ГОМОМОРФИЗМЫ БАНАХОВЫХ РАССЛОЕНИЙ И ОТДЕЛИМЫЕ СХОДЯЩИЕСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

АЛЕКСАНДР ВИКТОРОВИЧ КОПТЕВ, АЛЕКСАНДР ЕФИМОВИЧ ГУТМАН

Говоря о непрерывных банаховых расслоениях (НБР), мы используем терминологию и обозначения из [1].

Пусть $\mathcal{X}$ — НБР над топологическим пространством Q. Обозначим символом $\mathcal{X}^*$ множество всех гомоморфизмов H, действующих из $\mathcal{X}$ в постоянное НБР со слоем $\mathbb{R}$, т. е. всех локально ограниченных отображений $H\colon\ q \in Q\ \mapsto\ H(q) \in \mathcal{X}(q)'$ таких, что $Hu \in C(Q)$ при $u \in C(Q, \mathcal{X})$ (см. [1, 2.4.4]). Для каждой точки $q \in Q$ рассмотрим подпространство $\mathcal{X}^*(q) := \{H(q) : H \in \mathcal{X}^*\}$ сопряженного банахова пространства $\mathcal{X}(q)'$.

В теории НБР остается открытым вопрос о представительности $\mathcal{X}^*(q)$ в $\mathcal{X}(q)'$. Так, имеются разнообразные широкие классы расслоений $\mathcal{X}$ (см. [2, 3.4.4]), для которых в каждой точке $q \in Q$ пространство $\mathcal{X}^*(q)$ является нормирующим, т. е. удовлетворяет условию

$$\|x\| = \sup_{\substack{h\in\mathcal{X}^*(q)\\ \|h\|\leqslant 1}} |hx|, \quad x \in \mathcal{X}(q),$$

но пока не обнаружен ни один случай нарушения этого условия. Более того, находится под вопросом возможность равенства $\mathcal{X}^* = \{0\}$ для ненулевого расслоения $\mathcal{X}$, в то время как во всех известных на данный момент расслоениях справедливо соотношение

$$\|x\| = \sup_{h\in B_{\mathcal{X}^*}(q)} |hx|, \quad x \in \mathcal{X}(q),$$

где $B_{\mathcal{X}^*} := \{H \in \mathcal{X}^* : \|H\|_\infty \leqslant 1\}$, $B_{\mathcal{X}^*}(q) := \{H(q) : H \in B_{\mathcal{X}^*}\}$.

В этой связи сохраняют актуальность общие методы построения гомоморфизмов НБР, обладающих теми или иными аппроксимирующими свойствами. К их числу относятся упомянутые ниже факты о существовании гомоморфизмов H, принимающих наперед заданные значения $H(q_n) \in \mathcal{X}^*(q_n)$ в точках сходящейся последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Q$.

Определение. Последовательность $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Q$ условимся называть *инъективно сходящейся* к точке $q \in Q$, если $q_n \to q$, $q_n \neq q_m$ при $n \neq m$ и $q_n \neq q$ для всех $n \in \mathbb{N}$. *Отделяющим покрытием* последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ назовем такую последовательность замкнутых окрестностей U_n точек q_n, что

$$U_n \cap \operatorname{cl} \bigcup_{m>n} U_m = \varnothing \ \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Несложно показать, что в регулярном пространстве всякая инъективно сходящаяся последовательность допускает отделяющее покрытие. Если же пространство является вполне регулярным, то наличие отделяющего покрытия сходящейся последовательности $q_n \to q$ позволяет легко конструировать непрерывные вектор-функции, сечения и гомоморфизмы, принимающие наперед заданные значения в точках q_n и q.

Предложение. Пусть $q_n \to q$ — инъективно сходящаяся последовательность во вполне регулярном пространстве Q.

(1) *Если X — топологическое векторное пространство и $x_n \to x$ в X, то существует такая непрерывная функция $f\colon Q \to X$, что $f(q_n) = x_n$ $(n \in \mathbb{N})$ и $f(q) = x$.*

(2) *Если $\mathcal{X}$ — НБР над Q, $x_n \in \mathcal{X}(q_n)$ $(n \in \mathbb{N})$, $x \in \mathcal{X}(q)$ и $(q_n, x_n) \to (q, x)$ в $Q \otimes X$, то существует такое ограниченное сечение $u \in C(Q, \mathcal{X})$, что $u(q_n) = x_n$ $(n \in \mathbb{N})$ и $u(q) = x$.*

(3) *Если $\mathcal{X}$ — НБР над Q, $(H_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{X}^*$ и $\|H_n\|_\infty \to 0$, то существует такой ограниченный гомоморфизм $H \in \mathcal{X}^*$, что $H(q_n) = H_n(q_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ и $H(q) = 0$.*

Условие $\|H_n\|_\infty \to 0$ в утверждении (3) является довольно ограничительным. В рассматриваемом контексте более естественно выглядит требование $H_n(q_n)u(q_n) \to 0$ для достаточно представительного набора сечений $u \in C(Q, \mathcal{X})$. Существование искомого гомоморфизма H в этом случае удается обеспечить за счет «более аккуратного» отделяющего покрытия последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Определение. Отделяющее покрытие $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходящейся последовательности $q_n \to q$ назовем *аккуратным*, если q является единственной собственной предельной точкой объединения $U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$, т. е. $\operatorname{cl} U = U \cup \{q\}$. Сходящуюся последовательность назовем (*аккуратно*) *отделимой*, если она допускает (аккуратное) отделяющее покрытие.

Теорема. *Пусть $\mathcal{X}$ — НБР над вполне регулярным пространством Q, $q_n \to q$ — аккуратно отделимая последовательность в Q, $h_n \in B_{\mathcal{X}^*}(q_n)$ и $h_n u(q_n) \to 0$ для всех элементов u некоторого счетного множества $\mathcal{U} \subset C(Q, \mathcal{X})$ такого, что $\operatorname{cl}\{u(q) : u \in \mathcal{U}\} = \mathcal{X}(q)$. Тогда существует гомоморфизм $H \in B_{\mathcal{X}^*}$, принимающий значения $H(q_n) = h_n$ $(n \in \mathbb{N})$ и $H(q) = 0$.*

Следует отметить, что в последней теореме аккуратная отделимость последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ является существенным требованием. Имеется пример, показывающий, что одной лишь отделимости последовательности недостаточно для существования искомого гомоморфизма H — даже в случае компактного пространства Q.

В завершение перечислим несколько фактов, характеризующих аккуратную отделимость последовательности в регулярном пространстве.

В метризуемом пространстве всякая инъективно сходящаяся последовательность аккуратно отделима. Кроме того, как уже было отмечено, отделимость, вообще говоря, не влечет аккуратную отделимость (даже в случае компактного пространства).

Предложение. *Для любой инъективно сходящейся последовательности $q_n \to q$ в регулярном пространстве Q следующие условия попарно равносильны:*

(а) *последовательность $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ аккуратно отделима;*

(б) *существуют открытая окрестность U множества $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ и последовательность окрестностей V_n точки q такие, что $\operatorname{cl} U \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \{q\}$;*

(в) *существует такая последовательность окрестностей U_n точек q_n, что $\operatorname{cl} U \setminus U = \{q\}$, где $U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$.*

Определение. *Сходящимся к q покрытием* последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ назовем последовательность окрестностей U_n точек q_n, удовлетворяющую следующему условию: для любой окрестности V точки q найдется такой номер $\bar{n} \in \mathbb{N}$, что $U_n \subset V$ для всех $n \geqslant \bar{n}$.

Предложение. *Пусть Q — регулярное пространство.*

(1) *Всякая инъективно сходящаяся последовательность $q_n \to q$ в Q, допускающая сходящееся к q покрытие, является аккуратно отделимой.*

(2) *Пусть $q_n \to q$ — аккуратно отделимая последовательность в Q. Любое аккуратное отделяющее покрытие последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к q тогда и только тогда, когда пространство Q счетно компактно.*

Список литературы

[1] А. Е. Гутман, Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств, в кн. *Линейные операторы, согласованные с порядком*, Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 63–211 (1995).

[2] А. Е. Гутман, А. В. Коптев, Сопряженные банаховы расслоения, в кн. *Нестандартный анализ и векторные решетки*, изд. 2-е, Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 125–201 (2005).

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия; Новосибирский государственный университет, Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail address: koptev@math.nsc.ru, gutman@math.nsc.ru