Владикавказский математический журнал
2015, Том 17, Выпуск 3, С. 36–43

УДК **517.98**

НЕЗАМКНУТЫЕ АРХИМЕДОВЫ КОНУСЫ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А. Е. Гутман, Э. Ю. Емельянов, А. В. Матюхин

Семёну Самсоновичу Кутателадзе
в связи с его 70-летием

Формулируется задача об описании класса локально выпуклых пространств, содержащих незамкнутые архимедовы конусы. Излагаются результаты, полученные на пути к решению этой задачи.

Ключевые слова: архимедово упорядоченное векторное пространство, локально выпуклое пространство, слабая топология, конус, клин.

1. Введение

Подмножество K векторного пространства над $\mathbb{R}$ называется *клином*, если $K \neq \varnothing$, $K+K \subset K$ и $\lambda K \subset K$ для всех $0 \leqslant \lambda \in \mathbb{R}$. *Конусом* называют клин K, удовлетворяющий условию $K \cap (-K) = \{0\}$. Иными словами, клин — это непустое множество, замкнутое относительно линейных комбинаций $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ с положительными коэффициентами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, а конус — это клин, который может содержать векторы x и $-x$ лишь в случае $x = 0$.

Понятие конуса тесно взаимосвязано с понятием *упорядоченного векторного пространства* — вещественного векторного пространства X, снабженного таким отношением порядка $\leqslant$, что для любых $x, y, z \in X$ и $0 \leqslant \lambda \in \mathbb{R}$ из $x \leqslant y$ следует $x + z \leqslant y + z$ и $\lambda x \leqslant \lambda y$. А именно, если $(X, \leqslant)$ — упорядоченное векторное пространство, то множество $X^+ := \{x \in X : x \geqslant 0\}$ является конусом; и наоборот: если $K \subset X$ — конус и $x \leqslant_K y \Leftrightarrow y - x \in K$ $(x, y \in X)$, то $(X, \leqslant_K)$ — упорядоченное векторное пространство и $X^+ = K$ (см., например, [1, 3.2; 2]).

Упорядоченное векторное пространство $(X, \leqslant)$ называют *архимедовым* при выполнении следующего условия:

$$\text{если } x, y \in X,\ y \geqslant 0 \text{ и } x \leqslant \tfrac{1}{n}\, y \text{ для всех } n \in \mathbb{N}, \text{ то } x \leqslant 0.$$

Это условие обеспечивает допустимость перехода к пределу в линейных неравенствах с фиксированными векторами и переменными коэффициентами (см. [2, 1.11–12]). В частности, если пространство X архимедово, $x_1, \dots, x_n \in X^+$, $\lambda_{1m} x_1 + \dots + \lambda_{nm} x_n \geqslant 0$ для всех $m \in \mathbb{N}$ и для каждого индекса $i \in \{1, \dots, n\}$ существует предел $\lambda_i = \lim\limits_{m\to\infty} \lambda_{im} \in \mathbb{R}$, то $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \geqslant 0$.

Конус $K \subset X$ называют *архимедовым*, если архимедово соответствующее упорядоченное векторное пространство $(X, \leqslant_K)$. Конус заведомо архимедов, если он замкнут в какой-либо векторной топологии. (В этом случае переход к пределу в линейных неравенствах допустим без каких-либо ограничений.) Обратное утверждение, вообще говоря, неверно: архимедов конус в топологическом векторном пространстве не обязан быть замкнутым. Простым примером незамкнутого архимедова конуса служит множество

$$s^+_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N}) = \{x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ :\ (\exists\, m \in \mathbb{N})(\forall\, n \geqslant m)\ x(n) = 0\}$$

в любом из классических банаховых пространств $\ell^p(\mathbb{N})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Известно, что в хаусдорфовом топологическом векторном пространстве всякий архимедов конус, имеющий непустую внутренность, замкнут (см. [2, 2.4]). Кроме того, архимедовость конуса и его замкнутость равносильны в конечномерном случае (см. 3.1 (f)). До недавнего времени этим наблюдением фактически исчерпывались сведения о классе пространств, в которых существуют незамкнутые архимедовы конусы. На данный момент вопрос об исчерпывающем описании таких пространств по-прежнему открыт. Ниже мы приведем некоторые идеи и результаты, возникшие на пути к решению этой задачи в классе локально выпуклых пространств.

2. Термины и обозначения

Пусть X — вещественное векторное пространство и $S \subset X$. Символом $\operatorname{core} S$ обозначается ядро множества S, а символами $\operatorname{lin} S$, $\operatorname{cone} S$ и $\operatorname{aff} S$ — соответственно линейная, коническая и аффинная оболочки S:

$$\operatorname{core} S = \bigl\{x \in X :\ (\forall\, y \in X)(\exists\, \varepsilon > 0)\ x + [0, \varepsilon]y \subset S\bigr\};$$

$$\operatorname{lin} S = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i :\ n \in \mathbb{N},\ x_1, \dots, x_n \in S,\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \right\} \cup \{0\};$$

$$\operatorname{cone} S = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i :\ n \in \mathbb{N},\ x_1, \dots, x_n \in S,\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+ \right\} \cup \{0\};$$

$$\operatorname{aff} S = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i :\ n \in \mathbb{N},\ x_1, \dots, x_n \in S,\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R},\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Заметим, что $\operatorname{cone} S$ — наименьший по включению клин в X, содержащий S.

2.1. *Пусть B — выпуклое подмножество X. Тогда*

(1) $\operatorname{cone} B = \{\lambda x :\ x \in B,\ \lambda > 0\} \cup \{0\}$*;*

(2) *если A — аффинное подпространство X, $0 \notin A$ и $B \subset A$, то $A \cap \operatorname{cone} B = B$; в частности, если $0 \notin \operatorname{aff} B$, то $\operatorname{aff} B \cap \operatorname{cone} B = B$;*

(3) *если $0 \notin B$, то клин $\operatorname{cone} B$ является конусом.*

Термин «подпространство» по умолчанию означает «векторное подпространство». *Прямыми* и *лучами* называются множества вида $x + \mathbb{R}y$ и $x + \mathbb{R}^+ y$, где $y \neq 0$.

Для произвольного множества I символом $s(I)$ обозначается векторное пространство всех функций $x\colon I \to \mathbb{R}$, а символом $s_{\mathrm{fin}}(I)$ — его векторное подпространство, состоящее из функций $x \in s(I)$ с конечным носителем $\operatorname{supp} x := \{i \in I : x(i) \neq 0\}$. Архимедовы конусы $\{x \in s(I) :\ (\forall\, i \in I)\ x(i) \geqslant 0\}$ и $s^+(I) \cap s_{\mathrm{fin}}(I)$ обозначаются соответствующими символами $s^+(I)$ и $s^+_{\mathrm{fin}}(I)$. Мы также используем сокращения: $\mathbb{S} := s(\mathbb{N})$ и $\mathbb{S}_{\mathrm{fin}} := s_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$.

Символом $X^{\#}$ обозначается пространство всех линейных функционалов на векторном пространстве X, а символом X' — пространство всех непрерывных линейных функционалов на топологическом векторном пространстве X.

Всякое конечномерное векторное пространство по умолчанию наделяется стандартной (единственной) хаусдорфовой векторной топологией.

Под *локально выпуклым пространством* понимается вещественное векторное пространство, снабженное хаусдорфовой локально выпуклой векторной топологией.

Поскольку в рассматриваемом круге вопросов важная роль отводится сильнейшей локально выпуклой топологии, мы напомним несколько ее эквивалентных описаний (см., например, [1, 3]).

2.2. *Следующие свойства топологии τ на вещественном векторном пространстве X равносильны:*

(a) *τ — сильнейшая локально выпуклая топология на X;*

(b) *множество $U \subset X$ является τ-окрестностью точки $x \in X$ тогда и только тогда, когда $x \in \operatorname{core} C \subset U$ для некоторого выпуклого множества C;*

(c) *τ — локально выпуклая топология, в которой внутренность любого выпуклого множества совпадает с его ядром;*

(d) *τ — локально выпуклая топология, в которой непрерывны все полунормы;*

(e) *τ — такая топология Макки на X, что $(X, \tau)' = X^{\#}$.*

3. Архимедовы множества

Из технических соображений удобно обобщить понятие архимедова конуса на случай произвольных выпуклых множеств. Выпуклое подмножество C вещественного векторного пространства X назовем *архимедовым* при выполнении следующего условия:

$$\text{если } x, y \in X \text{ и } x + \tfrac{1}{n}\, y \in C \text{ для всех } n \in \mathbb{N}, \text{ то } x \in C.$$

Согласно [2, 1.11] в случае, когда C является конусом, последнее определение равносильно приведенному в § 1.

3.1. *Следующие свойства выпуклого множества $C \subset X$ равносильны:*

(a) *множество C архимедово;*

(b) *для любых $x, y \in X$ и $\varepsilon > 0$ из $x + (0, \varepsilon]\, y \subset C$ следует $x \in C$;*

(c) $X \setminus C = \operatorname{core}(X \setminus C)$;

(d) *пересечение C с любой прямой в X замкнуто;*

(e) *пересечение C с любым подпространством X размерности $\leqslant 2$ замкнуто;*

(f) *пересечение C с любым конечномерным подпространством X замкнуто;*

(g) *C секвенциально замкнуто в некоторой хаусдорфовой векторной топологии на X;*

(h) *C секвенциально замкнуто в сильнейшей локально выпуклой топологии на X.*

$\lhd$ Импликации (a)$\Leftarrow$(b)$\Leftarrow$(c)$\Leftarrow$(d)$\Leftarrow$(e)$\Leftarrow$(f)$\Leftarrow$(g)$\Leftarrow$(h) очевидны.

Чтобы показать (a)$\Rightarrow$(f), рассмотрим произвольное конечномерное подпространство $X_0 \subset X$ и положим $C_0 := C \cap X_0$. Можно считать, что $0 \in C_0$. Поскольку в подпространстве $\operatorname{lin} C_0 \subset X_0$ множество C_0 имеет непустую внутренность, к C_0 применимы рассуждения, приведенные в [2, 2.4], из которых следует, что архимедово множество C_0 замкнуто в (конечномерном) подпространстве $\operatorname{lin} C_0$, а значит, и в X.

Покажем, что (f)$\Rightarrow$(h). Пусть τ — сильнейшая локально выпуклая топология на X. Благодаря (f) достаточно показать, что линейная оболочка любой сходящейся в τ последовательности $x_n \to x$ имеет конечную размерность. В противном случае из $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

можно было бы извлечь такую подпоследовательность $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, что $x \notin \operatorname{lin}\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$, и тогда сходимость $y_n \to x$ в τ противоречила бы наличию непрерывного (см. 2.2 (e)) линейного функционала, равного 0 на $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ и 1 в точке x. $\rhd$

Из 3.1 с очевидностью вытекают следующие свойства архимедовых множеств.

3.2. (1) *Если C — выпуклое подмножество какого-либо векторного подпространства $X_0 \subset X$, то архимедовость C в X_0 равносильна архимедовости C в X.*

(2) *Если X и Y — вещественные векторные пространства, $T\colon X \to Y$ — линейная инъекция, $y \in Y$ и C — архимедово выпуклое подмножество X, то $T(C) + y$ является архимедовым выпуклым подмножеством Y.*

(3) *Всякое аффинное подпространство архимедово.*

(4) *Пересечение любого семейства архимедовых множеств архимедово.*

3.3. *Если множество $E \subset X$ линейно независимо, то $\operatorname{cone} E$ — архимедов конус в X.*

$\lhd$ Достаточно заметить, что стандартный линейный изоморфизм $s_{\mathrm{fin}}(E) \leftrightarrow \operatorname{lin} E$ отображает архимедов конус $s^+_{\mathrm{fin}}(E)$ на $\operatorname{cone} E$, и привлечь 3.2 (1), (2). $\rhd$

3.4. *Пусть B — выпуклое подмножество X, $0 \notin \operatorname{aff} B$. Множество $\operatorname{cone} B$ является архимедовым конусом тогда и только тогда, когда B архимедово и не содержит лучей.*

$\lhd$ *Необходимость.* Из архимедовости множеств $\operatorname{cone} B$ и $\operatorname{aff} B$ (см. 3.2 (3)) вытекает архимедовость их пересечения B (см. 2.1 (2)). Допустим, что B содержит какой-либо луч $x + \mathbb{R}^+ y$, где $y \neq 0$. Тогда $\frac{1}{n}x + y = \frac{1}{n}(x + ny) \in \operatorname{cone} B$ для всех $n \in \mathbb{N}$, откуда в силу архимедовости $\operatorname{cone} B$ следует $y \in \operatorname{cone} B$. Поскольку $y \neq 0$, найдется такое число $\lambda > 0$, что $\lambda y \in B$ (см. 2.1 (1)). Таким образом, $x, \lambda y, x + \lambda y \in B$, а значит, $0 = x + \lambda y - (x + \lambda y) \in \operatorname{aff} B$ вопреки условию.

Достаточность. Согласно 2.1 (3) клин $K := \operatorname{cone} B$ является конусом. Основываясь на 3.1 (f), рассмотрим произвольное конечномерное подпространство $X_0 \subset X$ и покажем, что пересечение $K_0 := K \cap X_0$ замкнуто в X_0. Как легко видеть, $K_0 = \operatorname{cone} B_0$, где $B_0 := B \cap X_0$. Поскольку в конечномерном пространстве X_0 выпуклое множество B_0 архимедово и не содержит лучей, оно замкнуто и ограничено в X_0. Кроме того, $0 \notin B_0$. Из [4, II.3.4] следует, что $K_0 = \operatorname{cone} B_0$ — замкнутый конус в X_0. $\rhd$

4. Незамкнутые архимедовы конусы

Изложение имеющихся на данный момент сведений о незамкнутых архимедовых конусах мы предварим указанием одного из простых способов их построения.

4.1. *Пусть Y — подпространство топологического векторного пространства X, $C \subset Y$ — незамкнутое в Y архимедово выпуклое множество, не содержащее лучей, и $z \in X \setminus Y$. Тогда $\operatorname{cone}(C + z)$ — незамкнутый архимедов конус в X.*

$\lhd$ Положим $A := Y + z$, $B := C + z$. Ясно, что B — архимедово выпуклое множество, не содержащее лучей, причем $\operatorname{aff} B \subset A$ и $0 \notin A$. Следовательно, $\operatorname{cone} B$ — архимедов конус (см. 3.4). Конус $\operatorname{cone} B$ не замкнут в X, поскольку в противном случае пересечение $A \cap \operatorname{cone} B = B$ (см. 2.1 (2)) было бы замкнуто в A, а тогда C было бы замкнуто в Y. $\rhd$

Итак, для того, чтобы построить незамкнутый архимедов конус, достаточно в каком-либо собственном подпространстве найти незамкнутое архимедово выпуклое множество, не содержащее лучей.

Как известно, сильнейшая векторная топология на пространстве $X = s_{\mathrm{fin}}(I)$ не является локально выпуклой в случае несчетного множества I. Это следует, например, из того факта, что множество $V := \big\{x \in X : \sum_{i\in I} \sqrt{|x(i)|} < 1\big\}$ не содержит ни одного выпуклого поглощающего подмножества (см., например, [5, 6.I]). При этом дополнение $X \setminus V$ «архимедово» (например, в смысле условия 3.1 (f)), но не замкнуто ни в одной из локально выпуклых топологий на X. Разумеется, множество $X \setminus V$ не является выпуклым и содержит лучи, но из него удается «вырезать» фрагмент, обладающий всеми нужными нам свойствами.

4.2. Теорема. *В любом локально выпуклом пространстве несчетной размерности существует выпуклое множество, которое не содержит лучей и является архимедовым, но не замкнутым.*

$\lhd$ Достаточно фиксировать какое-либо несчетное множество I, рассмотреть пространство $X = s_{\mathrm{fin}}(I)$, снабженное произвольной локально выпуклой топологией, и найти в нем такое архимедово выпуклое множество C, не содержащее лучей, что $0 \notin C$ и $0 \in \operatorname{cl} C$. Покажем, что требуемыми свойствами обладает множество

$$C := \left\{ x \in s^+_{\mathrm{fin}}(I) : \sum_{i \in I} x(i) \leqslant 1, \sum_{i \in I} \sqrt{x(i)} \geqslant 1 \right\}.$$

Как легко видеть, $0 \notin C$, множество C выпукло и не содержит лучей, а архимедовость C вытекает из очевидной замкнутости его пересечений с конечномерными подпространствами вида $\{x \in X : \operatorname{supp} x \subset J\}$, где J — конечное подмножество I.

Остается обосновать включение $0 \in \operatorname{cl} C$. С этой целью рассмотрим произвольную выпуклую окрестность нуля $U \subset X$ и покажем, что $U \cap C \neq \varnothing$. Для $n \in \mathbb{N}$ положим $I_n := \left\{ i \in I : \frac{1}{n}\chi_{\{i\}} \in U \right\}$. Поскольку $0 \in \operatorname{core} U$, имеет место равенство $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = I$. Используя несчетность I, фиксируем какое-либо число $n \in \mathbb{N}$, для которого множество I_n бесконечно, и выберем произвольные попарно различные $i_1, \dots, i_n \in I_n$. Непосредственная проверка показывает, что выпуклая комбинация $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\chi_{\{i_1\}} + \dots + \frac{1}{n}\chi_{\{i_n\}}\right)$ элементов $\frac{1}{n}\chi_{\{i_k\}} \in U$ принадлежит как U, так и C. $\rhd$

4.3. Следствие. *В любом локально выпуклом пространстве несчетной размерности существует незамкнутый архимедов конус.*

$\lhd$ Пусть Y — какое-либо несчетномерное собственное подпространство в рассматриваемом пространстве X. Согласно 4.2 в Y имеется незамкнутое архимедово выпуклое множество C, не содержащее лучей. Выбирая $z \in X \setminus Y$ и используя 4.1, заключаем, что $\operatorname{cone}(C + z)$ — незамкнутый архимедов конус в X. $\rhd$

Таким образом, в несчетномерном случае незамкнутые архимедовы конусы существуют даже в сильнейшей локально выпуклой топологии. С другой стороны, в конечномерных пространствах все архимедовы конусы замкнуты. В счетномерном же случае интересующий нас вопрос оказывается наиболее сложным. На данный момент мы не владеем исчерпывающим описанием топологий, допускающих наличие незамкнутых архимедовых конусов в счетномерном пространстве. Оставшаяся часть заметки посвящена изложению некоторых результатов, полученных на пути к решению этой задачи.

Как известно, во всех топологиях, согласованных с данной двойственностью, замкнутые выпуклые множества одни и те же (см., например, [1, 10.4.9; 3, 8-3.6]). Следовательно, изучаемое нами свойство локально выпуклого пространства X полностью определяется его топологически сопряженным пространством X', а точнее, расположением X' в $X^{\#}$. При этом можно считать, что пространство X снабжено слабой топологией, согласованной с двойственностью между X и X'.

Из сказанного выше ясно, что мы не ограничим общность, перейдя к рассмотрению локально выпуклых пространств вида $\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}|Y := \left(\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}, \sigma(\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}|Y)\right)$, где $\mathbb{S}_{\mathrm{fin}} := s_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$, Y —

векторное подпространство $\mathbb{S} := s(\mathbb{N})$, а $\sigma(\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}\,|\,Y)$ — слабая топология на $\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}$, наведенная Y посредством двойственности $\langle x\,|\,y\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} x(n)y(n)$.

Поскольку используемое нами понятие локально выпуклого пространства включает требование хаусдорфовости, уместно сразу описать подпространства $Y \subset \mathbb{S}$, наводящие отделимую топологию $\sigma(\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}\,|\,Y)$.

4.4. *Следующие свойства векторного подпространства $Y \subset \mathbb{S}$ равносильны:*
(a) *слабая топология $\sigma(\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}\,|\,Y)$ хаусдорфова;*
(b) $(\forall\, x \in \mathbb{S}_{\mathrm{fin}}\backslash\{0\})(\exists\, y \in Y)\ \langle x\,|\,y\rangle \neq 0$;
(c) *Y плотно в $\mathbb{S}$ относительно (тихоновской) топологии поточечной сходимости;*
(d) $(\forall\, n \in \mathbb{N})(\forall\, z \in \mathbb{R}^n)(\exists\, y \in Y)\ y(1) = z(1),\ \ldots,\ y(n) = z(n)$;
(e) $(\forall\, n \in \mathbb{N})(\exists\, y \in Y)\ y(1) = \cdots = y(n-1) = 0,\ y(n) = 1$.

Пространство Y, обладающее любым из равносильных свойств 4.4 (a)–(e), будем называть *представительным*.

В рамках введенных выше обозначений имеет место равенство $(\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}\,|\,Y)' = \widehat{Y}$, где $\widehat{Y} := \{\widehat{y} : y \in Y\}$ — пространство кет-функционалов $\widehat{y} := \langle\cdot\,|\,y\rangle$ (см. [1, 10.3, 10.4]). Таким образом, с точностью до изоморфизма $z \mapsto \widehat{z}$ между $\mathbb{S}$ и $\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}^{\#}$ расположение Y в $\mathbb{S}$ повторяет расположение $(\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}\,|\,Y)'$ в $\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}^{\#}$, а интересующий нас вопрос приобретает следующую формулировку.

4.5. Задача. Выяснить, для каких представительных векторных подпространств $Y \subset \mathbb{S}$ в пространстве $\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}\,|\,Y$ существует незамкнутый архимедов конус.

Пространства Y, удовлетворяющие условию задачи 4.5, условимся для краткости называть *тонкими*.

Безусловно, чем меньше пространство Y, тем слабее топология $\sigma(\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}\,|\,Y)$ и тем больше в пространстве $\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}\,|\,Y$ незамкнутых конусов. Следовательно, всякое (представительное) подпространство тонкого пространства также является тонким. В частности, если бы тонким оказалось все пространство $\mathbb{S}$, задача 4.5 была бы тривиальной.

4.6. *Пространство $\mathbb{S}$ не является тонким: в $\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}\,|\,\mathbb{S}$ все архимедовы выпуклые множества замкнуты.*

$\lhd$ Как известно, на $\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}$ сильнейшая локально выпуклая топология $\tau(\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}\,|\,\mathbb{S})$ является секвенциальной (см. [3, 12-3.113]). С учетом 3.1 (h) отсюда следует, что все архимедовы выпуклые множества замкнуты в $\tau(\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}\,|\,\mathbb{S})$, а значит, и в $\sigma(\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}\,|\,\mathbb{S})$. $\rhd$

Итак, само пространство $\mathbb{S}$ не является тонким. С другой стороны, как показано ниже, в $\mathbb{S}$ имеются тонкие подпространства.

4.7. *Если в хаусдорфовом топологическом векторном пространстве X существует незамкнутое линейно независимое множество, то в X существует незамкнутый архимедов конус.*

$\lhd$ Используя сформулированные условия, несложно найти линейно независимое множество $E \subset X$ и элемент $x \in X$ такие, что $x \in \mathrm{cl}\,E \setminus \mathrm{lin}\,E$. Согласно 3.3 множество $\mathrm{cone}\,E$ является архимедовым конусом. Этот конус не замкнут, поскольку $x \in \mathrm{cl}\,E \setminus \mathrm{lin}\,E \subset \mathrm{cl}\,\mathrm{cone}\,E \setminus \mathrm{cone}\,E$. $\rhd$

Как легко видеть, условию 4.7 удовлетворяет любое бесконечномерное нормированное пространство X. Отсюда, в частности, следует, что примером тонкого пространства служит $\ell^{\infty}(\mathbb{N})$ (как и любое его представительное подпространство).

Естественно возникающая гипотеза о том, что в $\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}\,|\,Y$ все линейно независимые множества замкнуты лишь в случае $Y = \mathbb{S}$, опровергается следующим нетривиальным классом контрпримеров.

4.8. Теорема. *Пусть Λ — произвольное неограниченное подмножество $\mathbb{R}$. Тогда в пространстве $\mathbb{S}_{\mathrm{fin}} \,|\, \operatorname{lin}\Lambda^{\mathbb{N}}$ все линейно независимые множества замкнуты.*

$\lhd$ Достаточно рассмотреть произвольное линейно независимое множество $E \subset \mathbb{S}_{\mathrm{fin}}$ и показать, что $0 \notin \operatorname{cl} E$ в топологии $\sigma(\mathbb{S}_{\mathrm{fin}} \,|\, \operatorname{lin}\Lambda^{\mathbb{N}})$. С этой целью мы построим последовательность $y \in \Lambda^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющую условию $|\langle e \,|\, y\rangle| \geqslant 1$ для всех $e \in E$. Искомые числа $y(n) \in \Lambda$ определим следующей рекурсией по $n \in \mathbb{N}$: если $y(1), \dots, y(n-1) \in \Lambda$ уже определены, выберем $y(n) \in \Lambda$ так, чтобы

$$|y(n)| \geqslant \frac{1}{|e(n)|}\left(1 + \left|\sum_{i=1}^{n-1} e(i)y(i)\right|\right)$$

для всех $e \in E_n$, где $E_n = \{e \in E : e(n) \neq 0,\ (\forall\, i > n)\ e(i) = 0\}$. (Благодаря линейной независимости множество E_n конечно, и поэтому нужное число $y(n)$ существует.) Неравенство $|\langle e \,|\, y\rangle| \geqslant 1$ справедливо для всех $e \in E$, так как при $e \in E_n$ мы имеем

$$|\langle e \,|\, y\rangle| = \left|\sum_{i=1}^{n} e(i)y(i)\right| \geqslant |e(n)y(n)| - \left|\sum_{i=1}^{n-1} e(i)y(i)\right| \geqslant 1$$

и, кроме того, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = E$. $\rhd$

Заметим, что $\operatorname{lin}\Lambda^{\mathbb{N}} \neq \mathbb{S}$, например, в случае $\Lambda \subset \mathbb{Q}$. Действительно, $\mathbb{R}$ представляет собой бесконечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{Q}$, в то время как образ $\{y(n) : n \in \mathbb{N}\}$ любой последовательности $y \in \operatorname{lin}\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ содержится в подпространстве $\mathbb{R}$, имеющем конечную размерность над $\mathbb{Q}$.

Приведенный пример не снимает вопрос о том, все ли пространства, отличные от $\mathbb{S}$, являются тонкими. Тем не менее имеются определенные аргументы в пользу следующего предположения.

4.9. Гипотеза. *Пространство $\operatorname{lin}\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ не является тонким, т. е. все архимедовы конусы в пространстве $\mathbb{S}_{\mathrm{fin}}$ замкнуты относительно слабой топологии $\sigma(\mathbb{S}_{\mathrm{fin}} \,|\, \operatorname{lin}\mathbb{Q}^{\mathbb{N}})$.*

Стоит отметить, что задача кардинально упрощается при замене конусов клиньями. Поскольку всякое векторное подпространство является архимедовым клином, описать счетномерные локально выпуклые пространства, содержащие незамкнутый архимедов клин, не составляет труда: это в точности те пространства X, для которых $X' \neq X^{\#}$. Аналогичная задача для случая конусов оказывается нетривиальной.

Авторы признательны К. В. Сторожуку за плодотворные обсуждения.

Литература

1. *Кутателадзе С. С.* Основы функционального анализа.—Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2006.—xii+354 с.
2. *Aliprantis C. D., Tourky R.* Cones and Duality.—Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 2007.—296 p.—(Graduate Stud. in Math.; Vol. 84).
3. *Wilansky A.* Modern Methods in Topological Vector Spaces.—N. Y.: McGraw-Hill, 1978.
4. *Вулих Б. З.* Введение в теорию конусов в нормированных пространствах.—Калинин.: Изд-во КГУ, 1977.
5. *Kelley J. L., Namioka I.* Linear Topological Spaces.—N. Y. etc.: Springer-Verlag, 1963.

Статья поступила 8 сентября 2015 г.

Гутман Александр Ефимович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
заведующий лабораторией функционального анализа
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4;
Новосибирский государственный университет,
профессор кафедры математического анализа
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2
E-mail: gutman@math.nsc.ru

Емельянов Эдуард Юрьевич
Middle East Technical University,
Department of Mathematics, Professor
TURKEY, 06800, Ankara, Dumlupinar Bulvari, 1
E-mail: eduard@metu.edu.tr
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
в.н.с. лаборатории функционального анализа
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4
E-mail: emelanov@math.nsc.ru

Матюхин Анатолий Вадимович
Новосибирский государственный университет,
студент кафедры математического анализа
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2
E-mail: anatoly.matyukhin@yandex.ru

NONCLOSED ARCHIMEDEAN CONES IN LOCALLY CONVEX SPACES

Gutman A. E., Emel'yanov E. Yu., and Matyukhin A. V.

The problem is stated of describing the class of locally convex spaces which include nonclosed Archimedean cones. Some results are presented in the course of solving the problem.

Key words: Archimedean ordered vector space, locally convex space, weak topology, cone, wedge.