ПРОБЛЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕЗАМКНУТЫХ АРХИМЕДОВЫХ КОНУСОВ

АЛЕКСАНДР ЕФИМОВИЧ ГУТМАН

Подмножество K векторного пространства над $\mathbb{R}$ называется *клином*, если $K+K \subseteq K$ и $\lambda K \subseteq K$ для всех $0 \leqslant \lambda \in \mathbb{R}$. *Конусом* называется клин K, удовлетворяющий условию $K \cap (-K) = \{0\}$. Понятие конуса тесно взаимосвязано с понятием *упорядоченного векторного пространства* (у.в.п.) — вещественного векторного пространства X, снабженного таким отношением порядка $\leqslant$, что для любых $x, y, z \in X$ и $0 \leqslant \lambda \in \mathbb{R}$ из $x \leqslant y$ следует $x+z \leqslant y+z$ и $\lambda x \leqslant \lambda y$. А именно, если $(X, \leqslant)$ — у.в.п., то множество $X^+ := \{x \in X : x \geqslant 0\}$ является конусом; и наоборот: если $K \subseteq X$ — конус и $x \leqslant_K y \Leftrightarrow y - x \in K$ $(x, y \in X)$, то $(X, \leqslant_K)$ — у.в.п. и $X^+ = K$ (см., например, [1]).

У.в.п. $(X, \leqslant)$ называют *архимедовым*, если для любых $x \in X$ и $0 \leqslant y \in X$ из неравенств $x \leqslant \frac{1}{n} y$ $(n \in \mathbb{N})$ следует $x \leqslant 0$. Выпуклое подмножество $C \subseteq X$ назовем *архимедовым*, если для любых $x, y \in X$ из включений $x + \frac{1}{n} y \in C$ $(n \in \mathbb{N})$ следует $x \in C$. Архимедовость конуса $K \subseteq X$ равносильна архимедовости соответствующего у.в.п. $(X, \leqslant_K)$.

В дальнейшем под *локально выпуклым пространством* (л.в.п.) понимается векторное пространство над $\mathbb{R}$, снабженное хаусдорфовой локально выпуклой векторной топологией. Конечномерное векторное пространство по умолчанию наделяется стандартной (и единственной) хаусдорфовой векторной топологией.

Предложение. *Пусть X — векторное пространство над $\mathbb{R}$. Следующие свойства выпуклого множества $C \subseteq X$ попарно равносильны:*

- *множество C архимедово;*
- *для любых $x, y \in X$ и $\varepsilon > 0$ из включений $x + \lambda y \in C$ $(0 < \lambda < \varepsilon)$ следует $x \in C$;*
- *дополнение $X \setminus C$ совпадает со своим ядром (алгебраической внутренностью);*
- *пересечение C с любой прямой замкнуто;*
- *пересечение C с любым конечномерным подпространством замкнуто;*
- *C секвенциально замкнуто в некоторой векторной топологии;*
- *C секвенциально замкнуто в сильнейшей локально выпуклой топологии.*

Таким образом, архимедовость выпуклого множества означает его алгебраическую замкнутость (в указанном выше смысле), и для архимедова конуса в л.в.п. замкнутость является скорее правилом, нежели исключением. Л.в.п., в которых все архимедовы конусы замкнуты, условимся для краткости называть *ординарными*.

Имеются определенные результаты, позволяющие существенно ограничить класс ординарных л.в.п., но в целом проблема описания таких пространств остается открытой. Ниже мы приведем основные факты, полученные на пути к решению этой задачи.

Сразу отметим, что конечномерные пространства, очевидно, являются ординарными.

Следующее утверждение дает два простых способа построения архимедовых конусов.

Предложение. *В каждом из следующих случаев коническая оболочка множества B является архимедовым конусом:*

(1) *B — линейно независимое множество;*

(2) *H — гиперплоскость, $0 \notin H$ и $B \subseteq H$ — выпуклое архимедово множество, не содержащее лучей.*

Благодаря (1) неординарным оказывается любое л.в.п., содержащее какое-либо незамкнутое линейно независимое множество. Такие пространства мы условимся называть *линейно неординарными*. В класс линейно неординарных пространств попадают, например, все бесконечномерные нормированные пространства.

Используя (2), для класса ординарных пространств удается найти чисто алгебраическую «верхнюю границу».

Теорема. *Всякое л.в.п., имеющее несчетную размерность, является неординарным.*

С учетом (2) для доказательства последней теоремы достаточно рассмотреть произвольное несчетное множество I и в пространстве финитных функций $X = s_{\mathrm{fin}}(I, \mathbb{R})$, снабженном сильнейшей локально выпуклой топологией, найти такое архимедово выпуклое множество B, что B не содержит лучей и $0 \notin B$, но $0 \in \mathrm{cl}\, B$. На роль такого B подходит

$$\Big\{x \in X \,:\, x(i) \geqslant 0 \ (i \in I),\ \textstyle\sum_{i\in I} x(i) \leqslant 1,\ \sum_{i\in I} \sqrt{x(i)} \geqslant 1\Big\}.$$

Таким образом, проблема описания ординарных л.в.п. сводится к рассмотрению пространств, имеющих бесконечную счетную размерность, т. е. линейно изоморфных $s_{\mathrm{fin}} := s_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Поскольку замкнутые выпуклые множества одни и те же во всех топологиях, согласованных с данной двойственностью (см. [2, 8-3.6]), можно считать, что пространство s_{fin} снабжено слабой топологией, наведенной каким-либо векторным подпространством $Y \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ посредством двойственности $\langle x, y\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} x(n)y(n)$. Обозначим соответствующее л.в.п. символом $s_{\mathrm{fin}}|Y$.

Как уже отмечалось, если пространство линейно неординарно, то оно неординарно. Равенство $Y = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (которое означает непрерывность всех линейных функционалов и замкнутость всех векторных подпространств) с очевидностью влечет линейную ординарность $s_{\mathrm{fin}}|Y$. Обратное утверждение неверно.

Пример. *Пусть $A \subseteq \mathbb{R}$ и пусть $\mathrm{lin}\, A^{\mathbb{N}}$ — линейная оболочка подмножества $A^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*
(1) *Если множество A неограничено, то пространство $s_{\mathrm{fin}}|\,\mathrm{lin}\, A^{\mathbb{N}}$ линейно ординарно.*
(2) *Пространство $s_{\mathrm{fin}}|\,\mathrm{lin}\, \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ линейно ординарно, в то время как $\mathrm{lin}\, \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \neq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

Из секвенциальности сильнейшей локально выпуклой топологии на s_{fin} (см. [2, 12-3.113]), а также из конечномерности любой последовательности, сходящейся в этой топологии, следует, что пространство $s_{\mathrm{fin}}|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ординарно. Что же касается остальных пространств вида $s_{\mathrm{fin}}|\,\mathrm{lin}\, A^{\mathbb{N}}$, то в настоящее время неизвестно, какие из них являются ординарными. Имеются довольно веские аргументы в пользу следующей гипотезы.

Гипотеза. *Пространство $s_{\mathrm{fin}}|\,\mathrm{lin}\, \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ $\big($и даже $s_{\mathrm{fin}}|\,\mathrm{lin}\, \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\big)$ является ординарным.*

Заметим, что ситуация в корне меняется при замене конусов клиньями. Поскольку всякое векторное подпространство является архимедовым клином, описать счетномерные л.в.п., в которых все архимедовы клинья замкнуты, не составляет труда. (Это в точности пространства, изоморфные s_{fin} с сильнейшей локально выпуклой топологией или любой другой топологией, согласованной с $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.) Аналогичная задача для случая архимедовых конусов оказывается нетривиальной.

Проблема. *Описать те векторные подпространства $Y \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, для которых в пространстве $s_{\mathrm{fin}}|Y$ существует незамкнутый архимедов конус.*

В частности, открыт вопрос о совпадении классов ординарных и линейно ординарных счетномерных пространств.

Список литературы

[1] C. D. Aliprantis, R. Tourky, Cones and Duality, Graduate Studies in Mathematics 84. Providence, RI: American Mathematical Society (2007).
[2] A. Wilansky, Modern Methods in Topological Vector Spaces, New York: McGraw-Hill (1978).

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия; Новосибирский государственный университет, Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
E-mail address: gutman@math.nsc.ru