнутое подмножество A бикомпакта X называется окрестностным ω-ретрактом X, если для всякого открытого покрытия α множества A существует окрестность V_α множества A в X и такое непрерывное отображение $r_\alpha : V_\alpha \to A$, что отображения $r_\alpha|A$ и id_A α-близки.

Бикомпакт Y называется абсолютным окрестностным ω-ретрактом, если всякое замкнутое подмножество A любого бикомпакта X, гомеоморфное Y, является окрестностным ω-ретрактом X.

Теорема. *Если бикомпакт X является абсолютным окрестностным ω-ретрактом, то каждое нуль-гомотопное отображение $f : X \to X$ имеет неподвижную точку.*

Ранее эта теорема была доказана для конечномерных метризуемых абсолютных окрестностных ω-ретрактов X (см. [1]).

Список литературы

[1] H. A. Noguchi, “A generalization of absolute neighborhood retracts”, *Ködai Math. Sem. Rep.*, Vol. 5, No. 1. P. 20—22 (1953).

Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, д. 2, г. Новосибирск, 630090, Россия

ПОСТРОЕНИЕ ОДНОСТОРОННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

МИРА АРТЕМОВНА ЧЕШКОВА

Впервые уравнение неориентируемой поверхности, открытой Мебиусом, было получено Машке [1]. Если гауссова кривизна листа Мебиуса равна нулю, то он называется плоским. Библиография работ на эту тему дана в работе [2]. В работах [3,4] исследуются бутылка Клейна и плоский лист Мебиуса.

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим гладкую замкнутую неплоскую кривую γ без самопересечения, заданную 4π-периодической вектор-функцией $\rho = \rho(v)$, которая не является 2π-периодической и 2π-антипериодической.

Тогда функция

$$s(v) = \frac{1}{2}(\rho(v) + \rho(v + 2\pi))), \tag{1}$$

есть 2π-периодическая не равная нулю, а вектор-функция

$$l(v) = \frac{1}{2}(\rho(v) - \rho(v + 2\pi))) \tag{2}$$

есть 2π-антипериодическая не равная нулю.

Пусть вдоль замкнутой кривой на поверхности обносится нормальный вектор. Если при возвращении в исходную точку направление нормали совпадает с исходным, независимо от выбора кривой, то поверхность называется двусторонней. В противном случае имеем одностороннюю поверхность.

Рассмотрим линейчатую поверхность

$$r(u, v) = s(v) + ul(v), u = -1..1, v = 0..2\pi. \tag{3}$$

Если при этом кривая $s = s(v)$ не вырожденная, а вектор $l(v)$ не параллелен постоянному, то когда точка кривой $s = s(v)$ завершит полный оборот, то прямая $L = (s(v), l(v))$ сменит направление на противоположное.

Вектор-функция $r(u, v) = s(v)+ul(v)$, определяет лист Мебиуса, для которого $s = s(v)$ — средняя линия, а $\rho = \rho(v) = r(1, v)$ — край.

Рассмотрим вектор нормали $n = [r_v, r_u] = [s'(v), l(v)]$ вдоль линии $s = s(v)$. Вектор $n = n(v)$ сменит направление на противоположное, когда точка кривой $s = s(v)$ завершит полный оборот. Поверхность M есть односторонняя.

Определим поверхность K уравнением

$$r(u, v) = s(v) + sin(u)l(v) + sin(mu)(l(v + \pi) + f(v)e), u = -\pi, .., \pi, v = 0, .., 2\pi, \tag{4}$$

где $f = f(v)$ — 2π - антипериодическая функция а вектор e есть постоянный.

Вектор $f(v)e$ удобно выбрать так, чтобы векторы $l(v), l(v+\pi)+f(v)e$ были ортогональны.

Если m — четное число, то кривая $v = const$ есть кривая типа восьмерки с m секциями и поверхность замкнутая, если m — нечетное число, то кривая $v = const$ есть незамкнутая кривая, а поверхность K есть поверхность с краем. При $m = 1$ это отрезок прямой и поверхность K есть классический лист Мебиуса.

Аналогично проверяется, что поверхность K есть односторонняя поверхность.

Поверхность K при четном m является моделью бутылки Клейна, при нечетном m имеем криволинейный лист Мебиусая.

Рассмотрим еще одну замкнутую поверхность P

$$r(u, v) = s(v) + cos(u)l(v) + sin(u)s(v), u = 0, .., 2\pi, v = 0, .., 2\pi. \tag{5}$$

Поверхность P также односторонняя. Поверхность P есть скрещенный колпак. Она является моделью проективной плоскости.

Будем исследовать эти поверхности, когда кривая $\rho = \rho(v)$ расположена на торе (обмотка тора).

Рассмотрим тор $r(u, v) = ((2 + cos(u))cos(v), (2 + cos(u))sin(v), sin(u))$. Зададим линию $u = kv/2$, где k нечетное число.

Имеем

(6) $$s(v) = (acos(v), asin(v), 0), l(v) = (bcos(kv/2)cos(v), bcos(kv/2)sin(v), bsin(kv/2)).$$

Положим $a = 2, b = 1, k = 1, m = 2, m = 3, f = -2cos(v/2), e = (0, 0, 1)$ и построим поверхности (3) - (5), используя математический пакет (рис.1,рис.2).

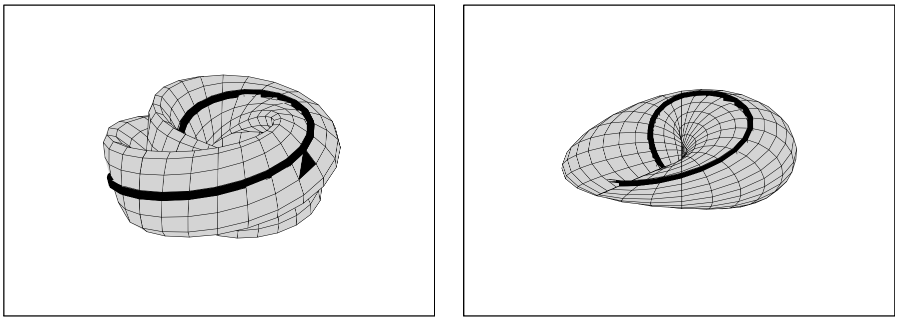


Рис. 1. Бутылка Клейна и скрещенный колпак, a=2, b=1, u=v/2

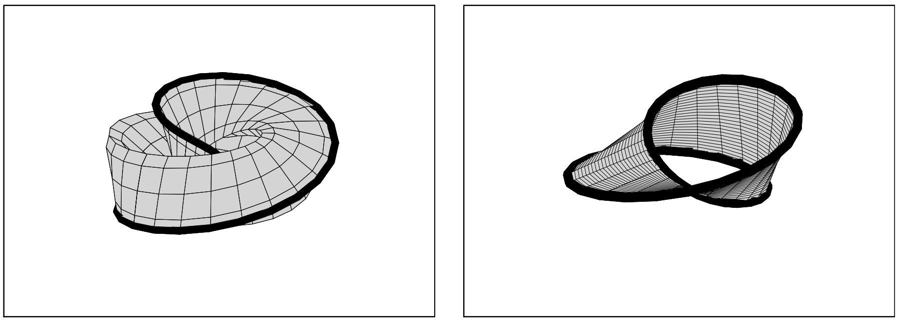


Рис. 2. Криволинейный лист Мебиуса, a=2, b=1, u=v/2, m=3 и классический лист Мебиуса

Список литературы

[1] H. Mashke, “Note on the unilateral surface of Moebius”, *Trans.Amer.Math.Sos.*, Vol. 1, No. 1, 12–21 (1900).

[2] И. Х. Сабитов, “Изометрические погружения и вложения плоского листа Мебиуса в евклидовы пространства”, *Известия РАН*, Т. 71, No. 5, 197–224 (2007).

[3] М. А. Чешкова, “О плоском листе Мебиуса”, *Известия Алтайского университета, Барнаул*, Т. 77, No. 1/1, 52–57 (2013).

[4] М. А. Чешкова, “О бутылке Клейна”, *Известия Алтайского университета, Барнаул*, Т. 73, No. 1/1, 130–133 (2012).

Алтайский государственный университет, пр. Ленина, 61, Барнаул, 656049, Россия

E-mail address: cma@math.asu.ru, cma41@yandex.ru

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

НАДЕЖДА АЛЕКСАНДРОВНА ЧУЕШЕВА

Нелинейные уравнения в частных производных третьего порядка важны для описания физических процессов. Например, уравнение Кортевега-де Фриза, полученное Жозефом Буссинеском в 1877 году, подробный анализ которого проведен Дидериком Кортевегом и Густавом де Фризом в 1895 году, до сих пор очень актуально. Этому уравнению посвящена книга [1]. Стационарные и не стационарные нелинейные уравнения третьего порядка рассматривались в работе [2].

Задача 1 [2]. Пусть D — ограниченная односвязная область в $\mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей γ, цилиндрическая область $\Omega = (O, X) \times D$ с границей γ_1, цилиндрическая область $Q = \Omega \times (O, T)$ с боковой границей $\Gamma = \gamma_1 \times (0, T)$.

В области Q рассмотрим нестационарное по переменной t уравнение

$$P_1 u \equiv u_t - u_{xxx} - L_1 u + |u|^\rho u = f(x, y, t), \tag{1}$$

где $L_1 u \equiv u_{xx}(x, y) + \sum\limits_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(y) u_{y_j}(x, y))_{y_i} - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x, y) u_{y_i}(x, y) - c(x, y) u_x(x, y) - d(x, y, t) u(x, y)$, $y = (y_1, ..., y_n)$, $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j \geq m|\xi|^2,\ m > 0,\ \xi \in \mathbb{R}^n$.

Предполагаем, что коэффициенты оператора L_1 принадлежат пространству $\mathbb{C}^3(\overline{Q})$.

Краевая задача. Найти решение уравнения (1) в области Q, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_\Gamma = u_x|_{x=0} = u|_{t=0} = 0. \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. $\rho \in [1, \frac{8}{3m-4}]$, $\quad m = n + 2 = 3, 4$;

2. Правая часть уравнения (1) $f(x, y, t) \in L_2(Q)$ *и такая, что*

$$f_t(x, y, t), \quad f_{tt}(x, y, t) \in L_2(Q), \quad f(x, y, t)|_{t=0} = f_t(x, y, t)|_{t=0} = 0.$$

Тогда существует и притом единственное решение краевой задачи (2) для уравнения (1), принадлежащее пространству $H_{(3,2)}(Q)$.

Здесь пространство $H_{(3,2)}(Q)$ является замыканием класса функций из пространства $\mathbb{C}^\infty(\overline{Q})$, которые удовлетворяют краевым условиям (2). Квадрат нормы в этом пространстве задаётся равенством

$$\|u\|^2_{H_{(3,2)}(Q)} = \int\limits_Q (u^2_{xxx} + u^2_{xtt} + \sum_{i=1}^{n} u^2_{y_i tt} + \sum_{i,j=1}^{n} u^2_{y_i y_j} + u^2_{tt} + \sum_{i=1}^{n} u^2_{x y_i}) dQ.$$

Теорема доказывается методом "ϵ" - регуляризации, методом продолжения по параметру с применением разностного отношения в направлении оси t и метода Галеркина.

Задача 2. Уравнение Кортевега-де Фриза является нелинейным уравнением 3 порядка

$$P_2 u \equiv u_t + u_{xxx} + 6u \cdot u_x = 0. \tag{3}$$

Для этого уравнения найдено большое количество точных решений. В этих тезисах предложим еще одно точное решение:

$$u(x, t) = \frac{1}{6} \cdot \frac{8 \cdot b^3 - c}{b} - 2 \cdot b^2 \cdot \tanh^2 (a + bx + ct). \tag{4}$$

В полупространстве из $\mathbb{R}^2$, границей которого является прямая

$\gamma_2 = \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^2 :\ a + bx + 8b^3 t = 0 \right\}$ для фиксированных чисел $a, b \in \mathbb{R}$ при $\quad b \neq 0$,

решение (4) для уравнения (3) удовлетворяет следующим условиям:

1) на этой прямой γ_2 для производных выполняются следующие равенства

$$u_t = u_{xxx} = u = u_x = 0,$$

то есть каждое слагаемое в уравнении (3) на прямой γ_2 тождественно равно нулю.

2) производная второго порядка решения (4) (не входит в уравнение (3)) на прямой γ_2

$$u_{xx} = 4 \cdot b^4 > 0, \quad \text{при} \qquad b \neq 0.$$

Задача 3. При наличии диссипации уравнение Кортевега-де Фриза переходит в уравнение Бюргерса-Кортевега-де Фриза, имеющее вид

$$P_3 u \equiv u_t + u_{xxx} + 6u \cdot u_x - a u_{xx} = 0. \tag{5}$$

В этих тезисах предложим следующее точное решение **(6)** этого уравнения:

$$u(x,t) = \frac{1}{150} \cdot \frac{3a^3 - 250c_3}{a} - \frac{1}{25} \cdot a^2 \cdot \tanh\left(c_1 + \frac{1}{10}ax + c_3 t\right) - \frac{1}{50} \cdot a^2 \cdot \tanh^2\left(c_1 + \frac{1}{10}ax + c_3 t\right).$$

Рассмотрим полупространство из $\mathbb{R}^2$, границей которого является прямая

$\gamma_3 = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : \ 250c_1 + 25ax + 3a^3 t = 0\right\}$ для фиксированных чисел $a, c_1 \in \mathbb{R}$ при $a \neq 0$.

Решение (6) уравнения (5) на прямой γ_3 будет удовлетворять следующим равенствам:

$$u = 0, \quad u_x = -\frac{a^3}{250}, \quad u_{xx} = -\frac{a^4}{2500}, \quad u_{xxx} = \frac{2a^5}{25000}, \quad u_t = -\frac{3a^5}{25 \cdot 250}.$$

Задача 4. В двумерной геометрии обобщением уравнения Кортевега-де Фриза является уравнение Кадомцева-Петвиашвили:

$$P_4 u \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(u_t + u_{xxx} + 6u \cdot u_x\right) - a \cdot u_{yy} = 0, \quad a = \pm 1. \tag{7}$$

В этих тезисах предложим точное решение этого уравнения:

$$u(x,t,y) = \frac{1}{6} \cdot \frac{-c_3 c_2 + a c_4^2 + 8c_2^4}{c_2^2} - 2 \cdot c_2^2 \cdot \tanh^2\left(c_1 + c_2 x + c_3 t + c_4 y\right). \tag{8}$$

В полупространстве из $\mathbb{R}^3$, границей которого является плоскость

$$\gamma_4 = \left\{(x,t,y) \in \mathbb{R}^3 : c_1 c_2 + c_2^2 x + \left(a c_4^2 + 8c_2^4\right) t + c_4 c_2 y = 0\right\}, \quad c_1, c_2, c_4 \in \mathbb{R}, \quad c_2 \neq 0,$$

решение (8) уравнения (7) удовлетворяет следующим условиям:

1) на этой плоскости γ_4 для производных решения (8) уравнения (7) выполняются следующие равенства

$$u = u_x = u_{xxx} = u_t = u_y = 0;$$

2) заметим, что не каждое слагаемое в уравнении (7)

$$u_{xx} = -4 \cdot c_2^4, \quad u_{xxxx} = 32 \cdot c_2^6, \quad u_{xt} = -4 \cdot c_2^2 \cdot \left(a c_4^2 + 8c_2^4\right), \quad u_{yy} = -4 \cdot c_2^2 \cdot c_4^2,$$

на плоскости γ_4 равно нулю.

Список литературы

[1] Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков *Интегрируемые системы. I. — Динамические системы — 4*, Итоги науки и техн.(Совр. пробл. математики. Фундаментальные направления), М.: ВИНИТИ, Т. 4, 179–284. (1985).

[2] Н. А. Чуешева, “Краевые задачи для некоторых уравнений третьего порядка”, *Вестник Кемеровского Государствен-ного университета, серия математика*, No. 3 (7), 193–199 (2001).

Кемеровский государственный университет, ул. Красная, 6, Кемерово, 650043, Россия
E-mail address: chuesheva@ngs.ru

ИСКАЖЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ИЗОПЕРИМЕТРИЧНОСТИ СИМПЛЕКСА ПРИ ГОМЕОМОРФИЗМЕ

ДИАНА ВАСИЛЬЕВНА ШУРКАЕВА

В задачах построения расчетных сеток при помощи различных классов отображений возникает необходимость следить за «качеством» полученной сетки, при этом в качестве параметра, характеризующего «качество» сетки, можно использовать максимальное из значений коэффициентов изопериметричности симплексов полученного разбиения.

Пусть $P_0, P_1, ..., P_n \in \mathbb{R}^n$ такой набор точек, что векторы $P_1 - P_0, ..., P_n - P_0$ линейно независимы. Симплексом Δ с вершинами в этих точках мы назовем выпуклую оболочку множества $\{P_0, ..., P_n\}$.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – подмножество пространства $\mathbb{R}^n$. Множество D называется дискретным, если оно замкнуто и все его точки изолированы. Из теоремы Больцано-Вейерштрасса следует, что такое множество локально конечно. Пусть $\varepsilon > 0$. Дискретной ε-сетью D в $\mathbb{R}^n$ назовем дискретное множество, являющееся ε-сетью. Последнее означает, что для всякой точки $x \in \mathbb{R}^n$ найдется точка $a \in D$, такая, что $|x - a| < \varepsilon$. В силу локальной конечности дискретной ε-сети можно рассмотреть ее триангуляцию T. Триангуляция T представляет собой набор симплексов $\{\Delta_k\} k = 1, 2, ...$, которые имеют вершинами точки из D, попарно непересекаются по внутренним точкам и объединение которых дает все пространство $\mathbb{R}^n$.

Часто при построении расчетных сеток используют метод отображений некоторой модельной сетки на расчетную область. При этом возникает задача контроля искажения ячеек сетки во избежание получения вырожденных ячеек сетки в расчетной области. В работе [1] приводятся условия на гомеоморфные отображения, при выполнении которых, исходная триангуляция также переходит в триангуляцию, т.е. не происходит вырождения ячеек сетки или, другими словами, сохраняется триангуляция.

Коэффициентом изопериметричности $n-$мерного симплекса Δ будем называть

$$\sigma(\Delta) = \frac{|\partial\Delta|^{\frac{n}{n-1}}}{|\Delta|}.$$

Величина $\sigma(\Delta)$ характеризует отклонение произвольного симплекса Δ от правильного, поскольку минимальное значение достигается на правильном симплексе.

Обобщив результат, изложенный в [2], получим, что для коэффициента изопериметричности $n-$мерного симплекса, полученного при гомеоморфном отображении, справедлива

Теорема. *Пусть заданы*
1) область $D \subset \mathbb{R}^n$ и симплекс $\Delta P_0 P_1 ... P_n \subset D$,
2) отображение $f : D \to D' \quad (D' \subset \mathbb{R}^n)$, являющееся гомеоморфным и дифференцирумым почти всюду,
3) x_0 – некоторая внутренняя точка симплекса Δ, в которой отображение f дифференцируемо.
Тогда отношение коэффициентов изопериметричности образа и прообраза оценивается

$$\frac{\sqrt{\lambda}^n}{J_f(x_0)} \cdot \frac{\left(1 - \dfrac{\sum_{j=0}^n \Phi_{n-1}^j}{\sqrt{\lambda}^{n-1}|\partial\Delta|}\right)^{\dfrac{n-1}{n}}}{1 + \dfrac{\Phi_n}{J_f(x_0)V}} \leqslant \frac{\sigma'}{\sigma} \leqslant \frac{\sqrt{\Lambda}^n}{J_f(x_0)} \cdot \frac{\left(1 + \dfrac{\sum_{j=0}^n \Phi_{n-1}^j}{\sqrt{\Lambda}^{n-1}|\partial\Delta|}\right)^{\dfrac{n-1}{n}}}{1 - \dfrac{\Phi_n}{J_f(x_0)V}},$$

где через $J_f(x_0)$ *обозначен якобиан отображения* f *в точке* x_0,
V *– объем симплекса* $\Delta P_0 P_1 ... P_n$,

$$\Phi_n = \Phi_n(x_0, f, \Delta) = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{\Lambda}^{n-k}\beta^k \Psi_n^k\right),$$

$$\Psi_n^k = \Psi_n^k(x_0, \Delta) = \sum_{1\leqslant i_1<...<i_k\leqslant n}\left(d_{i_1 0}...d_{i_k 0}\prod_{t=\overline{1,n}\setminus\{i_1,...,i_k\}}|P_t - P_0|\right), k=\overline{1,n},$$

$$\Phi_{n-1}^j = \Phi_{n-1}^j(x_0, f, \Delta) = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=1}^{n-2}\left(\sqrt{\Lambda}^{n-k-1}\beta^k \Psi_{n-1}^{j,k}\right), \quad j=\overline{0,n},$$

$$\Psi_{n-1}^{0,k} = \Psi_{n-1}^{0,k}(x_0, \Delta) = \sum_{1\leqslant i_1<...<i_k\leqslant n-1}\left(d_{i_1 1}...d_{i_k 1}\prod_{t=\overline{1,n-1}\setminus\{i_1,...,i_k\}}|P_t - P_1|\right), k=\overline{1,n},$$

$$\Psi_{n-1}^{j,k} = \Psi_{n-1}^{j,k}(x_0, \Delta) = \sum_{i_1<...<i_k\in\{1,...,n\}\setminus\{j\}}\left(d_{i_1 0}...d_{i_k 0}\prod_{t=\overline{1,n}\setminus\{j,i_1,...,i_k\}}|P_t - P_0|\right), \quad j,k=\overline{1,n},$$

λ, Λ *– наименьшее и наибольшее собственные числа оператора* $(d_{x_0}f)^T(d_{x_0}f)$ *соответственно,*

$$d_{ij} = |P_i - x_0| + |P_j - x_0|, \quad 0\leqslant i<j\leqslant n,$$

$$\beta = \beta(x_0, f, \Delta) = \max_{k=\overline{0,n}}\frac{|H(x_0, P_k)|}{|P_k - x_0|},$$

в котором,

$$H(x_0, x) = f(x) - f(x_0) - d_{x_0}f(x - x_0).$$

Список литературы

[1] В. А. Клячин, "О гомеоморфизмах, сохраняющих триангуляцию", *Записки семинара «Сверхмедленные процессы»*, No 4, 169-182 (2009).

[2] Д. В. Шуркаева, "Искажение коэффициента изопериметричности треугольника при гомеоморфизме", *Геометрический анализ и его приложения: материалы II междунар. конф.*, (2014).

Волгоградский государственный университет, проспект Университетский, 100, Волгоград, 400062, Россия

E-mail address: diana-547@yandex.ru

KHOVANOV HOMOLOGY OF KNOTS IN A THICKENED TORUS

ALENA ANDREEVNA AKIMOVA

In 2000 M. Khovanov described construction of a special graded chain complex associated with a given diagram of a knot in the 3-sphere, see [1]. The construction is similar to the construction of the Kauffman polynomial. Let us consider all possible states of a given diagram, that is, all arrangements of markers A, B and corresponding smoothings of crossings, and properly organize the information on the circles thus obtained in terms of a graded chain complex. Khovanov proved that the Euler characteristic of the graded homologies of this chain complex is equal to the Kauffman polynomial.

We consider a natural generalization of this construction in the case of knots in a thickened torus $T \times I$. The so-called generalized Kauffman polynomial was constructed in [2] and turned to be useful for tabulation and a recognition of knots. It is slightly different from the original Kauffman polynomial. Namely, it depends on two variables instead of one. The second variable is used for taking into account nontrivial circles in T, which appear after smoothing. We show that the Khovanov construction (with some modifications) works for knots in $T \times I$ and that the Euler characteristic of the graded homologies of this chain complex equals to the generalized Kauffman polynomial also in this case.

References

[1] M. Khovanov, "A categorification of the Jones polynomial", *Duke Mathematical Journal*, Vol. 101, 359426 (2000).

[2] A. A. Akimova, S. V. Matveev, "Classification of knots in $T \times I$ with at most 4 crossings", *Vestnik NSU* Vol. 12, N. 3, 10-21 (2012).

South Ural State University, Lenina Street, 76, Chelyabinsk, 454080, Russia

Laboratory of Quantum Topology, Chelyabinsk State University, Bratev Kashirinykh street, 129, Chelyabinsk 454001, Russia

E-mail address: akimova_susu@mail.ru

The author is partially supported by Laboratory of Quantum Topology of Chelyabinsk State University (Russian Federation government grant 14.Z50.31.0020) and the leading scientific schools grant 1015.2014.1.

A MODEL OF ONE BIOLOGICAL 2-CELLS COMPLEX

[1]ANDREY ALEXANDROVICH AKINSHIN, [2]TAT'YANA ANATOL'EVNA BUKHARINA,
[2,3]DAGMARA PAVLOVNA FURMAN, [1,3]VLADIMIR PETROVICH GOLUBYATNIKOV

Smale has formulated conditions of existence of cycles in phase portrait of one 4-dimensional dynamical system considered as a (very hypothetical) model of interaction of two biological cells. In this model for each of these cells considered separately, there is only one stable equilibrium point and no cycles at all, see [1]. It was indicated there that this dynamical system has no connections with any biological experiment.

We study phase portrait of a 6-dimensional nonlinear dynamical system considered as a model of an early stage of morphogenesis of *D. melanogaster*, i.e., appearance of its parental cell in the proneural cluster. Sufficient conditions of existence of an unstable cycle in the phase portrait of this system are described. So, we construct here a model of interaction of two cells K_1 and K_2, on an initial stage of development of *D.melanogaster* mechanoreceptors. This model is represented by 6-dimensional chemical kinetics non-linear dynamical system.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(z_1) - x_1; & \dfrac{dy_1}{dt} = \sigma_1(x_1) - y_1; \quad \dfrac{dz_1}{dt} = \sigma_{2,1}(y_2) - z_1; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(z_2) - x_2; & \dfrac{dy_2}{dt} = \sigma_2(x_2) - y_2; \quad \dfrac{dz_2}{dt} = \sigma_{1,2}(y_1) - z_2. \end{cases} \tag{1}$$

The variables $x_1(t)$, $x_2(t)$ denote here concentrations of the protein AS-C in K_1, K_2 respectively. Similarly, $y_1(t)$, $y_2(t)$ denote concentrations of the protein Delta, the functions σ_1 and σ_2 increase monotonically and describe there the positive feedbacks $(\mathrm{AS}-\mathrm{C}) \to \mathrm{Dl}$. The functions $\sigma_{1,2}$, $\sigma_{2,1}$ are also monotonically increasing and describe positive feedbacks $\mathrm{Dl} \to \mathrm{N}$ from K_2 to K_1, and, respectively, from K_1 to K_2. The variables $z_1(t)$, $z_2(t)$ denote concentrations of the protein Notch in these cells. The functions f_1, f_2 are monotonically decreasing and describe negative feedbacks $\mathrm{N} \cdots\blacktriangleleft (\mathrm{AS}-\mathrm{C})$. The symbols $\to$ and $\cdots\blacktriangleleft$ are standard for notations of positive and, respectively, negative feedbacks, see [3].

As in our previous publications [2, 3], where all these processes were considered in just one cell, here and below all the functions, variables and parameters are non-negative.

Following the general scheme of construction of the gene networks models, and the assumption that the cells K_1, K_2 are identical at the considered stage of their development.

$$f_1 = f_2 = f; \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma; \quad \sigma_{1,2} = \sigma_{2,1} = \sigma_*. \tag{2}$$

In our numerical experiments, we considered the case

$$f = \frac{A}{1+az^2}; \quad \sigma = \frac{Bx^2}{b+x^2}; \quad \sigma_* = \frac{Cx}{c+x}.$$

The equilibrium points of the system (1) are determined from the system

$$x_1 = f(z_1); \quad y_1 = \sigma(x_1); \quad z_1 = \sigma_*(y_2); \quad x_2 = f(z_2); \quad y_2 = \sigma(x_2); \quad z_2 = \sigma_*(y_1),$$

or from just one equation:

$$x_1 = R(x_1) := f(\sigma_*(\sigma(f(\sigma_*(\sigma(x_1)))))). \tag{3}$$

The function $R(x_1)$ is the double iteration of the monotonically decreasing function $\varphi(x_1) = f(\sigma_*(\sigma(x_1)))$, and hence, monotonically increases.

Lemma *Equation* (3) *has three solutions for sufficiently large values of A, B, and C.*

The work was supported by grant 12-01-00074 of RFBR, interdisciplinary grant 80 of SB RAS, by grants NSh-5278.2012.4, RAS VI.61.1.2, and by the scholarship SP-561.2012.5 of the President of RF.

Consider linearization of the system (1) at these equilibrium points.

Theorem 1. *If the graph of the function $R = R(x)$ has three intersection points with the line $R = x$ and all these intersections are transversal, then two of the equilibrium points S_1 and S_3 of the system* (1) *are stable, and one point S_2 is unstable.*

According to the symmetry conditions (2), the phase portrait of the system (1) is invariant with respect to the involution $x_1 \leftrightarrow x_2$, $y_1 \leftrightarrow y_2$, $z_1 \leftrightarrow z_2$, which has a fixed point S_2, and permutes the points S_1 and S_3. The 3-D plane $P^3 = \{x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2\}$ is invariant for the system (1).

Let the conditions of the theorem 1 be satisfied. Restriction of the system (1) to the plane P^3 has the form

$$\frac{dx}{dt} = f(z) - x; \quad \frac{dy}{dt} = \sigma(x) - y; \quad \frac{dz}{dt} = \sigma_*(y) - z. \tag{4}$$

Here $x = x_1 = x_2$, $y = y_1 = y_2$, $z = z_1 = z_2$. The system (4) has a unique stationary point $\widetilde{S}_2$, which coincides in a natural sense with the point S_2. Let $-\Pi^3 = \dfrac{d\varphi}{dx}$ be the product of derivatives of the functions f, σ, σ_* at this point.

The eigenvalues of the corresponding linearization matrix are: $\lambda_{2,3} = -1 + \dfrac{\Pi}{2} \pm i\dfrac{\Pi\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_1 = -1 - \Pi$. If

$$\mathbb{R}e\lambda_{2,3} > 0, \quad \text{i.e., if} \quad \Pi > 2, \tag{5}$$

then the equilibrium point $\widetilde{S}_2$ is unstable. Following arguments of [4], we get:

Theorem 2. *Let the conditions of the theorem* 1, *and the conditions* (5) *be satisfied. Then the plane P^3 contains at least one cycle of the system* (4).

Actually, this cycle can not be stable in the ambient space $\mathbb{R}^6$, since the plane P^3 is not a stable invariant submanifold of the phase portrait of the system (1).

References

[1] Smale S. “A mathematical model of two cells via Turing’s equation”. *American Mathematical Society, Lectures in Applied Mathematics*, 6, 15–21 (1974).

[2] Furman D. P., Bukharina T. A. “The gene network determining development of *Drosophila melanogaster* mechanoreceptors”. *Comp. Biol. Chem.*, 33, 231–234 (2009).

[3] Bukharina T. A., Furman D. P., Golubyatnikov I. V., Golubyatnikov V. P. “Mathematical modeling of morphogenesis of mechanoreceptors in *D. melanogaster*”. *Journ. Appl. Industrial Math.*, 6, N 2, 145–149 (2012).

[4] Golubyatnikov V. P., Likhoshvai V. A., Volokitin E. P., Gaidov Yu. E., Osipov A. F. “Periodic trajectories and Andronov-Hopf bifurcations in models of gene networks”. *Bioinformatics of Genome Regualtion and Structures II.* Springer, 405–414 (2006).

[1] Sobolev institute of mathematics SB RAS, Novosibirsk, 630090, Russia

[2] Institute of cytology and genetics SB RAS, Novosibirsk, 630090, Russia

[3] Novosibirsk state university, Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: glbtn@math.nsc.ru

QUASICONFORMAL ANALOGUE OF A CARATHEODORI'S THEOREM

VLADISLAV VASIL'EVICH ASEEV

In 1937, Caratheodory proved the following theorem ([1], Theorem 2, Remark):

Suppose that some locally injective mapping $f : G \to f(G) \subset \bar{\mathbf{C}}$ *is defined in a domain* $G \subset \bar{\mathbf{C}}$. *For the mapping* f *to be Mobius, it is necessary and sufficient that every point* $z_0 \in G$ *have an open neighborhood* $U(z_0) \subset G$ *such that, for every generalized circle* $S \subset U(z_0)$*, its image* $f(S)$ *is also a generalized circle.*

Note that this theorem does not require the continuity of f.

We change in this situation generalized circles by k-quasicircles (that is an image of a circle under some quasiconformal mapping, where k is a Rickman's characteristic of quasicircle) and proove the following theorem (published in [2]):

Let some locally injective mapping $f : G \to f(G) \subset \bar{\mathbf{C}}$ *be defined in a domain* $G \subset \bar{\mathbf{C}}$. *For* f *to be quasiconformal in* G*, it is necessary and sufficient that there exists* $k \geq 1$ *such that each point* $z_0 \in G$ *has an open neighborhood* $U(z_0) \subset G$ *such that* $f|U(z_0)$ *is injective and the image* $f(S)$ *of each generalixed circle* $S \subset U(z_0)$ *is a* k*-quasicircle. Moreover, the exact estimate for the quasiconformality coefficient of* f *holds:* $K[f] \leq k + \sqrt{k^2 - 1}$.

Note that in the case $k = 1$ we obtain as the Corollary the Caratheodori's theorem.

References

[1] C. Caratheodory, "The most general transformation of plane regions which transform circles into circles", *Bulletin of Amer. Math. Soc.*, Vol. 43, 537-579 (1937).

[2] V. V. Aseev, "A quasiconformal analog of Caratheodory's criterion for the Mobius property of mappings", *Siberian Math. Journal*, Vol. 55, No. 1, 1-6 (2014).

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: AseevVV@yandex.ru

CORRECT OBSERVER'S EVENT HORIZON IN DE SITTER SPACE-TIME

VALERII NIKOLAEVICH BERESTOVSKII, IRINA ALEXANDROVNA ZUBAREVA

Let (M, g) be a *Lorentzian manifold*. A nonzero tangent vector v is said to be respectively *time-like, space-like*, or *isotropic* if $g(v, v)$ is negative, positive, or zero. A tangent vector v is said to be *non-space-like* if it is time-like or isotropic. A continuous vector field X on Lorentzian manifold M is called *time-like* if $g(X(p), X(p)) < 0$ for all events $p \in M$. If Lorentzian manifold (M, g) admits a time-like vector field X, then we say that (M, g) is *time oriented by the field* X. The time-like vector field X separates all non-space-like vectors into two disjoint classes of *future directed* and *past directed* vectors. A Lorentzian manifold is *time orientable* if it admits some time-like vector field X.

Definition 1. *A space-time (M, g) is a connected Hausdorff manifold of dimension equal or greater than two with a countable basis supplied with a Lorentzian C^∞-metric g and some time orientation.*

A continuous piecewise smooth curve (path) $c = c(t)$ with $t \in [a, b]$ or $t \in (a, b)$ on Lorentzian manifold (M, g) is said to be *non-space-like* if $g(c_l'(t), c_r'(t)) \leq 0$ for every inner point t from the domain of the curve c, where $c_l'(t)$ (respectively, $c_r'(t)$) denotes left (respectively, right) tangent vector. If (M, g) is a space-time, then the curve $c = c(t)$ with $t \in [a, b]$ or $t \in (a, b)$, is *future directed* or *past directed*, i.e. all (one-sided) tangent vectors of the curve c either *are directed to the future* or *are directed to the past*. The *causal future* $J^+(L)$ (respectively, the *causal past* $J^-(L)$) of a subset L of the space-time (M, g) is defined as the set of all events $q \in M$, for which there exists future directed (respectively past directed) curve $c = c(t), t \in [a, b]$, such that $c(a) \in L, c(b) = q$. If $p \in M$, then we will use reduced notation $J^+(p)$ and $J^-(p)$ instead of $J^+(\{p\})$ and $J^-(\{p\})$.

Definition 2. *An open set U in a space-time is said to be causally convex if no non-space-like curve intersects U in a disconnected set. The space-time (M, g) is said to be strongly causal if each event in M has arbitrarily small causally convex neighborhoods.*

Definition 3. *A space-time (M, g) is called globally hyperbolic if it is strongly causal and satisfies the condition that $J^+(p) \cap J^-(q)$ is compact for all $p, q \in M$.*

Definition 4. *Let S be a subset in a globally hyperbolic space-time (M, g). Then $\Gamma^-(S)$ (respectively, $\Gamma^+(S)$) denotes the boundary of the set $J^-(S)$ (respectively, $J^+(S)$) and is called the past event horizon (respectively, the future event horizon) of the set S.*

A simplest example of a globally hyperbolic space-time is *the Minkowski space-time $Mink^{n+1}$*, $n + 1 \geq 2$, i.e. a manifold $\mathbb{R}^{n+1}$, $n + 1 \geq 2$, with the Lorentz metric g which has the constant components g_{ij}:

$$g_{ij} = 0, \text{ if } i \neq j; \quad g_{11} = \ldots = g_{nn} = 1, \; g_{(n+1)(n+1)} = -1.$$

in natural coordinates $(x_1, \ldots, x_n, t)$ on $\mathbb{R}^{n+1}$. The time orientation is defined by the vector field X with components $(0, \ldots, 0, 1)$ relative to canonical coordinates in $\mathbb{R}^{n+1}$.

De Sitter space-time is visualized as the hyperboloid $S(R)$ with one sheet

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - t^2 = R^2, \; R > 0, \tag{1}$$

in Minkowski space-time $Mink^{n+1}$, $n + 1 \geq 3$, with Lorentzian metric induced from $Mink^{n+1}$.

The first author is partially supported by Grants of Russian Federation Government for state support of scientific investigations (Agreement no. 14.B25.31.0029) and of RFBR 11-01-00081-a.

The time orientation on $S(R)$ is defined by unit tangent vector field Y such that Y is orthogonal to all time-like sections

$$S(R,c) = S(R) \cap \{(x_1,\dots,x_n,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : t = c\},\ c \in \mathbb{R}.$$

The main result is the following

Theorem. *Let L be a time-like geodesic in de Sitter space-time $S(R)$, $\Gamma^-(L)$ is the past event horizon for L (observer's event horizon). Then*

1. $\Gamma^-(L) = S(R) \cap \alpha$, where α is some hyperspace in $\mathbb{R}^{n+1}$ which goes through the origin of coordinate system, consists of isotropic geodesics.

2. $J^+(L) = -J^-(-L)$, $J^-(L) = -J^+(-L)$.

3. The sets $J^-(L)$ and $J^+(-L)$ (respectively $J^+(L)$ and $J^-(-L)$) don't intersect and have joint boundary $\Gamma^-(L)$. In particular, the past event horizon for L coincides with the future event horizon for $-L$ (respectively, the future event horizon for L coincides with the past event horizon for $-L$).

4. The quotient map $pr : S(R) \to S^1_n(R)$, gluing antipodal events in $S(R)$, is diffeomorphism on all open submanifolds $J^+(L)$, $J^-(-L)$, $J^-(L)$, $J^+(-L)$ which identifies antipodal events of boundaries for these submanifolds (i.e. the corresponding event horizons).

5. The quotient manifold $(S^1_n(R), G)$, where $g = pr^*G$, is the Lobachevsky space of positive curvature $\frac{1}{R^2}$ in the sense of B.A.Rosenfeld (see p. 155 in [2]*).*

Corollary. *Let L be a time-like geodesic in $S(R)$, p is the joint event of L and $S(R,0)$. Then the past event horizon $\Gamma^-(L)$ for L intersects $S(R,0)$ by the sphere $S_{S(R,0)}(p,\pi R/2)$ of the radius $\pi R/2$ with the center p.*

Our results contradict to the figure on the page 120 from the Howking's book [1].

References

[1] S. Hawking, *The Universe in a Nutshell*, Bantam Books, New York, Toronto, London, Sydney, Auckland, 2001.

[2] B. A. Rosenfeld, *Non-Euclidean geometry*, (Russian) M.: GITTL, 1953.

Sobolev Instutite of mathematics SB RAS, Omsk department, Pevtsova street, 13, Omsk, 644099, Russia

E-mail address: berestov@ofim.oscsbras.ru, i_gribanova@mail.ru

HIRZEBRUCH GENERA AND FUNCTIONAL EQUATIONS

VICTOR MATVEEVICH BUCHSTABER

We will consider smooth manifolds with smooth actions of compact tori, such that all fixed points are isolated. Such manifolds naturally appear in different areas of mathematics. They are the key objects of toric geometry, toric topology, and the theory of homogeneous spaces of compact Lie groups.

The theory of Hirzebruch genera of manifolds is a well-known area of algebraic topology. It has important applications in the theory of differential operators on manifolds, mathematical physics and combinatorics.

In the case of manifolds with compact torus action there is an equivariant Hirzebruch genus and arises the famous rigidity problem. In [1] the universal toric genus is constructed and localization formulas are obtained. They give the complex cobordism value of this genus in terms of torus representation in the tangent space at fixed points. The problem of rigidity of equivariant genus is reduced to the problem of solving the corresponding functional equation.

The main construction I. Let us consider a set $\Lambda = \{\Lambda_i, i = 1, \ldots, m\}$ of $(k \times n)$-matrices Λ_i with integer coefficients and a map $\varepsilon : [1, m] \to \{-1, 1\}$.

Let A be a commutative associative ring over $\mathbb{Q}$. We associate to each series $f(x) = x + a_1x + a_2x^2 + \ldots \in A[[x]]$ the characteristic function of the pair (Λ, ε):

$$L(\Lambda, \varepsilon; f) = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon(i) \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{f(\langle \Lambda_i^j, t\rangle)}.$$

Here $t = (t_1, \ldots, t_k)$ and Λ_i^j are column vectors of Λ_i, $\langle \Lambda_i^j, t\rangle = \Lambda_i^{j,1}t_1 + \ldots + \Lambda_i^{j,k}t_k$.

The pair (Λ, ε) is called admissible if $L(\Lambda, \varepsilon; f) \in A[[t]]$ for any ring A and any series f.

The pair (Λ, ε) is called rigid for a family of series $\mathcal{F} = \{f(x) \in A[[x]]\}$ if $L(\Lambda, \varepsilon; f) \in A$ for any series $f \in \mathcal{F}$.

Problem 1. *Find the solution of rigidity functional equation*

$$L(\Lambda, \varepsilon; f) \equiv C, \tag{1}$$

that is, for a given pair (Λ, ε) and a ring A, find the family of series $\mathcal{F} = \{f(x) \in A[[x]]\}$ and $C \in A$.

It is sufficient to check that the pair (Λ, ε) is admissible for the universal series $f_u(x) \in \mathcal{A}[[x]]$, where $\mathcal{A} = \sum\limits_{n\geqslant 0} \mathcal{A}_{-2n} = \mathbb{Q}[a_1, \ldots, a_q, \ldots]$, $\deg a_q = -2q$.

Set $\deg t_q = 2$ for $q = 1, \ldots, k$. If the pair (Λ, ε) is admissible, then

$$L(\Lambda, \varepsilon; f_u) = \sum_{\deg P_\omega + 2|\omega| + 2n = 0} P_\omega t^\omega,$$

$P_\omega \in \mathcal{A}$ is a homogeneous polynomial and $\omega = (i_1, \ldots, i_k)$, $t^\omega = t_1^{i_1} \ldots t_k^{i_k}$, $|\omega| = i_1 + \ldots + i_k$.

Let $\mathcal{I}(\Lambda, \varepsilon)$ be the ideal in the ring $\mathcal{A}$ generated by all $P_\omega \in \mathcal{A}_{-2(n+|\omega|)}$ with $|\omega| > 0$.

Main constriction II. The graded ring

$$\mathcal{A}(\Lambda, \varepsilon) = \mathcal{A}/\mathcal{I}(\Lambda, \varepsilon)$$

is called universal rigidity ring of admissible pair (Λ, ε).

Problem 2. *For given (Λ, ε) find the ring $\mathcal{A}(\Lambda, \varepsilon)$.*

Consider a smooth oriented manifold M^{2n} with a smooth action of the compact torus T^k such that all the fixed points are isolated. Let $x_1, \ldots, x_m$ be the set of all fixed points. Then

The work was partially supported by RFBR grant 14 01-00537A.

in the tangent space $\tau_i \simeq \mathbb{R}^{2n}$ of the point x_i a representation of the torus T^k is defined. Given a basis in T^k one can choose a set of weights $\Lambda_i^j = \{\Lambda_i^{j,1}, \dots, \Lambda_i^{j,k}\}, \quad j = 1, \dots, n.$

One can define the map $\varepsilon : [1, m] \to \{-1, 1\}$, where $\varepsilon(i) = 1$, if the orientation in τ_i, induced by the orientation of the manifold M^{2n}, coincides with the orientation in τ_i, defined by the set of weights Λ_i^j, and $\varepsilon(i) = -1$ otherwise. Therefore we have the correspondence

$$\mathcal{L} : (M^{2n}, T^k) \to (\Lambda, \varepsilon). \tag{2}$$

Let (M^{2n}, T^k) be a smooth manifold M^{2n} with an action of a torus T^k. There is a linear representation of the torus T^k in $\mathbb{R}^{2N} \simeq \mathbb{C}^N$ and an equivariant embedding $M^{2n} \subset \mathbb{C}^N$. Let $\nu_N(M^{2n})$ be the normal bundle of this embedding. The pair (M^{2n}, T^k) is called normal complex T^k-manifold if $\nu_N(M^{2n})$ is a complex T^k-bundle.

From [1] we obtain: Let (M^{2n}, T^k) be a normal complex T^k-manifold with isolated fixed points. Then the correspondence (2) gives an admissible pair (Λ, ε).

The structure of almost complex T^k-manifold (M^{2n}, T^k) defines the structure of a normal complex manifold (M^{2n}, T^k) and therefore an admissible pair (Λ, ε). For each such pair $\varepsilon(i) = 1$, $i = 1, \dots, m$. The important examples here give the pairs (M^{2n}, T^k), where M^{2n} is a complex or symplectic manifold with corresponding action of T^k.

In [2] the theory of 2-truncated cubes is developed and an explicit construction of pairs (Λ, ε) is given for symplectic manifolds M^{2n} with Hamiltonian action of T^n where the image of moment map is the given 2-truncated cube. Well-known polytopes, such as flag nestohedra, graph-associahedra and graph-cubeahedra are 2-truncated cubes.

Thus we obtain a wide area of application for our constructions I and II.

Let L_f be the complex Hirzebruch genus determined by the series $f(x)$.

Flag manifolds $F_n = U(n)/T^n$ are complex T^n-manifolds with $n!$ fixed points.

From [3] we obtain: The rigidity functional equation (1) for flag manifolds F_n is

$$C\Delta_n = \sum_{\sigma \in S_n} (\mathrm{sign}\sigma)\sigma \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} Q(x_i - x_j), \quad \Delta_n = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j). \tag{3}$$

where $Q(t) = 1 + \sum\limits_{i \geqslant 1} b_i t^i$ and $C = L_f[F_n]$. Here $\mathrm{sign}\sigma$ is the sign of the permutation σ.

The equation (3) allows us to explicitly calculate the values of $L_f[F_n]$ and, using results of [3], to describe the generators of the ideal $\mathcal{I}(\Lambda, \varepsilon)$ of the universal rigidity ring $\mathcal{A}(\Lambda, \varepsilon)$ for F_n in terms of differential difference operators.

The complex projective space $\mathbb{C}P^n = \{(z_1 : \ldots : z_{n+1})\}$ has the structure of T^{n+1}-complex manifold with $(n+1)$ fixed points. The rigidity functional equation (1) for $\mathbb{C}P(n)$ is

$$\sum_{i=1}^{n+1} \prod_{j \neq i} \frac{1}{f(t_i - t_j)} = C, \qquad C = L_f[\mathbb{C}P(n)]. \tag{4}$$

In [4] the general analytic solution of the equation (4) is obtained for $n = 2$ in terms of Weierstrass $\wp$-functions and elliptic Baker-Akhiezer functions.

References

[1] V. Buchstaber, T. Panov, N. Ray "Toric genera", *Int. Math. Res. Notices IMRN*, No. 16, 3207–3262 (2010).

[2] V. M. Buchstaber, V. D. Volodin, "Combinatorial 2-truncated cubes and applications, Associahedra, Tamari Lattices, and Related Structures," *Tamari Memorial Festschrift, Progress in Mathematics*, 299, Birkhauser, Basel, 161–186 (2012).

[3] V. M. Buchstaber, S. Terzic "Equivariant complex structures on homogeneous spaces and their cobordism classes", *Geometry, topology, and mathematical physics Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, Vol. 224, 27–57 (2008).

[4] V. M. Buchstaber, E. Yu. Netay, "$\mathbb{C}P(2)$-multiplicative Hirzebruch genera and elliptic cohomology", *Russian Math. Surveys*, Vol. 69, No. 4, (2014).

Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences, Russia

E-mail address: buchstab@mi.ras.ru

ENUMERATION OF HYPERMAPS WHICH ARE SELF-EQUIVALENT WITH RESPECT TO REVERSING THE COLORS OF VERTICES

MADINA ALEKSANDROVNA DERYAGINA

A *map* (S, G) is a closed Riemann surface S with an embedded graph G such that $S\backslash G$ amounts to the disjoint union of connected components, called *faces*, each of which is homeomorphic to an open disk.

A *hypermap* is a map whose vertices are colored in black and white in such a way that every edge connects vertices of different colors.

Two hypermaps (S, G) and (S_1, G_1) are called *equivalent* whenever there exists an orientation-preserving homeomorphism $h : S \to S_1$ with $h(G) = G_1$ and h taking black and white vertices of (S, G) to black and white vertices of (S_1, G_1), respectively .

One can say that *hypermap is self-equivalent with respect to reversing the colors of vertices*, if given hypermap and hypermap which is obtained by reversing colors of vertices of given hypermap are equivalent.

Theorem. *The number $Shyp(n)$ of hypermaps which are self-dual with respect to reversing the colors of vertices with n edges can be calculated by this formula:*

$$Shyp(n) = \frac{1}{n}\sum_{\substack{l|n\\ lm=n}}\big(Int(\frac{m}{2})\,(s(\frac{m}{2},0)-s^+(\frac{m}{2},0))\,\varphi^{odd}_{\frac{m}{2}+1}(l)+\sum_{H=1}^{m} Int(\frac{m-H}{2})\,\frac{T(m,H)}{(m-1)!}\,\varphi_{\frac{m-H}{2}+1}(l)\big)\,,$$

where $\varphi_m(l)$ – Jordan function, $\varphi^{odd}_{m+1}(l) = \sum_{\frac{l}{d}:odd}\mu\left(\frac{l}{d}\right)\, d^{m+1}$ – odd Jordan function, $s(m, 0)$ and $s^+(m, 0)$ are calculated with two recurrence equations

$$s(n,0) = (2n+1)!! - \sum_{k=1}^{n}(2k-1)!!\,s(n-k,0),$$

$s(0, 0) = 1$

and

$$s^+(n,0) = (n+1)! - \sum_{k=1}^{n} k!\,s^+(n-k,0),$$

$s^+(0, 0) = 1$, *respectively.*

And $T(m, H)$ is calculated with recurrence formula:

$$T(m,H) = B(m,H) - \sum_{h=0}^{H}\sum_{i=1}^{m-1}\binom{m-1}{m-i}\,T(i,h)\,B(m-i,H-h)\,,$$

where

$$B(i,j) = i!\;\frac{i!}{1^j\,j!\,2^{\frac{i-j}{2}}\,\left(\frac{i-j}{2}\right)!}\,Int\left(\frac{i-j}{2}\right)\,,$$

$B(0, 0) = 1$, $T(0, 0) = 0$,

$$Int(x) = \begin{cases} 1, \text{if } x \in Z \text{ and } x \geqslant 0,\\ \qquad 0, \quad \text{else.}\end{cases}$$

The authors were partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grant 13–01–00513), the State Maintenance Program for the Leading Scientific Schools of the Russian Federation (Grant NSh–2263.2014.1).

Remark. *The number* $Shyp_0(n)$ *of planar hypermaps which are self-dual with respect to reversing the colors of vertices with* n *edges was obtained in* [2]. $Shyp_0(n)$ *coincides with the sequence A090375 in* [4].

References

[1] M. A. Deryagina and A. D. Mednykh, "On the enumeration of circular maps with given number of edges", *Siberian Mathematical Journal*, Vol. 54, No. 4, 624–639 (2013).

[2] V. A. Liskovets, "Enumerative formulae for unrooted planar maps: A pattern", *Electronic J. Comb.*, Vol. 11, No. 1, R88 (2004).

[3] A. Mednykh and R. Nedela, "Enumeration of unrooted hypermaps of a given genus", *Discrete Mathematics*, Vol. 310, No. 3, 518-526 (2010).

[4] On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, http://www.oeis.org

Plekhanov Russian University of Economics, Stremyanny per., 36, Moscow, 117997, Russia
E-mail address: madinaz@rambler.ru

EQUIVARIANT INFINTESIMAL DEFORMATIONS OF ALGEBRAIC THREEFOLDS WITH AN ACTION OF AN ALGEBRAIC TORUS OF COMPLEXITY 1

ROSTISLAV ANDREEVICH DEVYATOV

A construction of normal affine algebraic varieties aver $\mathbb{C}$ with an action of an algebraic torus was given in [1]. Let us give the most important definitions for this construction in the case of complexity 1 actions. Fix a torus $T = (\mathbb{C}^*)^n$. Let $M = \mathfrak{X}(T)$ be its character lattice, $N = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$ be the dual lattice, and $M_{\mathbb{Q}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ and $N_{\mathbb{Q}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ be vector spaces containing these lattices. Then $N_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(M_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q})$.

Definition. *A* polyhedron $\Delta \subseteq N_{\mathbb{Q}}$ *is a nonempty (not necessarily bounded) intersection of finitely many closed* affine *half-spaces of* $N_{\mathbb{Q}}$.

Definition. *The* tail cone $\mathrm{tail}(\Delta)$ *the set of all vectors* $v \in N_{\mathbb{Q}}$ *such that for all* $a \in \Delta$ *one has* $a + v \in \Delta$.

Fix a polyhedral *cone* $\sigma \subseteq N_{\mathbb{Q}}$, i. e. an intersection of finitely many *vector* half-spaces of $N_{\mathbb{Q}}$. Suppose that σ is *pointed*, i. e. it contains no lines, and is *full-dimensional*, i. e. its linear span is the whole $N_{\mathbb{Q}}$.

Definition. *The* dual cone $\sigma^\vee \subseteq M_{\mathbb{Q}}$ *is the set of all* $a \in M_{\mathbb{Q}}$ *such that for all* $f \in \sigma$ *one has* $f(a) \geq 0$ *(recall that elements of* $N_{\mathbb{Q}}$ *are functions on* $N_{\mathbb{Q}}$*).*

If $\Delta \subseteq N_{\mathbb{Q}}$ is a polyhedron with $\mathrm{tail}(\Delta) = \sigma$, one can define the support function $h_\Delta \colon \sigma^\vee \to \mathbb{Q}$ by $h_\Delta(a) = \min_{f \in \Delta} f(a)$. The condition $a \in \sigma^\vee$ guarantees that the minimum is really attained at one of the vertices of Δ. One easily checks that this function is piecewise-linear and convex, i. e. $\forall a, b \in \sigma^\vee\ h_\Delta(a + b) \geq h_\Delta(a) + h_\Delta(b)$.

Fix a smooth algebraic curve C.

Definition. *A* polyhedral divisor *with tail cone* σ *on* C *is a formal finite linear combination of the form* $\sum p_i \Delta_i$, *where* $p_i \in C$ *are points, and* Δ_i *are polyhedra with* $\mathrm{tail}(\Delta_i) = \sigma$.

Given $a \in \sigma^\vee$ and a polyhedral divisor $\mathcal{D} = \sum p_i \Delta_i$, one can define the *evaluation of* $\mathcal{D}$ *at* a by $\mathcal{D}(a) = \sum h_{\Delta_i}(a) p_i$. This is a (rational Cartier) divisor on C. It follows from the convexity property of support functions that $\forall a, b \in \sigma^\vee\ \mathcal{D}(a + b) \geq \mathcal{D}(a) + \mathcal{D}(b)$.

Definition. *A polyhedral divisor* $\mathcal{D}$ *is called* proper *if:*

1. If $a \in \sigma^\vee \cap M$, *then* $\mathcal{D}(a)$ *is semiample.*

2. If $a \in M$ *is in the interior of* $\sigma^\vee$, *then* $\mathcal{D}(a)$ *is big.*

Theorem. *(see* [1]*) If* $\mathcal{D}$ *is a proper polyhedral divisor with tail cone* σ *on* C, *then*

$$A = \bigoplus_{\chi \in \sigma^\vee \cap M} \Gamma(C, \mathcal{O}_C(\mathcal{D}(\chi)))$$

is a finitely generated $\mathfrak{X}(T)$*-graded algebra, and* $X = \mathrm{Spec}\, A$ *is a normal affine variety of dimension* $n + 1$ *with a faithful action of* T.

We are going to consider varieties X constructed this way from a two-dimensional torus T ($n = 2$), the projective line ($C = \mathbf{P}^1$) and a polyhedral divisor $\mathcal{D} = \sum p_i \Delta_i$ such that all vertices of all polyhedra Δ_i are lattice points. The properness condition in this case means that the Minkowski sum of all polyhedra Δ_i must be strictly contained in σ. Fix such a proper polyhedral divisor $\mathcal{D}$ on $\mathbf{P}^1$. We call points $p_i \in \mathbf{P}^1$ *special*, and we call a special point p_i *essential* if Δ_i cannot be written as $\sigma + v$ for any $v \in N$.

For a general reference on deformation theory, see [2].

Definition. *Given a complex algebraic variety* X, *an affine scheme* S *of finite type over* $\mathbb{C}$, *and a closed point* $s \in S$, *a* deformation *of* X *over* S *with basepoint* s *is a triple* (Y, f, ι), *where*

Y is a scheme of finite type over $\mathbb{C}$, $f\colon Y \to S$ is a flat morphism, and $\iota\colon X \to f^{-1}(s)$ is an isomorphism. S is called the parameter space *of the deformation.*

Definition. *Two deformations (Y, f, ι) and (Y', f', ι') of the same variety X over the same parameter space S with the same basepoint $s \in S$ are called equivalent if there exists an isomorphism $g\colon Y \to Y'$ such that $f'g = f$ and $g|_{f^{-1}(s)}\iota = \iota'$.*

Definition. *A deformation of a variety X over $S = (\operatorname{Spec} \mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2))$ (with the basepoint s being the only closed point in S) is called an* infinitesimal *deformation of X.*

Denote the set of equivalence classes of all infinitesimal deformations of an affine variety X by $T^1(X)$. One can introduce a vector space structure with good functorial properties (which we don't need here explicitly, see [2] for exact formulations) on $T^1(X)$. Namely, suppose that $A = \mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]/I$, where I is an ideal. Then I/I^2 is an A-module. A morphism $\psi\colon I/I^2 \to A$ of A-modules is called a *derivation* if there exist m polynomials $g_i \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$ such that ψ can be written as $\psi(g) = \sum g_i \partial g/\partial x_i$, where g is a polynomial representing an element of I/I^2. Clearly, the derivations form a vector subspace (and even an A-submodule) in $\operatorname{Hom}_A(I/I^2, A)$. Denote this submodule by Der. Then $T^1(X)$ can be identified with $\operatorname{Hom}_A(I/I^2, A)/\operatorname{Der}$. One can prove that this vector space structure does not depend on the choice of generators $x_1, \dots, x_m$.

Consider an affine variety X with an action of a torus T. Then $A = \mathbb{C}[X]$ is an $M = \mathfrak{X}(T)$-graded algebra. If we choose *homogeneous* generators $x_1, \dots, x_m$, then $\operatorname{Hom}_A(I/I^2, A)$ becomes an M-graded module. One checks easily that Der is an M-graded submodule, so $T^1(X)$ becomes an M-graded vector space. Again, one can prove that this grading does not depend on the choice of generators. Denote the zeroth graded component of $T^1(X)$ by $T^1(X)_0$.

Definition. *A deformation (Y, S, s) of a variety X with an action of a torus T is called* equivariant *if T acts on Y, and for any $t \in T$, the morphisms $f\colon Y \to S$ and $ft\colon Y \to S$ are the same.*

It follows easily from the exact description of the identification between $\operatorname{Hom}_A(I/I^2, A)/\operatorname{Der}$ and $T^1(X)$ that the equivariant deformations are identified exactly with $T^1(X)_0$.

Recall that we have fixed a proper polyhedral divisor $\mathcal{D} = \sum p_i \Delta_i$ with tail cone σ on $\mathbf{P}^1$. Consider one of the polyhedra Δ_i. Its boundary consists of two rays and several (at least one if p_i is essential) segments, we call the union of these segments the *finite part* of the boundary. So, the finite part of the boundary consists of several segments. The ends of each of these segments are lattice points, and they also can have some lattice points inside. These lattice points split each of the segments forming the finite part of $\partial\Delta_i$ into several *minimal* segments, and each minimal segment contains no lattice points inside. The finite part of the boundary is the union of all these minimal segments. Denote the number of these minimal segments by k_i.

Theorem. *Let X be the affine variety with an action of T constructed from the polyhedral divisor $\mathcal{D}$ as explained above. Then*

$$\dim T^1(X)_0 = \max(0, \#(\textit{essential special points}) - 3) + \sum_{p_i \in \mathbf{P}^1 \textit{ essential}} (k_i - 1).$$

For a proof of this theorem, see [3].

References

[1] K. Altmann, J. Hausen, "Polyhedral divisors and algebraic torus actions", *Math. Ann.*, Vol. 334, No. 3, 557–607 (2006).

[2] R. Hartshorne, *Deformation theory*, GTM **257**, Springer (2010).

[3] R. Devyatov, "Equivariant infinitesimal deformations of algebraic threefolds with an action of an algebraic torus of complexity 1", `http://arxiv.org/abs/1406.7736` (2014).

Department of Mathematics, Higher School of Economics, Vavilova 7, Moscow, 117312, Russia and Institut für Mathematik, Freie Universität Berlin, Arnimallee 3, Berlin, 14195, Germany

E-mail address: `deviatov@mccme.ru`

COMPOSITION OPERATORS ON SOBOLEV SPACES IN A CARNOT GROUP AND METRIC PROPERTIES OF MAPPINGS

NIKITA ALEKSANDROV EVSEEV

Mainly we study mappings inducing composition operators on Sobolev spaces. In this talk we are going to present the basic notions regarding the problem under consideration. Moreover, we formulate our main result for isomorphic composition operators of Sobolev spaces on a Carnot Group. This talk is based on a joint works with Sergey Vodopyanov [3, 4]. We develop and generalize ideas from the framework for $\mathbb{R}^n$, see [1, 2].

A **Carnot group** $\mathbb{G}$ is a connected simply connected stratified nilpotent Lie group. This means that the Lie algebra $\mathfrak{g}$ of the group $\mathbb{G}$ admits a nilpotent stratification: $\mathfrak{g} = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$, and $[V_1, V_j] = V_{j+1}$ for $j = 1, \dots, m-1$, whereas $[V_1, V_m] = \{0\}$. Let $X_1, \dots, X_n$ be vector fields constituting a basis of V_1.

Sobolev space $L^1_p(D)$ consist of locally integrable functions $f : D \to \mathbb{R}$ with weak derivatives $X_i f \in L^1_p(D)$, $i = 1, \dots n$. Let $\varphi : D \to D'$ is a measurable mapping and $L^1_q(D)$, $L^1_p(D')$ are Sobolev spaces on these domains.

We say that measurable mapping $\varphi : D \to D'$ belongs to the class IL^1_p if φ induces **composition operator** on Sobolev spaces

$$\varphi^* : L^1_p(D') \cap C^\infty(D') \to L^1_p(D), \quad \varphi^*(f) = f \circ \varphi, \quad f \in L^1_p(D') \cap C^\infty(D'),$$

such that

1) there exists some $K > 0$ such that

$$K^{-1}\big\|f \mid L^1_p(D')\big\| \leqslant \big\|\varphi^*(f) \mid L^1_p(D)\big\| \leqslant K\big\|f \mid L^1_p(D')\big\| \quad \text{for all} \quad f \in L^1_p(D') \cap C^\infty(D').$$

2) the image $\varphi^*\left(L^1_p(D') \cap C^\infty(D')\right)$ is dense in $L^1_p(D)$.

Theorem. *Let $p \geq 1$ and D, D' are domains on the Carnot group $\mathbb{G}$. Measurable mapping $\varphi : D \to D'$ belongs to the class IL^1_p if and only if φ coincides almost everywhere with a quasi-isometric homeomorphism (quasiconformal mapping if $p = \nu$) $\Phi : D \to \Phi(D)$ for which Sobolev spaces $L^1_p(\Phi(D))$ and $L^1_p(D')$ are equivalent.*

References

[1] S. K. Vodopyanov, "L_p-potential theory and hypoelliptic equations", *Sovremennye problemy geometrii i analiza (Trudy Instituta matematiki)*, 49–89, (1989).

[2] S. K. Vodopyanov, "Composition operators on Sobolev spaces", *"Complex Analysis and Dynamical Systems II" Contemporary Mathematics*, Vol. 382, 327–342, (2005).

[3] S. K. Vodopyanov and N. A. Evseev, "Isomorphisms of Sobolev spaces on Cornot groups and quasiisometric mappings", *Sibirsk. Mat. Zh.*, Vol. 55, No. 5, (2014).

[4] S. K. Vodopyanov and N. A. Evseev, "Isomorphisms of Sobolev spaces on Cornot groups and quasiconformal mappings", *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*, (2014).

Novosibirsk State University, Pirogova St., 2, Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: nikita2.evseev@gmail.com

This research was partially supported by Grant of the Russian Federation for the State Support of Researches (Agreement No 14.B25.31.0029).

INFINITE FAMILIES OF 3-MANIFOLDS WITH KNOWN COMPLEXITY

EVGENII ANATOLEVICH FOMINYKH, ANDREI YURIEVICH VESNIN

A complexity theory of 3-manifolds gives an useful approach for their classification. Recall that the complexity of a compact 3-manifold equals k if this manifold has an almost simple spine with k true vertices and has no almost simple spines with fewer true vertices (see [1] for details).

The problem of calculating the complexity of 3-manifolds is very difficult. Up to now, there have been constructed tables of all closed orientable irreducible manifolds of complexity at most 13 (there are more than 103 000 such manifolds); of all hyperbolic manifolds with geodesic boundary of complexity at most 4 (5192 manifolds); and of all cusped hyperbolic manifolds of complexity at most 8 (21 919 manifolds) (see a survey [2]).

We will discuss two classes of 3-manifolds. Firstly, we will present infinite families of hyperbolic 3-manifolds with totally geodesic boundary with known complexity. These families were investigated in [3,4,5]. Exact values of complexity were obtained due to calculation of some Turaev – Viro invariants. Secondly, we will discuss the class of hyperbolic 3-manifolds with cusps. Infinite families of such manifolds with known complexity were presented in [6,7]. Exact values of complexity were obtained due to knowledge about volumes of these manifolds.

References

[1] S. Matveev, *Algorithmic Topology and Classification of 3-Manifolds*, Springer–Verlag, Berlin (2007).

[2] A. Yu. Vesnin, S. V. Matveev, E. A. Fominykh, "Complexity of 3-dimensional manifolds: exact values and estimates", *Siberian Electronic Mathematical Reports*, Vol. 8, 341–364 (2011). (Russian)

[3] E. A. Fominykh, A. Yu. Vesnin, "Exact Values of Complexity for Paoluzzi - Zimmermann Manifolds", *Doklady Mathematics*, Vol. 84, No. 1, 542–544 (2011).

[4] A. Vesnin, E Fominykh, "On complexity of three-dimensional hyperbolic three-manifolds with geodesic boundary", *Siberian Math. J.*, Vol. 53, No. 4, 625–634 (2012).

[5] A. Yu. Vesnin, E. A. Fominykh, "Two-sided bounds for complexity of hyperbolic 3-manifolds with totally geodesic boundary", *Proc. of the Steklov Institute of Mathematics*, Vol. 286, 10 pp. (2014), in press. (Russian)

[6] A. Yu. Vesnin, V. V. Tarkaev, E. A. Fominykh, "On the complexity of three-dimensional cusped hyperbolic manifolds", *Doklady Mathematics*, Vol. 89, No. 3, 267–270 (2014).

[7] A. Yu. Vesnin, V. V. Tarkaev, E. A. Fominykh, "Three-dimensional hyperbolic manifolds with cusps of complexity 10 having maximal volume", *Proc. of the Institute of Mathematics and Mechanics*, Vol. 20, No. 2, 74–87 (2014). (Russian)

Laboratory of Quantum Topology, Chelyabinsk State University, ul. Bratev Kashirinykh 129, Chelyabinsk, 454001 Russia
E-mail address: fominykh@csu.ru

Sobolev Institute of Mathematics, pr. Ak. Koptyuga, 4, Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: vesnin@math.nsc.ru

Authors were partially supported by Laboratory of Quantum Topology of Chelyabinsk State University (Russian Federation government grant 14.Z50.31.0020).

VOLUMES OF FLEXIBLE POLYHEDRA

ALEXANDER ALEXANDROVICH GAIFULLIN

A *flexible polyhedron* in the three-space is a closed polyhedral surface that can be deformed continuously so that every its face remains congruent to itself during the deformation, but the deformation is not induced by an ambient rotation of the space. Intuitively, one may think of a flexible polyhedron as of a polyhedral surface with faces made of some rigid material and with hinges at edges that allow dihedral angles to change continuously. Similarly, a flexible polyhedron in the n-dimensional Euclidean space $\mathbb{E}^n$ is an $(n-1)$-dimensional polyhedral surface with rigid faces of maximal dimension and hinges at $(n-2)$-dimensional faces. In the same way we may define the concept of flexible polyhedra in Lobachevsky spaces Λ^n and in the round spheres $\mathbb{S}^n$.

Flexible polyhedra in the three-space has been extensively studied since the first examples of self-intersected flexible octahedra were constructed by Bricard in 1897. The next important step was the construction by Connelly in 1977 of the non-self-intersected flexible polyhedra. The situation with multi-dimensional flexible polyhedra was much worse because of the lack of examples of them. Only in 1998 the first example of a flexible polyhedron in $\mathbb{E}^4$ was constructed by Walz. Further examples were constructed by Stachel in 2000. Nevertheless, no examples of flexible polyhedra in dimensions 5 and higher have been known.

The first part of the talk will be devoted to a new construction of (self-intersected) flexible cross-polytopes in the spaces $\mathbb{E}^n$, Λ^n, and $\mathbb{S}^n$ of all dimensions n, which has been found by the speaker in 2013, see [4]. We shall give the classification of all flexible cross-polytopes in each of these spaces, and, for each of them, we shall write explicitly the parametrization of the flexion in either rational or elliptic functions.

One of the most amazing facts in the theory of flexible polyhedra is Sabitov's theorem [5] claiming that the volume of any flexible polyhedron in $\mathbb{E}^3$ remains constant under the flexion. Earlier this assertion was known as the Bellows conjecture. Sabitov's theorem was generalized to higher dimensions by the speaker [2], [3].

The second part of the talk will contain new results of the speaker on the Bellows conjecture in non-Euclidean spaces, i. e., in $\mathbb{S}^n$ and Λ^n. Alexandrov [1] found a counter-example to the Bellows conjecture in the three-dimensional sphere, i. e., a flexible polyhedron in $\mathbb{S}^3$ with non-constant volume. We shall present examples of flexible polyhedra with non-constant volumes in all spheres $\mathbb{S}^n$. So the Bellows conjecture does not hold for spheres.

One of the main results of the talk will concern the Bellows conjecture in Lobachevsky spaces. We shall describe a new approach based on the study of the analytic continuation of the volume of a simplex in Λ^n that allows us to prove the following theorem.

Theorem. *The Bellows conjecture is true in all Lobachevsky spaces Λ^n of odd dimensions $n \geq 3$. In other words, the volume of any flexible polyhedron in Λ^n, where n is odd and $n \geq 3$, is constant during the flexion.*

References

[1] V. Alexandrov, "An Example of a Flexible Polyhedron with Nonconstant Volume in the Spherical Space", *Beitr. Algebra Geom.*, Vol. 38, No. 1, 11-18 (1997).

[2] A. A. Gaifullin, "Sabitov polynomials for volumes of polyhedra in four dimensions", *Adv. Math.*, Vol. 252, 586-611 (2014).

The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project 14-01-00537), by a grant of the President of Russian Federation (project MD-2969.2014.1), and by a grant of Dmitri Zimin's "Dynasty" foundation.

[3] A. A. Gaifullin, “Generalization of Sabitov’s Theorem to Polyhedra of Arbitrary Dimensions”, *Discrete Comput. Geom.*, Vol. 52, No. 2, 195-220 (2014).
[4] A. A. Gaifullin, “Flexible cross-polytopes in spaces of constant curvature”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, Vol. 286 (2014), to appear.
[5] I. Kh. Sabitov, “Volume of a polyhedron as a function of its metric”, *Fundam. Appl. Math.* Vol. 2, No. 4,1235-1246 (1996) (in Russian).

Steklov Mathematical Institute, Gubkina str., 8, Moscow, 119991, Russia
E-mail address: agaif@mi.ras.ru

GEOMETRY OF THE EVALUATION MAP AND METRIC PROPERTIES OF POLYNOMIALS ON COMPACT HOMOGENEOUS SPACES

VICTOR MATVEEVICH GICHEV

Let $M = G/H$ be a homogeneous Riemannian space of a compact Lie group $G \subseteq \mathrm{Isom}(M)$, $\mathcal{E}$ be a finite dimensional G-invariant linear subspace of $L^2(M) = L^2(M, \sigma)$, where σ is the invariant probability measure on M. We say that functions $u \in \mathcal{E}$ are polynomials on M and use the evaluation mapping $\mathrm{ev} : M \to \mathcal{E}$ for estimation of some metric quantities related to u and calculation of their expectations and variances for random $u \in \mathcal{E}$. The mapping ev is defined by the equality $\langle u, \mathrm{ev}(p)\rangle = u(p)$ for all $p \in M$ and $u \in \mathcal{E}$. We normalize ev setting $\iota(p) = \frac{1}{c}\mathrm{ev}(p)$, where $c = |\mathrm{ev}(p)|$ is independent of p (in fact, $c = \sqrt{\dim \mathcal{E}}$). Hence ι is a G-equivariant mapping of M into the unit sphere $\mathcal{S}$ in $\mathcal{E}$. If M is isotropy irreducible (we assume this in what follows), then ι is an immersion and local metric homothety (a homogeneous space G/H is called isotropy irreducible if the action of H on T_oM is irreducible, where o denotes the class H in $M = G/H$). The metric properties of functions in $\mathcal{E}$ are closely connected with the geometry of ι. Set

$$\xi_{a,b}(u) = \int_M |u(p)|^a |\nabla u(p)|^b \, dp,$$

where $a, b \geq 0$ and $|\nabla u(p)|$ is the length of the vector $\nabla u(p)$. The expectation of the random variable $\xi_{a,b}$ is subject to the formula

$$\mathsf{M}_1(\xi_{a,b}) := \int_{\mathcal{S}} \xi_{a,b}(u)\, du = \frac{\Gamma\left(\frac{b+m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a+b+d+1}{2}\right)}(d+1)^{\frac{a+b}{2}} s^b,$$

where $m = \dim M$, $d = \dim \mathcal{S}$, and s is the coefficient of the local metric homothety ι. It is shown in [2] that $s = \sqrt{\frac{|\operatorname{Tr}\Delta|}{m(d+1)}}$, where Δ is the Laplace-Beltrami operator acting in $\mathcal{E}$. For the second moment and $a = 0$ we have

$$\mathsf{M}_2(\xi_{0,b}) = (cs)^{2b} \int_M \left(\int_{\mathcal{S}} |\pi_p u|^b |\pi_o u|^b \, du \right) dp,$$

where π_p, π_o are orthogonal projections in $\mathcal{E}$ onto $T_{\bar{p}}\bar{M}$ and $T_{\bar{o}}\bar{M}$, respectively. We denote $\bar{p} = \iota(p)$, $\bar{M} = \iota(M)$ for short. For $b = 2$ this integral can be calculated explicitly, for other b we get upper and lower bounds for the variance. The integral on the right depends on the geometry of the submanifold $\bar{M} \subseteq \mathcal{S}$. The coefficient cs is equal to the norm of the identity operator in $\mathcal{E}$ with L^2- and Lip_1-norms.

For any $t \in \mathbb{R}$ the level set $L_u^t = \{p \in M : u(p) = t\}$ is the pullback of the intersection of the hyperplane $\langle x, u\rangle = t$ with $\mathrm{ev}(M)$. Together with formulas of integral geometry in spheres, this makes it possible to estimate Hausdorff measures of the level sets.

References

[1] S. Zelditch, "Local and global analysis of eigenfunctions on Riemannian manifolds", *Ji, Lizhen (ed.) et al., Handbook of geometric analysis* No. 1, Somerville, MA: International Press; Beijing: Higher Education Press. Advanced Lectures in Mathematics (ALM) 7, 545–658 (2008).

[2] V. M. Gichev, "Metric properties in the mean of polynomials on compact isotropy irreducible homogeneous spaces", *Anal.Math.Phys.*, Vol. 3, No. 2, 119–144 (2013).

Sobolev Institute of Mathematics (Omsk Branch), Pevtsova 13, Omsk, 644029, Russia
E-mail address: gichev@ofim.oscsbras.ru

STOKER'S THEOREM FOR THE DELAUNAY GRAPH

ALEXEY MICHAILOVICH GURIN

Stoker's hypothesis [1] states that two isomorphic convex polyhedron in Euclidean space with equal corresponding dihedral angles have equal and corresponding plane angles. Under certain additional conditions hypothesis Stoker performed [2, 3]. The report will prove a conjecture Stoker for voids Delaunay graph.

Theorem 1. *Given two isomorphic Delaunay graph D1 and D2 such that the corresponding pairs dihedral angles voids Delaunay graphs D1 and D2 are equal. Then the plane angles are equal in corresponding pairs of faces in the plane angles voids Delaunay graphs D1 and D2.*

Theorem 2. *Graphs D1 and D2 in general differ up to homothety.*

References

[1] J. J. Stoker, "Geometrical problems concerning polyhedra in the large", *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol. 21, 119–168 (1968).

[2] H. Karcher, "Remarks on polyhedra with given dihedral angles", *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol. 21, 169–174 (1968).

[3] A. M. Gurin, "Stoker hypothesis is true for octahedra with acute-angled edges", *Modern Problems of Mathematics and Mechanics, Academy of the University of Moscow*, Vol. 6, No. 2, 207–211 (2011).

Kharkov Karazin University, Kharkov, Ukraina
E-mail address: alexgu@ya.ru

THE GROWTH POINTS OF BOOLEAN VALUED ANALYSIS

ALEXANDER EFIMOVICH GUTMAN, ANATOLY GEORGIEVICH KUSRAEV,
SEMEN SAMSONOVICH KUTATELADZE

Boolean valued analysis is a powerful method of extending the scope of mathematical theories by means of the special nonstandard models of set theory. This communication will pay attention to the following issues:

1. The Continuum Hypothesis
   1.1. Cantor's formulation
      1.1.1. The beginning of set theory
      1.1.2. The notion of continuum
      1.1.3. The Continuum Problem
   1.2. Gödel's independence result
      1.2.1. The universe of constructible sets
      1.2.2. An inner model of ZFC+CH in ZF
      1.2.3. The Continuum Hypothesis cannot be disproven
   1.3. Cohen's independence result
      1.3.1. The universe of Boolean valued sets
      1.3.2. A Boolean valued inner model of ZFC+¬CH in ZFC
      1.3.3. The Continuum Hypothesis cannot be proven
   1.4. Other independence results
2. Kantorovich spaces
   2.1. Key notions
      2.1.1. The notion of vector lattice
      2.1.2. The notion of Kantorovich space
      2.1.3. The Boolean algebra of band projections
   2.2. Boolean valued interpretation of the reals
      2.2.1. Kantorovich's heuristic transfer principle
      2.2.2. Gordon's theorem
      2.2.3. The birth of Boolean valued analysis
3. The machinery of Boolean valued analysis
   3.1. Ascents and descents
   3.2. The Boolean valued transfer
   3.3. Applications
      3.3.1. Intrinsic characterization of subdifferentials
      3.3.2. General desintegration in Kantorovich space
      3.3.3. The Kaplansky Problem: Homogeneity of a type I AW^*-algebra
      3.3.4. The Wickstead Problem: Order boundedness of band preserving operators
      3.3.5. The Maharam extension of a positive operator
      3.3.6. Classification of injective Banach lattices

Novosibirsk State University, Pirogova st., 2, Novosibirsk, 630090, Russia;
Southern Mathematical Institute, Markus st., 22, Vladikavkaz, 362027, Russia;
Sobolev Institute of Mathematics, Acad. Koptyug av., 4, Novosibirsk, 630090, Russia

E-mail address: gutman@math.nsc.ru, kusraev@smath.ru, sskut@math.nsc.ru

METRIC ASPECTS OF CARNOT–CARATHÉODORY SPACES AND APPLICATIONS

MARIA BORISOVNA KARMANOVA

We study new fine properties of Carnot–Carathéodory metric structures and solve complicated geometric measure theory problems on non-holonomic structures. A special accent is made on new ideas of statement and solution of questions on different non-holonomic objects.

Definition (see, e. g., [1]**).** Let $\mathbb{M}$ be a C^∞-manifold of a topological dimension N. The manifold $\mathbb{M}$ is called a *Carnot–Carathéodory space* if its tangent bundle $T\mathbb{M}$ admits a filtration

$$H\mathbb{M} = H_1\mathbb{M} \subsetneq \ldots \subsetneq H_i\mathbb{M} \subsetneq \ldots \subsetneq H_M\mathbb{M} = T\mathbb{M}$$

such that for each point $p \in \mathbb{M}$ there exists a neighborhood $U \subset \mathbb{M}$, $U \ni p$, with a collection of C^1-smooth basis vector fields $X_1, \ldots, X_N$, possessing the the following properties.

(1) At each $v \in U$, a subspace $H_i\mathbb{M}(v) = H_i(v) = \operatorname{span}\{X_1(v), \ldots, X_{\dim H_i}(v)\} \subset T_v\mathbb{M}$ has the dimension $\dim H_i$ independently of v, $i = 1, \ldots, M$.

(2) The inclusions $[H_i, H_j] \subset H_{i+j}$, $i, j = 1, \ldots, M-1$, $i + j \leq M$, hold on U.

Moreover, if the third property holds then a Carnot–Carathéodory space is called a *Carnot manifold*:

(3) $H_{j+1} = \operatorname{span}\{H_j, [H_1, H_j], [H_2, H_{j-1}], \ldots, [H_k, H_{j+1-k}]\}$, where $k = \left[\frac{j+1}{2}\right]$, $H_0 = \{0\}$, $j = 1, \ldots, M-1$.

The subbundle $H\mathbb{M}$ is called *horizontal*.

The number M is called a *depth* of $\mathbb{M}$.

The main geometric result is the theorem on comparison of local structures of local Carnot groups with a space itself. This problem was formulated and solved recently for the first time, and the result is new even for the case of smooth basis vector fields. Moreover, it implies plenty of underlying facts for Carnot–Carathéodory spaces' theory (we will pay some attention to them: Rashevskii–Chow Theorem, Ball–Box-Theorem, Local Approximation Theorems etc), for the "C^1-case". The majority of "classical" statements was unknown earlier for this case.

Theorem [2, 3]**.** *Let $\mathbb{M}$ be a Carnot–Carathéodory space with $C^{1,\alpha}$-smooth basis vector fields, $\alpha \geq 0$. Then for each $p \in \mathbb{M}$ there exists a sufficiently small neighborhood $\mathcal{U} \Subset \mathbb{M}, \mathcal{U} \ni p$, having the following property: for $u, v \in \mathcal{U}$, $w = \gamma(1)$ and $\widehat{w} = \widehat{\gamma}(1)$, where $\gamma, \widehat{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{M}$ are absolutely continuous (in the classical sense) curves lying in* $\operatorname{Box}(u, \varepsilon)$*, such that*

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^{N} b_i(t) X_i(\gamma(t)), \quad \gamma(0) = v, \qquad \dot{\widehat{\gamma}}(t) = \sum_{i=1}^{N} b_i(t) \widehat{X}_i^u(\gamma(t)), \quad \widehat{\gamma}(0) = v,$$

and each measurable function $b_i(t)$ satisfies the inequality $\int\limits_0^1 |b_i(t)|\, dt < S\varepsilon^{\deg X_i}$, $S < \infty$, $i = 1, \ldots, N$, we have $\max\{d_\infty(w, \widehat{w}), d_\infty^u(w, \widehat{w})\} = \begin{cases} O(\varepsilon^{1+\frac{\alpha}{M}}), & \alpha > 0, \\ o(\varepsilon), & \alpha = 0, \end{cases}$ where $O(1)$ and $o(1)$ are uniform in $u \in \mathcal{U}$, $v \in \operatorname{Box}(u, \varepsilon)$ and $\{b_i(t)\}_{i=1}^N$ with the above condition, as $\varepsilon \to 0$.

This result has been useful in the development of sub-Riemannian differentiability theory, see, e. g. [4]. Thus, there is a possibility to formulate and solve various geometric measure theory problems. In the next theorems we prove non-holonomic versions of the area and coarea formulas, and describe classes of minimal surface in Carnot groups. Emphasize that the area formula is proved for the first time for intrinsically Lipschitz mappings of Carnot–Carathéodory

The research was supported by RFBR, Grant 14-01-31063.

spaces those do not have any group structure, and the ideas of the proof are essentially new even for classical Euclidean case.

Theorem [5]. *Let $\mathbb{M}$ be a Carnot manifold, $\widetilde{\mathbb{M}}$ be a Carnot–Carathéodory space such that $\dim H \leq \dim \widetilde{H}$, and basis vector fields in the image and preimage are of the class C^1, $D \subset \mathbb{M}$ is a measurable set, and $\varphi : D \to \widetilde{\mathbb{M}}$ be a Lipschitz w. r. t. sub-Riemannian (quasi)metrics mapping. The area formula holds:*

$$\int\limits_D f(x)\sqrt{\det\bigl(\widehat{D}\varphi(x)^*\widehat{D}\varphi(x)\bigr)}\, d\mathcal{H}^\nu(x) = \int\limits_{\varphi(D)} \sum_{x:\, x\in\varphi^{-1}(y)} f(x)\, d\mathcal{H}^\nu(y),$$

where $f : D \to \mathbb{E}$ ($\mathbb{E}$ is a Banach space) is such that the product $f(x)\sqrt{\det\bigl(\widehat{D}\varphi(x)^*\widehat{D}\varphi(x)\bigr)}$ is integrable. Hausdorff measures are constructed w. r. t. "box" quasimetrics.

The coarea formula is proved for the first time for "non-holonomic-valued" mappings. They are defined also for the first time on a structure not being a group. The proof required new ideas and facts such as a ratio of "Riemannian" and "sub-Riemannian" measures on level sets.

Theorem [6]. *Let $\mathbb{M}$ be a Carnot manifold and $\widetilde{\mathbb{M}}$ be a Carnot–Carathéodory space. Assume that $\dim H_1 \geq \dim \widetilde{H}_1$ $\dim H_k - \dim H_{k-1} \geq \dim \widetilde{H}_k - \dim \widetilde{H}_{k-1}$, $k = 2, \dots, M$. For a contact mapping $\varphi : \mathbb{M} \to \widetilde{\mathbb{M}}$ of a class $\varphi \in C^1(\mathbb{M}, \widetilde{\mathbb{M}})$ if $\mathcal{H}^\nu(\chi) = \mathcal{H}^N(\chi) = 0$, and of a class $\varphi \in C^{M+1}(\mathbb{M}, \widetilde{\mathbb{M}})$ in other cases, the following coarea formula holds:*

$$\int\limits_{\mathbb{M}} f(x)\sqrt{\det\bigl(\widehat{D}\varphi(x)\widehat{D}\varphi(x)^*\bigr)} \cdot \frac{\omega_N}{\omega_\nu}\frac{\omega_{\widetilde{\nu}}}{\omega_{\widetilde{N}}}\frac{\omega_{\nu-\widetilde{\nu}}}{\prod\limits_{k=1}^{M}\omega_{n_k-\widetilde{n}_k}}\, d\mathcal{H}^\nu(x) = \int\limits_{\widetilde{\mathbb{M}}} d\mathcal{H}^{\widetilde{\nu}}(t) \int\limits_{\varphi^{-1}(t)} f(u)\, d\mathcal{H}^{\nu-\widetilde{\nu}}(u),$$

where $f : D \to \mathbb{E}$ ($\mathbb{E}$ is a Banach space) is such that the product $f(x)\sqrt{\det\bigl(\widehat{D}\varphi(x)\widehat{D}\varphi(x)^*\bigr)} \cdot \frac{\omega_N}{\omega_\nu}\frac{\omega_{\widetilde{\nu}}}{\omega_{\widetilde{N}}}\frac{\omega_{\nu-\widetilde{\nu}}}{\prod_{k=1}^{M}\omega_{n_k-\widetilde{n}_k}}$ is integrable. Hausdorff measures are constructed w. r. t. "box" quasimetrics.

Results are applied to description of classes of minimal surfaces on Carnot groups.

Theorem [7]. *Graph-surfaces defined on horizontally attainable domains of some Carnot groups are minimal (in the class of graphs of $\varphi + \varepsilon\psi$, where $\|\psi\|_{H,2} \geq L\|\psi\|_{H,4}$) if and only if $\sum\limits_{j=1}^{\dim V_1} X_j\Bigl\langle \frac{X_j\varphi}{\sqrt{1+|\widehat{D}\varphi(x)|^2}}\Bigr\rangle(x) = 0$ a. e. Here $\|\psi\|_{H,m} = \Biggl(\int\limits_D |\widehat{D}\psi(x)|_i^m\, d\mathcal{H}^\nu(x)\Biggr)^{\frac{1}{m}}$, $\qquad m \in \mathbb{N}$.*

References

[1] S. G. Basalaev, S. K. Vodopyanov, "Approximate differentiability of mappings of Carnot–Carathéodory spaces", *Eurasian Math. J.*, Vol. 4, No. 2, 10-48 (2013).

[2] M. Karmanova, S. Vodopyanov, "On Local Approximation Theorem on Equiregular Carnot–Carathéodory Spaces", In: *Proc. INDAM Meeting on Geometric Control and Sub-Riemannian Geometry (Cortona, May 2012).*, Vol. 5, 241-262, Springer INDAM Ser., (2014).

[3] M. B. Karmanova, "Fine properties of basis vector fields on Carnot–Carathéodory psaces under minimal smoothness", *Sib. Math. J.*, Vol. 55, No. 1, 87-99 (2014).

[4] S. Vodopyanov, "Geometry of Carnot–Carathéodory Spaces and Differentiability of Mappings", In: *The Interaction of Analysis and Geometry*, Contemporary Mathematics, Vol. 424, 247-301, AMS, (2007).

[5] M. B. Karmanova, "Area formula for Lipschitz mappings of Carnot–Carathéodory spaces", *Izv. RAS, Ser. Math.*, Vol. 78, No. 3, 53-78 (2014).

[6] M. Karmanova, S. Vodopyanov, "Coarea Formula for Smooth Contact Mappings of Carnot-Caratheodory Spaces", *Acta Appl. Math.*, Vol. 128, No. 1, 67-111 (2013).

[7] M. B. Karmanova, "Graphs of Lipschitz functions and minimal surfaces on Carnot groups", *Sib. Math. J.*, Vol. 53, No. 4, 839-861 (2012).

Sobolev Institute of Mathematics, pr-t Akademika Koptyuga, 4, Novosibirk, 630090, Russia
E-mail address: maryka@math.nsc.ru

RIGIDITY CONDITIONS FOR THE BOUNDARIES OF SUBMANIFOLDS IN A RIEMANNIAN MANIFOLD

ANATOLY PAVLOVICH KOPYLOV, MIKHAIL VYACHESLAVOVICH KOROBKOV

Developing A. D. Aleksandrov's ideas, in [1] (see also [2]), the first-named author of this lecture proposed the following approach to study of rigidity problems for the boundary of a C^0-submanifold in a smooth Riemannian manifold. Let Y_1 be a 2-dimensional compact connected C^0-submanifold with nonempty boundary in a 2-dimensional smooth connected Riemannian manifold (X, g) without boundary satisfying the condition

$$\rho_{Y_1}(x, y) = \liminf_{x' \to x, y' \to y, x', y' \in \operatorname{Int} Y_1} \{[l(\gamma_{x', y', \operatorname{Int} Y_1})]\} < \infty,$$

if $x, y \in Y_1$. Here, $\inf[l(\gamma_{x',y',\operatorname{Int} Y_1})]$ is the infimum of the length of smooth paths joining x' and y' in the interior $\operatorname{Int} Y_1$ of Y_1. In the present lecture, we first establish that ρ_{Y_1} is a metric on Y_1. Suppose further that Y_1 is strictly convex in the metric ρ_{Y_1}. Consider another 2-dimensional compact connected C^0-submanifold Y_2 of X with boundary satisfying the condition $\rho_{Y_2}(x, y) < \infty$, $x, y \in Y_2$, and assume that ∂Y_1 and ∂Y_2 are isometric in the metrics ρ_{Y_j}, $j = 1, 2$. There appears the following natural question: Under which additional conditions are the boundaries ∂Y_1 and ∂Y_2 of Y_1 and Y_2 isometric in the metric ρ_X of the ambient manifold X? The lecture is devoted to the detailed discussions of this question. In it, we in particular obtain new results concerning the rigidity problems for the boundaries of C^0-submanifolds in a Riemannian manifold. The case of $\dim Y_j = \dim X = n$, $n > 2$, is also considered.

References

[1] A. P. Kopylov, A rigidity condition for the boundary of a submanifold in a Riemannian manifold, *Doklady Mathematics*, **77**, no.3, 340-341 (2008).

[2] A. P. Kopylov, Unique determination of domains, *In: Differential Geometry and its Applications*. Hackensack, NJ: World Sci. Publ., P. 157-169 (2008).

Sobolev Institute of Mathematics, Acad. Koptyuga pr., 4, 630090 Novosibirsk, Russia

Novosibirsk State University, Pirogova str., 2, 630090 Novosibirsk, Russia
E-mail address: apkopylov@yahoo.com

Sobolev Institute of Mathematics, Acad. Koptyuga pr., 4, 630090 Novosibirsk, Russia

Novosibirsk State University, Pirogova str., 2, 630090 Novosibirsk, Russia
E-mail address: korob@math.nsc.ru

The authors were partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grant 11-01-00819-a), the Interdisciplinary Project of the Siberian and Far-Eastern Divisions of the Russian Academy of Sciences (2012-2014 no. 56), the State Maintenance Program for the Leading Sci- entific Schools of the Russian Federation (Grant NSh-921.2012.1) and the Exchange Program between the Russian and Polish Academies of Sciences (Project 2014-2016).

DERIVATION OF EXACT COUPLES IN P-SEMI-ABELIAN CATEGORIES

YAROSLAV ANATOL'EVICH KOPYLOV

We consider an exact couple in a semi-abelian category in the sense of Palamodov, i.e., in an additive category in which every morphism has a kernel and a cokernel and the induced morphism between the coimage and the image is always monic and epic, that is, a *bimorphism*. Assume that the morphisms in the couple are strict, i.e., induce isomorphisms between their coimages and images. We show that, in this case, the classical construction of Eckmann and Hilton produces two derived couples which are connected by a natural bimorphism. The two couples correspond to the a priori distinct cohomology objects, the left and right cohomology arising in connection with the initial exact couple. The derivation process can be iterated under some additional assumptions.

This is a joint work with Sven-Ake Wegner (Wuppertal), published in [1].

References

[1] Ya. A. Kopylov and S. A. Wegner, "Exact couples in semiabelian categories revisited," *J. Algebra*, Vol. 414, 264–270.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, 630090, RUSSIA
E-mail address: yakop@math.nsc.ru

Partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grant 12-01-00873-a) and the State Maintenance Program for the Leading Scientific Schools and Junior Scientists of the Russian Federation (Grant NSh-921.2012.1).

PRIME DECOMPOSITIONS OF KNOTS IN THICKENED KLEIN BOTTLE

PHILIPP GLEBOVICH KORABLEV

Let K^2 be a Klein bottle, and let $K^2\widetilde{\times}I$ be a skew product of it to an interval. We call obtained manifold *thickened Klein bottle*. By knot in thickened Klein bottle we mean (as in classical knot theory) simple closed curve $K \subset Int(K^2\widetilde{\times}I)$. Define two types of reductions of knot K in thickened Klein bottle $K^2\widetilde{\times}I$.

Annuli reduction. Let $A_1, A_2 \subset K^2\widetilde{\times}I$ two disjoint parallel vertical annuli, such that each of them intersects a knot $K \subset K^2\widetilde{\times}I$ in exactly one point. Then *annuli reduction* consists in the following: we cut the manifold $K^2\widetilde{\times}I$ along annuli A_1, A_2 and then glue parts along copies of these annuli so as to obtain two knots in thickened Klein bottles (fig. 1).

Spherical reduction. Let $S \subset K^2\widetilde{\times}I$ be a sphere, which bound a ball $B \subset Int(K^2\widetilde{\times}I)$ such that intersection $B \cap K$ consists of exactly one arc. Then *spherical reduction* consists in the following: we cut the manifold $K^2\widetilde{\times}I$ along sphere S and attach 3-balls with trivial arcs inside to obtained spherical boundary components.

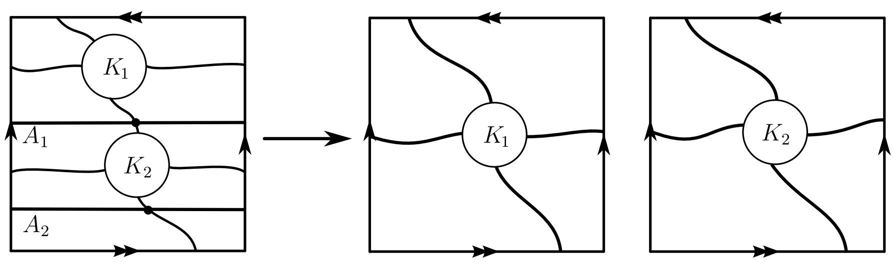


Figure 1. Reduction along annuli A_1, A_2 of knot in thickened Klein bottle. As a result we obtain two knots in $K^2\widetilde{\times}I$. Parts K_1 and K_2 are tangles with four endpoints.

Spherical reduction can be defined not only for knots in thickened Klein bottle, but also for classical knots in S^3. In this case this operation is inverse of connecting sum. Annuli reductions for knots in thickened orientable surfaces studied in [1, 2, 4].

Theorem. *Let $K \subset K^2\widetilde{\times}I$ be a knot in thickened Klein bottle. Will apply to it nontrivial annuli and spherical reductions until it possible. Then this process is finite. Moreover, the resulting set of knots in thickened Klein bottles and 3-spheres unique up to deleting horizontal knots in thickened Klein bottle.*

The proof of this theorem based in methods of the root theory, which originally developed in [3] and then improved in [1, 4, 5].

References

[1] F.G. Korablev, S.V. Matveev, "Reductions of knots in thickened surfaces and virtual knots" *Doklady Mathematics*, V. 437, No. 6, 748–750 (2011).

[2] Matveev S., "Prime decompositions of knots in $T^2 \times I$" *Topology and its Applications*, V. 159, No. 7, 1820–1824 (2012).

[3] C. Hog-Angelony, S. Matveev, "Roots in 3-manifold topology" *Geometry and Topology Monograph*, V. 14, 295–319 (2008).

[4] Matveev S.V., "Roots and decompositions of three-dimensional topological objects", *Russian Mathematical Surveys* V. 67, No 3, 63–114 (2012).

[5] Matveev S., Turaev V., "A semigroup of theta-curves in 3-manifolds", *Moscow Mathematical Journal*, V. 4, 805–814 (2010).

Chelyabinsk State University, Br. Kashirinykh str., 129, Chelyabinsk, Russia
E-mail address: korablev@csu.ru

ALMOST CONTACT STRUCTURES ON 5-DIMENSIONAL MANIFOLDS

EUGENE SERGEEVICH KORNEV, YAROSLAVNA VIKTOROVNA SLAVOLYUBOVA

Let M be a C^∞-manifold of dimension $2n+1$ and α be a 1-form on M. A radical of 1-form α is a vector fields variety $\mathrm{rad}\alpha = \{X \in C^\infty(TM) : d\alpha(X,Y) = 0 \quad \forall Y \in C^\infty(TM)\}$. 1-form α is a almost contact structure on M if exists a vector field ξ (called a characteristic vector field) so that $\alpha(\xi) = 1$ and $\xi \in \mathrm{rad}\alpha$. In fact, almost contact structure on M is a pair (α, ξ). Homogeneous almost contact structure on three-dimensional manifolds have been classified in [1]. We try to describe and research an almost contact structures on five-dimensional manifolds. Also, we provide the example of five-dimensional manifold that no admits a standard contact structures, but admits a natural almost contact structures. The common result proved in [2] for any dimension follows that any almost contact form on five-dimensional manifold may have only radical of dimension 1 (contact form), 3, or 5 (closed form). We provide the example of almost contact form having a radical of dimension 3 on five-dimensional manifold.

It is known that group $SO(6)$ transitively acts on sphere S^5. We proved the next result:

Theorem 1. *Five-dimensional sphere S^5 no admits $SO(6)$-invariant unclosed almost contact structures.*

However, when S^5 is considered as Hopf bundle $S^5 \to \mathbb{C}p^2$ with fibre $S^1 \cong U(1)$, group $U(1)$ acts on S^5 not transitively. In this case, pair (ω, ξ), where ω is a connection form of Hopf bundle and ξ is vector field tangent to $U(1)$ action orbit, always is $U(1)$-invariant almost contact structure on S^5.

On sphere S^5 exists the vector field ξ totaly no vanishing over S^5. Let g be a Riemannian metric on S^5 so that $g(\xi,\xi) = 1$ and α be a 1-form so that $\alpha(X) = g(\xi, X) \quad \forall X \in C^\infty(TS^5)$. We provide several geometric conditions when pair α, ξ must be a almost contact structure on S^5. More exactly, we proved the next statement:

Theorem 2. *Pair (α, ξ) will be a almost contact structure on S^5 if it is satisfied one of the following conditions:*

(1) *ξ is the geodesic vector field;*
(2) *$lie_\xi\, g = 0$;*
(3) *for any vector field $X \in C^\infty(TS^5)$ the vector fields bracket $[\xi, X]$ is orthogonal to ξ.*

Let G be a five-dimensional unsolvable Lie group. The Levi Maltsev theorem follows that Lie algebra of this group is isomorphic to $\mathfrak{s} \rtimes \mathfrak{r}$, where $\mathfrak{s}$ is either $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ or $\mathfrak{so}(3)$, and $\mathfrak{r}$ is either $\mathbb{R}^2$ or $\mathfrak{e}(1)$. $E(1)$ denotes the motion groups of line $\mathbb{R}$. For these Lie algebras we provide several result about existing and appearance of left-invariant almost contact structures with depending on their radical and characteristic vector field. For these purposes we define a radical index concept as intersection of three-dimension radical of almost contact form and solvable ideal $\mathfrak{r}$.

Finally, as instance of five-dimensional nilpotent Lie group we consider the five-dimensional Heisenberg group. For this group, we provide basic left-invariant almost contact structures along with their radicals.

References

[1] G. Calvaruso, "Three-dimensional homogeneous almost contact metric structures", *Journal of Geometry and Physics*, Vol. 69, 60-73 (2013).

[2] E. Kornev, "Invariant Affinor Metric Structures on Lie Groups", *Siberian Mathematical Journal*, Vol. 53, No. 1, 89-102 (2012).

Kemerovo State University, Krasnaya str., 6, Kemerovo, 650043, Russia
E-mail address: q148@mail.ru

Plekhanov Russian University of Economics, Kuznetsky Av., 39, Kemerovo, 650992, Russia
E-mail address: jar1984@mail.ru

Supported by RFBR (grant 12-01-00873) and Scientific schools supporting program (project SS-4382.2014.1).

COMBINATORIAL SOLUTIONS TO INTEGRABLE HIERARCHIES

SERGEI KONSTANTINOVICH LANDO

Integrable hierarchies of partial differential equations appeared as a tool to describe the behavior of waves of special kind. It happened, however, that their solutions include very interesting formal ones, whose coefficients give answers to natural enumerative problems. According to Sato construction (1980), these solutions can be expressed in terms of Young diagrams and Schur polynomials. A spectacular example of such solution is the Witten–Kontsevich potential, which is the generating function for certain geometric parameters of moduli spaces of complex structures on curves. For such solutions, the equations of the hierarchies can be interpreted as recurrence relations allowing one to efficiently compute the coefficients of the corresponding formal power series.

It will be explained how to construct solutions to the Kadomtsev–Petviashvili integrable hierarchy by means of Schur polynomials, and examples will be given, including those found recently, of enumerative problems leading to such solutions.

National Research University Higher School of Economics, 7 Vavilova, Moscow, 117312, Russia

E-mail address: `lando@hse.ru`

ON A NOTION OF SEPARATION BETWEEN SPACE-TIMES

[1*]ALEXANDER VLADIMIROVICH LEVICHEV, [2]ANDREY YURIEVICH PALYANOV

The notion of separation between space-times [1] plays an important role in the theoretical foundation of the Penrose-Hameroff model of consciousness [2]. The definition of such a separation is based on introducing of a Newtonian limit in General Relativity (GR). The goal of our study (which we have started in [3]) is to modify the Penrose-Hameroff model by using the DLF-theory [4, 5] instead and by introducing an alternative notion of separation (or *distance*) between space-times. We introduce a certain class K of GR homogeneous space-times (or *worlds*).

Within the *compact model* [4], each of these worlds is a dense subset of the Lie group U(2) - see [4, Theorems 6 and 10, and 5, Theorem 2], where the worlds D, L, F are introduced and described. The entire class K is obtained by applying (conformal) transformations g given by [4, formula (1.1)]:

$$g(z)=(Az + B)(Cz + D)^{-1}, \quad (1)$$

where z is an arbitrary event in the world chosen, and an element g is determined by 2×2 blocks A, B, C, D. These transformations form a matrix group SU(2,2). It is instrumental that U(2) admits a positive definite bi-invariant metric (besides the Lorentzian one).

Our approach is based on the suitable integration of the conformal factor f of the (above introduced) transformation g.

Definition. *Let $V = \{z\colon f(z) > 1\}$, $W = \{z\colon f(z) < 1\}$. The distance between the two space-times (where one is obtained from the other by the transformation (1) above) is introduced as the sum of logarithms of the two integrals:*

$$\ln \{[\text{Integral over } V \text{ of } f^{4}]/\text{Vol } V\} + \ln \{[\text{Integral over } W \text{ of } f^{-4}]/\text{Vol } W\}.$$

In the case when the first world is the entire U(2), we prove the existence of these integrals as well as we consider in detail a particular one-parameter group of type (1) conformal transformations.

Conclusion. *It is expected that results of our study will help to shed more light on the theoretical basis of the Penrose-Hameroff model.*

References

[1] R. Penrose, "Gravity and quantum mechanics", in: *General Relativity and Gravitation 13. Part 1: Plenary Lectures 1992. Proceedings of the Thirteenth International Conference on General Relativity and Gravitation held at Cordoba, Argentina, 28 June - 4 July 1992*, Inst. of Phys. Publ. Bristol and Philadelphia, 179-89 (1993).

[2] S. Hameroff, R. Penrose, "Consciousness in the universe: A review of the 'Orch OR' theory", *Physics of Life Reviews (Elsevier)*, Vol. 11, No. 1, 39-78 (2014).

[3] A. Levichev, A. Palyanov, "On a modification of the theoretical basis of the Penrose-Hameroff model of consciousness", in: *International Conference MM-HPC-BBB-2014, Abstracts*, Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Institute of Cytology and Genetics SB RAS, 49 (2014).

[4] A. V. Levichev, "Pseudo-Hermitian realization of the Minkowski world through DLF theory", *Physica Scripta*, Vol. 83, No. 1, 1-9 (2011).

[5] A. V. Levichev, J. Feng, "More on the Mathematics of the DLF Theory: Embedding of the Oscillator World L into Segal's Compact Cosmos D", *AJUR*, Vol. 11, No. 3-4, 29-33 (2013).

[1]Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia,
E-mail address: alevichev@gmail.com

[2]A.P. Ershov Institute of Informatics Systems SB RAS, Novosibirsk

*Corresponding author.

ON LOCAL COMBINATORICS AT A FACE OF A PARALLELOHEDRAL TILING

ALEXANDER NIKOLAEVICH MAGAZINOV

A parallelohedron is a convex polytope P such that there exists a face-to-face tiling of $\mathbb{R}^d$ by translates of P. We will denote the tiling by $T(P)$.

Let F be an arbitrary $(d-k)$-face of $T(P)$, where $1 \leq k \leq d$. Denote by proj_F the projection along the affine hull of F onto a complementary k-dimensional plane α. If $P_1, P_2, \ldots, P_m$ are all parallelohedra of $T(P)$ that share F, then the projections $\mathrm{proj}_F(P_i)$ split a small k-dimensional neighbourhood of the point $v = \mathrm{proj}_F(F)$ in the same way as the k-dimensional complete polyhedral fan $\mathrm{Fan}(F)$ does. In this talk we will focus on the properties of the fan $\mathrm{Fan}(F)$.

The following old result was obtained by B. N. Delaunay [1] in 1929.

Theorem 1. *Assume that $k = 3$, meaning that $\mathrm{Fan}(F)$ is 3-dimensional. Then $\mathrm{Fan}(F)$ is combinatorially (and even affinely) equivalent to a fan of some vertex of some tiling of $\mathbb{R}^3$ by 3-dimensional parallelohedra. This gives a total of 5 possible combinatorial types of $\mathrm{Fan}(F)$.*

We will give a combinatorial proof of Theorem 1.

Theorem 1 says that, in some sense, the 3-dimensional fan $\mathrm{Fan}(F)$ cannot be too complex. For an arbitrary given dimension k of the fan $\mathrm{Fan}(F)$ the complexity is bounded as well. Namely, the following Theorem 2 holds.

Theorem 2. *Let P be a d-dimensional parallelohedron and F be a $(d-k)$-dimensional face of the tiling $T(P)$. Then F is shared by at most 2^k parallelohedra of $T(P)$. Or, equivalently, $\mathrm{Fan}(F)$ consists of at most 2^k full-dimensional cones.*

References

[1] B. N. Delaunay, Sur la partition régulière de l'espace à 4 dimensions, Izv. Acad. sci. of the USSR. Ser. VII. Sect. of phys. and math. sci., 1–2 (1929), 79–110, 147–164.

Steklov Mathematical Institute of RAS, 8 Gubkina street, Moscow 119991, Russia
E-mail address: magazinov-al@yandex.ru

BRANCHED COVERINGS AND AUTOMORPHISM GROUPS OF GRAPHS

ALEXANDER DMITRIEVICH MEDNYKH

Over the last decade, counterparts of many theorems from the classical theory of Riemann surfaces were derived in the discrete case. In these theorems, the finite graphs play the role of Riemann surfaces and the conformal automorphisms are replaced by harmonic ones. We say that a finite group act harmonically on a graph if it acts freely on the set of directed edges. Following [2] we define genus of a graph as the rank of its homology group.

In this lecture we give a short survey of the results about branched coverings of graphs. This notion was introduced independently by many authors. See, for example, paper [1] for one of the first expositions and paper [2] for the list of references. The branched covering of graphs are also known as harmonic maps or vertically holomorphic maps of graphs. The main idea of the present talk to is create a parallel between classical results on branched covering of Riemann surfaces and those for graphs. We discuss the Hurwitz upper for the number of automorphisms acting harmonically on the graph of a prescribed genus. We present a few discrete versions of the Wiman, Oikawa and Arakawa theorems for graphs.

References

[1] T. D. Parsons, T. Pisanski, P.Jackson, "Dual imbeddings and wrapped quasi-coverings of graphs", *Discrete Mathematics*, Vol. 31, No. 1, 43–52 (1980).

[2] B. Baker, S. Norine, "Harmonic morphisms and hyperelliptic graphs", *Int. Math. Res. Notes*, Vol. 15, 2914–2955 (2009).

Sobolev Institute of Mathematics, pr. Koptyuga, 4, Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: smedn@mail.ru

4-COLORED GRAPHS AND EXTERIOR OF LINKS

MICHELE MULAZZANI, PAOLA CRISTOFORI, EVGENY FOMINYKH, VLADIMIR TARKAEV

In [1] a representation for compact 3-manifolds with non-empty non-spherical boundary via 4-colored graphs (i.e. regular 4-valent graphs endowed by a proper edge-coloration with four colors) have been introduced, and a initial tabulation/classification of such manifolds have been obtained, up to 8 vertices for the representing graph.

Computer experiments show that the number of graphs/manifolds grows very rapidly with the increasing of the vertices. As a consequence we focused our attentions on the case of 3-manifolds which are the exterior of knots/links in the 3-sphere. In this context we obtained the tabulation of these 3-manifolds, up to 14 vertices of the representing graphs, showing the type of knots/links involved.

References

[1] P. Cristofori, M. Mulazzani, "Compact 3-manifolds via 4-colored graphs", *Preprint*, 2013. arXiv:1304.5070

Department of Mathematics, University of Bologna, Bologna, 40127, Italy
E-mail address: michele.mulazzani@unibo.it

COMMUTING DIFFERENTIAL OPERATORS WITH POLYNOMIAL COEFFICIENTS

VARDAN SPARTAKOVICH OGANESYAN

If two differential operators

$$L_n = \sum_{i=0}^{n} u_i(x)\partial_x^i, \quad L_m = \sum_{i=0}^{m} v_i(x)\partial_x^i$$

commute then there is a nonzero polynomial $R(z,w)$ such that $R(L_n, L_m) = 0$. The curve Γ defined by $R(z,w) = 0$ is called the *spectral curve.* If

$$L_n\psi = z\psi, \quad L_m\psi = w\psi$$

then $(z,w) \in \Gamma$. For almost all $(z,w) \in \Gamma$ the dimension of the space of common eigenfunctions ψ is the same. The dimension of common eigenfunctions of two commuting differential operators is called the *rank*. The rank equals common divisor of m and n.

If the rank is one there are explicit formulas for coefficients of commutative operators in terms of Riemann theta-functions (see [1]).The case when rank is greater than one is much more difficult.

In this talk we will consider new operators with polynomial coefficients of rank 2 and 3.

References

[1] I. M. Krichever, Integration of nonlinear equations by the methods of algebraic geometry, Func- tional Anal. Appl., 11: 1 (1977), 1226.

[2] O. I. Mokhov, On Commutative Subalgebras of the Weyl Algebra Related to Commuting Operators of Arbitrary Rank and Genus, Mat. Zametki, 94:2 (2013), 314316

[3] A. E. Mironov, Self-adjoint commuting differential operators and commutative subalgebras of the Weyl algebra. arXiv: 1107.3356.

Moscow State University
E-mail address: vardan.o@mail.ru

BOTT TOWERS AND EQUIVARIANT COBORDISM

TARAS EVGENIEVICH PANOV

A *Bott tower* of height n is a tower of fibre bundles

$$B_n \xrightarrow{p_n} B_{n-1} \xrightarrow{p_{n-1}} \cdots \longrightarrow B_2 \xrightarrow{p_2} B_1 \longrightarrow pt,$$

of complex manifolds, where $B_1 = \mathbb{C}P^1$ and $B_k = \mathbb{C}P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_{k-1})$ for $2 \leqslant k \leqslant n$. Here $\mathbb{C}P(\cdot)$ denotes complex projectivisation, ξ_{k-1} is a complex line bundle over B_{k-1} and $\underline{\mathbb{C}}$ is a trivial line bundle. The fibre of the bundle $p_k \colon B_k \to B_{k-1}$ is $\mathbb{C}P^1$.

The last stage B_n in a Bott tower is called a *Bott manifold*. Bott manifolds carry an algebraic torus action, and therefore constitute a family of smooth projective toric varieties.

Bounded flag manifolds are important examples of Bott manifolds. Their corresponding tower structure is defined as follows: in each $B_k = \mathbb{C}P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_{k-1})$ the bundle ξ_{k-1} is the tautological line bundle over $B_{k-1} = \mathbb{C}P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_{k-2})$, for $2 \leqslant k \leqslant n$. There is also the following alternative definition of bounded flag manifolds.

A *bounded flag* in $\mathbb{C}^{n+1}$ is a complete flag

$$\mathcal{U} = \{U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U_{n+1} = \mathbb{C}^{n+1}, \quad \dim U_i = i\}$$

for which U_k, $2 \leq k \leq n$, contains the coordinate subspace $\mathbb{C}^{k-1} = \langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{k-1} \rangle$ spanned by the first $k-1$ standard basis vectors. The *bounded flag manifold* B_n the set of all bounded flags in $\mathbb{C}^{n+1}$.

In this talk we shall describe how Bott towers (in particular, bounded flag manifolds) are applied to several problems of equivariant cobordism theory. These include constructing toric generators for the complex cobordism ring, and representing coefficients in the expansion of the universal toric genus by smooth manifolds.

The talk is based on joint works with Victor Buchstaber and Nigel Ray.

References

[1] Victor M. Buchstaber, Taras E. Panov and Nigel Ray. *Toric genera*. Internat. Math. Research Notices **16** (2010), 3207–3262.

[2] Victor M. Buchstaber and Taras E. Panov. *Toric Topology*. Preliminary version of the monograph submitted to the AMS; arXiv:1210.2368.

Department of Mathematics and Mechanics, Moscow State University, Moscow, 119991, Russia

E-mail address: `tpanov@mech.math.msu.su`

Research supported by the Russian Science Foundation (grant no. 14-11-00414).

RECTANGULAR DIAGRAMS OF LEGENDRIAN GRAPHS

MAXIM VYACHESLAVOVICH PRASOLOV

We consider Legendrian graphs in $(\mathbb{R}^3, \xi_{st})$ modulo Legendrian isotopy and edge contraction. To a Legendrian graph we naturally associate a (generalized) rectangular diagram – a purely combinatorial object. Moves of rectangular diagrams are introduced so that equivalence classes of Legendrian graphs and rectangular diagrams coincide. Using this result we prove that the natural correspondence introduced by Baader and Ishikawa in [1] between classes of Legendrian graphs and fence diagrams modulo fence moves introduced by Rudolph in [3] and [4] is a bijection.

References

[1] S. Baader, M. Ishikawa, " Legendrian graphs and quasipositive diagrams", *Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques*, Vol. 18, No. 2, 285-305 (2009).
[2] M. Prasolov, "Rectangular diagrams of Legendrian graphs", *preprint.*
[3] L. Rudolph, "Quasipositive annuli (Constructions of quasipositive knots and links, IV)", *J. Knot Theory Ramif.*, Vol. 1, 451-466 (1993).
[4] L. Rudolph, "Quasipositive plumbing (Constructions of quasipositive knots and links, V)", *Proc. A.M.S.*, Vol. 126, 257-267 (1998).

Laboratory of Quantum Topology, Chelyabinsk State University, Bratev Kashirinykh street 129, Chelyabinsk 454001, Russia

Dept. of Mechanics and Mathematics, Moscow State University, Leninskije gory street 1, Moscow 119234, Russia
E-mail address: 0x00002A@gmail.com

WEIGHTED INEQUALITIES FOR SUBLINEAR INTEGRAL OPERATORS ON SEMIAXIS

DMITRY VLADIMIROVICH PROKHOROV, VLADIMIR DMITRIEVICH STEPANOV

Weighted $L^p - L^r$ inequalities with arbitrary measurable non-negative weights for positive sublinear integral operators with Oinarov's kernels on the semiaxis are characterized. Application to the boundedness of maximal operator in the Lorentz $\Gamma-$spaces is given.

Computing Center of FEB RAS, Kim Yu Chen str., 65, Khabarovsk, 680063, Russia
E-mail address: prohorov@as.khb.ru

Peoples friendship university of Russia, Miklukho Maklai str., 6, Moscow, 117198, Russia
E-mail address: stepanov@mi.ras.ru

The research work of the authors was supported by the Russian Scientific Fund (Project 14-11-00443).

A COMBINATORIAL MODEL OF THE LIPSCHITZ METRIC FOR SURFACES WITH PUNCTURES

VLADIMIR ALEKSEEVICH SHASTIN

In the work [1] Ivan Dynnikov described a polynomial algorithm for the solution of the word problem in mapping class groups of punctured surfaces, where as the size of the algorithm's input he uses a modified version of the word length function of the mapping class group. Namely for a finite generating set $\mathcal{A}$ of the mapping class group of a punctured surface S Dynnikov defined *the zipped word length function* $\mathrm{zwl}_{\mathcal{A}}$ as follows:

$$\mathrm{zwl}_{\mathcal{A}}(\varphi) = \min_{\substack{\varphi = a_1^{k_1} \dots a_m^{k_m} \\ a_1,\dots,a_m \in \mathcal{A} \\ k_1,\dots,k_m \in \mathbb{Z}}} \sum_{i=1}^{m} \log_2(|k_i| + 1),$$

where $\varphi \in \mathrm{MCG}(S)$.

For special generating sets $\mathcal{A}$ he proved that the word problem is efficiently solvable with respect to $\mathrm{zwl}_{\mathcal{A}}$:

Theorem (Dynnikov). *Let S be a compact surface, $\mathcal{P} = (P_1, \dots, P_n) \in S$ a non-empty collection of pairwise distinct points such that the mapping class group $G = MCG(S \setminus \mathcal{P})$ is infinite. Let $\mathcal{A}$ be a finite generating set for G such that*

(1) *every element in $\mathcal{A}$ is a fractional power of a Dehn twist;*
(2) *every Dehn twist from G is conjugate to a fractional power of an element from $\mathcal{A}$*

Then the word problem in G is solvable in polynomial time with respect to $zwl_{\mathcal{A}}$.

The function $\mathrm{zwl}_{\mathcal{A}}$ determines the right-invariant metric $\rho_{\mathcal{A}}$ on $\mathrm{MCG}(S)$ as follows:

$$\rho_{\mathcal{A}}(\varphi, \psi) = \mathrm{zwl}_{\mathcal{A}}(\psi\varphi^{-1}),$$

where $\varphi, \psi \in \mathrm{MCG}(S)$.

It turns out that this metric is closely related to the asymmetric metric on the Teichmüller space described by Thurston in the work [2] and its symmetric version, called the Lipschitz metric(for the definition of this metric see e.g. [3]). In this talk we describe this relation and give the proof of the following theorem:

Theorem. *Let S be an oriented surface with non-empty set of punctures, ϵ a positive constant, σ a hyperbolic structure on S, lying in the ϵ-thick part of the Teichmüller space $\mathcal{T}_\epsilon(S)$, and $\mathcal{A}$ a finite generating set of $MCG(S)$ with the following properties:*

(1) *every element in $\mathcal{A}$ is a fractional power of a Dehn twist;*
(2) *every Dehn twist from G is conjugate to a fractional power of an element from $\mathcal{A}$*

Let also $i_\sigma \colon MCG(S) \to \mathcal{T}_\epsilon(S)$ be the map that sends $\varphi \in MCG(S)$ to the image of σ under φ. Then i_σ is a quasi-isometry from $MCG(S)$ equipped with the metric $\rho_{\mathcal{A}}$ to the thick part of $\mathcal{T}(S)$ equipped with the Lipschitz metric.

References

[1] I. Dynnikov. Counting intersections of normal curves, unpublished preprint
[2] W. P. Thurston, Minimal stretch maps between hyperbolic surfaces. Preprint 1986.
[3] Y.-E. Choi, K. Rafi, Comparison between Teichmüller and Lipschitz metrics, J. Lond. Math. Soc (2) 76 (2007), no. 3, 739–756.

Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

Laboratory of Quantum Topology, Chelyabinsk State University, Brat?ev Kashirinykh street 129, Chelyabinsk 454001, Russia.

E-mail address: `vashast@gmail.com`

The author is partially supported by Laboratory of Quantum Topology of Chelyabinsk State University (Russian Federation government grant 14.Z50.31.0020).

ABOUT THE NUMBER OF SPECIAL SPINES WITH ONE TWO-DIMENSIONAL CELL

IGOR NIKOLAEVICH SHNURNIKOV

In [1] Frigerio, Martelli and Petronio considered a class M_n of 3-dimensional hyperbolic manifolds with boundaries as manifolds whose special spines (in Matveev's sense [2]) have exactly one 2-dimensional cell and n vertices. They proved that the complexity of manifolds M_n equals n, that the manifolds could be supplied with hyperbolic metrics with geodesic boundaries, and that there is at least $O(\frac{6^n}{n})$ manifolds in M_n. The aim of the current work is to estimate the number of manifolds in M_n more precisely. It is enough to estimate the number of orientable special spines with n vertices and one two–dimensional cell, because such spines are thickened to non-homeomorphic manifolds.

Definition. A special spine is a finite connected two–dimensional cell complex, such that each vertex is incident to 4 edges (with multiplicities) and each edge is incident to three 2-dimensional cells (with multiplicities). The regular neighborhood of the inner point of an edge is homeomorphic to a "book with 3 pages", the regular neighborhood of a vertex is homeomorphic to a cone on the edges of tetrahedron.

Theorem 1. *For each $n \geq 6$ there is a graph G_n of degree 4 with n vertices, such that there is at least $c(6\sqrt{2})^n$ manifolds in M_n with graph G_n as the singularity graph and $c \geq \frac{1}{48\sqrt{2}}$.*

For even n let U be a root binary tree with $n+1$ vertices, so that the degree of the root is 2, the degrees of the other vertices are 1 or 3. For odd n let U be a similar tree, so that the degrees of the two connected to each other vertices ("roots") are 2, the degrees of the other vertices are 1 or 3. Let $k(U)$ be the number of vertices of U of degree 3, such that the outcoming branches are not symmetric. Let us construct a graph U' by changing pairs of vertices of U, incident to an edge, by tangent circles.

Theorem 2. *The graph U' is a singularity graph of at least $c\,6^n\,2^{k(U)}$ orientable special spines with one two-dimensional cell for some positive constant c.*

Now we have just to estimate the number of graphs U and $k(U)$.

Theorem 3. *The number of manifolds in M_n is at least $c\,6^n\,2^{\frac{5n}{8}}$ for some positive constant c.*

Theorem 4. *The number of manifolds in M_n is at most $a\,b^n\,n^{n+c}$ for some positive constants a, b, c.*

References

[1] R. Frigerio, B. Martelli, C. Petronio, "Complexity and Heegard genus of an infinite class of compact 3-manifolds", *Pasific J. Math.*, Vol. 210, 283–297 (2003). Also in arxiv: math.GT/0206156 v1 2002;

[2] S. V. Matveev, *Algorithmic topology and classification of 3-manifolds*, ACM-monographs, vol. 9, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2003).

NRU HSE, Myasnitskaya street, 20, Moscow, 101000, Russia
E-mail address: shnurnikov@yandex.ru

LAGRANGIAN SPHERES IN FLAG VARIETY

NIKOLAY ANDREEVICH TYURIN

Full flag variety F^3 in $\mathbb{C}^3$ is the phase space of the Gelfand - Tseytlin system with three degrees of freedom, where one can construct three first integral in the involution. But this integrable system is not effective; it follows in particular from the fact that all three first integrals are not the Morse functions and there exist the critical values such that the common critical set is a three dimensional sphere. In contrust with the completely integrable case when every common level set must be isotropic, this three dimensional sphere is not lagrangian.

However lagrangian spheres in F^3 do exist. The first construction is based on the following remark: realize the flag variety F^3 as the incidence cycle in the direct product $\mathbb{CP}^2 \times \mathbb{CP}^2$ of the projective planes and consider the anti diagonal embedding of the projective plane in the direct product. The image of the anti diagonal embedding is a lagrangian submanifold which doesn't intersect the incidence cycle, but it is not hard to find a hamiltonian deformation of the image such that the deformed anti diagonal intersects F^3 by a submanifold of dimension 3, which is by the construction isotropic, and it implies that it must be lagrangian. This method was realized by P. Osipov.

The second method uses the notion of the pseudotoric structure. Namely, the flag variety F^3 can be sliced by the family of the phase spaces of completely integrable systems with two degrees of freedom, and this family is parameterized by the projective line. Three elements of the family are singular, so one has three distinguished points on the projective line. And the fact is that the choice of any pair of points from the three ones gives a lagrangian sphere in F^3. In this setup a natural question appears: are these lagrangian spheres hamiltonian isotopical or not?

Joint Institute for Nuclear research, Joliot - Curie, 6, Moscow region, Dubna 141980, Russia

National Research University Higher School of Economics, 20 Myasnitskaya Ulitsa, Moscow 101000, Russia

E-mail address: ntyurin@theor.jinr.ru

SOME RESULTS ON INFINITESIMAL BENDING

LJUBICA S. VELIMIROVIC

The infinitesimal bending can be considered from different points of view at Geometry and Mechanics. We consider some properties of variation of curvature and related functionals at Euclidean and Generalised Riemannian Space. Recent results of the author and cooperators will be mentioned.

References

[1] Ljubica S. Velimirovic, Milica D. Cvetkovic, "Gaudi surfaces and curvature based functional variations", *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 228: 377–383 (2014).

[2] Ljubica S. Velimirovic, Marija S. Ciric, : "On the total mean curvature of piecewise smooth surfaces under infinitesimal bending". *Appl. Math. Lett.* Vol. 24(9): 1515-1519 (2011).

[3] Ljubica S. Velimirovic, Marija S. Ciric, Nikola M. Velimirovic, "On the Willmore energy of shells under infinitesimal deformations", *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 61(11): 3181-3190 (2011).

Faculty of Science and Mathematics, Visegradska, 33, Nis, 18000, Serbia
E-mail address: vljubica@pmf.ni.ac.rs

LIE ALGEBRAS OF PURE BRAID GROUPS OF CLOSED SURFACES

VLADIMIR VALENTINOVICH VERSHININ

We consider the Lie algebra associated with the descending central series filtration of the pure braid group of oriented closed surface of arbitrary genus. R. Bezrukavnikov gave a presentation of this Lie algebra over the rational numbers. We show that his presentation remains true for this Lie algebra itself, i.e. over integers. We study also the graded Lie algebra of the descending central series of the pure mapping class group of a 2-sphere. A simple presentation of this Lie algebra is obtained.

This is a joint work with B. Enriques: arXiv:0902.1963.

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: versh@math.nsc.ru

Departement des Sciences Mathematiques, Universite Montpellier 2, Place Eugene Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5, France
E-mail address: vershini@math.univ-montp2.fr

Laboratory of Quantum Topology, Chelyabinsk State University, Brat'ev Kashirinykh street 129, Chelyabinsk 454001, Russia

The author is partially supported by the Laboratory of Quantum Topology of Chelyabinsk State University (Russian Federation government grant 14.Z50.31.0020) and RFBR grants 14-01-00014 and 13-01-92697-IND.

ON SOLVABILITY OF LINEAR DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH SMALL EXPONENTS

ILYA VLADIMIROVICH VYUGIN

The talk concerns with the solvability by quadratures of linear differential systems, which is one of the questions of differential Galois theory (see [2]). We consider systems with non-resonant irregular singular points and propose some criteria of solvability for systems whose (formal) exponents are sufficiently small.

Consider a system

$$\frac{dy}{dz} = B(z)y, \quad y(z) \in \mathbb{C}^p, \tag{1}$$

where

$$B(z) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{B_{i,r_i+1}}{(z-a_i)^{r_i+1}} + \ldots + \frac{B_{i,1}}{z-a_i} \right), \qquad \sum_{i=1}^{n} B_{i,1} = 0$$

is a rational matrix-function, a_i — singular points, r_i — poincaré ranks, $i = 1, \ldots, n$.

Theorem. (see [1]) *Let at each singular point ai the formal exponents λ_i^j of the irregular system (1) be pairwise distinct and satisfy the condition*

$$\operatorname{Re} \lambda_i^j > -\frac{1}{n(p-1)},$$

and, for every pair $(\lambda_i^j, \lambda_i^j)$ one of the conditions

$$\mathrm{Re}\lambda_i^j - \mathrm{Re}\lambda_i^l \notin \mathbb{Q}, \quad \textit{or} \quad \mathrm{Im}\lambda_i^j \neq \mathrm{Im}\lambda_i^l.$$

Then this system is solvable by quadratures if and only if there is a constant matrix $C \in \mathrm{GL}(p, \mathbb{C})$ such that $CB(z)C^{-1}$ is uppertriangular.

In the proof of this theorem apply vector holomorphic bundles with connections (see [1]).

References

[1] R. R. Gontsov, I. V. Vyugin, "Solvability of linear differential systems in the Liouvillian sense", ArXiv:1312.2518v1, (2013).

[2] A. G. Khovansky, *Topological Galois theory. Solvability and non-solvability of equations in finite terms* (in Russian), MCCME, Moscow, (2008).

IITP RAS and HSE, Bolshoy Karetny per. 19, Moscow, 127994, Russia
E-mail address: vyugin@gmail.com

ON GEODESIC MAPPINGS OF MANIFOLD WITH NONSYMMETRIC CONNECTION

MILAN LJ. ZLATANOVIC

This talk is devoted to the geodesic mappings of manifold with nonsymmetric connection. In the general case it is imposible to obtain an invariant geometrical objects. We studied the case when these spaces have the same torsion tensors in corresponding points. Such mappings we named "equitorsion mappings". Using the five linearly independent curvature tensors, we proved that there exist three equitorsion projective tensors. Concircular mappings also gave us some interesting results.

Faculty of Science and Mathematics, Visegradska, 33, Nis, 18000, Serbia
E-mail address: zlatmilan@yahoo.com

Тезисы Международной конференции

«ДНИ ГЕОМЕТРИИ В НОВОСИБИРСКЕ – 2014»,

посвященной 85-летию академика

Юрия Григорьевича Решетняка

24 – 27 сентября 2014 года

Подписано в печать 26.08.2014 Формат 60×84 1/8

Усл. печ. л. 13.25 Уч.-изд. л. 10. Тираж 100 экз. Заказ 123

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
630090, г. Новосибирск, пр. Академика Коптюга 4.

Отпечатано в типографии ООО «Инкпрессо»
630128, г. Новосибирск, ул. Кутателадзе 4г, оф. 310.
тел. +7 (383) 263-71-01