Задача описания локально выпуклых пространств, содержащих незамкнутые архимедовы конусы

Гутман А.Е., Матюхин А.В.

Россия, Новосибирский государственный университет, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

Аннотация. Формулируется задача описания класса локально выпуклых пространств, содержащих незамкнутые архимедовы конусы. Приводятся некоторые результаты, полученные на пути к решению этой задачи.

Ключевые слова: локально выпуклое пространство, упорядоченное векторное пространство, архимедов конус.

Все рассматриваемые в данной статье векторные пространства считаются вещественными. Доказательства большинства упомянутых ниже результатов можно найти в [1].

Конусом называется подмножество K векторного пространства, удовлетворяющее условиям $K + K \subset K$, $(\forall\ \lambda > 0)(\lambda K \subset K)$ и $K \cap (-K) = \{0\}$.

Упорядоченным векторным пространством называется пара $(X, \leq)$, где X – векторное пространство, а $\leq$ – такое отношение порядка на X, что для любых $x, y, z \in X$ и $\lambda > 0$ из $x \leq y$ следует $x + z \leq y + z$ и $\lambda x \leq \lambda y$. Легко проверить, что множество $X^+ := \{x \in X\colon x \geq 0\}$ является конусом. Если для любых элементов $x, y \in X$, $y \geq 0$, из условия $(\forall\ n \in \mathbf{N})(nx \leq y)$ следует $x \leq 0$, то пространство X, а вместе с ним и конус X^+, называют *архимедовыми*. С другой стороны, произвольному конусу K в векторном пространстве X соответствует порядок $\leq$, задаваемый условием $x \leq y \Leftrightarrow y - x \in K$ и превращающий X в упорядоченное векторное пространство, для которого

$X^{+} = K$. Будем называть конус K *архимедовым*, если архимедово соответствующее упорядоченное векторное пространство.

Многие факты, связанные с архимедовостью конусов, сохраняют силу и для тех выпуклых множеств C в векторном пространстве X, которые обладают следующим свойством: для любых $x, y \in X$ из условия $(\forall\, n \in \mathbf{N})(x + y/n \in C)$ следует включение $x \in C$. Такие выпуклые множества мы также будем называть *архимедовыми*. Используя [2, 1.11], несложно показать, что для конусов введенное определение архимедовости равносильно классическому.

Определение архимедовости выпуклого множества допускает и другие эквивалентные формулировки.

Предложение 1. Пусть X – векторное пространство. Следующие свойства выпуклого множества $C \subset X$ попарно равносильны:

a) C архимедово;
b) для любых элементов $x, y \in X$ и $\varepsilon > 0$ из включений $x + \lambda y \in C$ $(0 < \lambda < \varepsilon)$ следует $x \in C$;
c) $X \setminus C$ совпадает со своим ядром (алгебраической внутренностью);
d) пересечение C с любым конечномерным подпространством X замкнуто (здесь и далее термин «подпространство» означает «векторное подпространство»);
e) пересечение C с любым подпространством X размерности не более двух замкнуто;
f) пересечение C с любой прямой замкнуто;
g) пересечение C с любым конечномерным аффинным подпространством X замкнуто;
h) C секвенциально замкнуто в некоторой векторной топологии;
i) C секвенциально замкнуто в сильнейшей локально выпуклой топологии.

Настоящая статья посвящена поиску ответа на следующий вопрос: в каких локально выпуклых пространствах существует незамкнутый архимедов конус? (Под *локально выпуклым пространством* мы понимаем векторное пространство, снабженное хаусдорфовой локально выпуклой топологией.)

Очевидно, если конус секвенциально замкнут в некоторой векторной топологии, то он архимедов. Известно также, что для конусов, имеющих внутреннюю точку, архимедовость эквивалентна замкнутости (см. [2, 2.4]). Несложно доказать, что последнее верно и для любого конуса в конечномерном пространстве (без предположения о наличии внутренних точек).

Из вышеизложенного следует, что незамкнутый архимедов конус может существовать лишь в бесконечномерном пространстве и не может иметь внутренних точек. Примером незамкнутого архимедова конуса является множество $\{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, 0, 0, \ldots): \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geq 0, n \in \mathbf{N}\}$ в любом из пространств l_p, $1 \leq p \leq \infty$.

Для краткости условимся называть локально выпуклые пространства, в которых существует незамкнутый архимедов конус, *неординарными*, а все другие локально выпуклые пространства – *ординарными*.

Следующая лемма выделяет подкласс класса неординарных пространств.

Лемма 1. В локально выпуклом пространстве, содержащем незамкнутое линейно независимое множество, существует незамкнутый архимедов конус.

Локально выпуклые пространства, содержащие незамкнутое линейно независимое множество, будем называть *линейно неординарными*, а все другие локально выпуклые пространства – *линейно ординарными*.

Лемма 2. В линейно ординарном пространстве архимедовость выпуклого множества равносильна его секвенциальной замкнутости.

Укажем еще один способ построения незамкнутых архимедовых конусов.

Лемма 3. Пусть X – локально выпуклое пространство, Y – аффинное подпространство X, не содержащее 0, а $C \subset Y$ – незамкнутое в Y архимедово выпуклое множество, не содержащее лучей. Тогда коническая оболочка *C* является незамкнутым архимедовым конусом.

Незамкнутое архимедово множество без лучей удается построить в произвольном локально выпуклом пространстве несчетной размерности. Достаточно рассмотреть какое-либо несчетное множество I и пространство финитных функций $s_{fin}(I) := \{f\colon I \to \mathbf{R}\colon \{i \in I\colon f(i) \neq 0\}$ конечно$\}$, снабженное сильнейшей локально выпуклой топологией. Множество $B := \{x \in X\colon (\forall\, i \in I)(x(i) \geq 0), \sum_{i\in I} x(i) \leq 1, \sum_{i\in I} x(i)^{1/2} \geq 1\}$ архимедово, не содержит лучей и незамкнуто, поскольку $0 \in \mathrm{cl}\, B \setminus B$.

Очевидно, подходящее множество можно найти и в любой гиперплоскости такого пространства, из чего вытекает справедливость следующего факта.

Теорема 1. Любое локально выпуклое пространство несчетной размерности неординарно.

Таким образом, для полного решения поставленной задачи остается дать описание всех неординарных пространств бесконечной счетной размерности. (Конечномерные пространства, очевидно, ординарны.)

Имея в виду естественный изоморфизм, достаточно рассмотреть пространство финитных последовательностей $s_{fin} := \{f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}\colon \{n \in \mathbf{N}\colon f(n) \neq 0\}$ конечно$\}$. Пространство, алгебраически сопряженное к s_{fin}, изоморфно пространству всех последовательностей $s := \{f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}\}$. Поскольку во всех топологиях, согласованных с данной двойственностью, замкнутые выпуклые множества одни и те же (см. [3, 8.3-6]), можно считать, что s_{fin} снабжено слабой хаусдорфовой топологией, наведенной некоторым подпространством $Y \subset s$. Полученное локально выпуклое пространство обозначим через $s_{fin} \mid Y$.

Теорема 2. Пространство $s_{fin} \mid s$ ординарно.

С другой стороны, как было отмечено выше, любое линейно неординарное пространство неординарно. Задача была бы решена в том случае, если бы все пространства $s_{fin} \mid Y$ в случае $Y \neq s$ были линейно неординарными. Как показывает следующий пример, это не так.

Пример 1. Пусть $\Lambda \subset \mathbf{Q}$ – неограниченное множество, $Y(\Lambda)$ – линейная оболочка множества $\{f\colon \mathbf{N} \to \Lambda\}$. Тогда пространство $s_{fin} \mid Y(\Lambda)$ линейно ординарно, в то время как $Y(\Lambda) \neq s$.

Теорема 3. Пространство $s_{fin} \mid Y(\mathbf{Q})$ ординарно. Более того, если множество C в пространстве $s_{fin} \mid Y(\mathbf{Q})$ выпукло, архимедово и не содержит прямых, то оно замкнуто.

– Достаточно доказать, что из $0 \notin C$ следует $0 \notin \mathrm{cl}\, C$. Для этого построим последовательность $y\colon \mathbf{N} \to \mathbf{Q}$ такую, что $(\forall\, x \in C)$ $(\Sigma_{k=1,2,\ldots}\, x(k)\, y(k) \geq 1)$.

Для $n \in \mathbf{N}$ обозначим $C_n := \{x \in C\colon (\forall\, k > n)(x(k) = 0)\}$. Поскольку C не содержит прямых, можно выбрать $y(1) \in \mathbf{Q}$ так, чтобы $(\forall\, x \in C_1)$ $(x(1)\, y(1) > 1)$. Если мы уже выбрали $y(1), \ldots, y(n) \in \mathbf{Q}$ так, что $(\forall\, x \in C_n)$ $(\Sigma_{k=1,2,\ldots,n}\, x(k)\, y(k) > 1)$, то пользуясь плотностью $\mathbf{Q}$ в $\mathbf{R}$ и свойствами множества C, можно подобрать $y(n+1) \in \mathbf{Q}$ так, что $(\forall\, x \in C_{n+1})$ $(\Sigma_{k=1,2,\ldots,n+1}\, x(k)\, y(k) > 1)$. ▶

Имеется также ряд соображений в пользу гипотезы об ординарности пространства $s_{fin} \mid Y(\mathbf{N})$.

На данный момент остается открытым вопрос о том, для каких $Y \subset s$ пространство $s_{fin} \mid Y$ является ординарным. Неизвестно также, равносильны ли условия ординарности и линейной ординарности для пространства счетной размерности.

Список литературы:

1. Гутман А.Е., Емельянов Э.Ю., Матюхин А.В. Незамкнутые архимедовы конусы в локально выпуклых пространствах // Владикавказский мат. журн. 2015. Т. 17, вып. 3. С. 36-43.
2. Aliprantis C.D., Tourky R. Cones and Duality. Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 2007. – 296 p. (Graduate Stud. In Math.; Vol. 84)
3. Wilansky A. Modern Methods in Topological Vector Spaces. N. Y.: McGraw-Hill, 1978. – 298 p.