# НЕЗАМКНУТЫЕ АРХИМЕДОВЫ КОНУСЫ

АЛЕКСАНДР ГУТМАН, АНАТОЛИЙ МАТЮХИН

Под *клином* будем понимать непустое выпуклое подмножество $K$ векторного пространства (здесь и далее все векторные пространства предполагаются вещественными), удовлетворяющее условию $(\forall\, \alpha \geqslant 0)(\alpha K \subset K)$. Клин $K$ будем называть *конусом*, если $K \cap (-K) = \{0\}$. Как хорошо известно, в любом (пред)упорядоченном векторном пространстве $(X, \leqslant)$ множество $\{x \in X : x \geqslant 0\}$ является конусом (клином). Наоборот, если в векторном пространстве $X$ фиксирован некоторый конус (клин) $K$, то порядок $\leqslant_K$, определенный правилом $x \leqslant_K y \Leftrightarrow y - x \in K$, превращает $X$ в (пред)упорядоченное векторное пространство.

(Пред)упорядоченное векторное пространство $(X, \leqslant)$ называют *архимедовым*, если для любых элементов $x, y \in X$ $(y \geqslant 0)$ из условия $(\forall\, n \in \mathbb{N})(x \leqslant \frac{1}{n} y)$ следует, что $x \leqslant 0$. Конус (клин) $K$ в векторном пространстве $X$ называют *архимедовым*, если архимедово соответствующее (пред)упорядоченое пространство $(X, \leqslant_K)$. Обобщая понятие архимедова клина, назовем произвольное выпуклое множество $C \subset X$ *архимедовым*, если для любых элементов $x, y \in X$ условие $(\forall\, n \in \mathbb{N})(x + \frac{1}{n} y \in C)$ влечет $x \in C$. Несложно понять, что для клиньев это определение равносильно приведенному выше.

Основные сведения об архимедовых конусах можно почерпнуть из [1].

Следующее предложение более полно раскрывает понятие архимедова множества.

**Предложение.** *Пусть $X$ — векторное пространство, $C \subset X$ — выпуклое множество. Следующие утверждения эквивалентны:*

(a) $C$ архимедово;
(b) для любых $x, y \in X$ условие $(\exists\, \varepsilon > 0)(x + ]0, \varepsilon] y \subset C)$ влечет $x \in C$;
(c) множество $X \setminus C$ совпадает со своей алгебраической внутренностью;
(d) пересечение $C$ с любой прямой замкнуто;
(e) пересечение $C$ с любым конечномерным подпространством $X$ замкнуто.

Отметим, что выпуклое множество, секвенциально замкнутое в какой-либо векторной топологии, очевидно, является архимедовым. Чтобы дать еще одно описание понятия архимедова множества, введем вспомогательное определение. Топологическое векторное пространство будем называть *секвенциально тотальным*, если все линейные функционалы на нем секвенциально непрерывны.

**Лемма.** *Пусть $X$ — секвенциально тотальное пространство, $C \subset X$ — выпуклое множество. Тогда архимедовость $C$ эквивалентна секвенциальной замкнутости $C$.*

Представляет интерес задача описания класса топологических векторных пространств, содержащих незамкнутые архимедовы конусы. Ниже приводятся основные результаты, полученные на пути к решению данной задачи, а также ее вариаций (в формулировке вопроса конусы могут быть заменены на клинья, а отсутствие замкнутости — на отсутствие секвенциальной замкнутости). Сразу отметим, что в конечномерных пространствах все архимедовы клинья (более того, все архимедовы выпуклые множества) замкнуты.

Критерий существования архимедовых конусов либо клиньев, не являющихся секвенциально замкнутыми, удается получить сравнительно несложно.

**Лемма.** *Пусть $X$ — топологическое векторное пространство. Следующие условия эквивалентны:*

(a) $X$ секвенциально тотально;
(b) любой архимедов клин в $X$ секвенциально замкнут;

(c) любой архимедов конус в $X$ секвенциально замкнут.

Основная задача решена для широкого класса топологических векторных пространств несчетной размерности.

**Теорема.** *Любое локально выпуклое пространство несчетной размерности содержит незамкнутый архимедов конус.*

Для пространств счетной размерности на данный момент удалось получить лишь критерий существования незамкнутого архимедова клина.

**Теорема.** *Топологическое векторное пространство счетной размерности содержит незамкнутый архимедов клин тогда и только тогда, когда на нем есть разрывный линейный функционал.*

Следующие теоремы помогают «очертить» границы класса пространств счетной размерности, содержащих незамкнутые архимедовы конусы.

**Теорема.** *В топологическом векторном пространстве, содержащем незамкнутое линейно независимое множество, существует незамкнутый архимедов конус.*

**Теорема.** *В топологическом векторном пространстве счетной размерности, на котором все линейные функционалы непрерывны, все архимедовы выпуклые множества замкнуты.*

**Гипотеза.** *Пусть $X$ — топологическое векторное пространство счетной размерности. Для существования в $X$ незамкнутого архимедова конуса необходимо и достаточно существование разрывного линейного функционала на $X$.*

**Гипотеза.** *Пусть $X$ — топологическое векторное пространство счетной размерности. Для существования в $X$ незамкнутого архимедова конуса необходимо и достаточно существование незамкнутого линейно независимого подмножества $X$.*

Две приведенных гипотезы не являются равносильными: можно привести пример топологического векторного пространства счетной размерности, в котором все линейно независимые множества замкнуты, но не все линейные функционалы непрерывны.

Основные результаты исследования опубликованы в [2].

## Список литературы


[1] C. D. Aliprantis, R. Tourky, Cones and Duality, Graduate Studies in Mathematics 84. Providence, RI: American Mathematical Society (2007).

[2] Гутман А. Е., Емельянов Э. Ю., Матюхин А. В. Незамкнутые архимедовы конусы в локально выпуклых пространствах // Владикавказский мат. журн. 2015. Т. 17, вып. 3. С. 36-43.



Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия; Новосибирский государственный университет, Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

*E-mail address*: gutman@math.nsc.ru, anatoly.matyukhin@yandex.ru