Математика в современном мире

Международная конференция, посвященная
60-летию Института математики им. С. Л. Соболева

Новосибирск, Россия, 14-19 августа 2017

Тезисы докладов

Mathematics in the Modern World

International Conference Dedicated to the 60th Anniversary
of the Sobolev Institute of Mathematics

Novosibirsk, Russia, August 14-19, 2017

Abstracts

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ

Международная конференция,
посвященная 60-летию
Института математики им. С. Л. Соболева

Новосибирск, Россия, 14–19 августа 2017 г.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

НОВОСИБИРСК
2017

УДК 51
ББК В1+В31
М34

Математика в современном мире. Международная конференция, посвященная 60-летию Института математики им. С. Л. Соболева (Новосибирск, 14–19 августа 2017 г.): Тез. докладов / под ред. Г. В. Демиденко. — Новосибирск: Изд-во Института математики, 2017. — 592 с.

ISBN 978-5-86134-206-3

Организаторы

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Новосибирский государственный университет

Organizers

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS

Novosibirsk State University

М $\dfrac{1602070100-02}{\text{Я}82(03)-2017}$ Без объявл.

ISBN 978-5-86134-206-3

Программный комитет

С. В. Августинович, Д. С. Аниконов, Ю. Е. Аниконов, Н. Н. Ачасов, Я. В. Базайкин, В. С. Белоносов, В. Л. Береснев, А. М. Блохин, А. А. Боровков, О. В. Бородин, А. В. Васильев, Е. П. Вдовин, А. Ю. Веснин, С. К. Водопьянов, Ю. С. Волков, А. Ф. Воронин — *секретарь*, Э. Х. Гимади, С. К. Годунов, С. С. Гончаров, А. Е. Гутман, Г. В. Демиденко — *заместитель председателя*, А. А. Евдокимов, А. И. Ерзин, Ю. Л. Ершов — *председатель*, Ю. И. Журавлев, А. И. Задорин, Е. И. Зельманов, С. В. Зыкин, С. И. Кабанихин, А. В. Кельманов, П. С. Колесников, А. А. Колоколов, А. В. Косточка, В. И. Лотов, В. Д. Мазуров, В. Л. Макаров, А. Д. Медных, А. Е. Миронов, В. Л. Мирошниченко, А. С. Морозов, Е. А. Палютин, А. И. Прилепко, А. В. Пяткин, В. Н. Ремесленников, Ю. Г. Решетняк, В. Г. Романов, Н. С. Романовский, И. Е. Светов — *секретарь*, И. А. Тайманов, В. А. Топчий, М. П. Федорук, М. В. Фокин — *заместитель председателя*, И. П. Шестаков, В. И. Шмырев

Организационный комитет

Н. В. Абросимов, Е. Ю. Балакина, В. В. Богданов, Л. Н. Бондарь, И. А. Быкадоров, И. А. Гайнова, В. А. Дедок, Г. В. Демиденко — *председатель*, Ф. А. Дудкин, Н. А. Коломеец, И. И. Матвеева — *секретарь*, А. О. Молчанова, А. Н. Ряскин, М. А. Скворцова, А. С. Тарасенко, И. А. Уварова, Г. Н. Шестаков, Т. К. Ыскак

Program Committee

N. N. Achasov, D. S. Anikonov, Yu. E. Anikonov, S. V. Avgustinovich, Ya. V. Bazaikin, V. S. Belonosov, V. L. Beresnev, A. M. Blokhin, O. V. Borodin, A. A. Borovkov, G. V. Demidenko (*Vice-Chairman*), Yu. L. Ershov (*Chairman*), A. I. Erzin, A. A. Evdokimov, M. P. Fedoruk, M. V. Fokin (*Vice-Chairman*), E. Kh. Gimadi, S. K. Godunov, S. S. Goncharov, A. E. Gutman, S. I. Kabanikhin, A. V. Kel'manov, P. S. Kolesnikov, A. A. Kolokolov, A. V. Kostochka, V. I. Lotov, V. L. Makarov, V. D. Mazurov, A. D. Mednykh, A. E. Mironov, V. L. Miroshnichenko, A. S. Morozov, E. A. Palyutin, A. I. Prilepko, A. V. Pyatkin, V. N. Remeslennikov, Yu. G. Reshetnyak, V. G. Romanov, N. S. Romanovskiy, I. P. Shestakov, V. I. Shmyrev, I. E. Svetov (*Secretary*), I. A. Taimanov, V. A. Topchii, A. V. Vasil'ev, E. P. Vdovin, A. Yu. Vesnin, S. K. Vodop'yanov, Yu. S. Volkov, A. F. Voronin (*Secretary*), A. I. Zadorin, E. I. Zelmanov, Yu. I. Zhuravlev, S. V. Zykin

Organizing Committee

N. V. Abrosimov, E. Yu. Balakina, V. V. Bogdanov, L. N. Bondar, I. A. Bykadorov, V. A. Dedok, G. V. Demidenko (*Chairman*), F. A. Dudkin, I. A. Gainova, N. A. Kolomeec, I. I. Matveeva (*Secretary*), A. O. Molchanova, A. N. Ryaskin, G. N. Shestakov, M. A. Skvortsova, A. S. Tarasenko, I. A. Uvarova, T. K. Yskak

Конференцию поддержали:

Российский фонд фундаментальных исследований
(проект № 17-01-20372)

Сибирское отделение Российской академии наук

Мэрия города Новосибирска

Авиакомпания "Аэрофлот"

Механико-математический факультет
Новосибирского государственного университета

The Conference is supported by:

Russian Foundation for Basic Research
(project no. 17-01-20372)

Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences

The Mayor's Office of Novosibirsk

Airline Aeroflot

Department of Mechanics and Mathematics,
Novosibirsk State University

СОДЕРЖАНИЕ

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ
PLENARY LECTURES

СЕКЦИЯ 1. Алгебра, теория чисел и математическая логика
SECTION 1. Algebra, Number Theory, and Mathematical Logic

СЕКЦИЯ 2. Геометрия и топология
SECTION 2. Geometry and Topology

СЕКЦИЯ 3. Математический анализ и теория функций
SECTION 3. Mathematical Analysis and Function Theory

СЕКЦИЯ 4. Дифференциальные уравнения и их приложения
SECTION 4. Differential Equations and Their Applications

СЕКЦИЯ 6. Теория вероятностей и математическая статистика
SECTION 6. Probability Theory and Mathematical Statistics

СЕКЦИЯ 7. Вычислительная математика
SECTION 7. Computational Mathematics

СЕКЦИЯ 8. Дискретная математика, информатика и математическая кибернетика

SECTION 8. Discrete Mathematics, Informatics, and Mathematical Cybernetics

---

СЕКЦИЯ 9. Математическое моделирование и методы прикладной математики

SECTION 9. Mathematical Modeling and Methods of Applied Mathematics

СЕКЦИЯ 10. Математическая экономика
SECTION 10. Mathematical Economics

ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ
Тезисы

PLENARY LECTURES
Abstracts

РОСТ РЕШЕТОК В ПОЛУПРОСТЫХ ГРУППАХ ЛИ

Белолипецкий М. В.

Национальный институт чистой и прикладной математики,
Рио-де-Жанейро, Бразилия; m.belolipetsky@gmail.com

Доклад посвящен изучению роста числа (арифметических) решеток ограниченного кообъема в полупростой группе Ли. Наряду с обзором последних результатов в этой области мы рассмотрим некоторые интересные детали доказательств, геометрические примеры и приложения.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ НАВИГАЦИИ ПО ГЕОФИЗИЧЕСКИМ ПОЛЯМ

Бердышев В. И.[1], **Костоусов В. Б.**[2]

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия; [1]bvi@imm.uran.ru, [2]vkost@imm.uran.ru

Доклад посвящен математическим задачам, которые возникают при исследовании проблем навигации по геофизическим полям [1] и при планировании маршрутов движущихся объектов [2]. Автономная навигация по геофизическим полям является альтернативой спутниковой навигации и все более привлекает внимание исследователей в последнее время.

В первой части доклада формулируется ряд задач, связанных с проблемой навигации по геофизическому полю:

- задача поиска положения фрагмента поля, снятого в процессе движения, на эталонной карте поля, называемой “задачей привязки” фрагмента к эталону поля;
- задача наилучшей аппроксимации карты поля с точки зрения точности навигации, важная для экономного хранения эталона поля на борту движущегося объекта;
- проблема оценки информативности поля и задача построения наиболее “информативного” маршрута, т. е. наилучшего маршрута с точки зрения точности навигации по геофизическому полю при движении по этому маршруту.

Во второй части доклада рассматриваются задачи, которые возникают при планировании траектории движения объекта в условиях наблюдения за ним со стороны других объектов-наблюдателей. Здесь предполагается наличие у объекта скоростного средства поражения, что заставляет наблюдателя для обеспечения безопасности придерживаться определенной тактики движения. Сформулирована экстремальная задача поиска оптимальной траектории, минимизирующей максимум видимости объекта при движении по ней. Рассматривается также задача планирования маршрута при условии, когда наблюдатели неподвижны. Для обеих постановок предложены эффективные численные методы для их решения, основанные на модификации алгоритма Дейкстры.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бердышев В. И., Костоусов В. Б.* Экстремальные задачи и модели навигации по геофизическим полям. Екатеринбург: УрО РАН, 2007.
2. *Бердышев В. И.* К задаче сопровождения движущегося объекта наблюдателями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 1. С. 46–55.

ОСНОВНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ ДЛЯ ТРАЕКТОРИЙ ОБОБЩЕННЫХ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Боровков А. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
borovkov@math.nsc.ru

В докладе излагаются следующие результаты.

1) Установлено обобщение на случай стохастических процессов известной теоремы Анскомбе о сохранении предельного распределения при случайной замене растущего параметра. Это дает простое доказательство принципа инвариантности для траекторий обобщенных процессов восстановления (о.п.в.).

2) Установлен принцип умеренно больших уклонений для траекторий о.п.в. (грубый принцип инвариантности).

3) При соответствующих условиях доказана сходимость о.п.в. к устойчивым процессам.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕРЕГУЛЯРНЫХ МОНОТОННЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Васин В. В.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия; vasin@imm.uran.ru

Исследуется обратная некорректная задача в форме нелинейного монотонного операторного уравнения на паре гильбертовых пространств в условиях приближенного задания правой части. Для построения регуляризующего алгоритма предлагается двухэтапный метод, в котором на первом этапе используется схема регуляризации Лаврентьева, на втором этапе применяется либо метод Ньютона [1], [2], либо нелинейные аналоги альфа-процессов [3]. Оба класса итерационных методов для монотонного оператора исследуются в двух вариантах: в первом из них производная в операторе шага вычисляется на каждой итерации, во втором варианте производная фиксируется, т. е. не меняется в процессе итераций (модифицированный аналог метода).

Доказывается сходимость и свойство фейеровости процессов, устанавливаются регуляризующие свойства двухэтапного метода и его оптимальность по порядку на классе корректности. Обсуждаются результаты численных экспериментов для обратных задач гравиметрии и магнитометрии и дается сравнительный анализ эффективности основных процессов и их модифицированных вариантов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-00629).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васин В. В.* Модифицированные процессы ньютоновского типа, порождающие фейеровские аппроксимации регуляризованных решений нелинейных уравнений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 85–97.
2. *Васин В. В., Скурыдина А. Ф.* Двухэтапный метод построения регуляризующих алгоритмов для нелинейных некорректных задач // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23, № 1. С. 57–74.
3. *Васин В. В.* Регуляризованные модифицированные α-процессы для нелинейных уравнений с монотонным оператором // ДАН. 2016. Т. 469, № 1. С. 13–16.

АСИМПТОТИЧЕСКИ ТОЧНЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ТРУДНЫХ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ VS “ПРОКЛЯТИЕ РАЗМЕРНОСТИ”

Гимади Э. Х.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
gimadi@math.nsc.ru

Для задач дискретной оптимизации основным фактором, определяющим реализуемость алгоритмов их решения, является размерность (длина записи входа) задачи, которая в 50–70 гг. прошлого века ассоциировалась с понятием “проклятия размерности” [1]. В противовес этому в рамках асимптотически точного подхода к (приближенному) решению трудных задач дискретной оптимизации размерность задачи является нашим другом и союзником.

Речь идет о таких типовых задачах исследования операций как задачи маршрутизации, многоиндексные задачи о назначениях, задачи кластеризации, задачи размещения, экстремальные задачи на графах и сетях и т. п.

Обычно эти задачи являются труднорешаемыми (NP-трудными) [2], что обуславливает актуальность разработки эффективных (полиномиальной временной сложности) приближенных алгоритмов с гарантированными оценками качества решения — трудоёмкости, точности, надежности срабатывания.

Алгоритм решения задачи называют *асимптотически точным* [3], если с увеличением размера (длины записи) задачи точность получаемого решения (а на случайных входах и надежность срабатывания алгоритма) стремится к 1.

Перечислим некоторые примеры реализации асимптотически точного подхода к решению большеразмерных типовых задач дискретной оптимизации, в которых автор за последние почти полвека принимал непосредственное участие.

– Задача одного и нескольких (реберно несмежных) коммивояжеров.

– Многоиндексная аксиальная и планарная задачи о назначениях.

– Задача отыскания покрытия полного взвешенного графа заданным числом несмежных циклов с экстремальным суммарным весом ребер.

– Задача размещения с ограниченными объемами производства.

– Задача отыскания связного остовного подграфа с экстремальным суммарным весом ребер в полном графе с заданными степенями вершин.

– Задача отыскания в графе одного или нескольких остовных деревьев с ограниченным диаметром и минимальной суммой ребер.

– Задачи маршрутизации транспортных средств.

– Задачи упаковки в контейнеры и в полосу и мультипроектная задача календарного планирования с ограниченным общим ресурсом.

– Задача отыскания подмножества векторов заданного размера с максимальной суммой.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (код проекта 16-11-10041).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bellman R. E.* Adaptive control processes. Princeton: Princeton University Press, 1961.
2. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
3. *Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Перепелица В. А.* Алгоритмы с оценками для задач дискретной оптимизации // Проблемы кибернетики. 1975. Вып. 31. С. 35–42.

ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ ОДНОРОДНОГО ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ (эксперименты, выявляющие область её применения)

Годунов С. К.[1], **Ключинский Д. В.**[2]

[1]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;* godunov@math.nsc.ru
[2]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;* dmitriy_klyuchinskiy@mail.ru

В докладе будут продемонстрированы результаты почти двухлетней серии вычислительных экспериментов, описанных в магистерской диссертации второго автора (выполненной под руководством первого).

Предварительные варианты этих экспериментов обсуждались и частично повторялись во время переписки и дискуссий с многочисленными новосибирскими и московскими коллегами (С. В. Фортовой, А. Н. Крайко, А. В. Сафроновым, Г. Г. Лазаревой, В. В. Шепелевым, П. С. Уткиным, И. М. Куликовым). В частности, было установлено, что разностные “вязкости”, вызывающие размазывание разрывов, характеризуются значениями числа Куранта, обеспечивающими устойчивость схемы. Выяснилось, что перестройка характерной солитонной структуры решений приводит к понижению порядка точности схемы. (Солитоны — это ударные волны, столкновения которых и приводят к перестройкам).

Будут продемонстрированы разнообразные примеры решавшихся задач.

Предлагаемая схема получена упрощающей линеаризацией широко используемой классической схемы Годунова, опубликованной в 1959 г. и применяемой на очень мелких разностных сетках, доступных на современных компьютерах.

Авторы надеются привлечь специалистов по дифференциальным уравнениям к анализу компактности построенных сеточных решений, к доказательству их сходимости при измельчении сеток, а также к теоремам единственности получаемых пределов. Иными словами, речь идет о построении обобщённых решений газовой динамики, теории, ещё не построенной даже в одномерном случае.

О ВЗАИМООТНОШЕНИИ МЕЖДУ ДИНАМИКОЙ СИСТЕМ И ТОПОЛОГИЕЙ ОБЪЕМЛЮЩИХ МНОГООБРАЗИЙ

Гринес В. З.

Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Нижний Новгород, Россия; vgrines@yandex.ru

Доклад посвящен изложению недавних результатов (полученных автором в сотрудничестве с коллегами и учениками), касающихся взаимоотношений между динамикой систем и топологической структурой многообразий, на которых эти системы заданы. Основное внимание уделено рассмотрению структурно устойчивых систем с регулярной и хаотической динамикой.

Для иллюстрации приведем три результата, имеющих место для потоков Морса – Смейла и структурно устойчивых каскадов с базисными множествами коразмерности один, заданных на замкнутом гладком ориентируемом многообразии M^n $(n \geq 2)$.

Пусть f^t — поток Морса – Смейла, заданный на M^n, ℓ — число точек в множестве, состоящем из всех стоковых и источниковых состояний равновесия потока f^t, k — число точек в множестве Σ, состоящем из всех седловых состояний равновесия потока f^t, индекс Морса которых равен 1 или $n-1$. Положим

$$g = \frac{k - \ell + 2}{2}.$$

Теорема 1. *Пусть устойчивые и неустойчивые многообразия точек из Σ не пересекаются, $g \geq 1$, и фундаментальная группа многообразия M^n не содержит подгруппу, изоморфную произведению g копий группы $\mathbb{Z}$. Тогда неблуждающее множество потока f^t содержит по крайней мере одну замкнутую траекторию.*

Теорема 2. *Пусть $f : M^n \to M^n$ — структурно устойчивый диффеоморфизм, неблуждающее множество которого содержит растягивающийся ориентируемый аттрактор коразмерности один. Тогда многообразие M^n гомеоморфно тору $\mathbb{T}^n$, а f топологически сопряжен диффеоморфизму, полученному из алгебраического автоморфизма Аносова посредством обобщенной хирургической операции.*

Теорема 3. *Пусть $f : M^3 \to M^3$ — структурно устойчивый диффеоморфизм, неблуждающее множество которого состоит из двумерных базисных множеств. Тогда многообразие M^3 гомеоморфно фактор-пространству, полученному из прямого произведения двумерного тора на отрезок склейкой границ посредством гомеоморфизма, коммутирующего с алгебраическим автоморфизмом Аносова.*

Доклад подготовлен при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 15-01-03687а, № 16-51-10005-Ко_а) и в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2017 году (проект 90).

СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Козлов В. В.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия;
vvkozlov@mi.ras.ru

Найдена цепочка квадратичных первых интегралов общих линейных гамильтоновых систем, не представленных в каноническом виде. Установлена их инволютивность, и исследована задача об их функциональной независимости. Ключевую роль в исследовании гамильтоновой системы играет интегральный конус, который получается приравниванием нулю найденных квадратичных первых интегралов. Показано, что через каждую точку интегрального конуса проходит сингулярное инвариантное изотропное подпространство, и найдена его размерность. Максимальная размерность таких подпространств оценивает сверху степень неустойчивости гамильтоновой системы. Показано, что устойчивость типичных гамильтоновых систем эквивалентна вырождению конуса в положение равновесия. Результаты общего характера применяются к исследованию линейных механических систем с гироскопическими силами и конечномерных квантовых систем.

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОЦИАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

Макаров В. Л.

Центральный экономико-математический институт РАН, Москва, Россия;
makarov@cemi.rssi.ru

В докладе излагаются различные варианты искусственного общества. Обсуждается степень достоверности результатов компьютерных экспериментов.

Перспективы дальнейшего развития искусственных обществ коррелируют с обсуждаемым движением к цифровому миру.

РУЧНЫЕ И ДИКИЕ АВТОМОРФИЗМЫ СВОБОДНЫХ АЛГЕБР

Шестаков И. П.

Университет Сан Паулу, Сан Паулу, Бразилия;
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
shestak@ime.usp.br

Автоморфизм ϕ свободной алгебры $F_{\mathcal{V}}[x_1, \ldots, x_n]$ из класса $\mathcal{V}$ над полем F называется *элементарным*, если он имеет вид:

$$\phi : \begin{cases} x_1 & \mapsto & x_1, \\ & \cdots & \\ x_i & \mapsto & \alpha x_i \quad + \quad f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n), \quad 0 \neq \alpha \in F, \\ & \cdots & \\ x_n & \mapsto & x_n. \end{cases}$$

Автоморфизм называется *ручным*, если он представляется в виде композиции элементарных автоморфизмов, иначе он называется *диким*.

Известно [1], [2], что все автоморфизмы алгебры многочленов и свободной ассоциативной алгебры от двух переменных являются ручными, в то время как в случае трех переменных в обоих случаях существуют дикие автоморфизмы [3], [4].

В докладе мы обсудим известные результаты и открытые вопросы о ручных и диких автоморфизмах в различных классах алгебр.

Работа выполнена при поддержке Фонда фундаментальных исследований штата Сан Паулу (FAPESP, проект 2014/09310-5) и Бразильского национального фонда фундаментальных исследований (CNPq, проект 303916/2014-1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Jung H. W. E* Über ganze birationale Transformationen der Ebene // J. Reine Angew. Math. 1942. V. 184. P. 161–174.
2. *Макар-Лиманов Л. Г.* Об автоморфизмах свободной алгебры с двумя образующими // Функц. анализ и его прил. 1970. Т. 4, вып. 3. С. 107–108.
3. *Shestakov I. P., Umirbaev U. U.* The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables // J. Am. Math. Soc. 2004. V. 17, No 1. P. 197–227.
4. *Umirbaev U. U.* The Anick automorphism of free associative algebras // J. Reine Angew. Math. 2007. V. 605. P. 165–178.

FAST-OSCILLATING CONTROL AND COMBINATORICS OF PERMUTATIONS

Agrachev A. A.

International School for Advanced Studies (SISSA), Trieste, Italy;
Steklov Mathematical Institute RAS, Moscow, Russia;
agrachev@sissa.it

Dimension of a system that we try to control is usually much bigger than number of controlled parameters at our disposal. On the other hand, controlled parameters are not constant, we select their values as more or less arbitrary functions of time, and a lack of resources can be compensated by a sophisticated strategy. Moreover, some efficient universal maneuvers, being re-scaled and repeated with a high frequency, may serve as additional independent controlled parameters. Construction of such maneuvers is intimately related to some nice algebraic structures that I am going to discuss along with necessary analytic techniques and motivating examples.

LEARNABILITY, AUTOREDUCIBILITY, AND NUMBERINGS

Ambos-Spies K.

University of Heidelberg, Heidelberg, Germany;
ambos@math.uni-heidelberg.de

There are numerous variants of E. M. Gold's model of language identification in the limit. In the first part of our talk we show that the most important of these variants can be distinguished from each other by considering the identifiability of the variants of a single computably enumerable set A. In particular, we show that the class of extensions of a c.e. set A obtained by adding at most one new element can be explanatorily learned from informant if and only if A is autoreducible. In the second part of our talk we discuss some relations between learnability of computable classes of computably enumerable sets and the structure of their computable numberings.

ON ALGEBRAS OF 3D QUATERNIONIC HARMONIC FIELDS

Belishev M. I.

Saint-Petersburg Department of the Steklov Mathematical Institute RAS, Saint-Petersburg, Russia; belishev@pdmi.ras.ru

The results of this talk are obtained in collaboration with A. F. Vakulenko.

A quaternionic field (*q-field*) is a pair $p = \{\alpha, u\}$ of a function α and a vector field u given on a 3D compact Riemannian manifold Ω with the smooth boundary. The space $\mathcal{C}(\Omega)$ of continuous q-fields with the norm $\|p\| = \sup_\Omega [|\alpha|^2 + |u|^2]^{\frac{1}{2}}$ and point-wise linear operations and $\mathbb{H}$-like multiplication $pp' = \{\alpha\alpha' - u \cdot u', \alpha u' + \alpha' u + u \wedge u'\}$ is a *noncommutative* Banach algebra.

A q-field p is said to be harmonic (*hq-field*) if $\nabla\alpha = \operatorname{curl} u$ into Ω. The (sub)space $\mathcal{Q}(\Omega) \subset \mathcal{C}(\Omega)$ of hq-fields does not constitute a (sub)algebra. However, under some conditions on the metric, $\mathcal{Q}(\Omega)$ may contain the commutative (so-called *axial*) algebras $\mathcal{A}_e$, which consist of the fields of the form $p = \{\varphi, \psi e\}$, where $e = \nabla\tau$ with the relevant distant function τ, and $\nabla\psi = e \wedge \nabla\varphi$, $\Delta\varphi = \Delta\psi = 0$ in Ω.

In $\mathbb{R}^3$, the q-fields are identified with $\mathbb{H}$-valued functions. Let $\mathcal{Q}^\times(\Omega)$ be the space of continuous linear $\mathbb{H}$-valued functionals on $\mathcal{Q}(\Omega)$. The 'quaternion' Dirac measures $\delta^{\mathbb{H}}_m \in \mathcal{Q}^\times(\Omega) : \delta^{\mathbb{H}}_m(p) = p(m)$ are multiplicative on the axial algebras. For $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ homeomorphic to a ball, we prove that

- $\operatorname{span}\{\mathcal{A}_e \mid e \in S^2\}$ is dense in $\mathcal{Q}(\Omega)$, and
- *any* $f \in \mathcal{Q}^\times(\Omega)$, which is multiplicative on a rich enough set of $\mathcal{A}_e$, there exists a unique $m \in \Omega$ such that $f = \delta^{\mathbb{H}}_m$.

The latter fact provides a 3D-generalization of the classical result on the maximal ideals of the algebra of functions continuous in the disk $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$ and holomorphic into D.

Possible application of axial algebras to the impedance tomography problem on 3D-manifolds is discussed in [1].

REFERENCES

1. *Belishev M. I.*, "On algebras of three-dimensional quaternionic harmonic fields," arxiv.org/abs/1611.08523v2.

WEAK SOLUTION APPROACH IN FLUID MECHANICS

Feireisl E.

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic, Prague, Czech Republic; feireisl@math.cas.cz

We discuss the approach to problems of compressible fluids based on oscillatory (measure valued) solutions. These solutions are described by means of a parameterized (Young) measure characterizing oscillations and a dissipation defect given by the energy dissipation. We show that these solutions comply with the principle of weak-strong uniqueness and present some applications to singular limits and numerical analysis.

The research of E.F. leading to these results has received funding from the European Research Council under the European Union's Seventh Framework Programme (FP7/2007–2013)/ ERC Grant Agreement 320078. The Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic is supported by RVO:67985840.

SOME ASPECTS OF NONPARAMETRIC ESTIMATION THEORY

Ibragimov I. A.

Saint-Petersburg Department of the Steklov Mathematical Institute RAS, Saint-Petersburg, Russia; ibr32@pdmi.ras.ru

I. Definition of nonparametric statistical problems: in this lectures (which I address to the relatively broad mathematical audience) I understand such problems as parametric ones but depending on an infinite dimensional parameter. Moreover, I suppose that the parameter belongs to a known subset of a space with sufficiently nice topological structure (Hilbert, Banach, metric).

Examples:

1. Estimation of signals in additive Gaussian white noise;
2. Estimation of probability densities;
3. Estimation of intensity densities of Poisson random fields.

II. How to construct "good" estimates?

1. General approach;
2. Entropy methods;
3. Projective estimates;
4. Kernel estimates;

Examples. Rate of convergence of different estimates.

III. Bounds from below. We need such bounds to understand how good are estimates we have constructed.

IV. Semi parametric models. I treat such problems as those where one needs to estimate the value of a known function at an unknown parametric point.

EXISTENCE OF SOLUTIONS FOR A PROBLEM OF VISCOELASTIC MEDIA WITH MEMORY MOTION

Zvyagin V. G.

Voronezh State University, Voronezh, Russia; zvg_vsu@mail.ru

This is the joint work with Prof. V. P. Orlov.

Motion model with memory on finite time interval

Integrating the Jeffreys–Oldroyd rheological relation $(1+\lambda\frac{d}{dt})\sigma = 2\nu(1+\varkappa\nu^{-1}\frac{d}{dt})\mathcal{E}$ (where $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum\limits_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$ is the strain rate tensor and λ, $\varkappa$, ν are positive constants) along velocity field v, expressing σ from this relationship and substituting it in the general equation of fluid motion, we get the following initial-boundary value problem

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_0 \Delta v - \mu_1 \mathrm{Div} \int_0^t \exp\left(\frac{s-t}{\lambda}\right) \mathcal{E}(v)\,(s, z(s;t,x))\,ds + \nabla p = f; \quad (1)$$

$$\mathrm{div}\, v(t,x) = 0, \quad (t,x) \in Q_T; \quad (2)$$

$$z(\tau;t,x) = x + \int_t^\tau v\,(s, z(s;t,x))\,ds, \quad 0 \leqslant t,\tau \leqslant T, \quad x \in \overline{\Omega}; \quad (3)$$

$$v(0,x) = v_0(x), \quad x \in \Omega; \quad v(t,x) = 0, \quad (t,x) \in [0,T] \times \partial\Omega. \quad (4)$$

Here the integral term in (1) takes into account the memory of the system. For simplicity, we assume $\rho = 1$ in rheological relation and $\mu_0 = 2\varkappa$, $\mu_1 = 2(\nu - \varkappa)$.

Theorem 1. *Let $f = f_1 + f_2$, where $f_1 \in L_1(0,T;H)$, $f_2 \in L_2(0,T;V^{-1})$, and $v_0 \in H$. Then there exists a weak solution of problem* (1)–(4).

Motion model with memory on infinite time interval

Let $Q = (-\infty, T] \times \Omega$, where $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, be a bounded domain with boundary $\partial\Omega \subset C^2$. We consider in Q the problem

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_0 \Delta v - \mu_1 \mathrm{Div} \int_{-\infty}^t \exp\left(\frac{s-t}{\lambda}\right) \mathcal{E}(v)(s, z(s;t,x))ds + \nabla p = f; \quad (5)$$

$$\mathrm{div}\, v(t,x) = 0, \quad (t,x) \in Q; \quad v(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (-\infty, T] \times \partial\Omega; \quad (6)$$

$$z(\tau;t,x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s;t,x))ds, \quad t,\tau \in (-\infty, T], \quad x \in \overline{\Omega}. \quad (7)$$

Theorem 2. *Let $f \in L_2(-\infty, T; V^{-1})$. Then problem* (5)–(7) *has at least one weak solution.*

Fractional model of viscoelastic Voigt type fluid

Let $Q = [0,T] \times \Omega$, where $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, be a bounded domain with boundary $\partial\Omega \subset C^2$. We consider in Q the problem

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_0 \Delta v - \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \mathrm{Div} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s;t,x))ds + \nabla p = f; \quad (8)$$

$$\begin{array}{l} \mathrm{div}\, v(t,x) = 0, \ (t,x) \in Q; \\ v(0,x) = v^0(x), \ x \in \Omega; \\ v(t,x) = 0, \ (t,x) \in [0,T] \times \partial\Omega; \end{array} \quad (9)$$

$$z(\tau;t,x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s;t,x))ds, \quad t,\tau \in [0,T], \quad x \in \overline{\Omega}. \quad (10)$$

Theorem 3. *Let $f \in L_2(0,T;V^{-1})$. Then problem* (8)–(10) *has at least one weak solution.*

СЕКЦИЯ 1

Алгебра, теория чисел и математическая логика

Тезисы докладов

SECTION 1

Algebra, Number Theory, and Mathematical Logic

Abstracts

ОСНОВЫ ТЕОРИИ СТЕПЕННЫХ MR-ГРУПП

Амаглобели М. Г.

Тбилисский государственный университет им. Ив. Джавахишвили, Тбилиси, Грузия; mikheil.amaglobeli@tsu.ge

Понятие степенной R-группы (R — произвольное ассоциативное кольцо с единицей) введено Р. Линдоном в [1]. В [2] А. Г. Мясников и В. Н. Ремесленников уточнили понятие R-группы, введя дополнительную аксиому. Это уточнение представляет естественное обобщение понятия R-модуля на случай некоммутативных групп. В честь авторов этой статьи группы с этой аксиомой в статье М. Г. Амаглобели [3] названы MR-группами. Для нильпотентных групп и биномиальных колец в [4] Ф. Холл ввёл категорию R-групп, которая отличается от категории MR-групп.

Хорошо известна роль тензорного произведения в категории R-модулей, в частности, тензорного расширения кольца скаляров. В [2] определен точный аналог последней конструкции для произвольной MR-группы G — конструкция тензорного пополнения $G^{S,\mu}$, где $\mu : R \to S$ — гомоморфизм колец.

В докладе предложен конкретный способ построения тензорного пополнения, использующий технику комбинаторной теории групп. Как следствие, получено описание свободных MR-групп и свободных MR-произведений $\underset{R}{*} G_i$ на языке свободных групповых конструкций.

Теорема. *Пусть R — кольцо, содержащее кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ в качестве подкольца, G_i, $i \in I$ — некоторое множество MR-групп. Тогда:*

1. $\underset{R}{*} G_i \cong (*G_i)^R$;
2. *каноническое отображение $\lambda : *G_i \to (*G_i)^R$ является вложением.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lyndon R. C.* Groups with parametric exponents // Trans. Amer. Math. Soc. 1960. V. 96, P. 518–533.
2. *Мясников А. Г., Ремесленников В. Н.* Степенные группы I. Основы теории и тензорные пополнения // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 5. С. 1106–1118.
3. *Amaglobeli M.* Precise exponential MR-groups // Reports of enlarged sessions of the seminar of I. Vekua institute of applied mathematics. 2014. V. 28.
4. *Hall P.* Nilpotent groups // Mathematica. 1968. V. 12, No 1. P. 3–36.

О СПЕКТРАХ АВТОУСТОЙЧИВОСТИ ВЫЧИСЛИМЫХ СТРУКТУР

Баженов Н. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
bazhenov@math.nsc.ru

Пусть $\mathbf{d}$ — тьюрингова степень. Вычислимая структура $\mathcal{S}$ называется $\mathbf{d}$-*автоустойчивой*, если для любой вычислимой копии $\mathcal{A}$ структуры $\mathcal{S}$ существует $\mathbf{d}$-вычислимый изоморфизм, действующий из $\mathcal{A}$ на $\mathcal{S}$. *Спектром автоустойчивости* структуры $\mathcal{S}$ называют множество всех степеней $\mathbf{d}$ таких, что $\mathcal{S}$ является $\mathbf{d}$-автоустойчивой. В докладе будет дан обзор недавно полученных результатов [1]–[5] о спектрах автоустойчивости вычислимых структур.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баженов Н. А.* О степенях автоустойчивости для линейных порядков и линейно упорядоченных абелевых групп // Алгебра и логика. 2016. Т. 55, № 4. С. 393–418.
2. *Баженов Н. А., Калимуллин И. Ш., Ямалеев М. М.* О строгих и нестрогих степенях категоричности // Алгебра и логика. 2016. Т. 55, № 2. С. 257–263.
3. *Bazhenov N.* A note on effective categoricity for linear orderings // Lect. Notes Comput. Sci. 2017. No 10185. P. 85–96.
4. *Bazhenov N.* Categoricity spectra for polymodal algebras //Studia Logica. 2016. V. 104, No 6. P. 1083–1097.
5. *Bazhenov N. A., Yamaleev M. M.* Degrees of categoricity of rigid structures // Lect. Notes Comput. Sci. 2017. No 10307. P. 152–161.

УНИФИКАЦИЯ ВО ВРЕМЕННЫХ МНОГОАГЕНТНЫХ ЛОГИКАХ С УНИВЕРСАЛЬНОЙ МОДАЛЬНОСТЬЮ

Башмаков С. И.[1], **Кошелева А. В.**[2], **Рыбаков В. В.**[3]

[1]*Институт математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета, Красноярск, Россия;* krauder@mail.ru
[2]*Институт космических и информационных технологий Сибирского федерального университета, Красноярск, Россия;* koshelevaa@mail.ru
[3]*Department of Computing and Mathematics, Manchester Metropolitan University, Manchester, UK;* v.rybakov@mmu.ac.uk

Логические системы, моделирующие рассуждения и многоагентную среду, вычисление истинностных значений и процесс принятия решений активно исследуются в настоящее время и имеют большое значение в целом ряде областей информатики [1].

Проблема унификации, которую можно выразить в виде возможности получения теоремы из формулы заменой переменных, возникла в Computer Science [2], а позже нашла применение и в нестандартных логиках. Значительные результаты принадлежат S. Ghilardi [3], чья техника, основанная на проективных формулах, неоднократно показала свою эффективность, в том числе, с временными логиками [4], [5], имеющими множество приложений [6]. В [7] В. В. Рыбаковым найден критерий неунифицируемости формул и построен конечный базис пассивных правил для расширений $\mathcal{S}4$ и $\mathcal{K}4 + \{\Box\bot \equiv \bot\}$. Используя ту же технику, в [8], [9] исследованы многоагентные логики $\mathcal{LTK}, \mathcal{LFPK}$.

В данной работе нами исследуется унификация в логиках с выразимой универсальной модальностью. Найдено синтаксическое описание для всех неунифицируемых формул, а также базисы пассивных правил вывода в таких логиках.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Van der Hoek W., Wooldridge M.* Logics for Multi-Agent Systems // In G. Weiss, editor, Multi-Agent Systems (second edition). MIT Press, 2013. P. 671–810.
2. *Baader F., Snyder W.* Unification theory. In: Robinson J., Voronkov A., editors // Handbook of Automated Reasoning. I. Elsevier Science Publ., 2001. P. 447–533.
3. *Ghilardi S.* Unification Through Projectivity // J. of Logic and Computation. 1997. V. 7, No 6. P. 733–752.
4. *Rybakov V. V.* Projective formulas and unification in linear temporal logic LTLU // Logic Journal of the IGPL. 2014. V. 22, No 4. P. 665–672.
5. *Bashmakov S.I., Kosheleva A.V., Rybakov V.* Projective formulas and unification in linear discrete temporal multi-agent logics // Sib. Elect. Math. Reports. 2016. V. 13. P. 923–929.
6. *Manna Z., Pnueli A.* The Temporal Logic of Reactive and Concurrent Systems: Specification. Springer, 1992.
7. *Rybakov V.V., Terziler M., Gencer C.* An essay on unification and inference rules for modal logics // Bulletin of the Section of Logic. 1999. V. 28, No 3. P. 145–157.
8. *Bashmakov S.I.* Unification and inference rules in the multi-modal logic of knowledge and linear time LTK // SibFU Journal. Mathematics and Physics. 2016. V. 9, No 2. P. 148–156.
9. *Bashmakov S.I., Kosheleva A.V., Rybakov V.* Non-unifiability in linear temporal logic of knowledge with multi-agent relations // Sib. Elect. Math. Reports. 2016. V. 13. P. 656–663.

О МУЛЬТИФАКТОРИЗУЕМЫХ КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

Васильев А. Ф.[1], **Балычев С. В.**[2]

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Республика Беларусь;
[1]`formation56@mail.ru`, [2]`sergey.baluchev@gmail.com`

Рассматриваются только конечные группы. Группа G является произведением попарно перестановочных подгрупп $A_1, A_2, \ldots, A_n$, если $G = A_1 A_2 \cdots A_n$ и $A_i A_j = A_j A_i$ для всех целых i и j с $1 \le i, j \le n$. В этом случае для любого набора индексов $1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_k \le n$ произведение $A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}$ будет подгруппой группы G.

В настоящем сообщении мы продолжаем исследования работы [1], решая следующую задачу. Пусть $\mathfrak{F}$ — класс групп. Найти подходящий класс групп $\mathfrak{X} \supseteq \mathfrak{F}$, такой, что $\mathfrak{X}$ содержит всякую группу $G = A_1 A_2 \cdots A_n$, где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — попарно перестановочные подгруппы G и каждое произведение не более чем k подгрупп A_i содержится в классе $\mathfrak{F}$.

Определение. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — классы групп, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, k — натуральное число. Будем говорить, что класс $\mathfrak{F}$ имеет свойство $\mathcal{P}_k^{\mathfrak{X}}$, если всякая группа G, представимая в виде произведения попарно перестановочных подгрупп $A_1, A_2, \ldots, A_n$ таких, что для каждого выбора индексов $i \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_k \le n$ подгруппа $A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k} \in \mathfrak{F}$, принадлежит классу $\mathfrak{X}$.

В классе разрешимых групп справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F} = LF(f)$ и $\mathfrak{X} = LF(h)$ — наследственные локальные формации, где f и h — максимальные внутренние локальные экраны $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ соответственно, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, и k — натуральное число, $k \ge 2$. Тогда и только тогда формация $\mathfrak{F}$ обладает свойством $\mathcal{P}_k^{\mathfrak{X}}$, когда $f(p)$ обладает свойством $\mathcal{P}_{k-1}^{h(p)}$ для любого простого p.*

С помощью этой теоремы найдена «достаточно маленькая» разрешимая наследственная локальная формация $\mathfrak{X}$, для которой формация $\mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп обладает свойством $\mathcal{P}_2^{\mathfrak{X}}$.

Пусть группа $G = A_1 A_2 \cdots A_n$ — произведение попарно перестановочных подгрупп $A_1, A_2, \ldots, A_n$. В [2, теорема VI, 10.2] Хупперт показал, что G сверхразрешима, если каждое произведение $A_i A_j A_k$ сверхразрешимо. В [3] Л. С. Казарин установил, что если каждое произведение $A_i A_j$ разрешимо, то и G разрешима.

Теорема 2. *Пусть группа $G = A_1 A_2 \cdots A_n$ — произведение попарно перестановочных подгрупп $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Если $A_i A_j$ — сверхразрешимая подгруппа для всех $1 \le i, j \le n$ и коммутант G' нильпотентен, то G сверхразрешима.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амберг Б., Казарин Л. С., Хефлинг Б.* Конечные группы с кратными факторизациями // Фундаментальная прикладная математика. 1998. Т. 4, № 4. С. 1251–1263.
2. *Huppert B.* Endliche Gruppen I. Berlin: Springer, 1967.
3. *Казарин Л. С.* Факторизации конечных групп разрешимыми подгруппами // Укр. мат. журн. 1991. Т. 34, № 7–8. С. 947–950.

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ, ФАКТОРИЗУЕМЫХ ВЗАИМНО ПЕРЕСТАНОВОЧНЫМИ ПОДГРУППАМИ

Васильева Т. И.[1,2], **Васильев А. Ф.**[1], **Симоненко Д. Н.**[2]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Республика Беларусь;*
[2]*Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Республика Беларусь;*
tivasilyeva@mail.ru, formation56@mail.ru, dsimonenkon@mail.ru

Рассматриваются только конечные группы. Согласно [1] подгруппы A и B группы G называются взаимно перестановочными, если A перестановочна с каждой подгруппой из B и B перестановочна с каждой подгруппой из A. Изучению групп, представимых произведением своих взаимно перестановочных подгрупп, посвящены многочисленные работы различных авторов. Основные результаты, полученные в этом направлении до 2010 года, изложены в монографии [1].

Определение [2]. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — классы групп, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Класс $\mathfrak{F}$ называется MP-замкнутым в $\mathfrak{X}$, если $\mathfrak{F}$ содержит всякую $\mathfrak{X}$-группу $G = AB$, где A и B — взаимно перестановочные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы G.

Пустой класс считается MP-замкнутым в любом классе групп $\mathfrak{X}$.

Проблема. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация (класс Фиттинга, класс Шунка) и $\mathfrak{X}$ — класс групп, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Для данного класса $\mathfrak{X}$ описать все формации (классы Фиттинга, классы Шунка) $\mathfrak{F}$, MP-замкнутые в $\mathfrak{X}$.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ — насыщенные формации, содержащие все сверхразрешимые π-группы для $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Пусть H и F — максимальные внутренние локальные экраны $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно. Формация $\mathfrak{F}$ является MP-замкнутой в $\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда $F(p)$ MP-замкнута в $H(p)$ для любого простого p.*

Следствие 1 [3]. *Пусть $G = AB$ — произведение взаимно перестановочных сверхразрешимых подгрупп A и B. Если коммутант G' нильпотентен, то G сверхразрешима.*

В работе [4] был исследован класс всех групп, у которых любая подгруппа Шмидта является сверхразрешимой, и, в частности, было установлено, что этот класс является наследственной насыщенной формацией Фиттинга, содержащей все сверхразрешимые группы.

Следствие 2. *Пусть группа $G = AB$ — произведение взаимно перестановочных подгрупп A и B. Если в A и B любая подгруппа Шмидта является сверхразрешимой, то любая подгруппа Шмидта группы G сверхразрешима.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Asaad M.* Products of Finite Groups. Berlin/New York: Walter de Gruyter, 2010.
2. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Симоненко Д. Н.* О MP-замкнутых насыщенных формациях конечных групп // Известия вузов. Математика. 2017. № 6. С. 9–17.
3. *Asaad M., Shaalan A.* On the supersolubility of finite groups // Arch. Math. 1989 V. 53, No 4. P. 318–326.
4. *Монахов В. С.* О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта // Матем. заметки. 1995. Т. 58, № 5. С. 717–722.

СОКРАТИМЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ РЕШЕТКИ МНОГООБРАЗИЙ ПОЛУГРУПП

Верников Б. М.[1], **Гусев С. В.**[2], **Скоков Д. В.**[3]

Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия;
[1]`bvernikov@gmail.com`, [2]`sergey.gusb@gmail.com`, [3]`dmitry.skokov@gmail.com`

Элемент x решетки $\langle L; \vee, \wedge\rangle$ называется *модулярным*, если

$$\forall y, z \in L : \quad y \le z \longrightarrow (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee y$$

и *сократимым*, если

$$\forall y, z \in L : \quad x \vee y = x \vee z \ \&\ x \wedge y = x \wedge z \longrightarrow y = z.$$

Легко заметить, что любой сократимый элемент является модулярным. Некоторую информацию о модулярных и сократимых элементах в абстрактных решетках можно найти в [2].

Мы продолжаем изучение специальных элементов в решетке **SEM** всех многообразий полугрупп. Обширную информацию о проведенных в этом направлении исследованиях можно найти в обзоре [5]. Модулярные элементы решетки **SEM** изучались в [1], [3], [4]. В частности, в [4] было получено полное описание коммутативных многообразий полугрупп, являющихся модулярными элементами решетки **SEM**. В данной работе получено описание коммутативных многообразий полугрупп, являющихся сократимыми элементами этой решетки.

Через **T** и **SL** будем обозначать тривиальное многообразие и многообразие полурешеток соответственно.

Теорема. *Для коммутативного многообразия полугрупп* **V** *следующие условия эквивалентны:*

(а) **V** *— сократимый элемент решетки* **SEM**;

(б) **V** *— модулярный элемент решетки* **SEM**;

(в) $\mathbf{V} = \mathbf{M} \vee \mathbf{N}$, *где* **M** *одно из многообразий* **T** *или* **SL**, *а* **N** *удовлетворяет тождествам* $x^2y = 0$ *и* $xy = yx$.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 1.6018.2017) и РФФИ (грант № 17-01-00551).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ježek J., McKenzie R. N.* Definability in the lattice of equational theories of semigroups // Semigroup Forum. 1993. V. 46. P. 199–245.
2. *Šešelja B., Tepavčević A.* Weak Congruences in Universal Algebra. Novi Sad: Symbol, 2001.
3. *Shaprynskiĭ V. Yu.* Modular and lower-modular elements of lattices of semigroup varieties // Semigroup Forum. 2012. V. 85. P. 97–110.
4. *Vernikov B. M.* On modular elements of the lattice of semigroup varieties // Comment. Math. Univ. Carol. 2007. V. 48. P. 595–606.
5. *Vernikov B. M.* Special elements in lattices of semigroup varieties // Acta Sci. Math. (Szeged). 2015. V. 81. P. 79–109.

РЕЗУЛЬТАТЫ ПО ТЕОРИИ МОДЕЛЕЙ О БОГАТЫХ ТИПАХ В МНОГОСОРТНЫХ МНОГОЗНАЧНЫХ СИСТЕМАХ И КОЛЛЕКТИВНЫХ КЛАСТЕРИЗАЦИЯХ ФОРМУЛ И ТИПОВ В ЛОГИЧЕСКИХ ИСЧИСЛЕНИЯХ

Викентьев А. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет,
Новосибирский государственный технический университет,
Новосибирск, Россия; vikent@math.nsc.ru

Доклад посвящен обобщению и уточнению результатов и теорем о двукардинальных (богатых) множествах типов, доказанных ранее в стабильном случае или с условиями стабильности (некоторые из них вошли в диссертацию автора “Теории с покрытием и формульные подмножества”, ИМ СО РАН, Новосибирск, 1992 г., 134 с.) для семейств формул, а также опубликованы в сборнике, посвященном 90-летию академика А. Д. Тайманова “Two cardinal theorems for sets of types in stable theory”, Казахстан, Алма-Ата, 2007, с. 67–69, были доложены в Алма-Ате и Новосибирске на ежегодных Мальцевских чтениях с 2006 г., в том числе к 100-летию академика А. И. Мальцева и др. На случай богатых семейств типов над параметрами модели многосортной многозначной теории с компактными (насыщенными, однородными) измеримыми и вычислимыми моделями со свойством отделимости новых элементов, реализующих вычислимые типы (над малыми подмножествами модели) совместных с этими множествами, от элементов вложенной модели и наличия реализаций в большей (с богатым семейством) модели вполне определимых, вычислимых (стабильных) типов или неразличимых элементов. Стабильность теорий не предполагается, а некоторые известные теоремы в обычном случае получаются как следствия.

Продолжено изучение числа двукардинальных моделей в классе теорий с покрытиями, введенных автором. Рассмотрены вопросы определимости систем с метрикой в наследственно конечных надстройках, и о мощностях типово определимых подмножеств и их свойств двукардинальности. Интерес к этим вопросам и таким моделям имеет и прикладной характер в поиске наиболее информативных (нетривиальных) типов прикладной теории, логических закономерностей для кластеризации и упорядочения таких “знаний” с помощью привлечения конечных, метрических или измеримых систем и расстояний между множествами моделей. Все это служит для введения новых метрик на классах неэквивалентных формул, логических высказываний экспертов или типов (совместных совокупностей высказываний) на измеримых подклассах измеримых, вычислимых (метрических, измеримых) моделей, необходимых для разработки алгоритмов распознавания образов, поиска закономерностей, обнаружения редких событий и кластеризации многозначных формул-знаний в логиках Лукасевича. Найдены различные теоретико-модельные новые метрики, разработаны методы кластеризации по метрикам для конечных множеств формул в различных логических исчислениях с привлечением различных подклассов моделей, изучены различные индексы качества для сравнений и способы введения коллективных метрик. Проведены модельные эксперименты с помощью разработанной программы, поддерживающей все необходимые алгоритмы и нахождение по расстояниям кластеризаций.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14-01-00358).

ЯВНЫЕ ЗАКОНЫ ВЗАИМНОСТИ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Востоков С. В.

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия; sergei.vostokov@gmail.com

В докладе будет рассказано об обобщениях классического спаривания Гильберта локального поля на формальные модули, определённые на максимальном идеале поля с помощью различного типа формальных групп. Точнее, пусть K — локальное поле, M — максимальный идеал и $F(X,Y)$ — формальная группа, заданная на кольце целых O_k подполя k в K. Пусть $F(M)$ — формальный модуль, содержащий ядро изогении $Ker[(\pi)^n]$, где π — простой элемент поля k. Мы рассматриваем кососимметрическое спаривание

$$(\, , \,)_{F,n} \colon F(M) \times F(M) \to Ker[(\pi)^n].$$

Для этого спаривания для мультипликативной формальной группы $X + Y + cXY$, а также для формальной группы Любина – Тейта находятся явные формулы в работе [1]. В докладе рассказывается как эти явные формулы и явные формулы для классического символа Гильберта (найденные в работе [2]) применяются для конструктивного построения теории полей классов для локального поля и формальных модулей. Эти построения можно применять также и к построению такой же теории в эллиптических кривых, связанных с соответствующими формальными группами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vostokov S.*, *Volkov V.* Explicit form of the Hilbert symbol for polynomial formal groups // St. Petersburg Mathematical Journal. 2015. V. 26, No 5. P. 785–796.
2. *Востоков С. В.* Явная форма закона взаимности // Изв. АН СССР. Сер.матем. 1978. Т. 42, № 6. С. 1288-1321.

МНОГОМЕРНО-ДЕТЕРМИНАНТНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ КЛАССИЧЕСКИХ ТОЖДЕСТВ И НЕРАВЕНСТВ

Гаспарян А. С.

Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН, Переславль-Залесский, Россия; armenak.gasparyan@yandex.ru

Множество классических неравенств, таких как неравенства Ньютона, неравенство Грама, неравенство Коши – Буняковского – Шварца, неравенства Чебышева, Грюса, Островского и некоторые другие, следуют из тех или иных замечательных тождеств. В этой связи особую роль сыграли знаменитое тождество Бине – Коши и множество его частных случаев, таких как тождества Коши – Лагранжа, Андреева, Коркина, Сонина и некоторые их модификации. Вот несколько примеров.

Пример 1. *(Неравенства Ньютона)*

$$\begin{vmatrix} p_{i-1} & p_i \\ p_i & p_{i+1} \end{vmatrix} \le 0, \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

следующие из частного случая $i = 1$ с применением теоремы Ролля. В свою очередь, случай $i = 1$ сводится к тождеству

$$\begin{vmatrix} p_0 & p_1 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i<j} (x_i - x_j)^2 \le 0.$$

Пример 2. *(Неравенство Коши – Буняковского – Шварца)*

$$\begin{vmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \\ \sum x_i y_i & \sum y_i^2 \end{vmatrix} = \sum_{i<j} \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix}^2 \ge 0.$$

Пример 3. *(Неравенства Чебышева)*

$$\begin{vmatrix} n & \sum x_i \\ \sum y_i & \sum x_i y_i \end{vmatrix} = \sum_{i<j} (x_i - x_j)(y_i - y_j) \ge 0,$$

если $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ — синхронные n-последовательности действительных чисел.

В данной работе изложены результаты многолетних изысканий автора по обобщению хорошо известных и сравнительно недавно полученных детерминантных тождеств и неравенств на многомерные определители. В частности, справедливы следующие неравенства, обобщающие первые два из вышеприведённых.

Пример 4. *(Обобщённые неравенства Ньютона)*

$$(-1)^l \sum_{k=0}^{2l} (-1)^k \binom{2l}{k} p_k p_{2l-k} = (-1)^l K(l,n) \sum (x_{j_1} - x_{j_2})^2 \cdots (x_{j_{2l-1}} - x_{j_{2l}})^2 \ge 0.$$

Пример 5. *(Обобщённые неравенства Коши – Буняковского – Шварца)*

$$\Big| < \vec{x}^{(i_1)} | \cdots | \vec{x}^{(i_{2l})} > \Big|_{i_1, \ldots, i_{2l} = 1, \ldots, n} = \sum_{k_1 < \cdots < k_{2l} < n} (\det(x_{k_j}^{(i)}))^{2l} \ge 0.$$

Представлены также методы вывода новых тождеств и доказательства неравенств, не имеющих классических аналогов. Найдены различные приложения в алгебре, теории чисел, геометрии и анализе.

КОНСТРУКТИВНЫЕ МОДЕЛИ И СЕМАНТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Гончаров С. С.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
s.s.goncharov@math.nsc.ru

При обработке данных и разработке методов цифровых технологий в наибольшей мере возникает ряд логических проблем. Именно в этой связи в последние годы развиваются исследования, ориентированные на применение логических методов в Computer Science. В работах [1], [2] была предложена конструкция построения языка программирования логического типа для построения систем программирования по управлению сложными системами, в которых условия управления в различных условиях зависят от различного типа входных данных, которые представляются формализмами логического типа на основе логических структур. Для построения такой системы Ю. Л. Ершовым [3]–[5] рассматривалась надстройка из наследственно конечных множеств. С точки зрения построения языка программирования подход на основе списочной надстройки представляется более естественным.

Представлено обогащение для построения термов конструкциями условного определения новых термов, при этом возникают новые возможности построения Σ и Δ_0 формул. Показано, что при этом расширении возможности описания отношений Δ_0 формулами не увеличиваются, расширение же рекурсией по спискам расширяет класс Δ_0-определимых отношений, но не изменяет выразительные возможности Σ-формул. Построены рекурсивные термы, обладающие большими выразительными возможностями. Обсуждаются вопросы цифрового представления надстройки списочной для вычислимых моделей полиномиальной сложности с сохранением полиномиальности и полиномиальности проверки истинности Δ_0 формул. Заметим, что как показал Н. Баженов, уже даже на первом уровне списков свойство автоматности не сохраняется [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гончаров С. С., Свириденко Д. И.* Σ-программирование // Вычисл. системы. 1985. № 107. С. 3–29.
2. *Ershov Yu. L., Goncharov S. S., Sviridenko D. I.* Semantic programming // Information Processing. Proc. IFIP 10th World Comput. Congress. Dublin, 1986. V. 10. P. 1113–1120.
3. *Ershov Yu. L.* The principle of Σ-enumeration // Soviet. Math. Dokl. 1983. V. 27, P. 670–672.
4. *Ershov Yu. L.* Dynamic logic over admissible sets // Soviet. Math. Dokl. 1983. V. 28. P. 739–742.
5. *Ershov Yu. L.* Definability and Computability // Siberian School of Algebra and Logic. Plenum. New York. 1996.
6. *Bazhenov N. A.* Automatic structures and the theory of lists // Sib. Electron. Math. Reports. 2015. V. 12. P. 714–722.

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ОБЁРТЫВАЮЩИЕ АЛГЕБРЫ РОТА – БАКСТЕРА ПРЕАЛГЕБР

Губарев В. Ю.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
wsewolod89@gmail.com

Пусть A — алгебра многообразия Var. Линейный оператор R на A называется оператором Рота – Бакстера, если для любых $x, y \in A$ выполнено

$$R(x)R(y) = R(R(x)y + xR(y) + xy).$$

В таком случае алгебра A называется Var-алгеброй Рота – Бакстера. Многообразие всех Var-алгебр Рота – Бакстера обозначим через RBVar.

Прелиевы алгебры были независимо введены Кожулем, Винбергом и Герштенхабером в 1960-х годах, такие алгебры задаются тождеством $(xy)z - x(yz) = (yx)z - y(xz)$. В 1990-х и 2000-х годах Лодей определил прекоммутативные и преассоциативные алгебры. В [1] и [2] были даны эквивалентные определения пре-Var-алгебры для любого многообразия Var. Обозначим через preVar многообразие всех пре-Var-алгебр.

Агуиар в 2000 г. заметил [3], что ассоциативная алгебра Рота – Бакстера относительно операций $x \succ y = R(x)y$, $x \prec y = xR(y)$ является преассоциативной алгеброй. В [1] этот факт был обобщен на произвольное многообразие Var. В [4] была доказана

Теорема. *Любая пре-*Var*-алгебра инъективно вкладывается в* Var*-алгебру Рота – Бакстера.*

В работе найден базис универсальной обертывающей алгебры Рота – Бакстера (соответствующего многообразия) коммутативных, ассоциативных и лиевых преалгебр. Для описания базиса в лиевом случае используется конструкция свободной лиевой алгебры Рота – Бакстера [5], [6].

Доказано, что пара многообразий (RBLie, preLie) в отличие от (RBAs, preAs) и (RBCom, preCom) является PBW-парой [7]. Доказана нешрайеровость многообразий коммутативных, ассоциативных и лиевых алгебр Рота – Бакстера.

Аналогичные задачи были рассмотрены и решены для посталгебр.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00065).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bai C., Bellier O., Guo L., Ni X.* Splitting of operations, Manin products, and Rota – Baxter operators // Int. Math. Res. Not. IMRN. 2013. P. 485–524.
2. *Gubarev V. Yu., Kolesnikov P. S.* Operads of decorated trees and their duals // Comment. Math. Univ. Carolin. 2014. V. 55, No 4. P. 421–445.
3. *Aguiar M.* Pre-Poisson algebras // Lett. Math. Phys. 2000. V. 54. P. 263–277.
4. *Gubarev V., Kolesnikov P.* Embedding of dendriform algebras into Rota – Baxter algebras // Cent. Eur. J. Math. 2013. V. 11, No. 2. P. 226–245.
5. *Губарев В.Ю.* Свободные лиевы алгебры Рота – Бакстера // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 5. С. 1036–1047.
6. *Gubarev V. Yu., Kolesnikov P. S.* Groebner – Shirshov basis of the universal enveloping Rota – Baxter algebra of a Lie algebra // J. Lie Theory (to appear).
7. *Mikhalev A. A., Shestakov I. P.* PBW-pairs of varieties of linear algebras // Commun. Algebra. 2014. V. 42, No. 2. P. 667–687.

ЦЕНТРАЛИЗАТОРНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ ОБОБЩЕННЫХ ГРУПП БАУМСЛАГА – СОЛИТЕРА

Дудкин Ф. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
DudkinF@ngs.ru

Конечно порожденная группа G, которая действует на дереве так, что все вершинные и реберные стабилизаторы — бесконечные циклические группы, называется *обобщенной группой Баумслага – Солитера* (GBS группа). По теореме Басса – Серра всякая GBS группа является фундаментальной группой подходящего графа с метками.

Как заметил Д. Робинсон [1], GBS группы занимают центральные позиции в комбинаторной теории групп благодаря следующим свойствам: нециклические GBS группы — в точности такие конечно порожденные группы когомологической размерности 2, которые имеют соизмеримую бесконечную циклическую группу; GBS группы когерентны.

Предположим, что в группе G существует строго убывающая цепочка централизаторов $C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_d$ длины d, т. е. содержащая ровно d элементов, но не существует такой цепочки длины $d+1$. Тогда *централизаторная размерность группы* G $cdim(G)$ равна d. Если такого числа d не существует, то полагают $cdim(G) = \infty$. Более полные сведения о централизаторных размерностях групп можно найти в [2]. Основной результат работы

Теорема. *Пусть* $\mathbb{A}$ — *редуцированное дерево с метками,* $\pi_1(\mathbb{A}) = G$ *тогда* $cdim(G) \leqslant 2 \cdot |V(A)| - 1$, *число* $cdim(G)$ *нечётное. Для любого нечётного числа* l *от 3 до* $2 \cdot n - 1$ *найдется редуцированное дерево с метками* $\mathbb{B}$ *на* n *вершинах такое, что* $cdim(\pi_1(\mathbb{B})) = l$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00065).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Robinson D. J. S.* Generalized Baumslag – Solitar groups: a survey of recent progress // Groups St Andrews 2013, LMS, Lecture Note Series. No 422. 2016. P. 457–469.
2. *Myasnikov A., Shumayatsky P.* Discriminating groups and c-dimension // J. Group Theory. 2004. V. 7, No 1. P. 135–142.

О ПОЧТИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ АЛГЕБРАХ БИНАРНЫХ ИЗОЛИРУЮЩИХ ФОРМУЛ ПОЛИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ

Емельянов Д. Ю.[1], **Судоплатов С. В.**[2]

[1] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;* dima-pavlyk@mail.ru

[2] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный технический университет, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;* sudoplat@math.nsc.ru

В работе рассматриваются алгебры $\mathfrak{A}$ бинарных изолирующих формул [1], [2] элементарных теорий $T(\mathrm{pm})$ полигонометрий pm и, в частности, элементарных теорий $T(\mathrm{trm})$ тригонометрий trm пар групп (G_1, G_2) [3].

Так как любая теория $T(\mathrm{pm})$ имеет единственный 1-тип p, ее алгебра $\mathfrak{A}$ бинарных изолирующих формул совпадает с моноидом $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$.

Напомним [1], [2], что алгебра $\mathfrak{A}$ называется (*почти*) *детерминированной*, если для любых меток u и v множество $u \cdot v$ одноэлементно (конечно). Для детерминированной алгебры $\mathfrak{A}$ с множеством меток U алгебра $\langle U; *\rangle$ с операцией $u * v = w$, где $u \cdot v = \{w\}$, обозначается через $\mathfrak{A}'$.

Через $c(\mathrm{pm})$ обозначается число компонент связности полигонометрии pm.

Теорема 1. *Алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ бинарных изолирующих формул полигонометрической теории $T(\mathrm{pm})$ детерминирована тогда и только тогда, когда выполняется какое-либо из следующих условий:*

(1) $|G_1| = 1$ *и* $c(\mathrm{pm}) \leq 2$;

(2) $1 < |G_1| < \omega$, $|G_2| = 1$ *и* $c(\mathrm{pm}) = 1$;

(3) $|G_1| \geq \omega$ *и* $|G_2| = 1$.

При этом в случае (1) *алгебра* $\mathfrak{P}'_{\nu(p)}$ *изоморфна единичной группе или группе* $\mathbb{Z}_2$, *а в случаях* (2) *и* (3) *эта алгебра изоморфна группе* G_1.

Следствие. *Любая группа изоморфна некоторой алгебре* $\mathfrak{P}'_{\nu(p)}$.

Теорема 2. *Алгебра бинарных изолирующих формул полигонометрической теории* $T(\mathrm{pm})$ *почти детерминирована тогда и только тогда, когда группа* G_2 *конечна.*

Согласно теореме 2 каждая полигонометрия с конечными компонентами связности имеет теорию с почти детерминированной алгеброй бинарных изолирующих формул. В частности, таковыми являются представленные в [4] алгебры для правильных многогранников.

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-6848.2016.1) и Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант № 0830/ГФ4).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Shulepov I. V., Sudoplatov S. V.* Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2014. V. 11. P. 380–407.
2. *Судоплатов С. В.* Классификация счетных моделей полных теорий. Новосибирск: НГТУ, 2014.
3. *Судоплатов С. В.* Полигонометрии групп. Новосибирск: НГТУ, 2013.
4. *Емельянов Д. Ю.* О почти детерминированных алгебрах бинарных изолирующий формул // Междунар. конф. “Мальцевские чтения”. Тез. докл. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2016. С. 182.

АКСИОМАТИКА ТИПИЗИРОВАННЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ВКЛЮЧЕНИЯ С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ В БАЗАХ ДАННЫХ

Зыкин С. В.[1], **Зыкин В. С.**[2]

[1] *Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омск, Россия;* szykin@mail.ru

[2] *Омский государственный технический университет, Омск, Россия;* vszykin@mail.ru

Ссылочные ограничения целостности на данные (referential integrity) являются одним из основных видов ограничений, которые отражают специфику бизнес-правил в прикладной области и позволяют сохранить структурную целостность БД [1]. Теоретической основой ссылочной целостности являются зависимости включения [2]. Методы поиска зависимостей включения в общем случае не формализуемы, однако, в частных случаях это возможно сделать [3] используя первичные ключи отношений для нециклических баз данных. В данной работе предлагается общая теория типизированных зависимостей включения, учитывающая неопределенные значения в базах данных.

Определим соответствующие друг другу кортежи при наличии неопределенных значений.

Определение 1. Кортеж $t_i[X]$ ***соответствует*** кортежу $t_j[X]$ по атрибутам X ($t_j[X] \preccurlyeq t_i[X]$), если $t_i[A_l] \neq Null$, тогда $t_j[A_l] = t_i[A_l]$ или $t_j[A_l] = Null$; если $t_i[A_l] = Null$, тогда $t_j[A_l] = Null$ для любого атрибута $A_l \in X$.

Очевидно, что заданное в определении 1 отношение $t_j[X] \preccurlyeq t_i[X]$ является транзитивным.

Определение 2. Зависимость включения $\sigma = R_j[X] \subsetneq R_i[X]$ от главной таблицы $R_i[X]$ к подчиненной таблице $R_j[X]$ по атрибутам X ***существует***, если для любого кортежа $t_j[X] \in R_j[X]$ имеется соответствующий кортеж $t_i[X]$ в отношении $R_i[X]$. Такую зависимость будем называть типизированной с допущением неопределенных значений.

Представим систему аксиом, для зависимостей включения с возможными неопределенными значениями:

INN1) (рефлексивность): если $X \subseteq [R_i]$, тогда $R_i[X] \subsetneq R_i[X]$;

INN2) (проекция): если $R_j[Y] \subsetneq R_i[Y]$ и $X \subseteq Y$, тогда $R_j[X] \subsetneq R_i[X]$;

INN3) (транзитивность): если $R_j[X] \subsetneq R_i[X]$ и $R_i[X] \subsetneq R_l[X]$, тогда выполнено $R_j[X] \subseteq R_l[X]$.

Теорема. *Система аксиом* **INN1–INN3** *полна и непротиворечива.*

С использованием свойства замыкания отношений разработан алгоритм поиска избыточных зависимостей включения. Доказана корректность этого алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gómez-López F. T., Gasca R. M., Pérez-Álvarez J. M.* Compliance validation and diagnosis of business data constraints in business processes // Information Systems. 2015. V. 48. P. 26–43.
2. *Casanova M., Fagin R., Papadimitriou C.* Inclusion Dependencies and Their Interaction with Functional Dependencies // Journal of Computer and System Sciences. 1984. V. 28, No 1. P. 29–59.
3. *Зыкин В. С.* Ссылочная целостность данных в корпоративных информационных системах // Информатика и ее применения. 2015. Т. 9, № 3. С. 119–127.

О СИСТЕМАХ УРАВНЕНИЙ НАД ОБЫКНОВЕННЫМИ ГРАФАМИ

Ильев А. В.[1,2], **Ильев В. П.**[1,3]

[1] *Омский государственный технический университет, Омск, Россия;*
[2] *Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омск, Россия;* artyom.iljev@mail.ru
[3] *Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского, Омск, Россия;* iljev@mail.ru

В традиционном понимании предмет алгебраической геометрии составляет изучение решений алгебраических уравнений и систем уравнений над коммутативными кольцами. В монографии [1] показано, что понятие системы уравнений, алгебраического множества и координатной алгебры можно определить не только над кольцами, но и над любыми алгебраическими системами сигнатуры Σ. В этой монографии доказана универсальная теорема о совместности системы уравнений над произвольной алгебраической системой, предложены общие неалгоритмические методы решения таких систем.

Цель данного сообщения — показать, как математический аппарат, развитый в [1], работает в случае конкретного класса алгебраических систем — класса обыкновенных графов.

Произвольный обыкновенный граф G, т. е. конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер, может быть задан как алгебраическая система на конечном множестве V сигнатуры Σ, состоящей из бинарного иррефлексивного и симметричного предиката смежности вершин, а также предиката равенства. Сигнатура Σ может содержать также константные символы, множество которых интерпретируется как множество V вершин графа (так называемый диофантов случай).

Уравнением над графом G называется любая атомарная формула сигнатуры Σ.

Нами предложен алгоритм проверки совместности произвольной системы уравнений над графом и алгоритм построения общего решения системы — координатного графа.

Обсуждаются также комбинаторные задачи на графах, решение которых может быть сведено к решению систем уравнений над графами. Примерами могут служить такие сложные в вычислительном отношении комбинаторные задачи на графах, как задача о клике, задача о доминирующем множестве вершин и другие.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01117).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Даниярова Э. Ю., Мясников А. Г., Ремесленников В. Н.* Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. Новосибирск: Издательство СО РАН, 2016.

ОБЕРТЫВАЮЩАЯ АЛГЕБРА НИЛЬТРЕУГОЛЬНОЙ ПОДАЛГЕБРЫ АЛГЕБРЫ ШЕВАЛЛЕ ТИПА G_2

Казакова А. В.

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия;
alvkazakova@gmail.com

Алгебру Шевалле над полем K характеризуют системой корней Φ и базой Шевалле, состоящей из элементов e_r ($r \in \Phi$) и подходящей базы подалгебры Картана [1, § 4.4]. Подалгебру с базой $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$ называем нильтреугольной, обозначая через $N\Phi(K)$. По теореме Шевалле о базисе $e_r * e_s$ равно $N_{rs}e_{r+s}$ при $r, s, r+s \in \Phi^+$ и 0 при $r+s \notin \Phi^+$, где $N_{rs} = \pm 1, \pm 2$ или (тип G_2) ± 3. Пусть $R = (R, +, \cdot)$ есть K-алгебра с тем же базисом и умножением: $e_r e_s = 0$ при $r+s \notin \Phi$, а если $r, s, r+s \in \Phi^+$ и $N_{r,s} \geq 1$, то $e_r e_s = e_{r+s}$ и $e_s e_r = -(N_{r,s}-1)e_{r+s}$. Замена умножения в R новым $x * y = xy - yx$ приводит к алгебре Ли $R^{(-)} \simeq N\Phi(K)$.

Построенную обертывающую алгебру R алгебры Ли $N\Phi(K)$ предложил В. М. Левчук. Для типа A_{n-1} она изоморфна ассоциативной алгебре $NT(n, K)$ нильтреугольных $n \times n$ матриц над K. В этом случае известна стандартность всякого идеала H кольца R (С. Дюбиш и Р. Перлис 1951 г. для случая алгебр и В. М. Левчук 1976 г.), т. е. $Q(r) \subseteq H$ для любого угла r в H, в терминологии [2]. Как показали В. М. Левчук и Н. Д. Ходюня, в кольцах R типов B_n и C_n над полем идеалы также стандартны, а для типа D_n существуют нестандартные идеалы.

Предложение. *Все идеалы кольца R типа G_2 над полем K стандартны.*

Далее рассмотрим задачу описания группы автоморфизмов колец Ли $N\Phi(K)$ типа G_2 над произвольным ассоциативно-коммутативным кольцом K с единицей. Её подгруппу $Aut\ R$ автоморфизмов обёртывающего кольца R описывает

Теорема. *Пусть R — обёртывающая алгебра алгебры Ли $N\Phi(K)$ типа G_2. Тогда произвольный автоморфизм кольца R является произведением диагонального, кольцевого, центрального автоморфизмов, корневого автоморфизма $x_b(K)$ и подходящего автоморфизма вида ($t \in K$):*

$$\xi(t) : e_b \mapsto e_b, \quad e_a \mapsto e_a + te_{3a+b}, \quad e_{a+b} \mapsto e_{a+b} + te_{3a+2b},$$
$$e_{2a+b} \mapsto e_{2a+b}, \quad e_{3a+b} \mapsto e_{3a+b}, \quad e_{3a+2b} \mapsto e_{3a+2b}.$$

Пересечение с $Aut\ R$ подгруппы внутренних автоморфизмов алгебры Ли $N\Phi(K)$ здесь заметно сокращается, в отличие от типа A_n в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Carter R.* Simple Groups of Lie type. New York: Wiley and Sons, 1972.
2. *Levchuk V. M., Suleimanova G. S.* Extremal and maximal normal abelian subgroups of a maximal unipotent subgroup in groups of Lie type // Journal of Algebra. 2012. V. 349, No 1. P. 98–116.
3. *Левчук В. М, Литаврин А. В.* Гиперцентральные автоморфизмы нильтреугольных подалгебр // Сиб. электрон. мат. изв. 2016. Т. 13. С. 315–338.
4. *Левчук В. М.* Связи унитреугольной группы с некоторыми кольцами. Ч.2. Группы автоморфизмов // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, № 4. С. 64–80.

БОЛЬШИЕ КОММУТАТИВНЫЕ ПОДАЛГЕБРЫ АЛГЕБР ШЕВАЛЛЕ НАД ПОЛЕМ

Кириллова Е. А.[1], **Сулейманова Г. С.**[2]

[1] *Институт математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета, Красноярск, Россия;* kea92@bk.ru

[2] *Хакасский технический институт – филиал Сибирского федерального университета, Абакан, Россия;* suleymanova@list.ru

В работе рассматривается задача описания больших коммутативных подалгебр максимальной нильпотентной подалгебры алгебры Шевалле над полем.

Алгебру Шевалле $L_\Phi(K)$ над полем K, ассоциированную с системой корней Φ, характеризуют базой Шевалле, состоящей из элементов e_r $(r \in \Phi)$ вместе с подходящей базой подалгебры Картана [1]. Элементы e_r $(r \in \Phi^+)$ образуют базу максимальной нильпотентной подалгебры $N\Phi(K)$.

В работе рассматриваются следующие задачи, записанные в [2] и исследованные при $K = C$ в [3].

Обобщенная задача А. И. Мальцева: *описать коммутативные подалгебры наивысшей размерности алгебры Шевалле $L_\Phi(K)$ над произвольным полем K.*

Обобщенная редукционная задача: *описать коммутативные подалгебры наивысшей размерности в подалгебре $N\Phi(K)$ алгебры Шевалле $L_\Phi(K)$.*

В. М. Левчуком и Г. С. Сулеймановой получен список абелевых идеалов наивысшей размерности подалгебры $N\Phi(K)$ классического типа [2] и доказана теорема [4].

Теорема 1. *В алгебре Шевалле $L_\Phi(K)$ классического типа над полем K каждая большая абелева подалгебра подалгебры $N\Phi(K)$ переводится автоморфизмом алгебры $L_\Phi(K)$ в идеал подалгебры $N\Phi(K)$.*

В данной работе исследуются большие коммутативные подалгебры алгебры $N\Phi(K)$ исключительных типов.

Теорема 2. *В алгебре Шевалле $L_\Phi(K)$ исключительного типа над полем K либо каждая большая коммутативная подалгебра подалгебры $N\Phi(K)$ переводится автоморфизмом алгебры $L_\Phi(K)$ в идеал подалгебры $N\Phi(K)$, либо $\Phi = G_2$, $6K = K$, либо $\Phi = F_4$, $2K = 0$.*

Все исключительные большие коммутативные подалгебры выписаны явно.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00707).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Carter R.* Simple groups of Lie type. New York: Wiley and Sons, 1972.
2. *Levchuk V. M., Suleimanova G. S.* The generalized Mal'cev problem on abelian subalgebras of the Chevalley algebras // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2015. V. 86, No 4. P. 384–388.
3. *Мальцев А. И.* Коммутативные подалгебры полупростых алгебр Ли // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1945. Т. 9, № 4. С. 291–300.
4. *Сулейманова Г. С.* Большие абелевы подалгебры алгебр Шевалле над полем // XI Школа-конференция по теории групп: тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 70-летию А. Ю. Ольшанского. Красноярск: СФУ, 2016. С. 57–58.

САМОСОВМЕЩЕНИЕ И ЦЕНТРОИДЫ МНОГОУГОЛЬНИКОВ n-АРНЫХ ГРУПП

Кирилюк Д. И.

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь; kirilyuk.denis@gmail.com

Впервые приложения теории n-арных групп в аффинной геометрии были найдены Д. Вакареловым в [1]. С. А. Русаков в [2] обобщил многие результаты Д. Вакарелова и придал новый импульс развития этого направления. В частности, С. А. Русаков в работе [2] построил аффинное пространство $W(G)$ методом фундаментальных последовательностей векторов полуабелевой n-арной rs-группы G. Дальнейшее развитие приложений теории n-арных групп в аффинной геометрии получило в работах Ю. И. Кулаженко (см., например, [3]). В этой же работе [3] нашло отражение новое направление исследований — самосовмещение элементов n-арных групп.

В представляемой работе продолжено указанное направление исследований, а именно получены новые результаты по определению аналитическими методами центроида произвольного $2k$-угольника. Установлено, что при разбиении произвольного $2k$-угольника произвольными треугольниками, их центроиды образуют последовательность точек, относительно которой произвольный элемент n-арной группы самосовмещается.

Теорема 1. *Пусть G — полуабелева n-арная группа, $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}, b$ — произвольные точки из G $(k \in \mathbb{N})$, а x_1 — центроид $< a_1, a_2, \ldots, a_{2k-1}, b >$. Если x — центроид $< a_1, a_2, \ldots, a_{2k} >$, то справедливо равенство $\overrightarrow{xx_1} = \frac{1}{2k}\overrightarrow{a_{2k}b}$*

Теорема 2. *Пусть G — полуабелева n-арная группа, $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}, d$ — произвольные точки из G $(k \in \mathbb{N})$. Если x_1 — центроид $< a_1, a_2, d >$, x_2 — центроид $< a_2, a_3, d >, \ldots, x_i$ — центроид $< a_i, a_{i+1}, d >, \ldots, x_{2k}$ — центроид $< a_{2k}, a_1, d >$, то произвольная точка из G самосовмещается относительно элементов последовательности вершин $2k$-угольника $< x_1, x_2, \ldots, x_{2k} >$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вакарелов Д.* Тернарни групи // Годищник Софийского ун-та. 1966–1968. Т. 61. С. 71–105.
2. *Русаков С. А.* Некоторые приложения теории n-арных групп. Минск: Беларуская навука, 1998.
3. *Кулаженко Ю. И.* Полиадические операции и их приложения. Минск: Изд. Центр БГУ, 2014.

СООТНОШЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СЕТЕВОЙ ГРУППЫ И СЕТЕВОЙ ПАРЫ

Койбаев В. А.

Северо-Осетинский государственный университет, Владикавказ, Россия;
Koibaev-K1@yandex.ru

Система аддитивных подгрупп $\sigma = (\sigma_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$, поля K называется *сетью (ковром)* порядка n над полем K, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ при всех значениях индексов i, r, j. Такая же система, но без диагонали, называется *элементарной сетью.* Полную или элементарную сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ мы называем *неприводимой*, если все σ_{ij} отличны от нуля. Назовем элементарную сеть σ *замкнутой (допустимой)*, если элементарная сетевая подгруппа $E(\sigma) = \langle t_{ij}(\sigma_{ij}) : 1 \leq i \neq j \leq n \rangle$ не содержит новых элементарных трансвекций. Замкнутыми являются, например, элементарные сети, диагональ которых можно дополнить подгруппами, получив при этом полную сеть. Пусть σ — неприводимая замкнутая элементарная сеть порядка $n \geq 3$, далее, зафиксируем некоторые индексы i, j, $1 \leq i \neq j \leq n$. Рассматривается вопрос справедливости равенства

$$E(\sigma) \cap \langle t_{ij}(K), \quad t_{ji}(K) \rangle = \langle t_{ij}(\sigma_{ij}), \quad t_{ji}(\sigma_{ji}) \rangle \tag{1}$$

(очевидно, что правая часть равенства (1) содержится в левой).

Для неотрицательного целого $n \in \mathbb{N} \cup 0$ рассмотрим идеал

$$F_n[x] = \{c_n x^n + c_{n+1}x^{n+1} + \ldots + c_m x^m : \ m \geq n, \ c_i \in F\}$$

кольца многочленов $F[x] = F_0[x]$ (F — произвольное поле), $K = F(x)$ — поле рациональных функций. Определим элементарную сеть $\sigma = (\sigma_{rs})$ аддитивных подгрупп σ_{rs} поля $K = F(x)$ следующим образом: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = F_2[x]$, $\sigma_{rs} = F_1[x]$ для всех остальных пар (r, s), $1 \leq r \neq s \leq n$, отличных от (i, j) и (j, i).

Теорема. *Для сети $\sigma = (\sigma_{rs})$ над полем K подгруппа $E(\sigma) \cap \langle t_{12}(K), \ t_{21}(K) \rangle$ не содержится в группе $\langle t_{12}(\sigma_{12}), t_{21}(\sigma_{21}) \rangle$.*

В Коуровской тетради [1, вопрос 15.46] сформулирован вопрос В. М. Левчука о допустимости (замкнутости) ковров (элементарных сетей): верно ли, что для допустимости (замкнутости) ковра $\sigma = (\sigma_{ij})$ достаточна допустимость всех его пар $(\sigma_{ij}, \sigma_{ji})$? Результат нашей теоремы не решает указанный вопрос, однако он говорит о высокой сложности этого вопроса.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России и темы НИР ЮМИ ВНЦ РАН (рег. номер НИОКР 115033020013).

ЛИТЕРАТУРА

1. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. Новосибирск, 2010. Издание 17-е.

НИЛЬПОТЕНТНАЯ ПО БАССУ УНИТАРНАЯ K_1-ГРУППА КОЛЬЦА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Копейко В. И.

Калмыцкий государственный университет, Элиста, Россия;
kopeiko52@mail.ru

Пусть $R = (R, \lambda, \Lambda)$ — унитарное кольцо (называемое также форменным кольцом Бака), где R — кольцо с инволюцией, Λ — система параметров в R, λ — симметрия и пусть $K_1U^\lambda(R, \Lambda)$ — унитарная K_1-группа кольца R. Ядро (расщепляющегося) эпиморфизма групп $K_1U^\lambda(R[X], \Lambda[X]) \to K_1U^\lambda(R, \Lambda)$, индуцированного отображением $R[X] \to R : X \to 0$, обозначается через $NK_1U^\lambda(R, \Lambda)$ и называется нильпотентной по Бассу унитарной K_1-группой.

Сформулируем основные результаты доклада.

Теорема 1. *Любой элемент группы $NK_1U^\lambda(R, \Lambda)$ имеет представитель вида:*

$$[a; b, c]_n = \begin{pmatrix} e_r - aX & bX \\ -cX^{n-1} & e_r + a^*X + \cdots + (a^*)^{n-1}X^{n-1} \end{pmatrix}$$

при некоторых натуральных r, n и $a, b, c \in M_r(R)$, удовлетворяющих следующим условиям:
1) матрицы b и $a \cdot b$ — $\bar{\Lambda}$-эрмитовы;
2) матрицы c и $a^* \cdot c$ — Λ-эрмитовы;
3) $b \cdot c = a^n$.

Матрицы из теоремы были получены автором в [1] при описании унитарного аналога трюка Хигмана и использовались для решения задачи гомотопизации унитарного K_1-функтора.

В алгебраической K-теории доказывается (см., например, [2, гл. 12, следствие 5.3]), что любой элемент нильпотентной по Бассу K_1-группы $NK_1(R)$ имеет унипотентный представитель $e_r - aX$ при некотором натуральном r, где $a(\in M_r(R))$ — нильпотентная матрица. В унитарном случае это, вообще говоря, уже не верно. Опишем унипотентную часть группы $NK_1U^\lambda(R, \Lambda)$.

Теорема 2. *Для любых матриц $a, b, c \in M_r(R)$, удовлетворяющих условиям 1)–3) выше, имеем:*
1) матрица $[a; b, c]_2$ является унипотентной, причем матрица

$$\begin{pmatrix} -a & b \\ -c & a^* \end{pmatrix}$$

имеет степень нильпотентности 2;
2) при $n \geq 3$ матрица $[a; b, c]_n$ является унипотентной тогда и только тогда, когда матрица $e_r - aX$ — унипотентна и в этом случае класс матрицы $[a; b, c]_n$ в группе $NK_1U^\lambda(R, \Lambda)$ совпадает с классом гиперболической матрицы $H(e_r - aX)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00148/17).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Копейко В. И.* О гомотопизации унитарного K_1-функтора // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20, № 5. С. 99–108.
2. *Басс Х.* Алгебраическая К-теория. М.: Мир, 1973.

О ВНУТРЕННИХ АВТОМОРФИЗМАХ КОНЕЧНЫХ ПОЛУПОЛЕЙ

Кравцова О. В.

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия; ol71@bk.ru

Множество W с двумя бинарными операциями $+$, $\circ$ называется *полуполем*, если:

1) $(W,+)$ — абелева группа с нейтральным элементом 0,
2) $(W \setminus \{0\}, \circ)$ — лупа,
3) $x \circ (y+z) = x \circ y + x \circ z$, $(y+z) \circ x = y \circ x + z \circ x$ $\forall x,y,z \in W$.

Правым, средним и левым ядрами полуполя W называются соответственно подмножества

$$\begin{aligned} N_r &= \{x \in W \mid (a \circ b) \circ x = a \circ (b \circ x)\ \forall a,b \in W\}, \\ N_m &= \{x \in W \mid (a \circ x) \circ b = a \circ (x \circ b)\ \forall a,b \in W\}, \\ N_l &= \{x \in W \mid (x \circ a) \circ b = x \circ (a \circ b)\ \forall a,b \in W\}. \end{aligned}$$

Пересечение $N = N_l \cap N_m \cap N_r$ называется *ядром* W, а множество

$$Z = \{x \in N \mid x \circ a = a \circ x\ \forall a \in W\}$$

— *центром* полуполя W.

В статье [1] введено понятие внутреннего автоморфизма полуполя, доказаны некоторые свойства внутренних автоморфизмов и перечислены внутренние автоморфизмы некоторых классов полуполей.

Пусть $m \in W^* = W \setminus \{0\}$ и m_l^{-1} — левый обратный к m элемент. Отображение

$$\Theta_m : x \to (m_l^{-1} \circ x) \circ m \quad (x \in W)$$

называется *внутренним автоморфизмом* полуполя W, если

$$\Theta_m(x \circ y) = \Theta_m(x) \circ \Theta_m(y) \quad (x, y \in W).$$

В [1] доказано:

1) если $m \in N$, то отображение Θ_m является внутренним автоморфизмом;
2) если $m \in Z$, то Θ_m — тождественный автоморфизм;
3) множество $\{\Theta_m \mid m \in N\}$ есть группа по умножению.

Автором доклада построено матричное представление внутренних автоморфизмов всех полуполей порядка 16, исключительных полуполей Кнута – Руа порядка 32 и Хентзела – Руа порядка 64, некоторых полуполей порядка 81. Приведены примеры полуполей, обладающих аномальными свойствами:

1) полуполе с внутренним автоморфизмом Θ_m при $m \notin N$;
2) полуполе с тождественным внутренним автоморфизмом Θ_m при $m \notin Z$;
3) полуполе, внутренние автоморфизмы которого не образуют группу.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00707).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wene G. P.* Inner automorphisms of finite semifields // Note di Matematica. 2009. V. 29, No 1. P. 231–242.

О СЛОЖНОСТИ РЕШЕТОК КВАЗИМНОГООБРАЗИЙ

Кравченко А. В.[1], **Нуракунов А. М.**[2], **Швидефски М. В.**[3]

[1]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,*
Новосибирский государственный университет,
Сибирский институт управления (филиал РАНХиГС),
Новосибирск, Россия; a.v.kravchenko@mail.ru
[2]*Институт теоретической и прикладной математики НАН КР,*
Бишкек, Кыргызская Республика; a.nurakunov@gmail.com
[3]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,*
Новосибирский государственный университет,
Новосибирск, Россия; semenova@math.nsc.ru

Найдены достаточные условия для того, чтобы квазимногообразие $\mathbf{M}$ конечной сигнатуры содержало континуум подквазимногообразий, не имеющих покрытий в решетке квазимногообразий $\mathrm{Lq}(\mathbf{M})$ и, следовательно, не имеющих независимого базиса квазитождеств относительно $\mathbf{M}$. Полученные условия являются также достаточными для Q-универсальности квазимногообразия $\mathbf{M}$. Кроме того, найдены достаточные условия для того, чтобы квазимногообразие $\mathbf{M}$ конечной сигнатуры содержало континуум подквазимногообразий $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{M}$, таких что $\mathbf{K}$ имеет независимый базис квазитождеств относительно $\mathbf{M}$, однако, квазиквациональная теория $\mathbf{K}$ и проблема вхождения в $\mathbf{K}$ для конечно определенных систем неразрешимы. В качестве следствий получен ряд известных, а также ряд новых результатов.

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (проект № 6848.2016.1).

СЛОЖНОСТЬ РЕШЕТОК ПОДПОЛУГРУПП ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ТЕОРИЙ

Луцак С. М.[1]**, Швидефски М. В.**[2]

[1]*Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, Астана, Республика Казахстан;* sveta_lutsak@mail.ru

[2]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;* semenova@math.nsc.ru

Изучается сложность строения решетки $\mathrm{Sub}(\mathcal{T}_{\mathbf{K}})$ подполугрупп полугруппы элементарных теорий класса $\mathbf{K}$ алгебраических систем сигнатуры σ.

Пусть класс $\mathbf{K}$ замкнут относительно декартовых произведений. Для алгебраических систем $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathbf{K}$ полагаем $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) * \mathrm{Th}(\mathcal{B}) = \mathrm{Th}(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$. Алгебра $\mathcal{T}_{\mathbf{K}} = \left\langle \{\mathrm{Th}(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \in \mathbf{K}\}, * \right\rangle$ является коммутативной полугруппой с единицей. Мы называем ее *полугруппой элементарных теорий класса* $\mathbf{K}$. Далее $\mathbf{K}(\sigma)$ обозначает класс всех алгебраических систем сигнатуры σ.

Теорема 1. *Пусть для сигнатуры σ имеет место один из следующих случаев:*
1. σ содержит по крайней мере один функциональный символ;
2. σ содержит по крайней мере один как минимум бинарный предикатный символ;
3. σ бесконечна.
Тогда решетка $\mathrm{Sub}(\mathcal{T}_{\mathbf{K}(\sigma)})$ содержит подрешетку, изоморфную решетке идеалов свободной решетки счетного ранга, и является Q-универсальной.

Теорема 2. *Пусть $\mathbf{K}$ является одним из следующих классов:*
1. многообразие всех точечных абелевых групп;
2. многообразие всех коммутативных колец с единицей;
3. квазимногообразие всех [ориентированных] графов;
4. многообразие всех унаров;
5. многообразие MV-алгебр;
6. многообразие модулярных решеток.
Тогда решетка $\mathrm{Sub}(\mathcal{T}_{\mathbf{K}})$ содержит подрешетку, изоморфную решетке идеалов свободной решетки счетного ранга, и является Q-универсальной.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ-6848.2016.1).

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}$-СУБНОРМАЛЬНЫМИ СИЛОВСКИМИ ПОДГРУППАМИ

Монахов В. С.[1], **Сохор И. Л.**[2]

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Республика Беларусь;
[1]viktor.monakhov@gmail.com, [2]irina.sokhor@gmail.com

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Используемая терминология соответствует [1]. Формации всех нильпотентных, абелевых и абелевых групп с элементарными абелевыми силовскими подгруппами обозначаются через $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}_1$ соответственно.

Пусть $\mathfrak{F}$ — формация. Подгруппа H называется $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой группы G, если существует цепочка подгрупп

$$H = H_0 <\cdot\ H_1 <\cdot\ \ldots <\cdot\ H_n = G$$

такая, что $H_i/(H_{i-1})_{H_i} \in \mathfrak{F}$ для всех i. Здесь $Y_X = \bigcap_{x\in X} Y^x$ — ядро подгруппы Y в группе X, а запись $H_{i-1} <\cdot\ H_i$ означает, что H_{i-1} — максимальная подгруппа группы H_i.

Группы с различными наборами $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп исследовались в работах многих авторов, см. литературу в [2]–[4]. Несложно проверить, что в любой разрешимой группе каждая силовская подгруппа $\mathfrak{A}_1\mathfrak{N}$-субнормальна. Поэтому в универсуме всех разрешимых групп класс групп с $\mathfrak{F}$-субнормальными силовскими подгруппами следует изучать для формаций, не содержащих $\mathfrak{A}_1\mathfrak{N}$.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Тогда и только тогда в группе G каждая силовская подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна, когда G разрешима и каждая ее метанильпотентная подгруппа имеет нильпотентный коммутант.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1992.
2. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И.* О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами // ПФМТ. 2011. Т. 4, № 9. С. 86–91.
3. *Монахов В. С.* Конечные группы с абнормальными и $\mathfrak{U}$-субнормальными подгруппами // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 2. С. 447–462.
4. *Семенчук В. Н., Скиба А. Н.* О конечных группах, в которых каждая подгруппа либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна // ПФМТ. 2015. Т. 2, № 23. С. 72–74.

ВЛИЯНИЕ ПОДГРУППЫ ФИТТИНГА И ЕЕ ОБОБЩЕНИЙ НА СТРОЕНИЕ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Мурашко В. И.[1]**, Васильев А. Ф.**[2]

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Республика Беларусь;

[1]`mviath@yandex.ru`, [2]`formation56@mail.ru`

В работе рассматриваются только конечные группы. Напомним, что подгруппой Фиттинга $\mathrm{F}(G)$ группы G называется ее максимальная нормальная нильпотентная подгруппа. Эта подгруппа оказывает существенное влияние на строение разрешимой группы. Например, Рамадан [1] показал, что если все максимальные подгруппы силовских подгрупп $\mathrm{F}(G)$ нормальны в разрешимой группе G, то G сверхразрешима.

В произвольной группе подгруппа Фиттинга теряет многие свойства, которые она имела в разрешимом случае. Поэтому вместо неё обычно рассматривают квазинильпотентный радикал $\mathrm{F}^*(G)$ (эта подгруппа также известна как обобщённая подгруппа Фиттинга) или подгруппу Шеметкова – Шмида [2]. Напомним, что подгруппой Шеметкова – Шмида $\tilde{\mathrm{F}}(G)$ группы G называют подгруппу, определяемую условиями:

(1) $\Phi(G) \subseteq \tilde{\mathrm{F}}(G)$;

(2) $\tilde{\mathrm{F}}(G)/\Phi(G) = Soc(G/\Phi(G))$.

Рассмотрению недавних опубликованных (например, [3]) и новых результатов о влиянии подгруппы Фиттинга и ее обобщений на строение конечных групп посвящено настоящее сообщение. Отметим один из них.

Пусть $\mathfrak{F}$ — формация. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-субнормальной в G, если $H = G$ или существует максимальная цепь подгрупп $H = H_0 < \cdots < H_n = G$ такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1}$ для $i = 1, \ldots, n$.

Подгруппу H группы G назовём R-$\mathfrak{F}$-субнормальной, если H $\mathfrak{F}$-субнормальна в $\langle H,\ R\rangle$.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация. Если всякая максимальная подгруппа группы G является $\tilde{\mathrm{F}}(G)$-$\mathfrak{F}$-субнормальной, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Пусть $\mathfrak{U}$ — класс всех сверхразрешимых групп. Известную теорему Крамера [4, с. 12] можно переформулировать следующим образом.

Следствие. *Если всякая максимальная подгруппа разрешимой группы G является $\mathrm{F}(G)$-$\mathfrak{U}$-субнормальной, то G сверхразрешима.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ramadan M.* Influence of normality on maximal subgroups of Sylow subgroups of a finite group // Acta Math. Hungar. 1992. V. 59, No 1–2. P. 107–110.
2. *Васильев А. Ф., Мурашко В. И.* О подгруппе Шеметкова – Шмида и связанных с ней подгруппах конечных групп // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. 2014. № 84. С. 23–29.
3. *Мурашко В. И.* Произведения $\mathrm{F}^*(G)$-субнормальных подгрупп конечных групп // Изв. вузов. Матем. 2017. № 6. С. 76–82.
4. *Weinstein M.* Between Nilpotent and Soluble. Passaic: Polygonal Publishing House, 1982.

О ПОДГРУППАХ ГРУПП ШЕВАЛЛЕ ТИПА B_l, C_l, F_4 И G_2, ПАРАМЕТРИЗУЕМЫХ ДВУМЯ НЕСОВЕРШЕННЫМИ ПОЛЯМИ ХАРАКТЕРИСТИКИ 2 И 3

Нужин Я. Н.

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия;
nuzhin2008@rambler.ru

Далее $\Phi(K)$ — группа Шевалле типа B_l, C_l, F_4 или G_2 над полем K, которая порождается своими корневыми подгруппами $x_r(K) = \{x_r(t) \mid t \in K\}$, $r \in \Phi$. Пусть K — несовершенное поле характеристики p. Множество p-х степеней его элементов K^p является собственным подполем поля K. Пусть $p = 2$ при $\Phi = B_l\ (l \geq 2),\ C_l\ (l \geq 2),\ F_4$ и $p = 3$ при $\Phi = G_2$. Положим

$$\mathfrak{A}_r = \begin{cases} K, & \text{если } r \text{ короткий корень,} \\ K^p, & \text{если } r \text{ длинный корень.} \end{cases}$$

Набор $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ является ковром аддитивных подгрупп в определении В. М. Левчука [1]. Для данного ковра $\mathfrak{A}$ его ковровая подгруппа $\Phi(\mathfrak{A}) = \langle\, x_r(\mathfrak{A}_r) \mid r \in \Phi\rangle$ параметризуется двумя подполями K и K^p. Группа $\Phi(\mathfrak{A})$ попутно возникала у Р. Стейберга при построении скрученных автоморфизмов групп Шевалле [2, с. 144], а также она естественно появлялась в [3] как одна из подгрупп, лежащих между группами Шевалле над различными несовершенными полями. Нам потребуются следующие подгруппы группы $\Phi(\mathfrak{A})$:

унипотентная подгруппа $U(\mathfrak{A}) = \langle\, x_r(\mathfrak{A}_r) \mid r \in \Phi^+\rangle$,

мономиальная подгруппа $N(\mathfrak{A}) = \langle n_r(t) \mid r \in \Phi,\ t \in \mathfrak{A}_r^*\rangle$

и диагональная подгруппа $H(\mathfrak{A}) = \langle h_r(t) \mid r \in \Phi,\ t \in \mathfrak{A}_r^*\rangle$.

Здесь Φ^+ — положительная система корней, $\mathfrak{A}_r^*$ — мультипликативная подгруппа поля $\mathfrak{A}_r$, $n_r(t) = x_r(t)x_{-r}(-t^{-1})x_r(t)$, $h_r(t) = n_r(t)n_r(-1)$.

Теорема. *Для каждого $w \in W = N/H$ выберем элемент n_w, представляющий w в N и положим $\Phi_w^+ = \Phi^+ \cap w^{-1}(-\Phi^+)$ и $U_w(\mathfrak{A}) = \langle x_r(\mathfrak{A}_r) \mid r \in \Phi_w^+\rangle$. Тогда любой элемент $g \in \Phi(\mathfrak{A})$ имеет единственное представление в виде $g = uhn_wv$, где $u \in U(\mathfrak{A})$, $h \in H(\mathfrak{A})$, $w \in W$, $v \in U_w(\mathfrak{A})$. В частности, ковер $\mathfrak{A}$ является замкнутым, то есть ковровая подгруппа $\Phi(\mathfrak{A})$ не содержит новых корневых элементов.*

Отметим, что ковер $\mathfrak{A}$ и его ковровая подгруппа $\Phi(\mathfrak{A})$ будут также обладать указанными выше свойствами, если для длинных корней r в качестве $\mathfrak{A}_r$ взять любое поле, лежащее между K^p и K.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект No 16-01-00707).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Левчук В. М.* Параболические подгруппы некоторых ABA-групп // Мат. заметки. 1982. Т. 31, вып. 4. С. 509–525.
2. *Стейнберг Р.* Лекции о группах Шевалле. Москва: Мир, 1975.
3. *Нужин Я. Н.* Группы, лежащие между группами Шевалле типа B_l, C_l, F_4, G_2 над несовершенными полями характеристики 2 и 3 // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 1. С. 157–162.

О ПОДРЕШЕТКЕ ОГРАНИЧЕННЫХ ПОДАЛГЕБР РЕШЕТКИ ВСЕХ ПОДАЛГЕБР

Пинус А. Г.

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия; ag-pinus@gmail.com

При изучении свойств решеток $Sub\mathfrak{A}$ подалгебр универсальных алгебр $\mathfrak{A}$ (зачастую значительно более мощных чес сама алгебра $\mathfrak{A}$) представляет интерес выделение в решетке $Sub\mathfrak{A}$ подрешеток меньшей чем $|Sub\mathfrak{A}|$ мощности, но в той или иной мере схожих по своим свойствам с решеткой $Sub\mathfrak{A}$.

Пусть $\mathfrak{L} = \langle \mathfrak{L}_I \mid i \in I\rangle$ некоторая направленная вверх по включению система подалгебр алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ удовлетворяющая условиям:

а) $\bigcup\limits_{i \in I} \mathfrak{L}_i = \mathfrak{A}$;

б) для $i, j \in I$, если $\mathfrak{L}_i \subseteq \mathfrak{L}_j$, то существует ретрактивный гомоморфизм ψ_i^j алгебры $\mathfrak{L}_j$ на алгебру $\mathfrak{L}_i$ такой, что $\mathfrak{L}_i$ является ретрактом алгебры $\mathfrak{L}_j$ относительно гомоморфизма ψ_i^j и тождественного вложения id_j^i алгебры $\mathfrak{L}_i$ в $\mathfrak{L}_j$.

В этом случае будем говорить, что *алгебра $\mathfrak{A}$ ретрактивно разложима в ретрактивную систему $\mathfrak{L}$ своих подалгебр.*

Укажем на пару примеров ретрактивно разложимых алгебр. Пусть V — некоторое многообразие универсальных алгебр и $\mathfrak{F}_V(x_i \mid i \in I)$ — V-свободно порожденная элементами x_i V-алгебра. Тогда для любого кардинала ω_i алгебра $\mathfrak{F}_V(x_j \mid j \in \omega_i)$ ретрактивно разложима в ретрактивную систему $\mathfrak{L} = \langle \mathfrak{F}_V(x_j \mid j \in l)| l \in \omega_i)\rangle$ своих подалгебр. Наконец, пусть $BF(\omega_i)$ — булева алгебра Фреше конечных и ко-конечных подмножеств множества ω_i. Пусть для $l \in \omega_i$ $\mathfrak{L}_l$ — подалгебра алгебры $BF(\omega_i)$ порожденная конечными подмножествами множества l. Тогда алгебра $BF(\omega_i)$ ретрактивно разложима в ретрактивную систему $\mathfrak{L} = \langle \mathfrak{L}_l \mid l \in \omega_i\rangle$ своих подалгебр.

Пусть алгебра $\mathfrak{A}$ ретрактивно разложима в ретрактивную систему своих подалгебр $\mathfrak{L} =< \mathfrak{L}_i \mid l \in I >$. Подалгебру $\mathfrak{L}$ алгебры $\mathfrak{A}$ назовем *$\mathfrak{L}$-ограниченной*, если $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}_i$ для некоторого $i \in I$. Через $Sub_{\mathfrak{L}}^{rg}\mathfrak{A}$ обозначим подрешетку решетки всех подалгебр алгебры $\mathfrak{A}$ состоящую из $\mathfrak{L}$-ограниченных подалгебр алгебры $\mathfrak{A}$.

Теорема. *Если алгебра $\mathfrak{A}$ ретракивно разложима в ретрактивную систему $\mathfrak{L}$ своих подалгебр, то решетки $Sub\mathfrak{A}$ и $Sub_{\mathfrak{L}}^{rg}\mathfrak{A}$ универсально эквивалентны.*

О ФАКТОРИЗАЦИИ АВТОМОРФИЗМОВ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ГРУППОВЫХ КОЛЕЦ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Попова А. М.[1]**, Грачев Е. В.**[2]

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия; [1]ampopova@ngs.ru, [2]gracheve@mail.ru

Мы рассматриваем целочисленные групповые кольца конечных групп с помощью теории представлений. А именно, если G — конечная группа, $T_1(G),\ldots,T_s(G)$ — все неприводимые, неэквивалентные представления группы G,

$$D(G) = \{\mathrm{diag}(T_1(g), T_2(g), \ldots, T_s(g)), g \in G\}$$

то кольцо $\mathbb{Z}[D(G)] \cong \mathbb{Z}G$. Кольца $\mathbb{Z}[T_i(G)]$ назовем ***клетками*** кольца $\mathbb{Z}[D(G)]$.

Между различными клетками кольца $\mathbb{Z}[D(G)]$ возникают отображения

$$\mu_{ij} : \sum_{g\in G} \alpha_g T_i(g) \longleftrightarrow \sum_{g\in G} \alpha_g T_j(g), \alpha_g \in \mathbb{Z},$$

которые либо являются изоморфизмами, либо не являются.

Про совокупность всех тех клеток $\mathbb{Z}[T_i(G)]$, $i = 1, \ldots, s$, между которыми отображения μ_{ij} являются изоморфизмами, будем говорить, что они *образуют блок*. Таким образом, всё кольцо $\mathbb{Z}[D(G)]$ разбивается на блоки. Если p — номер блока, то i_p — номер первой клетки блока, k_p — число клеток в блоке. Обозначим через

$$D_p(G) = \left\{\mathrm{diag}(T_{i_p}(g), \ldots, T_{i_p+k_p-1}(g)), g \in G\right\}.$$

Кольцо $O_p = \mathbb{Z}[D_p(G)]$ назовём *блоком*. Для алгебры $\mathbb{Q}[D(G)]$ справедливо разложение $\mathbb{Q}[D(G)] = \mathbb{Q}[O_1] \oplus \cdots \oplus \mathbb{Q}[O_t]$. Каждый блок кольца $\mathbb{Z}[D(G)]$ есть гомоморфный образ этого кольца, то есть $O_p = \mathbb{Z}[D(G)]/I_p$.

Если автоморфизм α кольца $\mathbb{Z}[D(G)]$ все такие идеалы сохраняет, то его продолжение $\widetilde{\alpha}$ на алгебру $\mathbb{Q}[D(G)]$ прямые слагаемые не переставляет. Назовем такие автоморфизмы стабилизирующими. Понятно, что они образуют подгруппу $Stab(\mathbb{Z}[D(G)])$ в группе $Aut(\mathbb{Z}[D(G)])$.

Если $\alpha \in Aut(\mathbb{Z}[D(G)]$ не является стабилизирующим, то $\widetilde{\alpha}$ переставляет изоморфные Q-алгебры блоков. Назовем такие автоморфизмы переставляющими. Понятно, что $Stab(\mathbb{Z}[D(G)])$ — это нормальная подгруппа конечного индекса в $Aut(\mathbb{Z}[D(G)])$, т.е. существует конечный набор переставляющих автоморфизмов, определяющих фактор-группу $Aut(\mathbb{Z}[D(G)])/Stab(\mathbb{Z}[D(G)])$. Значит, любой автоморфизм кольца $\mathbb{Z}[D(G)]$ есть произведение переставляющего автоморфизма из этого конечного набора на стабилизирующий. Строение стабилизирующих автоморфизмов изучено нами ранее. В результате нами получена факторизация автоморфизмов кольца $\mathbb{Z}[D(G)]$, отличная от гипотезы Цассенхауза. Заметим, что если $\mathbb{K}$ — расширение поля $\mathbb{Q}$, $A = (\mathbb{K})_n$ – матричная алгебра над $\mathbb{Q}$, $\tau \in Aut(\mathbb{K})$, то определим $\hat{\tau}((a_{ij})) = (a_{ij}^{\tau})$.

Теорема. *Любой автоморфизм кольца $Z[D(G)]$ есть композиция $\alpha \circ \hat{\tau} \circ \varphi_s$, где α — переставляющий автоморфизм из конечного набора, τ — автоморфизм поля характеров представлений $T_1(G), \ldots, T_s(G)$, продолженный до автоморфизма поля представления группы G, φ_s — сопряжение единицей s алгебры $Q[D(G)]$.*

КОНЕЧНЫЕ НИЛЬПОЛУГРУППЫ С МОДУЛЯРНЫМИ РЕШЕТКАМИ КОНГРУЭНЦИЙ

Попович А. Л.

Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия; alexanderpopovich@urfu.ru

В работе [1] автором, совместно с П. Джонсом, было получено необходимое и достаточное условие дистрибутивности [модулярности] решетки конгруэнций нильполугруппы на языке отношения делимости в данной нильполугруппе. Напомним, что элемент a полугруппы S *делит* элемент b, если $b = sat$ для некоторых $s, t \in S^1$. Отношение делимости в нильполугруппах является отношением частичного порядка. Напомним, что *шириной* частично упорядоченного множества P называется наименьшее натуральное n такое, что P не содержит $n+1$ попарно несравнимых элементов. В работе [1] показано, что решетка конгруэнций нильполугруппы S дистрибутивна [модулярна] тогда и только тогда, когда S относительно порядка делимости имеет ширину 1 [ширину 2]. Также показано, что всякая конечно порожденная нильполугруппа с дистрибутивной или модулярной решеткой конгруэнций конечна.

Конечные нильполугруппы ширины 1 (т. е. линейно упорядоченные) относительно порядка делимости полностью описаны: это в точности циклические нильполугруппы. Описание конечных нильполугрупп ширины 2, т. е. с модулярной решеткой конгруэнций, получено в следующей теореме.

Теорема. *Пусть S — конечная нильполугруппа. Следующие условия эквивалентны:*

1) Решетка конгруэнций S модулярна;

2) S имеет ширину 2 относительно порядка делимости;

3) S порождена двумя элементами a и b, а ч.у. множество $\{a^2, ab, ba, b^2\}$ относительно делимости имеет ширину 2.

Все конечные нильполугруппы с модулярной решеткой конгруэнций описаны вплоть до копредставления: существует 91 серия таких полугрупп.

В силу того, что в нильпотентной полугруппе всегда можно указать множество порождающих, попарно несравнимых друг с другом, данная теорема описывает все нильпотентные полугруппы с модулярной решеткой конгруэнций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Popovich A., Jones P.* On congruence lattices of nilsemigroups // Semigroup Forum, online-first. DOI: 10.1007/s00233-016-9837-2.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НАД ГРУППАМИ И ДРУГИМИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Ремесленников В. Н.[1], **Романовский Н. С.**[2]

[1] *Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омск, Россия;* remesl@ofim.oscsbras.ru

[2] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;* rmnvski@math.nsc.ru

Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами является одновременно и частью алгебры, и частью теории моделей. Зачастую получается так, что при описании элементарной теории $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ данной алгебраической системы $\mathcal{A}$ (группы, алгебры, графа, решётки и пр.) основным моментом является задача описания её универсальной теории $\mathrm{Th}_\forall(\mathcal{A})$. Для решения этой задачи чрезвычайно удобным оказывается аппарат алгебраической геометрии над $\mathcal{A}$.

Базисные определения алгебраической геометрии над $\mathcal{A}$ вводятся по той же схеме, как и в классической алгебраической геометрии над полем. В результате алгебраическое уравнение, алгебраическое множество, радикал, координатная алгебра становятся общими теоретико-модельными понятиями. Далее эта идея распространяется в двух направлениях. Одно из них связано с развитием универсальной алгебраической геометрии в чисто теоретико-модельном русле. Здесь доказываются алгебро-геометрические результаты универсального характера, справедливые для произвольных алгебраических систем любой сигнатуры. Другое направление связано с богатым фактическим материалом, полученным для конкретных алгебраических систем. Наиболее яркими примерами здесь являются исследования по свободным группы и жёстким разрешимым группам. Мы подробнее рассказываем об исследованиях по жёстким группам.

Группа G называется *жёсткой*, если в ней существует нормальный ряд

$$G = G_1 > G_2 > \ldots > G_m > G_{m+1} = 1,$$

факторы которого G_i/G_{i+1} абелевы и, рассматриваемые как правые $\mathbb{Z}[G/G_i]$-модули, не имеют модульного кручения. Такой ряд, если он вообще существует, определяется группой однозначно, кроме того, ступень разрешимости G в точности равна m. Важными примерами жёстких групп являются свободные разрешимые группы. Жёсткая группа G называется *делимой*, если элементы фактора G_i/G_{i+1} делятся на ненулевые элементы кольца $\mathbb{Z}[G/G_i]$. Всякая жёсткая группа вкладывается в делимую. Удалось доказать нётеровость по уравнениям произвольной жёсткой группы, описать координатные группы неприводимых алгебраических множеств в аффинном пространстве над делимой жёсткой группой, найти разумную формулировку для теоремы Гильберта о нулях в алгебраической геометрии над жёсткими группами и доказать эту теорему, подробно исследовать теоретико-модельные аспекты теории делимых жёстких групп данной ступени разрешимости.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-21-00065).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Даниярова Э. Ю., Мясников А. Г., Ремесленников В. Н.* Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. Новосибирск: Издательство СО РАН, 2016.

ГЕНЕРИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ

Рыбалов А. Н.

Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омск, Россия; alexander.rybalov@gmail.com

В докладе приводится генерический аналог классической теоремы Клини о неподвижной точке рекурсивного оператора.

Генерический подход к теории вычислимости и вычислительной сложности был предложен в работе [1]. В рамках этого подхода алгоритмическая проблема рассматривается не на всем множестве входов, а на некотором подмножестве "почти всех" входов (так называемом генерическом множестве). Классическая теорема Клини о неподвижной точке, известная также как теорема Клини о рекурсии, утверждает, что для любого алгоритмически вычислимого отображения множества программ машин Тьюринга на множество программ машин Тьюринга существует неподвижная точка: найдется такая машина, что и она и ее образ под действием этого отображения вычисляют одну и ту же функцию. В данной работе доказывается генерический аналог этой теоремы.

Пусть I — некоторое множество входов. Для подмножества $S \subseteq I$ определим последовательность

$$\rho_n(S) = \frac{|S_n|}{|I_n|},\ n = 1, 2, 3, \dots,$$

где $S_n = S \cap I_n$ – множество входов из S размера n. *Асимптотической плотностью* S назовем предел (если он существует)

$$\rho(S) = \lim_{n\to\infty} \rho_n(S).$$

Множество S называется *генерическим*, если $\rho(S) = 1$ и *пренебрежимым*, если $\rho(S) = 0$. Алгоритм $\mathcal{A}$ с множеством входов I и множеством выходов $J \cup \{?\}$ $(? \notin J)$ называется *генерическим*, если $\mathcal{A}$ останавливается на всех входах из I и множество $\{x \in I : \mathcal{A}(x) =?\}$ пренебрежимо.

Теорема. *Для любого генерического алгоритма $\mathcal{A} : \mathcal{P} \to \mathcal{P} \cup \{?\}$ существует такая машина Тьюринга M, что $\mathcal{A}(M) \neq ?$ и машина $\mathcal{A}(M)$ вычисляет ту же функцию, что и M.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kapovich I., Myasnikov A., Schupp P., Shpilrain V.* Generic-case complexity, decision problems in group theory and random walks // Journal of Algebra. 2003. V. 264, No 2. P. 665–694.

О СВЯЗИ КОНСТРУКТИВНЫХ ЧИСЛОВЫХ ПОЛЕЙ С ВЫЧИСЛИМОСТЬЮ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Селиванов В. Л.[1], **Селиванова С. В.**[2]

[1]*Институт систем информатики им. А. П. Ершова СО РАН, Новосибирск, Россия;* vseliv@iis.nsk.su

[2]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;* s_seliv@math.nsc.ru

Теория вычислимости на дискретных структурах является прочным фундаментом прикладных работ в дискретной математике и информатике. С этим контрастирует положение в бурно развивающейся в последнее время теории вычислимости на непрерывных структурах, которая до сих пор слабо связана с численным анализом. В данной работе сделан шаг к установлению связей между указанными разделами математики, а именно установлена связь между конструктивными числовыми полями (см., например, [1]) и полем $\mathbb{R}_c$ вычислимых действительных чисел, которую используем для доказательства вычислимости (в строгом смысле вычислимого анализа [2]) решений важной системы дифференциальных уравнений, причем с использованием алгоритма, реально используемого в численном анализе. Эта связь выражается, в частности, следующим утверждением: для любого конечного $F \subseteq \mathbb{R}_c$ найдется сильно конструктивное вещественно замкнутое подполе $(\mathbb{B}, \beta)$ упорядоченного поля $\mathbb{R}_c$ такое, что $F \subseteq B$.

Этот результат, наряду с классическими результатами численных методов, мы применяем для доказательства вычислимости операторов решений систем дифференциальных уравнений в частных производных, в частности, симметрических гиперболических систем [3]:

$$\begin{cases} A\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum\limits_{i=1}^{m} B_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = f(t, x_1, x_2, \ldots, x_m), \ t \geq 0, \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \varphi(x_1, \ldots, x_m). \end{cases}$$

Здесь $A = A^* > 0$ и $B_i = B_i^*$ — постоянные вычислимые $n \times n$ матрицы, $t \geq 0$, $x = (x_1, \ldots, x_m) \in Q = [0,1]^m$, $\varphi : Q \to \mathbb{R}^n$, $f : Q \times [0,T] \rightharpoonup \mathbb{R}^n$ для некоторого $T > 0$, $\mathbf{u} : Q \times [0,T] \rightharpoonup \mathbb{R}^n$ — частичная функция, действующая на области H существования и единственности решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ершов Ю. Л., Гончаров С. С.* Конструктивные модели. Новосибирск: Научная книга, 1999.
2. *Brattka V., Hertling P., Weihrauch K.* Tutorial on computable analysis. New Computational Paradigms. 2008. P. 425–491.
3. *Годунов С. К. и др. (ред.)* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.

ТЕОРИИ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП С ПРЕДИКАТОМ

Тимошенко Е. И.

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия; eitim45@gmail.com

G_r — свободная группа некоторого многообразия ранга r. Элемент $g \in G_r$ называется *примитивным,* если его можно включить в некоторый базис этой группы. Множество из r элементов $\{g_1, \ldots, g_r\}$ группы G_r называется *аннулирующим*, если его нормальное замыкание $\langle g_1, \ldots, g_r \rangle^{G_r}$ совпадает со всей группой. Элемент $g \in G_r$ называется *аннулирующим элементом,* если его можно дополнить до аннулирующего множества. Обозначим через $\mathcal{P}(G_r)$ множество всех примитивных элементов группы G_r, а через $\mathcal{A}(G_r)$ — множество всех аннулирующих элементов этой группы.

Теорема 1. *Пусть G_r — свободная группа ранга r многообразия $\mathfrak{M}$.*

(1) *Если многообразие $\mathfrak{M}$ разрешимо, то $\mathcal{A}(G_r) = \mathcal{P}(G_r)[G_r, G_r]$. Если многообразие $\mathfrak{M}$ нильпотентно, то $\mathcal{A}(G_r) = \mathcal{P}(G_r)$.*

(2) *Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}^2$ — многообразие метабелевых групп и $r \geq 2$. Тогда $\mathcal{P}(G_r) \neq \mathcal{A}(G_r)$.*

(3) *Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие метабелевых групп или нильпотентных групп $\mathfrak{N}_c$ и ранг r группы G_r не менее 2. Тогда и только тогда $g \in \mathcal{P}(G_r)$, когда элементарные теории групп $G_r/\langle g \rangle^{G_r}$ и G_{r-1} совпадают. Для многообразия $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}\mathfrak{N}_2$ это утверждение неверно.*

Одноместные предикаты P и A определены следующим образом: для $g \in G_r$ положим $G_r \models P(g) \Leftrightarrow g \in \mathcal{P}(G_r)$, $G_r \models A(g) \Leftrightarrow g \in \mathcal{A}(G_r)$. Обозначим через σ_0 групповую сигнатуру, $\sigma_1 = \sigma_0 \sqcup \{P\}$, $\sigma_2 = \sigma_0 \sqcup \{A\}$.

Теорема 2. *Универсальная теория свободной разрешимой группы $F_r(\mathfrak{A}^n)$ ранга $r \geq 2$ ступени разрешимости $n \geq 2$ в сигнатуре σ_1 и сигнатуре σ_2 неразрешима. При $n = 1$ универсальная теория разрешима.*

Теорема 3. *Множество аннулирующих элементов $\mathcal{A}(M_r)$ свободной метабелевой группы M_r ранга r можно определить некоторой $\forall\exists$-формулой сигнатуры σ_0, но множества $\mathcal{P}(M_r)$ и $\mathcal{A}(M_r)$ нельзя определить $\exists$-формулой этой сигнатуры.*

Теорема 4. *Пусть $N_{r,n}$ — свободная n-ступенно нильпотентная группа конечного ранга $r \geq 2$, $n \geq 1$. При $n \geq 2$ множество примитивных элементов $\mathcal{P}(N_{r,n})$ $(= \mathcal{A}(N_{r,n}))$ можно определить некоторой $\forall\exists$-формулой сигнатуры σ_0, но нельзя определить $\exists$-формулой этой сигнатуры. Множества $\mathcal{P}(N_{r,1})$ нельзя определить никакой формулой сигнатуры σ_0.*

Теорема 5. *Пусть $S_{n,m}$ — свободная разрешимая группа ранга n ступени разрешимости m. Тогда при различных n и r и любом $m \geq 1$ группы $S_{n,m}$ и $S_{r,m}$ в сигнатуре σ_1 и σ_2 имеют различные универсальные теории.*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-01485).

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Федоров Ф. М.

Научно-исследовательский институт математики Северо-Восточного федерального университета им. М. К. Аммосова, Якутск, Россия; foma_46@mail.ru

Пусть задана неоднородная бесконечная система линейных алгебраических уравнений с бесконечным множеством неизвестных

$$\left.\begin{array}{r} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n + \ldots = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n + \ldots = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n + \ldots = b_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{1}$$

и соответствующая ей однородная система

$$\left.\begin{array}{r} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n + \ldots = 0, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{2}$$

где $a_{j,i}$ — известные коэффициенты, b_j — свободные члены и x_i — неизвестные, все эти величины взяты из некоторого поля F.

Хотя система (2) является частным случаем системы (1), с точки зрения теории и методов решения бесконечных систем, системы (1) и (2) являются принципиально разными. Дело заключается в следующем. Если применим подход для решения неоднородной системы (1) к однородной системе (2), то непременно получим тривиальное решение системы (2), которое, очевидно, существует всегда и не зависит от бесконечного определителя систем (1) и (2). Вместе с тем, хорошо известны примеры однородных бесконечных систем [1], [2], которые имеют нетривиальные решения. Причем подпространство таких решений может быть бесконечномерным [1], [2].

В настоящем докладе излагается теория общей неоднородной бесконечной системы и ее практическая реализация в том случае, когда бесконечный определитель системы отличен от нуля. Теория основана на построении особого частного решения, так называемого *строго частного решения*, которое существует тогда и только тогда, когда исходная бесконечная система совместна. Описана практическая реализация данного решения с заданной точностью. Для однородной системы строго частным решением является ее тривиальное решение.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках базовой части государственного задания (проект № 6069).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Федоров Ф. М.* Периодические бесконечные системы линейных алгебраических уравнений. Новосибирск: Наука, 2009.
2. *Федоров Ф. М.* Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений и их приложения. Новосибирск: Наука, 2011.

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ЛИ

Харченко В. К.

Universidad Nacional Autonoma de Mexico, Mexico City, Mexico; vlad@unam.mx

Многочисленные попытки, предпринимавшиеся в последние 15–20 лет определить квантовые алгебры Ли как элегантный алгебраический объект с бинарной “квантовой” скобкой, не увенчались бесспорным успехом. В докладе мы рассматриваем альтернативный подход, предполагающий изучение независимых операций многих переменных. Известно несколько важных областей, где операции многих переменных заменяют скобку Ли: изучение косых дифференцирований в теории колец, локальная аналитическая теория луп и теоретические исследования обобщений механики Намбу. В докладе мы рассмотрим полилинейные квантовые операции Ли, главную общую квантовую операцию, базис из симметрических общих операций и операции Шестакова – Умирбаева в теории неассоциативного произведения. Подробно рассматриваемый подход изложен в недавно опубликованной книге автора “Quantum Lie Theory”, Lecture Notes in Mathematics, v. 2150, Springer, 2015.

ON FREE GELFAND–DORFMAN–NOVIKOV–POISSON ALGEBRAS AND A PBW THEOREM

Bokut L. A.[1], **Chen Y.**[2], **Zhang Z.**[2]

[1]*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;*
bokut@math.nsc.ru
[2]*School of Mathematical Sciences, South China Normal University, Guangzhou, People's Republic of China;*
yqchen@scnu.edu.cn, 295841340@qq.com

In 1997 X. Xu [1] invented a concept of Novikov–Poisson algebras (we call them Gelfand–Dorfman–Novikov–Poisson (GDN–Poisson) algebras) based on [2], [3]. We construct a linear basis of a free GDN–Poisson algebra. We define a notion of a special GDN–Poisson admissible algebra, based on X. Xu's definition and an S. I. Gelfand's observation (see [2]). It is a differential algebra with two commutative associative products and some extra identities extra identities. We prove that any GDN–Poisson algebra is embeddable into its universal enveloping special GDN–Poisson admissible algebra (PBW type theorem) [4].

The authors were supported by the NNSF of China (11171118, 11571121) and the Russian Foundation for Basic Research (project 14-21-00065).

REFERENCES

1. *Xu X.* Novikov–Poisson algebras // J. Algebra. 1997. V. 190, No. 2. P. 253–279.
2. *Gelfand I. M., Dorfman I. Ya.* Hamiltonian operators and algebraic structures related to them // Funktsional. Anal. i Prilozhen. 1979. V. 13, No. 4. P. 13–30 [in Russian].
3. *Balinskii A. A., Novikov S. P.* Poisson brackets of hydrodynamics type. Frobenius algebras and Lie algebras // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1985. V. 283, No. 5. P. 1036–1039 [in Russian].
4. *Bokut L. A., Chen Y., Zhang Z.* On free Gelfand–Dorfman–Novikov–Poisson algebras and a PBW theorem // arXiv:1604.06676v2[math.RA].

ON NONQUASIRECOGNIZABLE FINITE SIMPLE GROUPS

Grechkoseeva M. A.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;
grechkoseeva@gmail.com

We denote the set of the orders of elements, or the *spectrum*, of a finite group G by $\omega(G)$, and say that G and H are isospectral if $\omega(G) = \omega(H)$. The orders of elements of a finite group definitely reflect its structure to some extent, but more interesting is that many finite nonabelian simple groups are uniquely determined by their spectra (for example, all the sporadic groups except J_2 and all the alternating groups except A_6 and A_{10}). Furthermore, simple classical groups of sufficiently large dimension have the following property: if G is a finite group isospectral to a such simple classical group S, then up to isomorphism $S \leq G \leq \operatorname{Aut} S$ (see [1] for details). As of 2016, "sufficiently large" in the previous statement means "at least 27" for linear and unitary groups and "at least 38" for symplectic and orthogonal groups, but the conjectural bounds are 5 and 10 respectively (see [2]).

In the present work, we continue studying finite groups isospectral to symplectic and orthogonal groups of dimensions up to 9. The finite simple orthogonal groups $\Omega_9(q)$ do not satisfy the above property and, moreover, they are not quasirecognizable by spectrum [3] (a finite nonabelian simple group S is said to be *quasirecognizable* if every finite group isospectral to S has a unique nonabelian composition factor and this factor is isomorphic to S). Since $\Omega_9(2^m) \simeq PSp_8(2^m)$, this result leads to the following natural question: are the groups $PSp_8(q)$, with q odd, quasirecognizable by spectrum? We prove that they are not provided that q is not a power of 7.

Theorem. *Let q be a power of an odd prime $p \neq 7$ and let V be the natural module of the general orthogonal group $GO_8^-(q)$. Denote the subgroup of $GO_8^-(q)$ generated by $\Omega_8^-(q)$ and some element of $GO_8^-(q) \setminus SO_8^-(q)$ by H and the natural semidirect product $V \rtimes H$ by G. Then $\omega(G) = \omega(PSp_8(q))$. In particular, $PSp_8(q)$ is not quasirecognizable by spectrum and there are infinitely many different finite groups isospectral to $PSp_8(q)$.*

Observe that for $p = 7$, the spectrum of the group G constructed in Theorem 1 is not contained in $\omega(PSp_8(q))$, and the question of quasirecognizability of $PSp_8(7^m)$ remains open.

The research is supported by Russian Science Foundation (project no. 14-21-00065).

REFERENCES

1. *Grechkoseeva M. A., Vasil'ev A. V.*, "On the structure of finite groups isospectral to finite simple groups," J. Group Theory, **18**, No. 5, 741–759 (2015).
2. *Staroletov A. M.*, "On almost recognizability by spectrum of simple classical groups," Int. J. Group Theory (in press).
3. *Grechkoseeva M. A., Staroletov A. M.*, "On finite simple groups that are not recognizable by spectrum," in: Collection of Abstracts of Mal'tsev Meeting, Novosibirsk, 2014, p. 91 (http://www.math.nsc.ru/conference/malmeet/14/Malmeet2014.pdf).

NUMBER OF SYLOW SUBGROUPS IN FINITE GROUPS

Guo W.[1], **Vdovin E. P.**[2]

[1] *University of Science and Technology, Hefei, People's Republic of China;*
wbguo@ustc.edu.cn
[2] *Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;*
vdovin@math.nsc.ru

For a finite group G denote by $\nu_p(G)$ the number of Sylow p-subgroups of G. It is a trivial exercise to check that for every subgroup H of G the inequality $\nu_p(H) \leq \nu_p(G)$ holds. However, $\nu_p(H)$ does not divides $\nu_p(G)$ in general. In 2003 G. Navarro proved that $\nu_p(H)$ divides $\nu_p(G)$ for every $H \leq G$, if G is p-solvable. We prove that $\nu_p(H)$ divides $\nu_p(G)$ for every $H \leq G$, if this property holds for every nonabelian composition factor of G. Thus, we obtain a substantial generalization of the Navarro's result and also give an alternative proof for Navarro's result.

We say that a group G satisfies $\mathbf{DivSyl}(p)$ if $\nu_p(H)$ divides $\nu_p(G)$ for every $H \leq G$.

Theorem. *Let*

$$1 = G_0 < G_1 < \ldots < G_n = G$$

be a refinement of a chief series of G. Assume that for each nonabelian G_i/G_{i-1} and for every p-subgroup P of $\mathrm{Aut}_G(G_i/G_{i-1})$ the group $P(G_i/G_{i-1})$ satisfies $\mathbf{DivSyl}(p)$. Then G satisfies $\mathbf{DivSyl}(p)$.

REFERENCES

1. *Navarro G.*, "Number of Sylow subgroups in p-solvable groups," Proc. Amer. Math. Soc., **131**, No. 10, 3019–3020 (2003).

DEGENERATIONS OF ZINBIEL AND NILPOTENT LEIBNIZ ALGEBRAS

Kaygorodov I. B.[1], **Popov Yu. S.**[2]

[1] *Universidade Federal do ABC, Santo André, Brazil;* ivan.kaygorodov.84@mail.ru
[2] *Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;* yuri.ppv@gmail.com

The general linear group $GL_n(F)$ acts naturally on the set of all algebras of fixed dimension n in a given variety M over a field F. Given A and B in M, we say that B degenerates to A if A belongs to the closure of $GL_n(F)$-orbit of B (in the Zariski topology on M). The notion of degeneration is closely connected with the notion of deformation of algebras [1], and it is applied to filtrations and gradings as well. There are many results concerning degenerations of algebras of low dimensions from some variety defined by a set of identities. An important problem in this direction is the description of so-called rigid algebras. These algebras are of big interest, since the closures of their orbits under the action of general linear group form irreducible components of a variety under consideration. For example, rigid algebras were classified in the varieties of low dimensional associative (Mazzola) and Jordan algebras [2]. The full information about degenerations was found for four-dimensional Lie algebras (Burde, Steinhoff), for nilpotent five- and six-dimensional Lie algebras [3], for three-dimensional nilpotent Leibniz algebras (Omirov, Rakhimov), for two-dimensional pre-Lie algebras [4], and other varieties.

Leibniz algebras were introduced by Bloh in [5] as a non-anticommutative generalization of Lie algebras. Zinbiel algebras were introduced by Loday in [6]. Under the Koszul duality the operad of Zinbiel algebras is dual to the operad of Leibniz algebras.

In our paper [7] we give the full information about degenerations of Zinbiel and nilpotent Leibniz algebras of dimension 4. More precisely, we construct a graph of primary degenerations. The vertices of this graph are the isomorphism classes of algebras in the variety under consideration, and an algebra A degenerates non-trivially to an algebra B iff there is a path from the vertex corresponding to A to the vertex corresponding to B. Also we describe the rigid algebras and the irreducible components of the varieties of algebras under consideration.

The second author was supported by the President's Programme "Support of Young Russian Scientists" (grant MK-1378.2017.1).

REFERENCES

1. *Grunewald F., O'Halloran J.*, "Deformations of Lie algebras," J. Algebra, **162**, No. 1, 210–224 (1993).
2. *Kashuba I., Martin M.*, "Deformations of Jordan algebras of dimension four," J. Algebra, **399**, 277–289 (2014).
3. *Grunewald F., O'Halloran J.*, "Varieties of nilpotent Lie algebras of dimension less than six," J. Algebra, **112**, 315–325 (1988).
4. *Benes T., Burde D.*, "Degenerations of pre-Lie algebras," J. Math. Phys., **50**, No. 11, Article ID112102 (2009).
5. *Bloh A.*, "On a generalization of the concept of Lie algebra" [in Russian], Dokl. Akad. Nauk SSSR, **165**, 471–473 (1965).
6. *Loday J.-L.*, "Cup-product for Leibniz cohomology and dual Leibniz algebras," Math. Scand., **77**, No. 2, 189–196 (1995).
7. *Kaygorodov I., Popov Yu., Pozhidaev A., Volkov Yu.*, "Degenerations of Zinbiel and nilpotent Leibniz algebras," arXiv:1611.06454.

IDEALS OF NILTRIANGULAR LIE ALGEBRAS OF EXCEPTIONAL TYPE

Khodyunya N. D.

Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia; nkhodyunya@gmail.com

Any Chevalley algebra over field K is characterized by a root system Φ and a Chevalley basis consisting of elements e_r $(r \in \Phi)$ and a suitable Cartan subalgebra [1; §4.4]. Denote by $N\Phi(K)$ the *niltriangular* subalgebra with the basis $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$.

We find ideals of the enveloping algebra R for $N\Phi(K)$ which was constructed by V. M. Levchuk. Let $T(r) := \sum_{s \geq r} Ke_s$ and $Q(r) := \sum_{s > r} Ke_s$, where $s \geq r$ if $s - r$ is a linear combination of simple roots with non-negative coefficients. A subset $\mathcal{L} = \mathcal{L}(H)$ in Φ^+ is said to be *a set of corners of* $H \subseteq N\Phi(K)$ if $H \subseteq \sum_{r \in \mathcal{L}} T(r)$ and any substitution of $T(r)$ by $Q(r)$ breaks the inclusion. Every ideal of ring R (with $R^{(-)} \simeq N\Phi(K)$) for Lie type A_n satisfies the condition:

$$Q(r) \subseteq H \quad \text{for all } r \in \mathcal{L}(H). \tag{1}$$

(R. Dubish, S. Perlis in case of algebras, V. M. Levchuk). The same description of ideals holds, in particular, for all classical types $\neq D_n$. On the other hand, the problem of enumeration of ideals (1) for algebras $N\Phi(GF(q))$ of classical type has been written in [2; Problem 1]. Recently, this problem was solved by G. P. Egorychev, V. M. Levchuk and speaker. The following theorem solves analogue of the problem 1 for exceptional Lie types.

Theorem. *The number of ideals* (1) *of algebra* $N\Phi(GF(q))$ *of exceptional type over field* $K = GF(q)$ *is*

$$G_2: \ q + 7; \qquad F_4: \ q^4 + 3\,q^3 + 44\,q^2 + 32\,q + 25;$$

$$E_6: \ q^9 + 3\,q^8 + 4\,q^7 + 67\,q^6 + 69\,q^5 + 230\,q^4 + 306\,q^3 + 94\,q^2 + 22\,q + 37;$$

$$E_7: \ 2\,(q^{12} + q^{11} + 3\,q^{10} + 32\,q^9 + 90\,q^8 + 118\,q^7 + 394\,q^6 + 449\,q^5 + \\ + 708\,q^4 + 300\,q^3 - 79\,q^2 + 31\,q + 32);$$

$$E_8: \ q^{16} + 3\,q^{15} + 4\,q^{14} + 7\,q^{13} + 237\,q^{12} + 239\,q^{11} + 693\,q^{10} + 1647\,q^9 + 3554\,q^8 + \\ + 4283\,q^7 + 5829\,q^6 + 7055\,q^5 + 3773\,q^4 - 2361\,q^3 - 244\,q^2 + 239\,q + 121.$$

The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00707).

REFERENCES

1. *Carter R.*, Simple Groups of Lie type, Wiley and Sons, New York (1972).
2. *Egorychev G. P., Levchuk V. M.*, "Enumeration in the Chevalley algebras," ACM SIGSAM Bulletin, **35**, No. 2, 20–34 (2001).

NILTRIANGULAR SUBALGEBRAS OF THE CHEVALLEY ALGEBRAS AND THEIR ENVELOPING ALGEBRAS: IDEALS AND AUTOMORPHISMS

Levchuk V. M.

Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia; vlevchuk@sfu-kras.ru

Any (not necessarily associative) algebra $R = (R, +, \cdot)$ is said to be *enveloping algebra* of Lie algebra L if both algebras are isomorphic as linear spaces and there exist ring isomorphism $R^{(-)} := (R, +, *) \simeq L$, where $a * b := ab - ba$ (see also Lie-admissible algebras [1]). Denote by $N\Phi(K)$ the *niltriangular* subalgebra with the basis $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$ of a Chevalley algebra over ring K, i.e. with a Chevalley basis consisting of the elements e_r $(r \in \Phi)$ (Φ is a root system) and a suitable Cartan subalgebra [1]. Following from the Chevalley's basis theorem, if $r, s \in \Phi^+$, then $e_r * e_s = 0$ when $r + s \notin \Phi^+$ and $e_r * e_s = N_{rs} e_{r+s}$ when $r, s, r+s \in \Phi^+$, where $N_{rs} = \pm 1, \pm 2$ or (type G_2) ± 3.

Assuming that $e_r e_s = 0$ when $r+s \notin \Phi$, $e_r e_s = e_{r+s}$ when $r, s, r+s \in \Phi^+$, $N_{r,s} \geq 1$ and $e_s e_r = -(N_{r,s} - 1)e_{r+s}$ otherwise, we obtain an enveloping algebra $R = (R, +, \cdot)$ of a Lie algebra $N\Phi(K)$. We consider the following problems.

1) The problems of ideals enumeration in Lie algebras $N\Phi(K)$ of classical types over finite field [3; Problems 1 and 2] and their analogues for exceptional types.

2) The equivalence of the problem 1 from [3] and the problem of ideals enumeration of algebras R for certain types.

3) Automorphism groups of rings R and $N\Phi(K)$ over associative commutative ring K with identity.

The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00707).

REFERENCES

1. *Laufer P. J., Tomber M. L.,* "Some Lie admissible algebras," Canad. J. Math., **14**, 287–292 (1962).
2. *Carter R.,* Simple Groups of Lie type, Wiley and Sons, New York (1972).
3. *Egorychev G. P., Levchuk V. M.,* "Enumeration in the Chevalley algebras," ACM SIGSAM Bulletin, **35**, No. 2, 20–34 (2001).

SOME STRUCTURAL PROPERTIES OF QUASI-DEGREES

Omanadze R. Sh.

Tbilisi Ivane Javakhishvili State University, Tbilisi, Georgia;
roland.omanadze@tsu.ge

Let r_1 and r_2 be reducibilities. The reducibility r_2 is said to be weaker than the reducibility r_1 (and r_1 is said to be stronger than r_2) if we have that $A \leq_{r_1} B \Rightarrow A \leq_{r_2} B$ for all $A, B \subseteq \omega$. It is clear that if r_1 is stronger than r_2 then each r_2-degree consists of a single or several (possibly infinitely many) r_1-degrees. One of the main approaches to studying various reducibilities concerns the question of how many r_1-degrees exist and how they are arranged in each of the degrees relative to the weaker reducibility.

Recently Batyrshin [2] proved that there exists a noncomputable c.e. Q-degree which contains only one c.e. m-degree.

We improve this result by showing that every noncomputable c.e. Q-degree contains a c.e. perfect set.

In [3] Ershov suggested the definition of a perfect set and proved that the m-degree of a perfect set consists of a single 1-degree and every c.e. Turing degree > 0 contains a perfect c.e. set.

The following theorem and its proof are analogous to above mentioned Ershov Theorem and its proof.

Theorem 1. *Every noncomputable c.e. Q-degree contains a perfect c.e.set.*

Corollary 1. *A noncomputable c.e. Q-degree consists of a single c.e. m-degree if and only if it consists of a single c.e. 1-degree.*

Corollary 2. *Every noncomputable c.e. Q-degree contains a c.e. m-degree consisting of only one 1-degree.*

Corollary 3. *There is a noncomputable c.e. Q-degree containing a single c.e. 1-degree.*

In [1] it is proved that for every Π^0_2-set A, $\emptyset < A < \emptyset'$, there is a Δ^0_2-set B which is Q-incomparable with A and for all c.e. sets X, if $X <_Q A$ and $X <_Q B$ then $X <_Q \emptyset$.

In connection with this result the following theorem seems interesting.

Theorem 2. *Let K be a creative set. Then there is a $\Sigma^0_2 \setminus \Delta^0_2$ set B which is Q-incomparable with K and for all c.e. sets W, if $W \leq_Q B$ then $W \leq_Q \emptyset$.*

REFERENCES

1. *Arslanov M. M., Batyrshin I. I., Omanadze R. Sh.*, "Structural properties of Q-degrees of n-c.e. sets," Annals of Pure and Applied Logic, **156**, No. 1, 13–20 (2008).
2. *Batyrshin I. I.*, "The structure of m-degrees inside Q-degrees," in: International Conference "Mal'tsev Meeting" dedicated to the 75th anniversary of Yury L. Ershov, Novosibirsk, 2015, p. 62.
3. *Ershov Yu., L.*, "Positive equivalences," Algebra and Logic, **10**, No. 6, 378–394 (1971).

DEGENERATIONS OF MALCEV ALGEBRAS

Popov Yu. S.

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia; yuri.ppv@gmail.com

The general linear group $GL_n(F)$ acts naturally on the set of all algebras of fixed dimension n in a given variety M over a field F. Given A and B in M, we say that B degenerates to A if A belongs to the closure of $GL_n(F)$-orbit of B (in the Zariski topology on M). Degenerations of algebras were studied in various papers. In particular, there are many results concerning degenerations of algebras of low dimensions from some variety defined by a set of identities. An important problem in this direction is the description of so-called rigid algebras. These algebras are of big interest, since the closures of their orbits under the action of general linear group form irreducible components of a variety under consideration. All information about degenerations has been found for four-dimensional Lie algebras (Burde, Steinhoff), nilpotent five- and six-dimensional Lie algebras [3], three-dimensional nilpotent Leibniz algebras (Omirov, Rakhimov), two-dimensional pre-Lie algebras [1], and three-dimensional Novikov algebras [2]. Also the problem of finding rigid algebras was solved for low dimensional associative (Gabriel, Mazzola), Leibniz (Albeveiro, Omirov, Rakhimov and others) and four-dimensional Jordan algebras (Kashuba, Martin, [4]).

The notions of a Malcev and binary Lie algebra were introduced by A. Malcev. Any Lie algebra is a Malcev algebra and any Malcev algebra is a binary Lie algebra. Note also that any alternative algebra can be turned to a Malcev algebra by defining a new multiplication $[\ ,\ ]$ by $[x, y] = xy - yx$.

In our work [5] we give the full information about degenerations of binary Lie algebras of dimension 4 and nilpotent Malcev algebras of dimensions 5 and 6. In particular, we describe all rigid algebras and irreducible components in the corresponding varieties.

The author was supported by the President's Programme "Support of Young Russian Scientists" (grant MK-1378.2017.1).

REFERENCES

1. *Benes T., Burde D.*, "Degenerations of pre-Lie algebras," J. Math. Phys., **50**, No. 11, Article ID 112102 (2009).
2. *Benes T., Burde D.*, "Classification of orbit closures in the variety of three-dimensional Novikov algebras," J. Algebra Appl., **13**, No. 2, Article ID 1350081 (2009).
3. *Grunewald F., O'Halloran J.*, "Varieties of nilpotent Lie algebras of dimension less than six," J. Algebra, **112**, 315–325 (1988).
4. *Kashuba I., Martin M.*, "Deformations of Jordan algebras of dimension four," J. Algebra, **399**, 277–289 (2014).
5. *Kaygorodov I., Popov Yu., Volkov Yu.*, "Degenerations of binary Lie and nilpotent Malcev algebras," arXiv:1609.07392.

CLASSIFICATION AND PROPERTIES OF THE π-SUBMAXIMAL SUBGROUPS IN MINIMAL NON-SOLVABLE GROUPS

Revin D. O.[1], **Guo W.**[2]

[1]*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;*
revin@math.nsc.ru
[2]*University of Science and Technology, Hefei, People's Republic of China;*
guo@ustc.edu.cn

Let π be a set of primes. According to H. Wielandt, a subgroup H of a finite group X is called a *π-submaximal subgroup* if there is a monomorphism $\phi : X \to Y$ into a finite group Y such that X^ϕ is subnormal in Y and $H^\phi = K \cap X^\phi$ for a π-maximal subgroup K of Y. In his talk at the well-known conference on finite groups in Santa-Cruz (USA) in 1979, Wielandt posed a series of open questions and among them the following problem [1]: to describe the π-submaximal subgroup of the minimal nonsolvable groups and to study properties of such subgroups (the pronormality, the intravariance, the conjugacy in the automorphism group etc). In the talk, we discussed a solution of this problem: for every set π of primes, we give a description of the π-submaximal subgroup in minimal nonsolvable groups and investigate their properties.

This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 14-21-00065).

REFERENCES

1. *Wielandt H.*, "Zusammenghesetzte Gruppen: Hölder Programm heute," in: The Santa Cruz Conf. on Finite Groups, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 37, Amer. Math. Soc., Providence, 1980, pp. 161–173.

EXTENDING WADGE HIERARCHY TO k-PARTITIONS

Selivanov V. L.

A. P. Ershov Institute of Informatics Systems, Novosibirsk, Russia;
vseliv@iis.nsk.su

For subsets A, B of the Baire space $\mathcal{N} = \omega^\omega$, A is *Wadge reducible* to B ($A \leq_W B$), if $A = f^{-1}(B)$ for some continuous function f on $\mathcal{N}$. The quotient-poset of the preorder $(P(\mathcal{N}); \leq_W)$ under the induced equivalence relation $\equiv_W$ on the power-set of $\mathcal{N}$ is called *the structure of Wadge degrees* in $\mathcal{N}$. W. Wadge [4] characterized the Wadge degrees of Borel sets up to isomorphism, in particular this poset is well-founded and has no 3 pairwise incomparable elements.

Let $2 \leq k < \omega$. By a *k-partition of* $\mathcal{N}$ we mean a function $A : \mathcal{N} \to k = \{0, \ldots, k-1\}$ often identified with the sequence $(A_0, \ldots, A_{k-1})$ where $A_i = A^{-1}(i)$ are the components of A. Obviously, 2-partitions of $\mathcal{N}$ can be identified with the subsets of $\mathcal{N}$ using the characteristic functions. The set of all k-partitions of $\mathcal{N}$ is denoted $k^{\mathcal{N}}$, thus $2^{\mathcal{N}} = P(\mathcal{N})$. The Wadge reducibility on subsets of $\mathcal{N}$ is naturally extended to k-partitions: for $A, B \in k^{\mathcal{N}}$, $A \leq_W B$ means that $A = B \circ f$ for some continuous function f on $\mathcal{N}$. In this way, we obtain the preorder $(k^{\mathcal{N}}; \leq_W)$. For any pointclass $\mathbf{\Gamma} \subseteq P(\mathcal{N})$, let $\mathbf{\Gamma}(k^{\mathcal{N}})$ be the set of k-partitions of $\mathcal{N}$ with components in $\mathbf{\Gamma}$. It is known (Theorem 3.2 in [1]) that $(\mathbf{\Delta}^1_1(k^{\mathcal{N}}); \leq_W)$ is a well preorder, i.e. it has neither infinite descending chains nor infinite antichains.

In this work we characterize up to isomorphism some initial segments of the Wadge degrees of k-partitions, in particular of k-partitions with $\mathbf{\Delta}^0_3$-components. This exstends some previous results in [2], [3].

REFERENCES

1. *van Engelen F., Miller A., Steel J.,* “Rigid Borel sets and better quasiorder theory,” Contemporary Mathematics, **65**, 199–222 (1987).
2. *Hertling P.,* “Topologische Komplexitätsgrade von Funktionen mit endlichem Bild,” Informatik-Berichte **152**, Fernuniversität Hagen, 1993.
3. *Selivanov V.L.,* “Hierarchies of $\mathbf{\Delta}^0_2$-measurable k-partitions,” Math. Logic Quarterly, **53**, 446–461 (2007).
4. *Wadge W.,* “Reducibility and Determinateness in the Baire Space,” PhD thesis, University of California, Berkely, 1984.

DIRECT PRODUCTS AND VARIETIES IN UNIVERSAL ALGEBRAIC GEOMETRY

Shevlyakov A. N.

Omsk Branch of the Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Omsk, Russia;
a_shevl@mail.ru

The talk is based on the paper [1], where we solve the following problem.

PROBLEM. Is there a variety V of L-algebras such that each $A \in V$ is $L(A)$-equationally Noetherian algebra (here $L(A) = L \cup \{a \mid a \in A\}$)?

This problem was solved for groups, rings, monoids and semigroups.

Theorem 1. *Let V be a variety of groups. Each $G \in V$ is equationally Noetherian, if and only if V is abelian.*

Theorem 2. *Let V be a variety of rings. Each $R \in V$ is equationally Noetherian, if and only if all elements of V have zero multiplication.*

Theorem 3. *Let V be a variety of monoids. Each $M \in V$ is equationally Noetherian, if and only if V is a variety of abelian groups defined by the identity $x^n = 1$.*

Theorem 4. *Each semigroup S of a variety V is $L(S)$-equationally Noetherian iff V is one of the following*

1. *the variety of semigroups with zero multiplication ($xy = zt$);*
2. *the variety of left zero semigroups ($xy = x$);*
3. *the variety of right zero semigroups ($xy = y$);*
4. *the variety of abelian groups of period n ($xy = yx$, $x = xy^n$).*

The author was supported by Russian Science Foundation (project 17-11-01117).

REFERENCES

1. *Shahryari M., Shevlyakov A. N.*, "Direct products, varieties, and compactness conditions," Groups, Complexity, Cryptology (to appear).

ON CARDINALITIES FOR MODELS OF THEORIES IN CLOSURES

Sudoplatov S. V.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
Novosibirsk State Technical University,
Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling MES RK,
Almaty, Republic of Kazakhstan;
sudoplat@math.nsc.ru

We continue to study topological and model-theoretic properties of families of complete elementary theories in a predicate language [1], [2], [3] and present results on cardinalities for models of theories in closures with respect to the operators of E-combinations and P-combinations.

Remark. E-combinations can not produce new finite cardinalities of models.

Theorem 1. *For any nonempty family $\mathcal{T}$ of theories there is $K \subset \omega$ such that finite cardinalities of models of $\mathcal{T}$-closure with respect to disjoint P-combinations with repetitions form the following set: $\biguplus\limits_{k \in K} k\mathbb{Z}^+$.*

Theorem 2. *For any infinite family $\mathcal{T}$ of theories there is $K \subset \omega$ such that that finite cardinalities of models of $\mathcal{T}$-closure with respect to disjoint P-combinations without repetitions form the following set: $\biguplus\limits_{k \in K} k\mathbb{Z}^+$.*

Theorem 3. *For any set $K \subseteq \mathbb{Z}^+$ there is a P-combination T producing $K = K_T$, where K_T is the set of finite cardinalities of models of theories in the closure with respect to T.*

Theorem 4.
(1) *If T is a P-combination with a type $p_\infty(x)$ isolating a complete 1-type then K_T is either empty or contains k_0 such that $K_T \subseteq k_0\mathbb{Z}^+$.*
(2) *For any set $K \subseteq k_0\mathbb{Z}^+$, being empty or containing k_0, there is a P-combination T with a type $p_\infty(x)$ isolating a complete 1-type such that $K_T = K$.*

Remark. Infinite cardinalities for models of new theories can be estimated by calculi for definable sets, introduced in [4].

The author was supported by the Grants Council (under RF President) for State Aid of Leading Scientific Schools (grant NSh-6848.2016.1) and by Committee of Science in Education and Science Ministry of the Republic of Kazakhstan (Grant no. 0830/GF4).

REFERENCES

1. *Sudoplatov S. V.*, "Combinations of structures," arXiv:1601.00041v1 [math.LO].
2. *Sudoplatov S. V.*, "Closures and generating sets related to combinations of structures," Reports of Irkutsk State University. Series "Mathematics," **16**, 131–144 (2016).
3. *Sudoplatov S. V.*, "Families of language uniform theories and their generating sets," Reports of Irkutsk State University, Series "Mathematics," **17**, 62–76 (2016).
4. *Sudoplatov S. V., Kiouvrekis Y., Stefaneas P.*, "Definable sets in generic structures and their cardinalities," Preprint, 2017.

ON CENTRALIZERS OF INVOLUTIONS IN ALMOST SIMPLE GROUPS

Vasil'ev A. V.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;
vasand@math.nsc.ru

The primary purpose of the talk is to present the following

Theorem. *Suppose that G is a finite almost simple group with the socle S. Then there exists an involution t in S such that $G = C_G(t)S$.*

We are also going to explain the relation between this statement and the problem of finding of all non-conjugate regular subgroups in the automorphism groups of the central Cayley graphs over almost simple groups, and, in turn, the description of all nonequivalent Cayley representations of such graphs.

ON GEOMETRIC STRUCTURES WITH DENSE/CODENSE SUBSETS

Vasilyev Ye. V.

Memorial University of Newfoundland – Grenfell Campus, Corner Brook, Canada;
yvasilyev@grenfell.mun.ca

A theory T is called *geometric* if in all the models of T the operator of algebraic closure satisfies the exchange property, and T eliminates the $\exists^\infty$ quantifier. Examples include supersimple theories of SU-rank 1 (in particular, strongly minimal theories) and o-minimal theories. We call a subset P of a model M of a geometric theory *dense/codense*, if any infinite subset of M definable over a set A has a non-empty intersection with P and $M \backslash acl(A \cup P)$.

We can impose further conditions on the set P. If we require P to be algebraically closed, we get the notion of *lovely pair* of geometric structures [1], first introduced in the SU-rank 1 and simple contexts in [2] an [3]. If we require P to be algebraically independent, we get the notion of an *H-structure* [4], first studied in the o-minimal context in [5]. If we add a predicate for the subset, in both cases we obtain a complete theory in the expanded language.

Lovely pairs allowed us to extend the notion of linearity to the general context of geometric theories and to connect it to the presence of projective geometries over division rings [6], in the absence of the usual stability theoretic or topological tools available in the strongly minimal or o-minimal cases.

Both lovely pair and H-structure expansions allow a good description of definable sets and preserve many important stability/simplicity-theoretic and combinatorial conditions (e.g. superstability, supersimplicity, NIP), and in the SU-rank 1 case, one gets a reasonable description of forking in the expanded language. In the case of H-structure expansion of an SU-rank 1 theory, we also obtained a clear description of canonical bases in terms of those in the original theory T [4].

We will also discuss an example of an "intermediate" version of dense/codense expansion, where the set P is neither algebraically closed nor independent: a real closed field with a dense/codense linearly independent multiplicative subgroup.

The author was partially supported by the Natural Science and Engineering Research Council of Canada (NSERC).

REFERENCES

1. *Berenstein A., Vassiliev E.*, "On lovely pairs of geometric structures," Annals of Pure and Applied Logic, **161**, No. 7, 866–878 (2010).
2. *Vassiliev E.*, "Generic pairs of SU-rank 1 structures," Annals of Pure and Applied Logic, **120**, 103–149 (2003).
3. *Ben Yaacov I., Pillay A., Vassiliev, E.*, "Lovely pairs of models," Annals of Pure and Applied Logic, **122**, 235–261 (2003).
5. *Berenstein A., Vassiliev E.*, "Geometric structures with a dense independent subset," Selecta Mathematica -New Series, **22**, No. 1, 191–225 (2016).
6. *Dolich A., Miller C., Steinhorn C.*, "Expansions of o-minimal structures by dense independent sets," Annals of Pure and Applied Logic, **167**, No. 8, 684–706 (2016).
6. *Berenstein A., Vassiliev E.*, "Weakly one-based geometric theories," Journal of Symbolic Logic, **77**, No. 2, 392–422 (2012).

THE $\mathfrak{F}^{\Omega}$-PROJECTORS AND $\mathfrak{F}^{\Omega}$-COVERING SUBGROUPS OF FINITE GROUPS

Vedernikov V. A.[1], **Sorokina M. M.**[2]

[1]*Moscow City Teachers' Training University, Moscow, Russia;* `vavedernikov@mail.ru`

[2]*Bryansk State University, Bryansk, Russia;* `mmsorokina@yandex.ru`

Considered only finite groups. We have introduced definitions of an $\mathfrak{F}^{\Omega}$-projector and of an $\mathfrak{F}^{\Omega}$-covering subgroup in a finite group G which are the generalization of Gaschütz's definitions of an $\mathfrak{F}$-projector and of an $\mathfrak{F}$-covering subgroup respectively in the case when G is a solvable group.

Definition 1. Let $\mathfrak{F}$ be a non-empty class of groups. A subgroup H of the group G is called an $\mathfrak{F}^{\Omega}$-projector of G if HN/N is an $\mathfrak{F}$-maximal subgroup in G/N for every normal solvable Ω-subgroup N of G.

Definition 2. Let $\mathfrak{F}$ be a non-empty class of groups. A subgroup H of the group G is called an $\mathfrak{F}^{\Omega}$-covering subgroup of G if $H \in \mathfrak{F}$ and whenever $H \leq U \leq G$, V is a normal solvable Ω-subgroup of U such that $U/V \in \mathfrak{F}$, then $U = HV$.

Let $\mathfrak{I}$ be a class of all simple groups, Ω be a non-empty subclass of $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{X}$ be non-empty classes of groups, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. A class $\mathfrak{F}$ is called $s\Omega$-primitively closed in $\mathfrak{X}$, or briefly, $s\Omega P$-closed in $\mathfrak{X}$ if for each group G the following condition is satisfied: if $G/Core_G(M) \cap O_{\Omega}(G) \in \mathfrak{F}$ for every such maximal subgroup M of G that a subgroup $Core_G(M) \cap O_{\Omega}(G)$ is solvable, then $G \in \mathfrak{F}$.

Let $f : \Omega \cup \{\Omega'\} \to \{$formations of groups$\}$ be an ΩF-function, $\varphi : \mathfrak{I} \to \{$non-empty Fitting formations of groups$\}$ be an FR-function. A formation $\Omega F(f, \varphi) = (G : G/O_{\Omega}(G) \in f(\Omega')$ and $G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$ for all $A \in \Omega \cap K(G))$ is called an Ω-foliated formation with the Ω-satellite f and the direction φ [1]. A formation $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$ is called Ω-composition if $\varphi(A) = \mathfrak{S}_{cA}$ for any $A \in \mathfrak{I}$, where $\mathfrak{S}_{cA}$ is a class of all those groups in which every chief A-factor is central.

Theorem 1. *Let $\mathfrak{X}$ be an S-closed homomorph, $\mathfrak{F}$ be a non-empty $s\Omega P$-closed homomorph in $\mathfrak{X}$ and $G \in \mathfrak{X}$. If G has an $\mathfrak{F}$-residual normal solvable Ω-subgroup, then there exists at least one $\mathfrak{F}^{\Omega}$-projector of G.*

Theorem 2. *Let $\Omega \subseteq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{X}$ be an S-closed homomorph, $\mathfrak{F}$ be a non-empty subclass of $\mathfrak{X}$. If every group $G \in \mathfrak{X}$ with $O_{\Omega}(G) \neq 1$ has an $\mathfrak{F}^{\Omega}$-projector, then $\mathfrak{F}$ is $s\Omega P$-closed in $\mathfrak{X}$.*

Theorem 3. *Let $\mathfrak{X}$ be an S-closed homomorph, $\mathfrak{F}$ be a non-empty $s\Omega P$-closed homomorph in $\mathfrak{X}$, $G \in \mathfrak{X}$, $O_{\Omega}(G)$ be a solvable group and N be a nilpotent normal Ω-subgroup of G. If H is an $\mathfrak{F}$-subgroup of G with $G = HN$ then H lies in some $\mathfrak{F}^{\Omega}$-covering subgroup of G.*

Theorem 4. *Let $\Omega \subseteq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{X}$ be an S-closed homomorph, $\mathfrak{F}$ be a non-empty $s\Omega P$-closed homomorph in $\mathfrak{X}$ and G be an $\mathfrak{X}$-group which has $\mathfrak{F}$-residual normal Ω-subgroup. A subgroup H of G is an $\mathfrak{F}^{\Omega}$-projector of G if and only if H is an $\mathfrak{F}^{\Omega}$-covering subgroup of G.*

Theorem 5. *Let $\mathfrak{F}$ be an Ω-composition formation, G be a group and $G^{\mathfrak{F}}$ be a solvable $(\Omega \cap K(\mathfrak{F}))$-group. Then any two $\mathfrak{F}^{\Omega}$-covering subgroups of G are conjugate.*

Remark. Theorems 1–5 continue the authors' researches [2].

REFERENCES

1. *Vedernikov V. A., Sorokina M. M.*, " Ω-Foliated Formations and Fitting Classes of Finite Groups," Discrete Math. Appl., **11**, No. 5, 507–527 (2001).
2. *Vedernikov V. A., Sorokina M. M.*, " The $\mathfrak{F}$-projectors and $\mathfrak{F}$-covering subgroups of finite groups," Siberian Math. J., **57**, No. 6, 957–968 (2016).

THE LOGIC OF PREDICTIONS

Vityaev E. E.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia; vityaev@math.nsc.ru

Let us consider the first-order logic $\Im$ with signature Ω, containing single predicates. Let μ be a probability measure on $\Im$, and L be a set of literals, $\mu(P) > 0, for\ P \in L$.

Definition 1. By *semantic probabilistic inference (SP-inference)* we mean a sequence of rules $R_1 \sqsubset R_2 \sqsubset \ldots \sqsubset R_m$, that predict some literal $P_0 \in L$, and satisfy the following conditions:

1. $R_1 = (\Rightarrow P_0)$;
2. $R_i = (P_1^i \& \ldots \& P_{k_i}^i \Rightarrow P_0)$, $P_j^i \in L, P_0 \notin \{P_1^i, \ldots, P_{k_i}^i\}$, $i = 2, \ldots, m$;
3. R_i – *subrule* of the rule R_{i+1}, $i = 1, \ldots, m-1$, $\{P_1^i, \ldots, P_{k_i}^i\} \subset \{P_1^{i+1}, \ldots, P_{k_{i+1}}^{i+1}\}$, $k_i < k_{i+1}$;
4. $\mu(R_i) < \mu(R_{i+1}), i = 1, 2, \ldots, m-1$, where $\mu(R_i) = \mu(P_0^i / P_1^i \& \ldots \& P_{k_i}^i)$, $\mu(P_1^i \& \ldots \& P_{k_i}^i) > 0$ is a conditional probability of the rule for $i \geq 2$, and $\mu(R_1) = \mu(P_0)$;
5. R_i — *probabilistic laws*, i = 2,…,m, such that for any subrule $R' = (P_1 \& \ldots \& P_k \Rightarrow P_0)$ of the rule R_i, we have $\mu(R') < \mu(R_i)$;
6. R_m — *strongest probabilistic law*, such that for R_m don't exist the rule R_{m+1} satisfying conditions 2-5.

Let us consider the set of all SP-inferences of the literal $P_0 \in L$. This set form a *semantic probabilistic inference tree* for inference the literal $P_0 \in L$.

Definition 2. By the *maximally specific law* $MSL(P_0)$ *of the inference of literal* $P_0 \in L$ we mean the strongest probabilistic law, having a maximum conditional probability among all other strongest probabilistic laws of the semantic probabilistic inference tree for inference the literal $P_0 \in L$. If there are several strongest probabilistic laws, having the same value of conditional probability, then all of them are maximally specific laws. Let MSL be a set of all maximally specific laws that join sets $MSL(P_0)$, $P_0 \in L$.

Definition 3. The *inference operator Pr for the set of rules* $P \subset$ MSR is: $\mathrm{Pr}_P(L) = L \cup \{P_0 \mid C = (P_1 \& \ldots \& P_k \Rightarrow P_0),\ \{P_1, \ldots, P_k\} \subset L,\ C \in P\}$

Definition 4. The set of literals $L = \{L_1, \ldots, L_{\mathrm{k}}\}$ we will call *compatible*, if $\mu(L_1\&...\&L_k)$>0, and *consistent*, if it not contains literal G and its negation $\neg G$.

Theorem. *If L compatible, then L and* $\mathrm{Pr}_P(L)$ *are consistent for* P $\subset$ MSR.

Inductive-statistical inference of predictions is defined as a logical inference of some facts based on other facts and probabilistic laws. From the theorem 1 it follows that we can provide consistent predictions, if we use only maximally specific laws. Based on the semantic probabilistic inference a program system Discovery was developed that realize it, which was successfully applies for solving many practical tasks [1].

REFERENCES

1. *Kovalerchuk B., Vityaev E. E.* Data Mining in Finance: Advances in Relational and Hybrid Methods, Kluwer Acad. Pub., 2000.

GENERALIZED LOCAL COHOMOLOGY OVER CERTAIN GRADED RINGS

Zamani N.[1], **Khojali A.**[2]

University of Mohaghegh Ardabili, Ardabil, Iran;
[1]naserzaka@yahoo.com, [2]khojali@uma.ac.ir

Let $R = \oplus_{j\geq 0} R_j$ be a homogeneous Noetherian ring with semi-local base ring R_0, i.e., R_0 has only finitely many maximal ideal. Let $R_+ = \oplus_{j\geq 1} R_j$ be the homogeneous ideal of R, generated by all positive degree homogeneous elements of R. We recall from [2] that a $\mathbb{Z}$-graded R-module T is tame or asymptotically gap free if T_n=0 for all $n \ll 0$, or else $T_n \neq 0$ for all $n \ll 0$. Recall also that, a sequence $(\mathcal{S}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ of subsets of $\mathrm{Spec}(R_0)$ is said to be *asymptotically stable* for $n \to -\infty$ if there exists $m \in \mathbb{Z}$ such that $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_m$ for all $n \leq m$. Using an idea of [2], for two finitely generated $\mathbb{Z}$-graded R-modules M and N, several results on the vanishing, Artinianness and tameness of the graded R-modules

$$H^i_{R_+}(M, N) = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ext}^i_R(M/(R_+)^n M, N)$$

will be investigated. Also, it will be shown that the sequence

$$\big(\mathrm{Ass}_{R_0}(H^i_{R_+}(M, N)_n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$$

is asymptotically stable, which in turn, implies that the sequence

$$\big(\mathrm{Supp}_{R_0}(H^i_{R_+}(M, N)_n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$$

is asymptotically stable too. Here, for an R_0-module X the symbols $\mathrm{Ass}_{R_0}(X)$ and $\mathrm{Supp}_{R_0}(X)$ stand for the set of all associated primes and support of X respectively [1].

REFERENCES

1. *Brodmann M., Sharp R.,* Local cohomology: An algebraic introduction with geometric applications, Camb. Uni. Press, Camb. (1998).
2. *Brodmann M., Hellus M.,* “Cohomological patterns of coherent sheaves over projective schemes,” J. Pure Applied Algebra, **172**, No. 2, 165–182 (2002).

СЕКЦИЯ 2

Геометрия и топология

Тезисы докладов

SECTION 2

Geometry and Topology

Abstracts

О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ НА ДОПОЛНЕНИИ К УЗЛУ ВОСЬМЕРКА С МОСТОМ

Абросимов Н. В.[1], Медных А. Д.[2], Соколова Д. Ю.[3]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
abrosimov@math.nsc.ru

[2] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
smedn@mail.ru

[3] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
from_dasha@mail.ru

Геометрическая конструкция многообразия на узле восьмерка 4_1 впервые была предложена У. Тёрстоном [1]. Соответствующее гиперболическое многообразие получается с помощью склеивания граней двух идеальных тетраэдров. Явная конструкция фундаментального множества для конического многообразия $4_1(\alpha)$ в $\mathbb{R}^3$ была предложена в работе А. Д. Медных и А. А. Рассказова [2]. В работе А. Д. Медных и Д. Ю. Соколовой [3] исследована евклидова структура на узле восьмерка с мостом.

В настоящей работе рассматривается двухпараметрическое семейство конических многообразий $4_1(\alpha,\gamma)$ с сингулярным множеством узел восьмерка с мостом, носителем S^3 и коническими углами α, γ вдоль компонент сингулярного множества. Для указанного многообразия построена модель фундаментального многогранника, который представляет собой невыпуклый 22-гранник в проективной модели Кэли – Клейна гиперболического пространства. Установлены условия существования гиперболической структуры на $4_1(\alpha,\gamma)$. Область D существования указанных многообразий ограничена тремя кривыми

$$(1)\quad 5\,Y^2(1-X)^2+YX(4\,X-5)+X(3-X)+Y=1,$$
$$(2)\quad 2\,Y^2(1-X)+2\,X=1,$$
$$(3)\quad 10\,Y^2(1-X)+2\,Y(1-4\,X)=5,$$

где $X=\cos\alpha$, $Y=\cos\theta$, θ — угол между двумя скрещивающимися ребрами фундаментального многогранника, образующими компоненту сингулярного множества — узел восьмерку.

Кривая (1) соответствует существованию евклидовой структуры на $4_1(\alpha,\gamma)$, что подтверждается результатами работы [3]. Кривая (3) отвечает случаю $\gamma=2\pi$, когда одна из компонент сингулярного множества — мост — исчезает. Таким образом, кривая (3) задает множество гиперболических многообразий $4_1(\alpha)$, что подтверждается результатами работы [2].

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 16-41-02006).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Thurston W.* The geometry and topology of 3-manifolds. Lecture Notes. Princeton University, 1980.
2. *Mednykh A., Rasskazov A.* Volumes and degeneration of cone-structures on the figure-eight knot // Tokyo J. Math. 2006. V. 29, No 2. P. 445–464.
3. *Медных А. Д., Соколова Д. Ю.* О существовании евклидовой структуры на узле восьмерка с мостом // Мат. заметки СВФУ. 2015. Т. 22, № 4. С. 32–42.

СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ЭРГОДИЧЕСКИХ ТЕОРЕМАХ ДЛЯ БИЛЬЯРДОВ

Качуровский А. Г.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
agk@math.nsc.ru

Вопрос о скоростях сходимости в эргодических теоремах естественно возникает в физических приложениях этих теорем и впервые рассматривался Дж. фон Нейманом уже в 1932 году [1]. Поскольку сами эргодические теоремы возникли из попыток обосновать эргодическую гипотезу статистической механики, то естественный интерес представляет задача о скорости сходимости в них для моделирующих газ различных бильярдов — в случае усреднения характеристической функции подмножества фазового пространства, например, для которой эргодические средние дают среднее время нахождения в соответствующем подмножестве фазового пространства бильярда. Без решения этой задачи непонятно, как долго физику придется дожидаться гарантируемой ему эргодическими теоремами сходимости, и доживет ли он вообще до ее ощутимых проявлений. Постановка же задачи немедленно приводит к вопросам о том, в каких единицах измерять скорости сходимости в эргодических теоремах, от каких характеристик динамических систем и как именно зависят эти скорости, и какие из этих характеристик удается просчитать для конкретных исследуемых динамических систем — для тех же бильярдов, например.

Как было показано в [2], оценки скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана с необходимостью являются спектральными и могут быть получены по особенности в нуле спектральной меры усредняемой функции относительно соответствующей динамической системы и по скорости убывания корреляций, т. е. коэффициентов Фурье этой меры. Оценки скорости сходимости в эргодической теореме Биркгофа могут быть получены по скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана и по скорости убывания вероятностей больших уклонений [2], [3].

В докладе приводятся и обсуждаются полученные в последние годы [3] асимптотически точные оценки скоростей сходимости в обеих эргодических теоремах для некоторых популярных в приложениях бильярдов — таких, как периодический газ Лоренца на плоскости, например.

ЛИТЕРАТУРА

1. *von Neumann J.* Physical applications of the ergodic hypothesis // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1932. V. 18, No 3. P. 263–266.
2. *Качуровский А. Г.* Скорости сходимости в эргодических теоремах // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, № 4. С. 73–124.
3. *Качуровский А. Г., Подвигин И. В.* Оценки скоростей сходимости в эргодических теоремах фон Неймана и Биркгофа // Труды ММО. 2016. Т. 77, № 1. С. 1–66.

ОБ ЭЙНШТЕЙНОВО-ПОДОБНЫХ ПО А. ГРЕЮ ОДНОРОДНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Клепиков П. Н.[1], Родионов Е. Д.[2]

Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия;
[1]klepikov.math@gmail.com, [2]edr2002@mail.ru

(Псевдо)римановы многообразия с различными ограничениями на тензор кривизны исследовались многими математиками. В частности, изучались следующие многообразия: многообразия Эйнштейна ($r = \lambda g$), локально симметричные пространства ($\nabla R = 0$), Риччи-параллельные многообразия ($\nabla r = 0$) и конформно плоские многообразия ($W = 0$). Все вышеперечисленные многообразия в случае постоянной скалярной кривизны содержатся в классе эйнштейново-подобных многообразий в смысле А. Грея [1].

В случае однородных многообразий известны некоторые результаты для многообразий малой размерности. Например, Дж. Кальварузо и А. Заем классифицировали левоинвариантные псевдоримановы метрики Эйнштейна, конформно плоские метрики и метрики с параллельным тензором Риччи на четырехмерных группах Ли [2]–[4]. Кроме того, А. Заем и А. Гаджи-Бадали классифицировали эйнштейново-подобные псевдоримановы 4-многообразия с нетривиальной группой изотропии [5]. В римановом случае Д. С. Воронов, Е. Д. Родионов, В. В. Славский и О. П. Хромова получили классификацию четырехмерных групп Ли с нулевой дивергенцией тензора Вейля [6]–[8].

В данной работе получена классификация левоинвариантных псевдоримановых метрик на четырехмерных группах Ли, которые являются эйнштейново-подобными в смысле А. Грея.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 16-01-00336 а, № 16-31-00048 мол_а), Минобрнауки Российской Федерации (код проекта 1148).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gray A.* Einstein-like manifolds which are not Einstein // Geom. Dedicata. 1978. V. 7. P. 259–280.
2. *Calvaruso G., Zaeim A.* Conformally flat homogeneous pseudo-Riemannian four-manifolds // Tohoku Math. J. 2014. V. 66. P. 31–54.
3. *Calvaruso G., Zaeim A.* Four-dimensional Lorentzian Lie groups // Differ. Geom. Appl. 2013. V. 31. P. 496–509.
4. *Calvaruso G., Zaeim A.* Neutral metrics on four-dimensional Lie groups // J. Lie Theory. 2015. V. 25. P. 1023–1044.
5. *Zaeim A., Haji-Badali A.* Einstein-like pseudo-Riemannian homogeneous manifolds of dimension four // Mediterr. J. Math. 2016. V. 13, No 5. P. 3455–3468.
6. *Gladunova O. P., Slavskii V. V.* Left-invariant Riemannian metrics on four-dimensional unimodular Lie groups with zero-divergence Weyl tensor // Dokl. Math. 2010. V. 81, No 2. P. 298–300.
7. *Voronov D. S., Rodionov E. D.* Left-invariant Riemannian metrics on four-dimensional nonunimodular Lie groups with zero-divergence Weyl tensor // Dokl. Math. 2010. V. 81, No 3. P. 392–394.
8. *Gladunova O. P., Slavskii V. V.* Harmonicity of the Weyl tensor of left-invariant Riemannian metrics on four-dimensional unimodular Lie groups // Sib. Adv. Math. 2013. V. 23, No 1. P. 32–46.

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЯХ НА ОДНОРОДНЫХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ МАЛОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Клепикова С. В.[1], **Хромова О. П.**[2]

Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия;
[1]klepikova.svetlana.math@gmail.com, [2]khromova.olesya@gmail.com

Изучение различных свойств инвариантных тензорных полей представляет интерес в понимании геометрического и топологического строения однородного (псевдо)риманова многообразия. В общем случае эта задача достаточно сложна. Поэтому приходится накладывать ограничения на класс рассматриваемых многообразий и/или их размерность. Если размерность многообразия достаточно мала, то представляется возможным применение систем аналитических вычислений.

Настоящая работа продолжает исследования авторов относительно применения универсальных математических пакетов в исследовании однородных (псевдо)римановых пространств [1]–[4]. Разработаны математические и компьютерные модели для определения компонент различных тензоров кривизны (например, тензоров Римана, Риччи, Вейля, Схоутена – Вейля и пр.) однородных (псевдо)римановых многообразий. Данный алгоритм реализован в среде пакета Maple. С его помощью возможно получить классификацию многообразий, удовлетворяющих некоторым ограничениям на тензор кривизны (например, с изотропными тензорами Римана, Риччи или Вейля), или определить собственные значения различных операторов кривизны: кривизны Риччи, одномерной или секционной кривизны.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 16-01-00336 а, № 16-31-00048 мол_а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гладунова О. П.* Применение математических пакетов к вычислению инвариантных тензорных полей на трехмерных группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой // Вестник БГПУ: Естественные и точные науки. 2006. № 6. С. 111–115.
2. *Гладунова О. П., Оскорбин Д. Н.* Применение пакетов символьных вычислений к исследованию спектра оператора кривизны на метрических группах Ли // Известия АГУ. 2013. № 1/1. С. 19–23.
3. *Клепикова С. В., Родионов Е. Д., Хромова О. П.* Об операторах кривизны метрических групп Ли // Известия АГУ. 2016. № 1(89). С. 129–137.
4. *Хромова О. П.* Применение пакетов символьных вычислений к исследованию оператора одномерной кривизны на нередуктивных однородных псевдоримановых многообразиях // Известия АГУ. 2017. № 1(93). С. 140–143.

КОНФОРМНО-ПЛОСКИЕ МЕТРИКИ И ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ

Куркина М. В.[1], **Родионов Е. Д.**[2], **Славский В. В.**[1]

[1]*Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, Россия;*
[2]*Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия;*
mavi@inbox.ru, edr2002@mail.ru, slavsky@uriit.ru

Рассматривается класс конформно-плоских метрик, определенных на единичной сфере $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, вида: $ds = \frac{|dx|}{h^2(x)}$, где $h(x)$ — строго положительная дифференцируемая функция такая, что для любой тройки точек x_1, x, $x_2 \in S^n$ выполнено неравенство:

$$h(x) \leq h(x_1)\frac{\|x_2 - x\|}{\|x_2 - x_1\|} + h(x_2)\frac{\|x - x_1\|}{\|x_2 - x_1\|},$$

где $\|x-y\|$ — хордовое расстояние между точками сферы, т. е. $h(x)$ — конформно-выпуклая в смысле работы [1].

Теорема 1. *Пусть функция $h^*(y)$ определена равенством:*

$$h^*(y) = \max_{x \in S^n} \frac{\|x - y\|}{\sqrt{2}h(x)},$$

тогда метрика $ds^* = \frac{|dy|}{h^{*2}(x)}$ будет полярной в смысле работы [3] *к исходной метрике.*

Теорема 2. *Функция $h^*(y)$ — конформно-выпуклая, $h^{**} = h$ и кроме того выполняется неравенство:*

$$\|x - y\| \leq \sqrt{2}h(x)h^*(y),$$

где $x, y \in S^n$ — произвольные точки единичной сферы, $\|x - y\|$ — хордовое расстояние.

Замечание. Неравенство можно рассматривать как аналог неравенства Юнга – Фенхеля в выпуклом анализе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты: 15-41-00092-r-Urals, 15-41-00063-r-Urals, 15-01-06582-a, 16-01-00336-a).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куркина М. В., Родионов Е. Д., Славский В. В.* Конформно-выпуклые функции и конформно-плоские метрики неотрицательной кривизны // ДАН. 2015. Т. 462, № 2. С. 141.
2. *Куркина М. В., Родионов Е. Д., Славский В. В.* Численные методы интерполяции для решения некоторых задач выпуклой геометрии в пространстве Лобачевского // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2013. Т. 13, вып. 1. С. 76–90.
3. *Родионов Е. Д., Славский В. В.* Полярное преобразование конформно-плоских метрик // Мат. труды (в печати).

К ВОПРОСУ О РАСШИРЕНИИ СИМПЛИЦИАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Кыров В. А.

Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск, Россия;
kyrovVA@yandex.ru

В данной работе приводятся все трехмерные симплициальные геометрии максимальной подвижности, найденные методом вложения двумерной симплициальной геометрии.

Симплициальная двумерная геометрия в N, где $\dim N = 2$, по классификации Г. Г. Михайличенко [1] задается функцией

$$g = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j},$$

где, например, x_i, y_i — локальные координаты точки $i \in N$. Эта геометрия, очевидно, допускает трехпараметрическую группу движений. Важной задачей является нахождение всех трехмерных геометрий максимальной подвижности (шестипараметрическая группа движений) в M, где $\dim M = 3$, задаваемых функциями вида:

$$f = \chi(g, z_i, z_j),$$

причем χ — аналитическая функция. Получен следующий результат.

Теорема. *В подходящей координатной окрестности трехмерного многообразия M и при надлежаще выбранной аналитической функции χ функция f имеет один из следующих видов:*

$$f = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + z_i + z_j; \tag{1}$$

$$f = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} e^{z_i + z_j}; \tag{2}$$

$$f = \operatorname{arctg} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + z_i + z_j, \tag{3}$$

где, например, x_i, y_i, z_i — локальные координаты точки $i \in M$.

Замечание. Функция (1) задает трехмерную симплициальную геометрию 1 типа [1], функция (2) — трехмерную симплициальную геометрию 2 типа [1], функция (3) — ранее неизвестную трехмерную симплициальную геометрию 3 типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михайличенко Г. Г.* Математические основы и результаты теории физических структур. Горно-Алтайск: РИО ГАГУ, 2016.

О СИНГУЛЯРНЫХ $SU(n,n)$-ДЕЙСТВИЯХ В ГРУППАХ $U(p,q)$: СВОЙСТВА ОРНАМЕНТА ПРИ $n = p + q = 2$

Левичев А. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
levit@math.nsc.ru

Хронометрическая теория Сигала основана на пространстве-времени $\mathbf{D}$, которое может быть введено как группа Ли с причинной структурой, задаваемой инвариантной лоренцевой формой на алгебре Ли $u(2)$. Аналогично, пространство-время F может быть введено как группа Ли с причинной структурой, задаваемой инвариантной лоренцевой формой на алгебре Ли $u(1,1)$. Группы Ли G и G_F вводятся как две $SU(2,2)$-реализации, связанные сопряжением некоторой 4 на 4 матрицей W. Группа G (соответственно, G_F) дробно-линейно действует на $\mathbf{D}$ (соответственно, в $\mathbf{F}$). Вообще, матричным дробно-линейным действиям целиком посвящена известная работа [1]. Дополнительная мотивация и дальнейшие детали $SU(2,2)$-действий приведены в [2], [3]. В частности, матрица W задаёт конформное отображение из $\mathbf{F}$ в $\mathbf{D}$: для каждой матрицы X из $\mathbf{F}$ её образ Z в $\mathbf{D}$ обозначаем $Z = W(X)$. Сейчас же автор рассматривает понятие *орнамента* (который в итоге оказывается состоящим из бинарных матриц W_1, W_2, W_3, W_4, где $W_1 = W$). Введение орнамента мотивировано гипотезой о том, что “новые” матрицы (W_2, W_3 и W_4) “примерно так же хороши”, как и исходная матрица W (в смысле задания соответствующих вложений $\mathbf{F}$ в $\mathbf{D}$).

Теорема. *Каждая W_m из орнамента задаёт конформную биекцию $\mathbf{F}$ на его образ $\mathbf{E}$ в $\mathbf{D}$. Многообразие $\mathbf{E}$ не зависит от m и получено из $\mathbf{D}$ удалением двумерного тора. Выполняются (матричные) соотношения $(W_1)^2 = (W_3)^2 = 1, W_2W_4 = W_4W_2 = 1$, и (для любого X из $\mathbf{F}$) $W_3(X) = (W_1(X))^{-1}, W_4(X) = (W_2(X))^{-1}$. Матрицы орнамента порождают силовскую 2-подгруппу D_8 (т. е., т. н. диэдральную, 8-элементную) в S_4.*

Замечание 1. В (матрично-представленной) S_4 имеются ещё две подгруппы, изоморфные (и сопряжённые) D_8. Однако, ни одна из них не порождается орнаментом.

Замечание 2. Можно рассматривать и обратные (к W_1, W_2, W_3, W_4) отображения, т. е. из $\mathbf{D}$ в $\mathbf{F}$. Из теоремы следует, что они задаются матрицами W_1, W_4, W_3, W_2, соответственно. Образом каждого из этих отображений является всё $\mathbf{F}$, а область определения совпадает с $\mathbf{E}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Неретин Ю. А.* Конформная геометрия симметрических пространств и обобщенно дробно-линейные отображения Крейна – Шмульяна // Мат. сб. 1999. Т. 190, № 2. С. 93–122.
2. *Levichev A. V.* Pseudo-Hermitian realization of the Minkowski world through DLF theory // Phys. Scr. 2011. V. 83, No 1. P. 1–9.
3. *Levichev A. V.* A contribution to the DLF-theory: on singularities of the $SU(2,2)$-action in $U(1,1)$ // Journal of Modern Physics. 2016. V. 7, No 15. P. 1963–1971.

БЕЗКООРДИНАТНАЯ ЗАПИСЬ ПЛОСКИХ ГЕОМЕТРИЙ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Михайличенко Г. Г.[1], **Симонов А. А.**[2]

[1] *Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск, Россия;*
`mikhailichenko@gasu.ru`
[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
`andrey.simonoff@gmail.com`

Хорошо известно, что в евклидовой плоскости с $l(ij) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$ шесть расстояний $l(ij), l(ik), \ldots, l(kl)$, построенных на четырех точках i, j, k, l связаны уравнением

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l^2(ij) & l^2(ik) & l^2(il) \\ 1 & l^2(ij) & 0 & l^2(jk) & l^2(jl) \\ 1 & l^2(ik) & l^2(jk) & 0 & l^2(kl) \\ 1 & l^2(il) & l^2(jl) & l^2(kl) & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

которое является следствием равенства нулю трехмерного объема тетраэдра, построенного на этих точках.

Разрешив данное уравнение относительно квадрата расстояния $l^2(ij)$, получим безкоординатную его запись (для удобства записи формулы будем писать $l_{ij}^2 = l^2(ij)$) через пять ее значений для всех других пяти пар из шести:

$$l_{ij}^2 = \frac{1}{2l_{kl}^2}\Big(-l_{jk}^2 l_{ik}^2 + l_{jl}^2 l_{ik}^2 + l_{ik}^2 l_{kl}^2 + l_{jk}^2 l_{il}^2 - l_{jl}^2 l_{il}^2 + l_{il}^2 l_{kl}^2 + l_{jk}^2 l_{kl}^2 + l_{jl}^2 l_{kl}^2 - l_{kl}^4 -$$

$$\sqrt{l_{jk}^4 + l_{jl}^4 + l_{kl}^4 - 2(l_{jk}^2 l_{jl}^2 + l_{jk}^2 l_{kl}^2 + l_{jl}^2 l_{kl}^2)}\sqrt{l_{ik}^4 + l_{il}^4 + l_{kl}^4 - 2(l_{ik}^2 l_{il}^2 + l_{ik}^2 l_{kl}^2 + l_{il}^2 l_{kl}^2)}\Big).$$

Три гельмгольцевые плоскости с метрическими функциями $f(ij)$:

$$f(ij) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \cdot \exp\left(\gamma \cdot \mathrm{arctg}\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right), \text{ где } \gamma > 0,$$

$$f(ij) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2} \cdot \exp\left(\beta \cdot \mathrm{Arc(c)th}\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right), \text{ где } \beta > 0, \beta \neq 1,$$

$$f(ij) = (x_i - x_j) \cdot \exp\left(\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}\right)$$

были исключены Г. Гельмгольцем [1] введением дополнительной аксиомы монодромии, связанной с вращением твердого тела. Все они были найдены как феноменологически симметричные двумерные геометрии [2].

Авторами получены неявные функции для записи $f(ij)$ гельмгольцевых геометрий в безкоординатной форме.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гельмгольц Г.* О фактах, лежащих в основании геометрии // Об основаниях геометрии. М.: Гос. издательство ТТЛ, 1956. С. 366–382.
2. *Михайличенко Г. Г.* Двумерные геометрии // ДАН СССР. 1981. Т. 260, № 4. С. 803–805.

СОЛИТОНЫ РИЧЧИ НА 2- И 3- СИММЕТРИЧЕСКИХ ЛОРЕНЦЕВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Оскорбин Д. Н.[1], **Родионов Е. Д.**[2], **Эрнст И. В.**[3]

Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия;
[1]oskorbin@yandex.ru, [2]edr2002@mail.ru, [3]igeh@ya.ru

Важным обобщением эйнштейновых метрик на (псевдо)римановых многообразиях являются солитоны Риччи, которые впервые были рассмотрены Р. Гамильтоном. Задача нахождения солитонов Риччи является достаточно сложной, поэтому предполагаются ограничения либо на строение многообразия, либо на размерность, либо на класс рассматриваемых метрик, либо на класс векторных полей, участвующих в записи уравнения солитона Риччи. Одним из важных примеров такого рода ограничений являются многообразия Уокера, т. е. псевдоримановы многообразия, допускающие гладкое параллельное (в смысле связности Леви–Чивита) распределение изотропных векторов. Геометрия многообразий Уокера, а также солитоны Риччи на них исследовались в работах многих математиков.

В настоящей работе рассмотрено уравнение солитона Риччи на некоторых лоренцевых многообразиях Уокера. К числу таких многообразий относятся неразложимые 2- и 3- симметрические лоренцевы многообразия, которые были исследованы Д. В. Алексеевским, А. С. Галаевым. Позднее К. Онда и В. Батат исследовали солитоны Риччи на четырёхмерных 2-симметрических лоренцевых многообразиях и доказали локальную разрешимость уравнения солитона Риччи на таких многообразиях. В данной работе доказана локальная разрешимость уравнения солитона Риччи на 2- и 3- симметрических лоренцевых многообразиях произвольной размерности.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00336А).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Alekseevsky D. V., Galaev A. S.* Two-symmetric Lorentzian manifolds // J. Geom. Phys. 2011. V. 61, No 12. P. 2331–2340.
2. *Batat W., Onda K.* Ricci and Yamabe solitons on second-order symmetric, and plane wave 4-dimensional Lorentzian manifolds // J. Geom. 2014. V. 105, No 3. P. 561–575.

О РАНГЕ ГРУППЫ ПАРОСОЧЕТАНИЙ ДЛЯ ГРАФОВ БЕНЗОИДНЫХ УГЛЕВОДОРОДОВ

Рожков Д. С.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
`rozhkovchess@mail.ru`

В теории графов *паросочетания* изучаются обычно с точки зрения числовых инвариантов графов. В работе [1] В. Г. Тураев предложил новый подход к изучению паросочетаний: с каждым паросочетанием в графе он связал группу, называемую *группой паросочетания*. Группа паросочетания, отнесенная к *совершенному паросочетанию*, также называемому *димерным покрытием*, называется *группой димеров*.

В. Г. Тураев показал, что группа димеров имеет естественное описание на языке алгебраической топологии — она может быть определена как фундаментальная группа некоторого *кубического комплекса неположительной кривизны*.

Вычисление группы димеров достаточно громоздко, в связи с чем в [1] были рассмотрены лишь простейшие примеры. Там же был поставлен вопрос о нахождении групп димеров более сложного вида.

В качестве ответа на этот вопрос будет представлен метод вычисления групп димеров, с помощью которого можно получать новые примеры таких групп, в том числе с использованием системы компьютерной алгебры GAP. Более того, данный метод позволяет выдвинуть гипотезу о *рангах* групп димеров графов специального вида, которые могут рассматриваться как графы некоторых *бензоидных углеводородов* [2].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 16-41-02006).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Turaev V. G.* Matching groups and gliding systems // J. Geom. Phys. 2014. V. 81. P. 128–144.
2. *Cyvin S. J., Gutman I.* Kekulé structures in benzenoid hydrocarbons. Berlin: Springer-Verlag, 1988.

ОТКРЫТЫЕ И 1-НАКРЫВАЮЩИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Сторожук К. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
stork@math.nsc.ru

Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ называется открытым, если образы открытых множеств открыты. Важный класс открытых отображений метрических пространств составляют α-накрывающие отображения. Пусть $0 < \alpha < \infty$. Будем называть отображение метрических пространств $f\colon X \to Y$ α-накрывающим, если образ любого открытого шара пространства X радиуса r с центром в точке x содержит все точки шара радиуса αr пространства Y с центром в $f(x)$.

Пример непрерывного 1-накрывающего отображения — проекция декартова произведения на один из сомножителей. Частным случаем 1-накрывающих отображений являются субметрии — отображения, при которых f-образы шаров из X *совпадают* с шарами того же радиуса в Y.

Мы исследуем вопрос: при каких условиях можно, изменив метрику пространства X или Y на топологически эквивалентную, сделать данное открытое отображение компактов $f\colon X \to Y$ 1-накрывающим?

Результаты таковы: доказано, что открытое отображение f компакта X на Y можно сделать 1-накрывающим, изменив метрику Y на эквивалентную. Среди всех таких метрик на Y существует естественная минимальная метрика. Построен пример открытого отображения компактов, которое нельзя сделать 1-накрывающим, изменив метрику X.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сторожук К. В.* Об открытых и α-накрывающих отображениях // Сиб. мат. журн. (представлено в редакцию).

НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ САМОПОДОБНЫХ ДЕНДРИТОВ

Тетенов А. В.[1], Ваулин Д. А.[2]

[1] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
atet@mail.ru

[2] *Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск, Россия;*
d_warrant@mail.ru

В докладе рассматриваются свойства самоподобных дендритов, порожденных полигональными системами на плоскости.

Пусть P — выпуклый многоугольник и $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ — такая система сжимающих подобий в $\mathbb{R}^2$, что
(i) Для любого $i = 1, \ldots, m$ $P_i := S_i(P) \subset P$;
(ii) Для любых неравных $i, j = 1, \ldots, m$ множество $P_i \cap P_j$ либо пусто, либо есть общая вершина многоугольников P_i и P_j;
(iii) Любая из вершин A_i многоугольника P содержится в некотором P_j;
(iv) Множество $\bigcup\limits_i P_i$ односвязно.
В этом случае пару $(P, \mathcal{S})$ назовем *полигональной системой* сжимающих подобий в $\mathbb{R}^2$.

Теорема 1. *Пусть $(P, \mathcal{S})$ — полигональная система, а K — её аттрактор. Тогда K — самоподобный дендрит, порядок точек ветвления которого меньше $\frac{2\pi(n-1)}{\alpha}$, где n — число вершин P, а α — наименьший из углов при вершине P; K является континуумом с ограниченным искривлением в смысле Тукия – Вяйсяля.*

Теорема 2. *Пусть $(P, \mathcal{S})$, $(P', \mathcal{S}')$ — полигональные системы. Всякое взаимно однозначное соответствие между множествами вершин P и P' и множествами $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$, сохраняющее соотношения $S_i(A_j) = A_k$ и $S_{i_1}(A_{j_1}) = S_{i_2}(A_{j_2})$, индуцирует бигёльдеров гомеоморфизм $\varphi : K \to K'$ аттракторов этих систем.*

Пусть γ_{ij} — жорданова дуга в K, соединяющая вершины A_i, A_j многоугольника P. Объединение всех таких дуг $\gamma = \cup\gamma_{ij}$ назовем *главным деревом* дендрита K. Тогда каждая разбивающая точка y дендрита K является образом $S_{i_1 \ldots i_p}(x)$ некоторой точки $x \in \gamma$. Поэтому для дендритов, не являющихся жордановыми дугами, размерность множества разбивающих точек строго меньше размерности множества всех концов K.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00414 А).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Charatonik J., Charatonik W.* Dendrites // Aportaciones Mat. Comun. 1998. V. 22. P. 227–253.
2. *Kigami J.* Analysis on fractals. Cambridge Tracts in Mathematics, V. 143. Cambridge University Press, 2001.

ИНВЕРСИЯ ОДНОСТОРОННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

Чешкова М. А.

Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия; cma41@yandex.ru

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ рассмотрим гладкую замкнутую неплоскую кривую γ без самопересечения, заданную 4π-периодической вектор-функцией $\rho = \rho(u)$, которая не является 2π-периодической и 2π-антипериодической.

Тогда функция $s(u) = \frac{1}{2}(\rho(u) + \rho(u + 2\pi))$ есть 2π-периодическая не равная нулю, а функция $l(u) = \frac{1}{2}(\rho(u) - \rho(u+2\pi))$ есть 2π-антипериодическая не равная нулю.

Теорема 1. *Поверхность M: $r(u, v) = s(u) + vl(u)$, $u \in [-\pi, \pi]$, $v \in [-1, 1]$, есть модель листа Мебиуса, для которого кривая $\rho = \rho(u)$ есть край.*

Теорема 2. *Поверхность KL: $r(u, v) = (p + cos(v))s(u) + sin(v)l(u)$, $p \neq \mp 1$, $u \in [-\pi, \pi]$, $v \in [-\pi, \pi]$, определяет модель бутылки Клейна.*

Теорема 3. *Поверхность P: $r(u, v) = (1 + cos(v))s(u) + sin(v)l(u)$, $u \in [-\pi, \pi]$, $v \in [-\pi, \pi]$, определяет модель проективной плоскости.*

Теорема 4. *Если односторонняя поверхность типа M, KL, P не проходит через начало координат, то инверсия $r* = \frac{m^2 r}{<r,r>}$ есть односторонняя поверхность того же типа.*

Замечание. Если поверхность M, KL, P проходит через начало координат, то рассматривается инверсия [1, с. 482] $r* = r_0 + \frac{m^2(r-r_0)}{<r-r_0, r-r_0>}$, $r_0 \neq (0, 0, 0)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Розенфельд Б. А.* Многомерные пространства. М.: Наука, 1966.

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ТРЕХМЕРНЫХ КАРТ

Шушуева Т. М.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
talavshuk@yandex.ru

Автор работы [1] определяет понятие n-мерной карты и связанные с ним понятия и свойства, такие как клетки, границы, двойственность и другие, используя их в геометрическом моделировании. В нашей работе мы имеем немного другой подход к трактовке понятия трехмерной карты, что позволяет выяснить связь с накрытиями и использовать его в дальнейшем для подсчета карт. Также приводим примеры трехмерных карт и некоторые наблюдения и замечания.

Пусть Σ — клеточное разбиение трехмерного замкнутого ориентированного многообразия M, а Σ' — его барицентрическое подразбиение. Поскольку M — ориентированное, то существует "шахматная" раскраска в черный и белый цвет тетраэдров из Σ'. Обозначим через $F^{\pm}$ и F множество всех окрашенных тетраэдров и множество только черных тетраэдров соответственно. Пусть A, B, C, D — вершины одного из тетраэдров из F, и также будем называть отражения в соответствующих его гранях. Тогда элементы $a = AC$, $b = AD$, $c = BD$ есть повороты второго порядка, отправляющие черный (белый) тетраэдр в черный (белый). Пусть $\Delta =\langle A, B, C, D\rangle$ — группа, порожденная отражениями A, B, C, D. Обозначим через Δ^+ подгруппу индекса 2 в Δ, порожденную элементами a, b, c. Группа Δ действует на $F^{\pm}$, в то время как Δ^+ действует на F. Поэтому мы получаем два гомоморфизма φ: $\Delta \to Sym(F^{\pm})$ и φ^+: $\Delta^+ \to Sym(F)$.

Определение. Трехмерная карта (или 3-карта) — это набор $(F; a, b, c)$ со следующими свойствами:
1° F — конечное множество флагов;
2° a, b, c — инволюции, действующие без неподвижных точек свободно на F;
3° Группа Δ^+ транзитивна на множестве F;
4° Орбиты перестановки ab являются ребрами, bc — гранями, $\langle a, bc\rangle$ — клетками и $\langle ab, c\rangle$ — вершинами трехмерной карты.

Данное определение мы иллюстрируем следующими примерами: "pillow" с 4 помеченными вершинами, "shell" с 2 помеченными вершинами, конус с 3 помеченными вершинами, четырехугольная грань с 4 помеченными вершинами и другие. Справедливо следующее утверждение.

Предложение. *Существует взаимно-однозначное соответствие между орбитами на $F^{\pm}$ и элементами 3-карты: при этом орбиты $\langle A, B\rangle$ соответствуют граням, $\langle C, D\rangle$ — ребрам, $\langle A, B, C\rangle$ — клеткам, а $\langle B, C, D\rangle$ — вершинам 3-карты.*

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 16-41-02006).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lienhardt P.* N-dimensional generalized combinatorial maps and cellular quasi-manifolds // Int. J. Comput. Geom. Appl. 1994. V. 6, No 3. P. 275–324.

ON THE NORMALIZED RICCI FLOW ON ALOFF–WALLACH SPACES

Abiev N. A.

Taraz State University named after M. Kh. Dulaty, Taraz, Republic of Kazakhstan; abievn@mail.ru

It is easy to show that the normalized Ricci flow equation $\dot{\mathbf{g}}(t) = -2\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}} + 2n^{-1}\mathbf{g}(t)S_{\mathbf{g}}$, where $\mathbf{g}(t)$ means a 1-parameter family of Riemannian metrics, $\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}}$ and $S_{\mathbf{g}}$ are respectively the Ricci tensor and the scalar curvature of $\mathbf{g}$, could be reduced to the following system of ODE's in the case of Aloff–Wallach spaces $\mathrm{SU}(3)/\mathrm{SO}(2)$:

$$\dot{x}_i = -2\,x_i\left(\mathbf{r_i} - \frac{\mathbf{r_4} + 2(\mathbf{r_1} + \mathbf{r_2} + \mathbf{r_3})}{7}\right), \tag{1}$$

where $x_i > 0$, $i = 1, \dots, 4$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{r_1} &= \frac{6}{x_1} + \frac{x_1}{x_2x_3} - \frac{x_2}{x_1x_3} - \frac{x_3}{x_1x_2} - \frac{3m^2}{L}\frac{x_4}{x_1^2},\\
\mathbf{r_2} &= \frac{6}{x_2} + \frac{x_2}{x_1x_3} - \frac{x_1}{x_2x_3} - \frac{x_3}{x_1x_2} - \frac{3l^2}{L}\frac{x_4}{x_2^2},\\
\mathbf{r_3} &= \frac{6}{x_3} + \frac{x_3}{x_1x_2} - \frac{x_1}{x_2x_3} - \frac{x_2}{x_1x_3} - \frac{3k^2}{L}\frac{x_4}{x_3^2},\\
\mathbf{r_4} &= \frac{3x_4}{L}\left(\frac{m^2}{x_1^2} + \frac{l^2}{x_2^2} + \frac{k^2}{x_3^2}\right),
\end{aligned}$$

k, l, m are integers with greatest common divisor 1 and $k+l+m = 0$, $L := m^2+l^2+k^2$ (see [1] for details). We will discuss questions concerning singular points and first integrals of (1) using some ideas of [2].

The author was supported by the Grant of MES of the Republic of Kazakhstan for 2015–2017 (project no. 1452/GF4).

REFERENCES

1. *Nikonorov Yu. G.*, "Compact homogeneous Einstein 7-manifolds," Geom. Dedicata, **109**, No. 1, 7–30 (2004).
2. *Abiev N. A., Arvanitoyeorgos A., Nikonorov Yu. G., Siasos P.*, "The dynamics of the Ricci flow on generalized Wallach spaces," Differ. Geom. Appl., **35**, Suppl., 26–43 (2014).

4-COBORDISMS, BLOCK-BUILDING AND DEFORMATIONS OF HYPERBOLIC MANIFOLDS, GROUP HOMOMORPHISMS AND QUASIREGULAR MAPPINGS IN 3-SPACE

Apanasov B. N.

University of Oklahoma, Norman, USA; apanasov@ou.edu

We discuss our method of block-building and deformations of hyperbolic structures, their Teichmüller spaces of conformal deformations and several applications to geometry, topology and geometric analysis. This is related to varieties of conformal structures on closed hyperbolic 3-manifolds, to the shape of non-trivial compact 4-dimensional cobordisms M (cf. [1]–[4]) whose interiors have complete hyperbolic structures (how the global geometry and topology of such cobordisms depend on properties of the variety of discrete representations of the fundamental group of the boundary ∂M (cf. [2]–[3]), to different ergodic actions of a uniform hyperbolic 3-lattice [6], as well as to M. A. Lavrentiev problem on locally homeomorphic quasiregular mappings in 3-space [7] and their topological barriers.

We should acknowledge that, for our work in this interesting field and for getting all these results, we are greatly thankful to the mathematically inspiring atmosphere in the Institute of Mathematics and in its research seminars created in 1960–1980s by the famous group of analysts and geometers including A. D. Aleksandrov, P. P. Belinskii, S. L. Krushkal, Yu. G. Reshetnyak, S. L. Sobolev, V. A. Toponogov, a.o.

REFERENCES

1. *Apanasov B. N., Tetenov A. V.,* "Nontrivial cobordisms with geometrically finite hyperbolic structures," J. Differ. Geom., **28**, 407–422 (1988).
2. *Apanasov B. N.,* "Nonstandard uniformized conformal structures on hyperbolic manifolds," Invent. Math., **105**, 137–152 (1991).
3. *Apanasov B. N.,* Conformal Geometry of Discrete Groups and Manifolds (de Gruyter Expo. Math., Vol. 32), W. de Gruyter, Berlin, New York (2000).
4. *Apanasov B. N.,* "Quasisymmetric embeddings of a closed ball inextensible in neighborhoods of any boundary points," Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. AI, **14**, 243–255 (1989).
5. *Apanasov B. N.,* "Hyperbolic 4-cobordisms and group homomorphisms with infinite kernel," Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena Reggio Emilia, **57**, 31–44 (2010).
6. *Apanasov B. N.,* "Group actions, Teichmüller spaces and cobordisms," Lobachevskii J. Math., **38**, 213–228 (2017).
7. *Apanasov B. N.,* "Topological barriers for locally homeomorphic quasiregular mappings in 3-space," arXiv:1510.08951.

ON CURVATURES OF HOMOGENEOUS SUB-RIEMANNIAN MANIFOLDS

Berestovskii V. N.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;
vberestov@inbox.ru

Left invariant Riemannian or sub-Riemannian metrics on a Lie group are singled out from invariant Finslerian or sub-Finslerian metrics by their one-to-one correspondence with special one-parameter Gaussian convolutions semigroups of absolutely continuous probability measures on the Lie group.

Any such semigroup is generated by a second order hypoelliptic operator. This is connected with the operator definition of Ricci lower bounds for sub-Riemannian manifolds by Baudoin–Garofalo [1].

Earlier, Agrachev defined a notion of curvature for sub-Riemannian manifolds [2].

As an alternative, the author uses old definitions of sectional and Ricci curvatures for rigged metrized distributions on manifolds given by A. F. Solov'ev [3].

To calculate the Solov'ev sectional and Ricci curvatures for sub-Riemannian manifolds, the author suggests to use in some cases special riggings of invariant completely nonholonomic, i.e. bracket generated, distributions on manifolds.

Namely, let $\mathfrak{P}$ be a bracket-generating distribution on a manifold M defining together with a scalar product $(\cdot,\cdot)$ on $\mathfrak{P}$ a sub-Riemannian metric d on M. A rigging of the $\mathfrak{P}$ is a distribution on M complimentary to $\mathfrak{P}$. Let suppose that there exists a unique rigging $\mathfrak{Q}$ of $\mathfrak{P}$ such that a one of the following conditions is valid:

1) $[\mathfrak{P},\mathfrak{Q}] \subset \mathfrak{P}$,
2) $[\mathfrak{P},\mathfrak{Q}] \subset \mathfrak{Q}$, or
3) $[\mathfrak{P},\mathfrak{P}] \subset \mathfrak{Q}$.

Then it is quite reasonable to take $\mathfrak{Q}$ as the rigging of $\mathfrak{P}$.

In particular, the above rigging method is applicable to contact sub-Riemannian manifolds (condition 1), sub-Riemannian Carnot groups (condition 2), the connected component of the full Lie group of isometries of any Riemannian symmetric space if this Lie group is semisimple (conditions 1 and 3 simultaneously), and sub-Riemannian manifolds possessing a submetry onto a Riemannian manifold [3].

Note that in any case, when the condition 2 is satisfied for left invariant distributions $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ on a Lie group (for example, for any Carnot group) then all curvatures of corresponding left invariant sub-Riemannian metric calculated by Solov'ev method are equal to zero.

At the end, some examples are considered.

The author was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (the Project number 1.3087.2017/PCh).

REFERENCES

1. *Baudoin F., Garofalo N.*, "Curvature-dimension inequalities and Ricci lower bounds for sub-Riemannian manifolds with transverse symmetries," J. Eur. Math. Soc. (JEMS), **19**, No. 1, 151–219 (2017).
2. *Agrachev A., Barilari D., Rizzi L.*, "The curvature: a variational approach," Mem. Am. Math. Soc. (to appear).
3. *Solov'ev A.*, "Curvature of a distribution," Math. Notes, **35**, No. 1, 61–68 (1984).

ON EMBEDDINGS OF NON-POSITIVELY CURVED COMPACT SURFACES IN FLAT LORENTZIAN MANIFOLDS

Fillastre F.[1], **Slutskiy D. A.**[2]

Université de Cergy-Pontoise, Cergy-Pontoise, France;
[1]`Francois.Fillastre@u-cergy.fr`, [2]`Dmitriy.Slutskiy@u-cergy.fr`

In the 1940s, A. D. Alexandrov, looking at the induced (intrinsic) distances on the boundary of convex bodies of the Euclidean space, introduced a class of distances on compact surfaces. Nowadays, such distances are called *metrics of non-negative curvature* (*in the sense of Alexandrov*). He then proved the following famous result. We assume that all the surfaces we are considering are closed, oriented and connected.

Theorem 1 [1]. *Let (S, d) be a metric of non-negative curvature on a compact surface. Then there exists a flat Riemannian manifold R homeomorphic to $S \times \mathbb{R}$ which contains a convex surface whose induced distance is isometric to (S, d).*

If (S, d) is a metric space isometric to the induced distance on a flat torus (T, h), then the statement above is trivial, as R can be taken as $S \times \mathbb{R}$ with the metric $h + \mathrm{d}\,t^2$. Otherwise, by the Gauss–Bonnet formula, a compact surface S with a metric of non-negative curvature must have genus 0.

A more classical way to state Theorem 1 in this case is to say that (S, d) is isometric to the induced distance on the boundary of a convex body of the Euclidean space.

We proved an analogous result for metrics of non-positive curvature.

Theorem 2 [2]. *Let (S, d) be a metric of non-positive curvature (in the sense of Alexandrov) on a compact surface. Then there exists a flat Lorentzian manifold L homeomorphic to $S \times \mathbb{R}$ which contains a spacelike convex surface whose induced distance is isometric to (S, d).*

Theorem 2 generalizes the results of F. Labourie and J.-M. Schlenker [3] for smooth metrics of non-positive curvature and of F. Fillastre [4] for polyhedral metrics of non-positive curvature.

REFERENCES

1. *Alexandrov A. D.*, Intrinsic Geometry of Convex Surfaces, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton (2006).
2. *Fillastre F., Slutskiy D.*, "Embeddings of non-positively curved compact surfaces in flat Lorentzian manifolds," arXiv:1703.07253.
3. *Labourie F., Schlenker J.-M.*, "Surfaces convexes fuchsiennes dans les espaces lorentziens à courbure constante," Math. Ann., **316**, No. 3, 465–483 (2000).
4. *Fillastre F.*, "Fuchsian polyhedra in Lorentzian space-forms," Math. Ann., **350**, No. 2, 417–453 (2011).

REPRESENTATIONS OF THE VIRTUAL BRAID GROUPS TO THE ROOK ALGEBRAS

Gotin K. S.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia; gktin@yandex.ru

In 2012 S. Bigelow, E. Ramos, R. Yi constructed representation of the group $\mathcal{B}_n$ in the group of invertible elements of the subalgebra $\mathbb{C}P_n$ of the rook algebra $\mathbb{C}R_n$. We will demonstrate that the extension of algebra $\mathbb{C}P_n$ to $\mathbb{C}R_n$ allows to construct virtual braid group representation, such that its restriction on B_n coincides with the representation of the group B_n in the $\mathbb{C}P_n$. This representation allows to construct invariants of virtual links.

The present work is supported by grant of Russian Science Foundation (project no. 16-41-02006).

REFERENCES

1. *Gotin K.*, "Representation of virtual braid groups to rook algebras and virtual links invariants," J. Knot Theory Ramifications (2017), http://dx.doi.org/10.1142/S0218216517420020

MORE EXACT SOLUTIONS OF THE CONSTANT ASTIGMATISM EQUATION

Hlaváč A.[1], **Marvan M.**[2]

Mathematical Institute in Opava, Opava, Czech Republic;
[1]Adam.Hlavac@math.slu.cz, [2]Michal.Marvan@math.slu.cz

Surfaces of constant astigmatism, i.e. surfaces characterized by the condition $\rho_2 - \rho_1 = \text{const} \neq 0$, where ρ_1, ρ_2 are the principal radii of curvature, were already known at the end of the nineteenth century. Their evolutes are pseudospherical surfaces, which, themselves, correspond to solutions of the sine-Gordon equation $u_{\xi\eta} = \sin u$.

In 2009, after a century in oblivion, the subject of constant astigmatism surfaces was resurrected by H. Baran and M. Marvan in their work [1] concerning the systematic search for integrable classes of Weingarten surfaces. In particular, it was shown that surfaces of constant astigmatism, parameterized by adapted curvature coordinates x, y, correspond to solutions of the integrable equation

$$z_{yy} + \left(\frac{1}{z}\right)_{xx} + 2 = 0$$

called the *constant astigmatism equation (CAE)*. Solutions of the CAE can be alternatively interpreted as spherical *orthogonal equiareal patterns*, with relevance to two-dimensional plasticity [2].

In [3] we presented a nonlinear superposition formula, based on the Bäcklund transformation for the sine-Gordon equation, and producing infinitely many exact solutions of the CAE from a given seed. Moreover, one can routinely construct corresponding constant astigmatism surfaces. The simplest solution of the CAE, one can use as a seed, is the von Lilienthal one, $z = 1/(1 - x^2)$, which corresponds to zero solution of the sine-Gordon equation. The hierarchy of solutions, arising from this seed, is called *multisoliton solutions* of the CAE.

Recently, we have successfully constructed and planted another seed, namely the *Lipschitz solution* studied in [4]. A new infinite hierarchy of solutions of the CAE together with corresponding surfaces of constant astigmatism then follows by routine algebraic manipulations and differentiation.

In the talk, an overview of known exact solutions of the CAE will be given. Corresponding surfaces of constant astigmatism will be shown as well.

REFERENCES

1. *Baran H., Marvan M.,* “On integrability of Weingarten surfaces: a forgotten class,” J. Phys. A, Math. Theor., **42**, No. 40 (2009).
2. *Hlaváč A., Marvan M.,* “Another integrable case in two-dimensional plasticity,” J. Phys. A, Math. Theor., **46**, No. 4 (2013).
3. *Hlaváč A.,* “On multisoliton solutions of the constant astigmatism equation,” J. Phys. A, Math. Theor., **48**, No. 36 (2015).
4. *Hlaváč A., Marvan M.,* “On Lipschitz solutions of the constant astigmatism equation,” J. Geom. Phys., **85**, 88–98 (2014).

CALCULUS OF TANGENTS

Kusraev A. G.[1], Kutateladze S. S.[2]

[1] *Vladikavkaz Scientific Centre RAS, Vladikavkaz, Russia;*
kusraev@smath.ru
[2] *Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;*
sskut@math.nsc.ru

The talk will cover the rules for calculating various types of tangents to arbitrary sets in topological vector spaces.

1 Supporting hyperplanes

2 Bouligand's, Hadamard's, Clarke's, and similar tangents

REFERENCES

1. *Kusraev A. G., Kutateladze S. S.*, Subdifferentials: Theory and Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1995).
2. *Kusraev A. G., Kutateladze S. S.*, Subdifferential Calculus: Theory and Applications, Nauka Publishers, Moscow (2007).

DIRAC FLOW ON 3D LIE GROUPS

Malkovich E. G.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;
malkovich@math.nsc.ru

We consider 4-dimensional metric of the form

$$g = dt^2 + A_1^2(t)e_1^2 + A_2^2(t)e_2^2 + A_3^2(t)e_3^2 = dt^2 + \bar{g}(t),$$

where e_i are differential 1-forms on a Lie group S^3, $SL(2,\mathbb{R})$ or $Heis$. The functions $A_i(t)$ define the deformation of the metric $\bar{g}$, which coincides with the standard left-invariant metric on the corresponding Lie group when $A_i(t) \equiv 1$.

For the constant $K \in \{-1, 0, +1\}$ the Dirac flow is a evolutionary geometric equation:

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{g} = \sqrt{\bar{Ric} - 4K}.$$

Here the square root on bilinear symmetric forms is defined in a such way that the metric tensor is a neutral element, i.e. $\sqrt{g} = g$. For 3-dimensional sphere Dirac flow take the form

$$\frac{\partial A_1}{\partial t} = \sqrt{\frac{A_1^4 - A_2^4 - A_3^4 + 2 \cdot A_2^2 \cdot A_3^2}{A_2^2 \cdot A_3^2} - K},$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial t} = \sqrt{\frac{-A_1^4 + A_2^4 - A_3^4 + 2 \cdot A_1^2 \cdot A_3^2}{A_1^2 \cdot A_3^2} - K},$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial t} = \sqrt{\frac{-A_1^4 - A_2^4 + A_3^4 + 2 \cdot A_1^2 \cdot A_2^2}{A_1^2 \cdot A_2^2} - K}.$$

In [1] it was shown that for the case of two functional parameters and $K = 0$ metric g tends to the flat one as $t \to \infty$.

Theorem. *Consider the metric*

$$g = dt^2 + A_1^2(t)(e^1)^2 + A_2^2(t)((e^2)^2 + (e^3)^2) = dt^2 + \bar{g}(t)$$

such that the metric $\bar{g}(t)$ satisfies the Dirac flow with $K = 0$ and initial data $A_2(0) > A_1(0) > 0$, then the metric g will be asymptotically conical metric.

For the case of groups $SL(2,\mathbb{R})$ and $Heis$ the analogous asymptotic holds.

The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 15-01-05929).

REFERENCES

1. *Malkovich E. G.*, “Dirac flow on the 3-sphere,” Sibirsk. Mat. Zh., **57**, No. 2, 432–446 (2016).

ON PSEUDO H-TYPE LIE ALGEBRAS

Markina I. G.

University of Bergen, Bergen, Norway; irina.markina@uib.no

Let $\mathfrak{n}$ be a 2-step nilpotent Lie algebra endowed with a non-degenerate scalar product $\langle .\,,.\rangle$ and let $\mathfrak{n} = V \oplus_{\perp} Z$, where Z is the centre of the Lie algebra and V its orthogonal complement with respect to the scalar product. We study the Lie algebras for which the space V arises as a representation space of a Clifford algebra $Cl(\mathbb{R}^{r,s})$ and the representation map $J\colon Cl(\mathbb{R}^{r,s}) \to End(V)$ is related to the Lie algebra structure by $\langle J_z v, w\rangle = \langle z, [v,w]\rangle$ for all $z \in \mathbb{R}^{r,s}$ and $v, w \in V$. We call the constructed Lie algebras ***pseudo*** ***H-type Lie algebras***. Pseudo H-type Lie algebras are natural generalization of nowadays classical Heisenberg type Lie algebras, introduced by A. Kaplan in 1980 in order to study hypoelliptic operators. The pseudo H-type Lie algebras admit rational structural constants, that lead to the existence of lattices on the corresponding Lie groups. The pseudo H-type Lie groups give rise to a chain of examples of nilmanifolds that are isospectral but non-diffeomorphic. We are studying the classification of the pseudo H-type Lie algebras. The classification is based on the range of parameters r and s. We find the necessary condition for the existence of a Lie algebra isomorphism according to the range of integer parameters $0 \le r, s < \infty$ and present the complete classification for any type of the representation space V. Another group of results are concerned with the description of the automorphism group of the pseudo H-type Lie algebras in terms of classical groups.

The author was partially supported by ISP project 239033/F20 of Norwegian Research Council, as well as EU FP7 IRSES program STREVCOMS, grant no. PIRSES-GA-2013-612669.

REFERENCES

1. *Ciatti P.*, “Scalar products on Clifford modules and pseudo-H-type Lie algebras,” Ann. Mat. Pura Appl. **178**, No. 4, 1–32 (2000).
2. *Godoy M., Korolko A., Markina M.*, “Sub-semi-Riemannian geometry of general H-type groups,” Bull. Sci. Math. **137**, No. 6, 805–833 (2013).
3. *Furutani K., Markina I.*, “Existence of the lattice on general H-type groups,” J. Lie Theory, **24**, 979–1011 (2014).
4. *Furutani K., Markina I.*, “Complete classification of pseudo H-type algebras I, II,” Geom. Dedicata (to appear), see also arXiv:1703.04948.
5. *Furutani K., Markina I., Vasiliev A.*, “Free nilpotent and H-type Lie algebras. Combinatorial and orthogonal designs,” J. Pure Appl. Algebra, **219**, 5467–5492 (2015).

ON THE COMPLEXITY OF NON-ORIENTABLE SEIFERT FIBRE SPACES

Mulazzani M.

University of Bologna, Bologna, Italy; michele.mulazzani@unibo.it

We deal with Seifert fibre spaces, which are compact 3-manifolds admitting a foliation by circles. This definition is more general than Seifert's original one, since these manifolds are locally modeled either on fibered solid tori or on fibered solid Klein bottles, and so the singular fibres are either isolated (as in Seifert's definition) or form surfaces properly embedded in the manifold.

We introduce a combinatorial description of Seifert fibre spaces and state a classification theorem, up to fibrewise homeomorphism, in all the possible cases: orientable, non-orientable, closed, with boundary. Moreover, we compute potentially sharp upper bounds for their complexity in terms of the invariants of the combinatorial description, extending to the non-orientable case results by Fominykh and Wiest for the orientable case with boundary and by Martelli and Petronio for the closed orientable case.

This is a joint work with Sergei Matveev (Chelyabinsk State University), Alessia Cattabriga (University of Bologna) and Timur Nasybullov (Catholic University of Leuven Kulak).

NEW RESULTS IN THE THEORY OF GEODESIC ORBIT RIEMANNIAN SPACES

Nikonorov Yu. G.

Southern Mathematical Institute – the Affiliate of Vladikavkaz Scientific Centre RAS, Vladikavkaz, Russia;
nikonorov2006@mail.ru

This talk is devoted to geodesic orbit Riemannian spaces that could be characterized by the property that any geodesic is an orbit of a one-parameter group of isometries. There are some structural results and some partial classifications of geodesic orbit spaces, see e.g. [1]–[4] and references therein.

We discuss some recent results in this direction. At first, we consider relationships between geodesic orbit spaces and Killing vector fields of constant length [5], [6]. Then we discuss important totally geodesic submanifolds that inherit the property to be geodesic orbit, the structure of the nilradical and the radical of the Lie algebra of the isometry group. We also discuss some new tools to study geodesic orbit Riemannian spaces, related to compact Lie group representations with non-trivial principal isotropy algebras [7].

In the next part of the talk we consider the first example of a non-geodesic orbit left-invariant Einstein metric on a compact Lie group. It should be noted that a suitable metric is defined on the Lie group G_2 and it was discovered at first in a recent paper by I. Chrysikos and Y. Sakane, see details in [8].

The final part of the talk is devoted to the classification of compact simply connected geodesic orbit Riemannian spaces with two irreducible submodules in the isotropy representation, see details in [9].

Besides, we discuss new examples of geodesic orbit Riemannian spaces, new methods to obtain such examples, and some unsolved questions.

The project is partially supported by Grant 1452/GF4 of Ministry of Education and Sciences of the Republic of Kazakhstan for 2015–2017.

REFERENCES

1. *Alekseevsky D. V., Nikonorov Yu. G.*, “Compact Riemannian manifolds with homogeneous geodesics,” SIGMA, **9**, 093, 16 pages (2009).
2. *Gordon C.*, “Homogeneous Riemannian manifolds whose geodesics are orbits,” in: Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., Vol. 20., Topics in geometry: in memory of Joseph D’Atri, Birkhäuser, Boston, 1996, pp. 155–174.
3. *Kowalski O., Vanhecke L.*, “Riemannian manifolds with homogeneous geodesics,” Boll. Un. Mat. Ital. B (7), **5**, No. 1, 189–246 (1991).
4. *Nikonorov Yu. G.*, “Geodesic orbit Riemannian metrics on spheres,” Vladikavkaz. Mat. Zh., **15**, No. 3, 67–76 (2013).
5. *Nikonorov Yu. G.*, “Geodesic orbit manifolds and Killing fields of constant length,” Hiroshima Math. J., **43**, No. 1, 129–137 (2013).
6. *Nikonorov Yu. G.*, “Killing vector fields of constant length on compact homogeneous Riemannian manifolds,” Ann. Global Anal. Geom., **48**, No. 4, 305–330 (2015).
7. *Nikonorov Yu. G.*, “On the structure of geodesic orbit Riemannian spaces,” Ann. Global Anal. Geom. (to appear), see also arXiv:1611.010501.
8. *Nikonorov Yu. G.*, “On left-invariant Einstein Riemannian metrics that are not geodesic orbit,” arXiv:1612.02227.
9. *Chen Z., Nikonorov Yu. G.*, “Geodesic orbit Riemannian spaces with two isotropy summands. I,” arXiv:1704.01913.

ON CURVES WITH AFFINE-CONGRUENT ARCS

Polikanova I. V.

Altai State Pedagogical University, Barnaul, Russia; anirix1@yandex.ru

A curve in an n-dimensional affine space A^n is a curve with affine-congruent arcs (CwACA), if for any two of its oriented arcs there exists an affinity, mapping one of them onto the other.

Curve, affine-congruent to CwACA, is itself CwACA.

CwACA is complete, if it is not a subset of another CwACA.

Hypothesis. *The only (up to affine equivalence) nondegenerate complete CwACA in A^n is an enica $\vec{x} = \big(t,\ t^2, \dots,\ t^n\big)$, $t \in \mathbb{R}$.*

The fact, that enica is CwACA, is proved in [1], [2].

There are some properties of the CwACA in [3]:

Theorem 1. *CwACA in A^n, having a flattening point of order k, lies in a k-dimensional plane.*

Theorem 2. *Osculating planes (of any dimension) at different points of CwACA are not parallel and do not contain one each other.*

Theorem 3. *CwACA is not a closed curve.*

Theorem 4. *A hyperplane, which is parallel to the osculating hyperplane of the CwACA, intersects CwACA at no more than 2 points.*

On the whole, the Hypothesis is proved for $n = 1, 2, 3, 4$.

The proof comes to solving a system of functional equations.

For $n = 2$, a more rigorous assertion was proved without a priori smoothness requirements for the curve:

Theorem 5. *If any two undirected arcs of a nondegenerate curve in A^2 are affine-congruent, then the curve is contained in a parabola.*

REFERENCES

1. *Polikanova I. V.*, "On the curves with affine equivalent arcs in the n-dimensional affine space," in: "Mathematicians for Altay Region": Transactions of All-Russian Conference on Mathematics, Altai State University, Barnaul, 2015, pp. 34–38.
2. *Polikanova I. V.*, "On the affine equivalence of parabolic arcs," in: Collection of Scientific Articles of the International Conference "Lomonosov Readings in the Altai: Fundamental Problems of Science and Education," Barnaul, 2014, pp. 344–346.
3. *Polikanova I. V.*, "Some properties of lines with affine-equivalent arcs," in: Proceedings of the Seminar on Geometry and Mathematical Modeling: Sat. Art., Altai State University, Barnaul, 2016, pp. 55–61.

BRUNNIAN BRAIDS AND LIE ALGEBRAS

Vershinin V. V.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia versh@math.nsc.ru

A Brunnian braid means a braid that becomes trivial after removing any one of its strands. We describe the graded Lie algebra of the descending central series of a group related to Brunnian subgroup of the pure braid group. A presentation of this Lie algebra is obtained.

This is a joint work with J. Y. Li and J. Wu.

REFERENCES

1. *Li J. Y., Vershinin V. V., Wu J.*, "Brunnian braids and Lie algebras," J. Algebra, **439**, 270–293 (2015).

VOLUME OF HYPERBOLIC TETRAHEDRON ADMITTING $\overline{4}$-SYMMETRY

Vuong H. B.

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia; vuonghuubao@live.com

We consider a hyperbolic tetrahedron with symmetry group C_2 by Schönflies notation (or 2-symmetry by Hermann–Mauguin notation). By definition, a tetrahedron has 2-symmetry if it admits a π rotation around the axis passing through the middles of two opposite edges. In particular case when $a = b$, $\theta = \pi/2$ (and $c = d$) we get a tetrahedron with $\overline{4}$-symmetry. We establish a criterion of existence for such a tetrahedron and obtain exact formula for its hyperbolic volume.

Theorem 1. *A hyperbolic tetrahedron with edge lengths a, c admitting $\overline{4}$-symmetry exist if and only if* $1 + cha - 2chc < 0$.

Theorem 2. *The volume of a hyperbolic tetrahedron with edge lengths a, c admitting $\overline{4}$-symmetry is given by the formula*

$$V = \int\limits_0^a f(a,c)\,da = \int\limits_{arch((1+cha)/2)}^{c} g(a,c)\,dc, \text{ where}$$

$$\begin{aligned}
f(a,c) &= -a\frac{1}{\sqrt{A_2^2 - A_1^2}}\frac{A_3}{A_2}sha - 2c\frac{1}{\sqrt{A_2^2 - C_1^2}}\frac{C_2}{A_2}sha,\\
g(a,c) &= -a\frac{1}{\sqrt{A_2^2 - A_1^2}}\frac{A_4}{A_2}shc - 2c\frac{1}{\sqrt{A_2^2 - C_1^2}}\frac{C_3}{A_2}shc,\\
&A_1 = (1 - cha)(1 + cha)^3 - 16(1 + cha)^2ch^2c + 64ch^4c,\\
&A_2 = (cha - 1)(1 + cha)^3 - 16(1 + cha)^2ch^2c + 64ch^4c,\\
&A_3 = 64ch^2c\,(1 + cha)^2[cha(1 + cha)^2 + 4(1 - 2cha)ch^2c],\\
&A_4 = 64chc\,(1 - cha)(1 + cha)^3[(1 + cha)^2 - 8ch^2c],\\
&C_1 = (ch^2a - 1)[(1 + cha)^2 - 8ch^2c],\\
&C_2 = 16ch^2c\,(1 + cha)^3[1 - cha(4 + cha)]+\\
&8(1 + cha)^2(1 + 2cha)^2(1 + 2cha)^2(1 + 2cha)ch^2c - 64chach^4c,\\
&C_3 = 16chc[(1 - cha)(1 + cha)^3 + 16(1 + cha)^2ch^2c - 64ch^4c]+\\
&2(1 - ch^2a)(1 + cha)(cha - 1 + 2ch^2a - 16ch^2c)[(1 + cha)^2 - 8ch^2c].
\end{aligned}$$

We also obtain existence criteria and volume formulas in more general cases when $a \neq b$ or $\theta \neq \pi/2$ ($c \neq d$).

The present work is supported by Russian Science Foundation (grant 16-41-02006).

NON-SPHERICAL KNOTS (GENERALIZATION OF SOME RESULTS OF A. HAEFLIGER AND A. SKOPENKOV)

Zhubr A. V.

Komi Science Centre Institute of Physics and Mathematics, Syktyvkar, Russia;
avzhubr@gmail.com

Notations. Following Haefliger [1], denote by C_n^q the set of isotopy classes of embeddings $S^n \to S^{n+q}$ (spherical n-knots of codimension q). For a closed smooth manifold M, denote the set of isotopy classes of embeddings $M\times S^n \to S^{m+n+q}$, where $m = \dim M$, by $C_n^q(M)$, so that C_n^q above is the same as $C_n^q(\mathrm{pt})$. We call the elements of $C_n^q(M)$ — somewhat loosely — "M-parametrized n-knots of codimension q". If $M = S^m$, then we have the "knotted tori" of A. Skopenkov [2].

Let $f_0, f_1 : M\times S^n \to S^{m+n+q}$ be two disjoint embeddings as above, and let $\varphi : [0,1]\times M\times D^n \to S^{m+n+q}$ be an embedding satisfying

- $\varphi([0,1]\times M\times D^n) \cap f_i(M) = \varphi(\{i\}\times M\times D^n)$, $i = 0,1$;
- φ is transversal to both $f_0(M)$ and $f_1(M)$;
- the maps $\psi_i = f_i^{-1} \circ \varphi : \{i\}\times M\times D^n \to M\times S^n$, $i = 0,1$, coincide with $\mathrm{id}(M)\times s_i$, where $s_0, s_1 : D^n \to S^n$ are embeddings resp. preserving and reversing orientations, and where $\{i\}\times M$ identifies with M in a natural way.

Having all this, we obtain a new M-parametrized knot $f_0\#_M f_1 : M\times S^n \to S^{m+n+q}$ by identifying the manifold

$$\left(M\times S^n \cup_{\psi_0} [0,1]\times M\times D^n \cup_{\psi_1} M\times S^n\right) \setminus [0,1]\times M\times \mathrm{Int} D^n$$

with $M\times S^n$ again. We call this new embedding *an M-parametrized embedded connected sum* of the embeddings f_0, f_1.

Theorem 1. *If $q \geqslant 2m + n + 3$, then the embedding φ as above exists and is unique up to isotopy for any given f_0, f_1.*

Remark 1. As one easily sees, this gives the structure of a commutative monoid on the corresponding sets $C_n^q(M)$.

Theorem 2. *All the monoids $C_n^q(M)$ are indeed abelian groups.*

Remark 2. This generalizes both Theorem 1.7 of A. Haefliger [1] (for $M = \mathrm{pt}$) and Lemma 2.2 of A. Skopenkov [2] (for $M = S^m$).

Theorem 3. *For any stably parallelizable closed manifold M, there exists an epimorphism $C_n^q(M) \to C_{\dim M+n}^q$.*

Remark 3. This generalizes a result of A. Skopenkov (see [2, Lemma 2.5]).

The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 15-01-06302).

REFERENCES

1. *Haefliger A.*, "Differentiable embeddings of S^n in S^{n+q} for $q > 2$," Ann. Math., **83**, No. 3, 402–436 (1966).
2. *Skopenkov A. B.*, "Classification of knotted tori," arXiv:1502.04470.

ON LAPLACE OPERATOR SPECTRUM ON SOME CONNECTED COMPACT SIMPLE RANK FOUR LIE GROUPS

Zubareva I. A.

Omsk Branch of the Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Omsk, Russia;
i_gribanova@mail.ru

In paper [1] it is calculated Laplace operator spectrum for smooth real/complex-valued functions on all Lie groups Spin(8), Spin(9), SO(9), Sp(4), Sp(4)/C(Sp(4)), SO(8), PSO(8) with biinvariant Riemannian metric. Let $L_4(k)$ ($L_3(k)$) be the number of all presentations of the number $k \in \mathbb{N}$ as a sum of squares of four (three) mutually different natural numbers arranged according to the age. Let us state exact results for the first two cases.

Theorem 1. *Let $G = \mathrm{Spin}(8)$ is supplied by biinvariant Riemannian metric ν such that $\nu(e) = -k_{ad}$, where k_{ad} is the Killing form of Lie algebra $\mathfrak{so}(8)$. A number $\lambda < 0$ is an eigenvalue of Laplacian on (G, ν) in one and only one of the following cases (I, II or III)*

I. 1) $-12\lambda \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)$; 2) natural number $56 - 48\lambda$ is a sum of squares of four mutually different odd natural numbers, i.e. $L_4(14 - 12\lambda) < L_4(56 - 48\lambda)$.

In addition the number of highest weights Λ, such that $\lambda(\Lambda) = \lambda$, is equal to $2L_4(56 - 48\lambda) + L_3(14 - 12\lambda)$.

II. 1) $-12\lambda \in \mathbb{N}$; 2) natural number $14 - 12\lambda$ is a sum of squares of four mutually different natural numbers, i.e. $L_4(14 - 12\lambda) > 0$; 3) natural number $56 - 48\lambda$ can't be presented as a sum of squares of four mutually different odd natural numbers, i.e. $L_4(56 - 48\lambda) = L_4(14 - 12\lambda)$.

In addition the number of highest weights Λ, such that $\lambda(\Lambda) = \lambda$, is equal to $2L_4(14 - 12\lambda) + L_3(14 - 12\lambda)$.

III. 1) $-12\lambda \in \mathbb{N}$; 2) natural number $56 - 48\lambda$ can't be presented as a sum of squares of four mutually different natural numbers, i.e. $L_4(56 - 48\lambda) = 0$; 3) natural number $14 - 12\lambda$ is a sum of squares of three mutually different natural numbers, i.e. $L_3(14 - 12\lambda) > 0$.

The number of highest weights Λ, such that $\lambda(\Lambda) = \lambda$, is equal to $L_3(14 - 12\lambda)$.

Theorem 2. *Let $G = \mathrm{Spin}(9)$ is supplied by biinvariant Riemannian metric ν such that $\nu(e) = -k_{\mathrm{ad}}$, where k_{ad} is the Killing form of Lie algebra $\mathfrak{so}(9)$. A number $\lambda < 0$ is eigenvalue of Laplacian on (G, ν) in one and only one of the following cases (I or II)*

I. 1) $-7\lambda \in \mathbb{N}$; 2) natural number $84 - 56\lambda$ is a sum of squares of four mutually different odd natural numbers, i.e. $L_4(21 - 14\lambda) < L_4(84 - 56\lambda)$.

In addition the number of highest weights Λ, such that $\lambda(\Lambda) = \lambda$, is equal to $L_4(84 - 56\lambda)$.

II. 1) $-14\lambda \in \mathbb{N}$; 2) natural number $21 - 14\lambda$ is a sum of squares of four mutually different natural numbers, i.e. $L_4(21 - 14\lambda) > 0$. 3) natural number $84 - 56\lambda$ can't be presented as a sum of squares of four mutually different odd natural numbers, i.e. $L_4(84 - 56\lambda) = L_4(21 - 14\lambda)$.

The number of highest weights Λ, such that $\lambda(\Lambda) = \lambda$, is equal to $L_4(21 - 14\lambda)$.

REFERENCES

1. *Zubareva I. A.*, “Laplace operator spectrum on some connected compact simple rank four Lie groups”, Math. Tr., **19**, No. 2, 42–85 (2016).

СЕКЦИЯ 3

Математический анализ и теория функций

Тезисы докладов

SECTION 3

Mathematical Analysis and Function Theory

Abstracts

ОБОБЩЁННЫЕ УГЛЫ В ПТОЛЕМЕЕВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И КВАЗИМЕРОМОРФНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Асеев В. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
btp@math.nsc.ru

Установлено, что любая птолемеева полуметрика ρ мёбиусово эквивалентна ограниченной птолемеевой метрике

$$\rho^*_{(a,b)}(x,y) := \frac{\rho(x,y)}{(\rho(x,a)+\rho(x,b))(\rho(y,a)+\rho(y,b))}\ ,\ \text{где } a \neq b.$$

Поэтому любая птолемеева мёбиусова структура (в смысле С. В. Буяло) на множестве X содержит метрику и порождает единственную метрическую топологию в X.

В птолемеевом полуметрическом пространстве (X,ρ) обобщённый угол есть четвёрка множеств $\Psi = (A_1, B_1, A_2, B_2)$ таких, что $B_1 \neq \emptyset \neq B_2$ и $B_1 \cup B_2$ содержит две различные точки. Величина обобщённого угла Ψ определяется формулой

$$\alpha(\Psi) := \inf_{a_i \in A_1} \sup_{b_i \in B_i} \frac{\rho(a_1,a_2)\rho(b_1,b_2)}{\rho(a_1,b_1)\rho(a_2,b_2)+\rho(a_1,b_2)\rho(a_2,b_1)}.$$

Понятие обобщённого угла и его величины введено и изучено в [1].

Для заданного гомеоморфизма $\eta\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ и птолемеевых пространств (X,ρ), (Y,σ) отображение $F\colon X \to 2^Y$ принадлежит классу η-BAD (of bounded angle distortion), если оно суперинъективно (т. е. $x_1 \neq x_2$ влечёт $F(x_1) \cap F(x_2) \neq \emptyset$) и для любого обобщённого угла Ψ в X выполняется оценка $\alpha(F(\Psi)) \geq \eta(\alpha(\Psi))$. Изучены некоторые топологические свойства таких отображений. В частности, доказано что для любого K-квазимероморфного отображения (т. е. отображения с ограниченным искажением в смысле Ю. Г. Решетняка) $f\colon \bar{R}^n \to \bar{R}^n$ многозначные отображения, обратные к его координатным функциям, принадлежат классу η-BAD с нижней оценкой искажения обобщённых углов $\eta(t)$, зависящей только от n и K (приведена явная формула для $\eta(t)$).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Асеев В. В., Сычёв А. В., Тетенов А. В.* Мёбиусово-инвариантные метрики и обобщённые углы в птолемеевых пространствах // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 2. С. 243–263.

ОДНОРОДНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ КВАЗИМЕТРИК В РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ И ПРИЛОЖЕНИЯ К ПРОСТРАНСТВАМ КАРНО – КАРАТЕОДОРИ

Басалаев С. Г.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
sbasalaev@math.nsc.ru

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — окрестность нуля, (q_1, q_2)-квазиметрикой на U мы называем непрерывную функцию $d\colon U \times U \to \mathbb{R}$ такую, что для всех x, y, $z \in U$ выполнено

1. $d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $d(x,y) \leq Cd(y,x)$;
3. $d(x,z) \leq q_1 d(x,y) + q_2 d(y,z)$.

Фиксируем анизотропное растяжение вида

$$\delta_\varepsilon(u_1, \ldots, u_n) = (\varepsilon^{\sigma_1} u_1, \ldots, \varepsilon^{\sigma_n} u_n), \quad \sigma_i > 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Квазиметрику $\widehat{d}$ называем однородным пределом квазиметрики d, если $\widehat{d}(x,y) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} d(\delta_\varepsilon x, \delta_\varepsilon y)$. Предельные квазиметрики такого вида находят приложения при изучении локальных свойств пространств Карно – Каратеодори. Известно, что в $C^{1,\alpha}$-гладких пространствах Карно – Каратеодори выполнена оценка

$$|\widehat{d}(x,y) - d(x,y)| = O(\varepsilon^{1+\frac{\alpha}{M}}), \tag{1}$$

где M — глубина пространства Карно – Каратеодори, $d \in \{d_\infty, d_{cc}\}$ — либо квазиметрика специального вида, либо метрика Карно – Каратеодори, если она определена. Аналогичный результат получен для C^1-гладких пространств с $o(\varepsilon)$ в правой части. Этот результат сформулирован ещё М. Громовым в 1996 г. в канонических координатах второго рода. Однако доказан только в 2014 г. С. К. Водопьяновым и М. Б. Кармановой в координатах первого рода. Автором доклада описан класс систем координат, в которых верна оценка (1), в частности, показано, что утверждение, сформулированное Громовым верно в исходной формулировке (т. е. в координатах второго рода). Основные утверждения работы:

Теорема 1. *Пусть V — окрестность нуля, d — квазиметрика на V, $\widehat{d}$ — её однородная аппроксимация. Пусть $\Phi\colon U \to V$ — гомеоморфизм окрестностей нуля и $\rho = \Phi_* d$. Если существует равномерный предел $L = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon^{-1} \circ \Phi \circ \delta_\varepsilon$ и L — гомеоморфизм, то существует однородная квазиметрика $\widehat{\rho}$ такая, что*

$$|\widehat{\rho}(x,y) - \rho(x,y)| = o(\varepsilon).$$

Теорема 2. *Если в условиях теоремы 1:*

1. $|\widehat{d}(x,y) - d(x,y)| = O(\varepsilon^{1+\beta})$;
2. $d(\Phi(x), L(x)) = O(\varepsilon^{1+\beta})$;
3. d — $(1,q)$-*квазиметрика;*

то $|\widehat{\rho}(x,y) - \rho(x,y)| = O(\varepsilon^{1+\beta})$.

Показано, что функция перехода из координат первого рода в координаты второго рода удовлетворяет условиям теоремы 2. Стоит отметить, что все условия в этой теореме по существу и не могут быть ослаблены.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00801).

КВАЗИКОНФОРМНЫЙ АНАЛИЗ ДВУХИНДЕКСНОЙ ШКАЛЫ ОТОБРАЖЕНИЙ И ПРИМЕНЕНИЯ

Водопьянов С. К.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
vodopis@math.nsc.ru

Определяется шкала отображений, зависящая от двух вещественных параметров $n-1 \leq q \leq p < \infty$ и весовой функции θ. В случае $q = p = n$, $\theta \equiv 1$ получаем известный в литературе класс отображений с ограниченным искажением. Отображения двухиндексной шкалы наследуют многие свойства последних.

В случае $n-1 < q \leq p = n$ отображения с ограниченным (p,q)-искажением исследовались ранее в ряде работ при дополнительном предположении $\mathcal{N}$-свойства Лузина данного отображения. В данной работе изложены первоначальные сведения теории отображений с ограниченным (p,q)-искажением, полученные без дополнительных аналитических предположений. Основу теории составляют новые аналитические свойства перенесенных функций: мы, в частности, доказываем, что на образе точек ветвления градиент перенесенной функции равен нулю почти всюду. Выведены оценки на емкости образов конденсаторов для отображений с ограниченным (p,q)-искажением. Получены теоремы типа Лиувилля, теоремы о затирании особенностей для отображений данного класса.

Демонстрируются применения двухиндексной шкалы для решения ряда задач глобального анализа и прикладных задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (соглашение № 16-41-02004).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Водопьянов С. К.* О регулярности функции Полецкого при слабых аналитических предположениях исходного отображения // ДАН. 2014. Т. 455, № 2. С. 130–134.
2. *Байкин А. Н., Водопьянов С. К.* Емкостные оценки, теоремы типа Лиувилля и об устранении особенностей для отображений с ограниченным (p,q)-искажением // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 2. С. 290–321.
3. *Водопьянов С. К., Молчанова А. О.* Полунепрерывность снизу коэффициента искажения отображения с ограниченным $(\theta,1)$-весовым (p,q)-искажением // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 5. С. 999–1011.
4. *Водопьянов С. К.* Основы квазиконформного анализа двухиндексной шкалы пространственных отображений // Сиб. мат. журн. (на рассмотрении редколлегии).
5. *Molchanova A. O., Vodopyanov S. K.* Injectivity almost everywhere and mappings with finite distortion in nonlinear elasticity // arXiv:1704.08022v4.
6. *Водопьянов С. К., Кудрявцева Н. А.* О сходимости отображений с k-конечным искажением // Мат. заметки (в печати).

АРХИМЕДОВЫ КОНУСЫ И ВХОДНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Гутман А. Е.[1], **Матюхин А. В.**[2]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
[1]gutman@math.nsc.ru, [2]anatoly.matyukhin@yandex.ru

Всюду ниже X — векторное пространство над $\mathbb{R}$. Непустое выпуклое подмножество $W \subseteq X$ называется *клином*, если $\alpha W \subseteq W$ для всех $\alpha \geqslant 0$. Клин W является *конусом*, если $W \cap (-W) = \{0\}$. Выпуклое множество $C \subseteq X$ называется *архимедовым*, если для любых x, $y \in X$ из справедливости включения $x + \frac{1}{n}y \in C$ для всех $n \in \mathbb{N}$ следует $x \in C$. Архимедовость конуса (клина) $W \subseteq X$ равносильна истинности аксиомы Архимеда в (пред)упорядоченном векторном пространстве $(X, \leqslant)$, где $x \leqslant y \Leftrightarrow y - x \in W$. Основные сведения об архимедовых конусах можно почерпнуть из [1]. Связь между архимедовыми и замкнутыми конусами исследована в [2].

Определение. Для $x, y \in X$ положим $]x, y[\, = \{(1-\alpha)x+\alpha y : \alpha \in [0,1]\} \setminus \{x, y\}$. Пусть C — выпуклое подмножество X. Условимся называть вектор $y \in X$ *входным направлением* для C в точке $x \in X \backslash C$ и писать $y \in \operatorname{ent}_x C$, если $]x, x+\varepsilon y[\, \subseteq C$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Введем обозначение $\operatorname{ent} C = \cup\{\operatorname{ent}_x C : x \in X\backslash C\}$.

Предложение 1. *Пусть C — выпуклое подмножество X.*

(1) *Для любой точки $x \in X\backslash C$ множество $\operatorname{ent}_x C$ является конусом.*

(2) *Множество C архимедово тогда и только тогда, когда $\operatorname{ent} C = \{0\}$.*

(3) *Множество C является конусом тогда и только тогда, когда разность $C\backslash\{0\}$ выпукла и $\operatorname{ent}_0(C\backslash\{0\}) = C$.*

Теорема 2 (критерий архимедовости клина). *Пусть $W \subseteq X$ — клин и пусть f — такой линейный функционал на X, что $f \geqslant 0$ на W и $f(y) > 0$ для некоторого элемента $y \in W$. Клин W архимедов в том и только в том случае, если $y \notin \operatorname{ent} W$ и множество $\{x \in W : f(x) = 1\}$ архимедово.*

Ниже приведены критерии существования функционала f и вектора y, удовлетворяющих условию теоремы 2.

Предложение 3. *Пусть $W \subseteq X$ — клин и пусть $\overline{W}$ — замыкание W в слабой топологии, наведенной пространством $X^\#$ всех линейных функционалов на X. Следующие условия равносильны:*

(1) *существуют $f \in X^\#$ и $y \in W$ такие, что $f \geqslant 0$ на W и $f(y) > 0$;*

(2) *существует такой вектор $y \in W$, что $-y \notin \overline{W}$;*

(3) *$\operatorname{lin} W \nsubseteq \overline{W}$, где $\operatorname{lin} W$ — линейная оболочка W.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Aliprantis C. D., Tourky R.* Cones and Duality. Providence: American Mathematical Society, 2007.
2. *Гутман А. Е., Емельянов Э. Ю., Матюхин А. В.* Незамкнутые архимедовы конусы в локально выпуклых пространствах // Владикавказский мат. журн. 2015. Т. 17, № 3. С. 36–43.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДУБИНИНА ДЛЯ ЕМКОСТИ КОНДЕНСАТОРА С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ПЛАСТИН

Дымченко Ю. В.[1], **Шлык В. А.**[2]

[1]*Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия;* dymch@mail.ru

[2]*Владивостокский филиал Российской таможенной академии, Владивосток, Россия;* shlykva@yandex.ru

В работе решена задача Дубинина о емкости конденсатора с конечным числом пластин.

Пусть G — открытое множество в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, w — A_p-вес Макенхаупта, $p \in (1; +\infty)$. Пусть $m \geq 2$, $E_1, \ldots, E_m$ — попарно непересекающиеся компакты в $\overline{\mathbb{R}^n}$ на замыкании $\bar{G}$ множества G в топологии $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$; $\delta_1, \ldots, \delta_m$ — соответствующие попарно неравные вещественные числа. Тогда набор $(\delta_1 E_1, \ldots, \delta_m E_m, G) = (\{\delta_i E_i\}, G)$ назовем конденсатором в $\bar{G}$. Величину $C_{p,w}(\{\delta_i E_i\}, G) = \inf \int\limits_G |\nabla u|^p \, w dx$ назовем емкостью конденсатора. Здесь инфимум берется по всем вещественным функциям u, локально липшицевым в G и равным δ_i в некоторой окрестности компакта E_i, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Конденсатору $(\{\delta_i E_i\}, G)$ сопоставим конфигурацию $\alpha H = (\alpha_{12} H_{12}, \alpha_{13} H_{13}, \ldots, \alpha_{m-1,m} H_{m-1,m})$, где H_{ij} — семейство локально спрямляемых кривых в $G_0 = G \setminus (E_1 \cup \cdots \cup E_m)$, соединяющих E_i и E_j; $\alpha_{ij} = |\delta_i - \delta_j|$, $1 \leq i < j \leq m$. Модуль $m_{p,w}(\alpha H)$ конфигурации αH определим как $\inf \int\limits_{G_0} \rho^p \, w dx$, где инфимум берется по всем борелевским функциям $\rho\colon G_0 \to [0; +\infty]$, для которых $\int\limits_\gamma \rho \, ds \geq \alpha_{ij}$ для всех $\gamma \in H_{ij}$, $1 \leq i < j \leq m$. Имеет место утверждение.

Теорема. $m_{p,w}(\alpha H) = C_{p,w}(\{\delta_i E_i\}, G)$.

При $p = n = 2$, $w = 1$ в $\mathbb{R}^2$ отсюда следует решение одной задачи В. Н. Дубинина (устное сообщение).

Полученный результат в теореме можно распространить на группы Карно с внутренней метрикой [1], [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дымченко Ю. В.* Равенство емкости и модуля конденсатора в субфинслеровом пространстве // Зап. научн. сем. ПОМИ (Аналитическая теория чисел и теория функций. 32). 2016. Т. 449. С. 69–83.
2. *Markina I.* p-Module of vector measures in domains with intrinsic metric on Carnot group // Tohoku Math. J. 2004. V. 56, No 4. P. 553–569.

РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ С НУЛЬ-ЛАГРАНЖИАНАМИ

Егоров А. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
yegorov@math.nsc.ru, a.egorov@g.nsu.ru

Получены новые свойства решений $v\colon U \to \mathbb{R}^m$, определенных на открытых множествах $U \subset \mathbb{R}^n$, дифференциальных неравенств

$$F(v'(x)) \leq KG(v'(x)) + H(x) \quad \text{для п. в. } x \in U, \quad K > 0, \tag{1}$$

где $G\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ — k-однородный нуль-лагранжиан, $F\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ — функция, удовлетворяющая неравенству $F(\zeta) \geq c_F|\zeta|^k$ для $\zeta \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $c_F > 0$, $H\colon U \to \mathbb{R}$ — измеримая функция. Здесь k, n, $m \in \mathbb{N}$, $2 \leq k \leq \min\{n, m\}$, $v'(x)$ — матрица Якоби отображения v в точке $x \in U$, $\mathbb{R}^{m\times n}$ — пространство вещественных $m \times n$-матриц, рассматриваемое с операторной нормой $|\cdot|$.

Опираясь на установленные свойства решений (1), усилены теоремы об устойчивости классов отображений из [1], [2].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00875).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Егоров А. А.* Квазивыпуклые функции и нуль-лагранжианы в проблемах устойчивости классов отображений // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 4. С. 796–812.
2. *Egorov A. A.* Solutions of the differential inequality with a null Lagrangian: higher integrability and removability of singularities. I, II // Владикавказский мат. журн. 2014. Т. 16, № 3. С. 22–37; Т. 16, № 4. С. 41–48.

НАИЛУЧШИЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ И ТОНКО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В $\mathbb{C}^n$

Ибрагимов Зафар Ш.[1], **Имомкулов С. А.**[2]

[1] *Ургенчский государственный университет, Ургенч, Республика Узбекистан;* z.ibragim@gmail.com

[2] *Навоиский государственный педагогический институт, Навои, Республика Узбекистан;* sevdiyor_i@mail.ru

В этой работе доказывается тонко-аналитическое продолжение функций из класса Гончара. Кроме этого устанавливается связь с классом Гончара и тонко-аналитическими функциями многих комплексных переменных

Класс R был введен и исследован в серии фундаментальных работ А. А. Гончара [1]: будем говорить, что росток f аналитической функции в точке $0 \in \mathbb{C}^n$ принадлежит классу R^0, $f \in R^0$, если в некоторой окрестности нуля $\bar{B} = \bar{B}(0, r)$, $r > 0$ она допускает быструю рациональную аппроксимацию. Точнее,

$$\lim_{m\to\infty} \rho_m^{1/m}\left(f, \bar{B}\right) = 0,$$

где ρ_m– отклонение f от класса рациональных функций $\{r_m : \deg r_m \le m\}$. Верхний индекс "^{0}" здесь указывает в какой точке рассматривается росток. Одним из замечательных свойств функций из R, доказанного А. А. Гончаром является их однозначность в пространстве $\mathbb{C}^n$: естественная область существования $W_f \subset \mathbb{C}^n$. Класс R и его свойства нашли ряд приложений в самой теории аппроксимации [2], в вопросах аналитического продолжения функций с тонкими особенностями, в теории плюрипотенциала (см., например, [3]) и др.

В этой работе мы докажем следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть E и E' — регулярные множества и $\{s_m(z)\}$, $\{t_m(z)\}$ — последовательности рациональных функций, быстро сходящихся на E к функции $f \in C(E)$,*

$$\lim_{m\to\infty} \|s_m - f\|_E^{1/m} = 0, \quad \lim_{m\to\infty} \|t_m - f\|_E^{1/m} = 0.$$

Теорема 2. *f является функцией класса R^0 конечного порядка t тогда и только тогда, когда $A_m^{1/m} \approx \frac{1}{m^{1/t}}$, где*

$$A_m = A_m(f) = \left[mod \left| \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \ldots & a_m \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_{m+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_m & a_{m+1} & \ldots & a_{2m-1} \end{array} \right| \right]^{1\backslash m}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гончар А. А.* Локальное условие однозначности аналитических функций нескольких переменных // Мат. сб. 1974. Т. 93, № 135. С. 296–313.
2. *Садуллаев А.* Критерий быстрой рациональной аппроксимации в $\mathbb{C}^n$ // Мат. сб. 1984. Т. 125, № 2. С. 269–279.
3. *Садуллаев А.* Плюрисубгармонические функции // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. 1985. Т. 8. С. 65–113.

О СВЯЗИ ОБОБЩЕННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ СОБОЛЕВА, ОБОБЩЕННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ТЕОРИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ И ИНВАРИАНТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Ким А. В.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия; avkim@imm.uran.ru

Рассматриваются некоторые свойства обобщенных производных.

В докладе обсуждается взаимосвязь трех классов производных:

1) Обобщенной производной Соболева [1], [2],

2) Обобщенной производной теории распределений [3], [4],

3) Инвариантных производных функционалов и функций (инвариантная производная функции определяется через инвариантную производную порождаемого ею функционала) [5], [6].

Теорема 1. *Функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ имеет обобщенную производную Соболева тогда и только тогда, когда она инвариантно дифференцируема [имеет инвариантную производную] относительно класса (бесконечно дифференцируемых) функций $M = CD[a,b]$. При этом инвариантная производная функции равна обобщенной производной Соболева.*

Пусть $D(a,b)$ — пространство основных функций, f' обобщенная производная линейного непрерывного $f \in D' = D'(a,b)$.

Теорема 2. *Распределение $f \in D' = D'(a,b)$ имеет обобщенную производную f' на элементе $\phi \in D(a,b)$ тогда и только тогда, когда оно имеет инвариантную производную ∂f на ϕ. В этом случае*

$$(f', \phi) = -\partial f[\phi] D' = D'(a,b).$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00636).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Methode nouvelle a resoudre le problem Cauchy pour les equations lineaire hyperboliqye normales // Мат. сб. 1936. № 1. С. 39–72.
2. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Ленинград: Издательство ЛГУ, 1950.
3. *Шварц Л.* Математические методы для физических наук. М.: Мир, 1965.
4. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Издательство физико-математической литературы, 1959.
5. *Ким А. В.* i-Гладкий анализ. Основные понятия и конструкции. Москва–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2011.
6. *Kim A. V.* i-Smooth Analysis. Theory and Applications. Wiley, 2015.

О СЛАБОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ПОЛУГРУПП ОПЕРАТОРОВ В НУЛЕ

Мельников Е. В.

Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского, Омск, Россия;
melnikovev@gmail.com

Хорошо известна теорема К. Иосиды [1] о том, что полугруппа операторов в банаховом пространстве, слабо непрерывная в нуле, является полугруппой класса C_0. Доказательство этой теоремы основано на методе Н. Данфорда [2], доказавшего, что сильная измеримость группы операторов в банаховом пространстве влечет ее сильную непрерывность. К. Сингбал-Ведак [3] обобщила результат Данфорда, доказав, что в произвольном локально выпуклом пространстве (ЛВП) сильно измеримая и локально эквинепрерывная при $t > 0$ полугруппа операторов будет сильно непрерывной. Она же доказала, что в случае пространства Фреше свойство локальной эквинепрерывности полугруппы вытекает из ее сильной измеримости.

Автором установлено, что утверждение Иосиды остается в силе в случае пространств Фреше, а вот в произвольном бочечном ЛВП оно уже может не быть верным, вопреки теореме из работы [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
2. *Dunford N.* On one parameter groups of linear transformations // Annals of Math. 1938. V. 39, No 2. P. 567–573.
3. *Singbal-Vedak K.* A note on semigroups of operators on locally convex space // Proc. Am. Math. Soc. 1965. V. 16. P. 696–702.
4. *Вувуникян Ю. М.* Квазиэкспоненциальные полугруппы эндоморфизмов локально выпуклого пространства // Сиб. мат. журн. 1971. Т. 12, № 2. С. 284–294.

ДЕФЕКТ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КОНДЕНСАТОРОВ И ПОВЕДЕНИЕ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Парфёнов А. И.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
parfenov@math.nsc.ru

Пусть область $\Xi \subset \mathbb{R}^{n-1}$ $(n \geqslant 2)$, липшицевы функции ω_0, $\omega_1 \colon \Xi \to \mathbb{R}$ и $p \in (1, \infty)$ таковы, что $\theta = \omega_1 - \omega_0 > 0$ и $\int_\Xi \theta^{1-p}\, d\xi < \infty$. Рассмотрим область

$$\Omega = \bigl\{x = (x', x_n) \in \Xi \times \mathbb{R} \colon \omega_0(x') < x_n < \omega_1(x')\bigr\}$$

и дефект соответствующего цилиндрического конденсатора:

$$V = \inf_{u \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \colon (\forall \xi)\ u(\xi, \omega_0(\xi)+0)=0\ \&\ u(\xi,\omega_1(\xi)-0)=1} \int_\Omega |\nabla u|^p\, dx - \int_\Xi \theta^{1-p}\, d\xi.$$

Теорема. *Обозначим* $Q = \|\omega_0\|_{\mathrm{Lip}} + \|\omega_1\|_{\mathrm{Lip}}$. *Имеют место оценки*

$$W(\omega_i) := \int_0^\infty \left(\inf_{\zeta \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(\Xi)} \int_{\theta(\xi)>t} \frac{\bigl\{1 + |\nabla\zeta|^2 + t^{-2}|\omega_i - \zeta|^2\bigr\}^{p/2} - 1}{\theta^p}\, d\xi \right) dt < \infty,$$

$$c_0(p, Q)V \leqslant W(\omega_0) + W(\omega_1) \leqslant c_1(p, Q)V \quad (c_j > 0).$$

Функционал $W^{1/2}$ при $p = 2$ является весовым вариантом полунормы интерполяционного пространства $\bigl(\dot W^1_2(\Xi), L_2(\Xi)\bigr)_{1/2,2}$, которое для регулярных областей Ξ равно однородному пространству Соболева $\dot H^{1/2}(\Xi)$. Об истории контроля возмущения границ областей посредством пространства $\dot H^{1/2}$ см. [1, § 9].

Теорема при $n = 2$ обобщается на “полосообразные” четырехсторонники (конденсаторы) с помощью их внутренних липшицевых аппроксимаций. Отсюда следуют критерии для сравнимости [2, с. 265] экстремальной длины с интегралом Альфорса $\int \frac{d\xi}{\theta}$ (тривиально) и для приближенной аддитивности [2, с. 256] экстремальной длины. Условие второго критерия является переносом на полосы переменной ширины условия изогональности Островского [2, с. 254], [3, с. 96].

Асимптотика конформных отображений полос в существенном определяется экстремальной длиной соответствующих четырехсторонников [2]–[4] и потому может исследоваться на основе указанных обобщения теоремы и его следствий. Сформулированные на этом пути явные достаточные или необходимые условия существования угловой производной конформного отображения содержат в себе основные условия такого рода из [2, гл. 11] и [5, гл. V].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Парфёнов А. И.* Ряд по липшицевому возмущению границы для решения задачи Дирихле // Мат. труды. 2017. Т. 20, № 1. С. 158–200.
2. *Pommerenke Ch.* Boundary behaviour of conformal maps. Berlin: Springer, 1992.
3. *Jenkins J. A., Oikawa K.* Conformality and semi-conformality at the boundary // J. Reine Angew. Math. 1977. V. 291. P. 92–117.
4. *Rodin B., Warschawski S. E.* Extremal length and the boundary behavior of conformal mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. 1976. V. 2. P. 467–500.
5. *Garnett J. B., Marshall D. E.* Harmonic measure. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005.

ВЕСОВЫЕ МОДУЛИ И ЕМКОСТИ НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Пугач П. А.[1], **Шлык В. А.**[2]

Владивостокский филиал Российской таможенной академии, Владивосток, Россия; [1]679097@mail.ru, [2]shlykva@yandex.ru

В работе установлены соотношения между весовыми модулями и емкостью конденсатора на римановой поверхности.

Пусть $\mathcal{R}$ — риманова поверхность из [1], склеенная из конечного или счетного числа областей замкнутой комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, где проекция каждой точки $W \in \mathcal{R}$ совпадает с точкой $w = \text{пр}\, W$ одной из склеиваемых областей, $\mathcal{R}_\infty = \{W \in \mathcal{R} : \text{пр}\, W = \infty\}$, $\mathcal{R}_b = \{W \in \mathcal{R} : W$ — точка разветвления для $\mathcal{R}\}$. Пусть G — открытое множество на $\mathcal{R}$, где либо замыкание $\overline{G}$ множества G — компакт на $\mathcal{R}$, либо $G = \mathcal{R}$ и граница $\partial\mathcal{R} \neq \emptyset$ (см. [1]). Пусть $\widetilde{\omega}$ — A_p-вес Макенхаупта на $\mathbb{C}$, $p \in (1, +\infty)$ и $\omega(W) = \widetilde{\omega}(w)$, если пр $W = w \neq \infty$, $\omega(W) = 1$, если пр $W = w = \infty$.

Пусть $m \geq 2$, $E_1 = \partial\mathcal{R}$ и $E_2, \ldots, E_m$ — попарно непересекающиеся компакты на $\mathcal{R}$, когда $G = \mathcal{R}$. Если $\overline{G}$ — компакт на $\mathcal{R}$, то $E_1, \ldots, E_m$ — попарно непересекающиеся компакты на $\overline{G}$. Сопоставим набору $E_1, \ldots, E_m$ соответствующий набор вещественных чисел $\delta_1, \ldots, \delta_m$. Тогда набор $\big(\delta_1 E_1, \ldots, \delta_m E_m, G\big) = \big(\{\delta_i E_i\}, G\big)$ назовем конденсатором на $\mathcal{R}$. Положим $C_{p,\omega}\big(\{\delta_i E_i\}, G\big) = \inf\limits_u \int\limits_G |\nabla u|^p \,\omega\, d\sigma$, где инфимум берется по всем функциям u, локально липшицевым в G, равным δ_i в некоторой окрестности множества E_i и постоянным в какой-нибудь окрестности каждой точки из $G_0 \cap \big(\mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b\big)$, где $G_0 = G \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{m} E_j$, $d\sigma$ — элемент площади на $\mathcal{R}$. Конденсатору $\big(\{\delta_i E_i\}, G\big)$ сопоставим конфигурацию

$$\alpha H = (\alpha_{1,2} H_{1,2}, \ldots, \alpha_{m-1,m} H_{m-1,m}),$$

где $H_{i,j}$ — семейство кривых, соединяющих множества E_i и E_j в G_0, $\alpha_{i,j} = |\delta_i - \delta_j|$, $1 \leq i < j \leq m$. Модуль $m_{p,\omega}(\alpha H)$ конфигурации (αH) определим как $\inf\limits_\rho \int \rho^p \,\omega\, d\sigma$ по всем борелевским функциям $\rho\colon G_0 \to [0, +\infty]$, для которых $\int\limits_\gamma \rho\, ds \geq \alpha_{ij}$ для всех $\gamma \in H_{ij}$ и $1 \leq i < j \leq m$. Пусть, кроме того, $\Sigma = \Sigma(E_1, E_2, G)$ — семейство всех множеств, отделяющих в G множества E_1 и E_2 (см. [2]) и непересекающихся с множеством $\big(G \setminus (E_1 \cup E_2)\big) \cap (\mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b)$.

Определим $M_{q,\omega^{1-q}}(\Sigma)$ аналогично величине $m_{p,\omega}(\alpha H)$, $q = \frac{p}{p-1}$

Теорема 1. $C_{p,\omega}\big(\{\delta_i E_i\}, G\big) = m_{p,\omega}(\alpha H)$.

Теорема 2. $C_{p,\omega}\big(\,0 \cdot E_1, 1 \cdot E_2, G\big)^{\frac{1}{p}} = M_{q,\omega^{1-q}}\big(\Sigma\big)^{-\frac{1}{q}}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дубинин В. Н.* Круговая симметризация конденсаторов на римановых поверхностях // Мат. сб. 2015. Т. 206, № 1. С. 69–96.
2. *Pugach P., Shlyk V.* Moduli, capacity, BV-functions on the Riemann surfaces // Lobachevskii J. Math. 2017. V. 38, No 2. P. 338–351.

О ТЕОРЕМЕ МАРСТРАНДА НА ГРУППАХ КАРНО

Томилов А. О.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
atomilov115@mail.ru

Доказано, что если μ — мера Радона на группе Карно $\mathbb{G}$ такая, что существует положительная и конечная s-плотность $\Theta^s(\mu, x)$ на множестве ненулевой меры, тогда $s \in \mathbb{N}$. Основная идея доказательства заключается в переходе от меры μ к равномерно распределенной мере ν. Этот результат является обобщением теоремы Марстранда о s-плотности меры в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ (1954) и аналогом работы Тайсона [1] о s-плотности меры на группе Гейзенберга (2014).

Теорема. *Пусть μ — мера Радона на группе Карно $\mathbb{G}$. Если предел*

$$\Theta^s(\mu, x) = \lim_{r \to 0} \frac{\mu(B(x, r))}{r^s}$$

существует, положителен и конечен на множестве положительной меры μ, то $s \in \mathbb{N}$.

Замечание 1. В данном случае $B(x, r) = \{y \in \mathbb{G} : d(x, y) \le r\}$ — замкнутый шар, где $d(x, y) = ||x^{-1} \cdot y||$ — квазиметрика, порожденная однородной нормой

$$||(x_1, ..., x_r)|| = [|x_1|^{\alpha r!} + |x_2|^{r!} + ... + |x_r|^{\frac{2r!}{r}}]^{\frac{1}{2r!}}.$$

Замечание 2. В евклидовом пространстве известно [2], что из теоремы Марстранда следует существование борелевской функции f и счетного объединения липшицевых k-мерных многообразий $\{\Gamma_i\}$ в $\mathbb{R}^n$, что

$$\mu(A) = \sum_i \int\limits_{\Gamma_i \cap A} f(x)\, d\mathrm{Vol}^k(x) \quad \text{для всех борелевских } A. \tag{1}$$

Здесь Vol^k — обычная мера объема, определяющаяся на липшицевых многообразиях так же, как и в $\mathbb{R}^n$. До сих пор неизвестно, справедливо ли (1) на группах Карно. Возможно, выполненная нами работа послужит отправной точкой для решения этой проблемы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00875 А).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tyson J. T., Chousionis V.* Marstrand's density theorem in the Heisenberg group // Bull. Lond. Math. Soc. 2015. V. 47, No 5. P. 771–788.
2. *Preiss D., Kirchheim B.* Uniformly distributed measures in Euclidean spaces // Math. Scand. 2002. V. 90, No 1. P. 152–160.
3. *Mattila P.* Geometry of sets and measures in Euclidean spaces: fractals and rectifiability. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

К ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ О ВЫПУКЛОСТИ

Черников П. В.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
stork@math.nsc.ru

В [1] приводится следующая

Теорема 1. *Пусть $F(x)$, $g(x)$ — неубывающие неотрицательные функции, определенные на отрезке $[a,b]$, и*

$$\overline{S}_j = \min_{\{x_k\}} \sum_{k=0}^{j} [F(x_{k+1}) - F(x_k)] g(x_{k+1}), \tag{1}$$

где $a = x_0 \le x_1 \le \dots \le x_{j+1} = b$. Тогда последовательность $\{\overline{S}_j\}_{j=1}^{\infty}$ выпуклая, т. е.

$$\overline{S}_j - 2\overline{S}_{j+1} + \overline{S}_{j+2} \ge 0.$$

Для функций $F(x)$, $g(x)$, заданных на отрезке $[a,b]$, положим

$$S_j(\bar{x}) = \sum_{k=0}^{j} [F(x_{k+1}) - F(x_k)] g(x_{k+1}), \quad j \ge 1,\ \bar{x} \in Q_j,$$

где

$$Q_j = \{\bar{u} \in R^j : \bar{u} = (u_1, \dots, u_j),\ a \le u_1 \le \dots \le u_j \le b\}, \quad x_0 = a,\ x_{j+1} = b.$$

Положим также

$$T_0 = [F(b) - F(a)] g(b), \quad T_j = \inf_{\bar{x} \in Q_j} S_j(\bar{x}).$$

Строго говоря, писать в формуле (1) $\min\limits_{\{x_k\}}$ нельзя, так как в сделанных в теореме 1 предположениях он может и не существовать. Есть примеры.

Как поправить дело? Есть, очевидно, два способа. Можно в теореме 1 потребовать непрерывность функций $F(x)$ и $g(x)$. Тогда теорема 1 и ее доказательство в [1] оказываются верными. Можно вместо $\min\limits_{\{x_k\}}$ в теореме 1 писать $\inf\limits_{\{x_k\}}$. Последний подход к уточнению теоремы 1 здесь и используется.

Справедлива

Теорема 2. *Пусть $F(x)$, $g(x)$ — неубывающие функции, определенные на отрезке $[a,b]$. Тогда последовательность $\{T_j\}_{j=0}^{\infty}$ выпуклая, т. е.*

$$T_j - 2T_{j+1} + T_{j+2} \ge 0.$$

Отметим, что свойство выпуклости последовательности $\{T_j\}_{j=0}^{\infty}$ естественно используется для решения задачи (1), когда стоит вопрос о пополнении параметрического ряда [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дементьев В. Т.* Об одной задаче оптимального размещения точек на отрезке //Дискретный анализ. 1965. № 4. С. 35–39.

EXTENSION OF BILIPSCHITZ MAPS: A SURVEY

Alestalo P.[1], **Trotsenko D. A.**[2]

[1]*Aalto University, Helsinki, Finland;* pekka.alestalo@aalto.fi
[2]*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;* trotsenk@yandex.ru

Let (X, d) and (Y, d') be metric spaces, and let $L \geq 1$. A mapping $f\colon X \to Y$ is L-bilipschitz if

$$d(x, y)/L \leq d'(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y) \text{ for all } x, y \in X.$$

We give a survey of results related to the extension problem for L-bilipschitz mappings $f\colon A \to \mathbb{R}^n$, where $A \subset \mathbb{R}^k$. The most important question is the behavior of the bilipschitz constant L' of the extension $F\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$. The survey is divided into the following parts.

0. Basic examples showing why the extension may be difficult or impossible in some cases.

1. Optimal extension results with $L' = L$ for all $L \geq 1$. This case is very unusual, but can be obtained in at least two different situations.

2. General results where $L' > L$ depends quantitatively on L and possibly on the dimensions k and n.

3. The stability question: A special case of the previous part, where $L = 1 + \varepsilon$ and $L' = 1 + \varphi(\varepsilon)$ with $\varphi(\varepsilon) \to 0$ as $\varepsilon \to 0+$. The optimal results deal with the case $\varphi(\varepsilon) = C\varepsilon$ for some constant C.

4. Extension results in the case where the dimensions of the ambient spaces are increased. In this case extension is always possible, but the stability questions are more difficult.

We also list some open problems related to these extension properties.

EXACT CALCULATION OF THE SUM OF LORENTZ SPACES

Berezhnoi E. I.

Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia; ber@uniyar.ac.ru

Recently in the theory of partial differential equations, in the study of the maximal operator Hardy – Littlewood and other typical operators in harmonic analysis began to apply the so-called *grand-* and *small-* Lebesgue spaces. Unfortunately, explicit descriptions of these spaces in the conventional terms not. It turned out that if you replace the space of Lebesgue on the space of Lorenz, the situation is changing. Namely, in the present talk for collection of Lorentz spaces proposed accurate (with equality of norms) calculation of spaces $\Lambda^{(\xi} = \sum_{0\le\beta_0<\alpha<\beta_1\le 1}\xi(\alpha)\Lambda^{\alpha}$. On the basis of these facts managed to get of the extrapolation theorem for Lorentz spaces, Lebesgue and Marcinkiewicz with exact constants.

Let $\{B_\alpha\}$, $(\alpha\in(\beta_0,\beta_1)$, $-\infty\le\beta_0<\beta_1\le\infty)$, is a collection of Banach spaces and let every $\{B_\alpha\}$ is continuously embedded in a topological complete space V. Let $\xi\colon(\beta_0,\beta_1)\to\mathbb{R}_+$ is measurable function. The new space $\sum\{\xi,\alpha\}$ consists of functions, each of which has a finite norm:

$$\left\|b|\sum\{\xi,B_\alpha\}\right\| = \inf\{\Sigma\xi(\alpha_i)\|b_{\alpha_i}|B_{\alpha_i}\| : b=\Sigma b_{\alpha_i}$$

$$\text{the series converges in } V,\quad \alpha_i\in(\beta_0,\beta_1)\}.$$

Put $1/\alpha = p$, and let Λ^α, M^α, L^α, $(\alpha\in[0,1])$ is Lorentz, Marcinkiewicz or Lebesgue spaces on $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$. The definition of these spaces can be found in [1].

Theorem 1. *Let fix a pair of numbers $0\le\beta_0<\beta_1\le1$, subset Ω, the collection of Lorentz spaces Λ^α, $(\alpha\in(\beta_0,\beta_1))$ and the measurable function $\xi\colon(\beta_0,\beta_1)\to\mathbb{R}_+$. For $t\in(0,\mu(\Omega))$ define a function*

$$\psi_\xi(t) = \inf_{\alpha\in(\beta_0,\beta_1)}\xi(\alpha)\cdot t^\alpha. \tag{1}$$

Then we have the equality $\sum\{\xi,\Lambda^\alpha\} = \Lambda(\psi_\xi)$, and the norms in these spaces are identical. Here $\Lambda(\psi_\xi)$ is the Lorentz space, which is built based on the function ψ_ξ.

Theorem 2. *Let fix a pair of numbers $0\le\beta_0<\beta_1\le1$, subset Ω, the collection of Lorentz spaces Λ^α (collection of Marcinkiewicz spaces M^α or collection of Lebesgue spaces L^α), $(\alpha\in(\beta_0,\beta_1))$. Let X is the normed space, T is quasi-linear operator and function ξ is defined by with equality: $\xi(\alpha)=\|T|\Lambda^\alpha\to X\|$ $(\xi(\alpha)=\|T|M^\alpha\to X\|$ or $\xi(\alpha)=\|T|L^\alpha\to X\|)$. We define a function ψ_ξ by the formula (1).*
Then the operator T acting from $\Lambda(\psi_\xi)$ in to X and its norm is not greater than unity.

REFERENCES

1. *Bennett C., Sharpley R.,* Interpolation of Operators, Academic Press, Boston (1988).
2. *Berezhnoĭ E. I.,* “A sharp extrapolation theorem for Lorentz spaces,” Sib. Math. J., **54**, No. 3, 406–418 (2013).

ELEMENTARY DIFFERENTIALS OF INTEGER ORDER ON VARIABLE TORUS

Chueshev V. V., Chueshev A. V.

Kemerovo State University, Kemerovo, Russia; vvchueshev@ngs.ru

Let F_0 be a fixed compact Riemann surface of genus $g = 1$. The Teichmueller space $\mathbb{T}_1 = \mathbb{T}_1(F_0)$, consists of classes $[F_\mu, \{a_1^\mu, b_1^\mu\}]$ of conformally equivalent marked compact Riemann surface of genus one, which parametrized of points from $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. Here $F_\mu = \mathbb{C}/\Gamma_\mu$, where Γ_μ will be generate generators $A_{\mu 1}(z) = z + 1$, $B_{\mu 1}(z) = z + \mu$.

Definition. q-differential ϕ with respect to group Γ is called a differential $\phi(z)dz^q$ such that $\phi(Tz)(T'z)^q = \phi(z)$, $z \in \mathbb{C}$, $T \in \Gamma$.

Theorem. *On variable torus F_μ for every natural number $m > 1$, $q \in \mathbb{Z}$ exist elementary q-differential $\tau_{q;Q}^{(m)}$ with pole in every point $Q = Q(\mu) \in F_\mu$ exactly of order m, locally holomorphic depend from μ, which has general view divisor $(\tau_{q;Q}^{(m)}) = \frac{R_1 \cdots R_m}{Q^m}$, where $\varphi(R_1) = \varphi(Q^m) - \varphi(R_2 \cdots R_m)$ and φ is Jacobi mapping from F_μ to Jacobi manifold $J(F_\mu)$. Here divisors $R_2, \ldots, R_m$ and $Q = Q(\mu)$ can be choosing as locally holomorphic sections bundle integer divisors of degrees $m-1$ and 1 respectively over $\mathbb{T}_1$ for μ from every sufficiently small neighborhood $U(\mu_0) \subset \mathbb{T}_1$.*

UNBOUNDED TOPOLOGY IN LOCALLY SOLID VECTOR LATTICES

Emel'yanov E. Yu.

Middle East Technical University, Ankara, Turkey; eduard@metu.edu.tr

Several types of unbounded convergences in vector lattices were investigated recently in [1]–[9]. Some of these convergences are topological, others are not. Here we discuss the general case when the unbounded convergence has topological nature. It is happening if the lattice under the consideration possesses a locally solid topology. Some of basic results for the unbounded topology in locally solid vector lattices concerning metrizability, completely metrizability, and uniformizability are stated.

REFERENCES

1. *Aydın A., Emel'yanov E. Yu., Erkurşun–Özcan N., Marabeh M. A. A.*, "Unbounded p-convergence in lattice-normed vector lattices," arXiv:1609.05301v2.
2. *Aydın A., Emel'yanov E. Yu., Erkurşun–Özcan N., Marabeh M. A. A.*, "Compact-like operators in lattice-normed spaces," arXiv:1701.03073v2.
3. *Dabboorasad Y. A., Emel'yanov E. Yu., Marabeh M. A. A.*, "Unbounded m-convergence in multi-normed vector lattices," Preprint, 2017.
4. *Deng Y., O'Brien M., Troitsky V. G.*, "Unbounded norm convergence in Banach lattices," Positivity (to appear).
5. *Emel'yanov E. Yu., Marabeh M. A. A.*, "Two measure-free versions of the Brezis–Lieb lemma," Vladikavkaz. Mat. Zh., **18**, No. 1, 21–25 (2016).
6. *Gao N., Troitsky V. G., Xanthos F.*, "Uo-convergence and its applications to Cesáro means in Banach lattices," Isr. J. Math. (to appear).
7. *Kandić M., Marabeh M. A. A., Troitsky V. G.*, "Unbounded norm topology in Banach lattices," J. Math. Anal. Appl., **451**, 259–279 (2017).
8. *Zabeti O.*, "Unbounded absolute weak convergence in Banach lattices," arXiv: 1608.02151v5.
9. *Kandić M., Li H., Troitsky V. G.*, "Unbounded norm topology beyond normed lattices," arXiv:1703.10654.

ON DUBOVITSKIĬ – FEDERER – LUZIN PROPERTIES FOR SOBOLEV AND HÖLDER MAPPINGS

Ferone A.[1], **Korobkov M. V.**[2], **Roviello A.**[3]

[1] *Second University of Naples, Caserta, Italy;* Adele.FERONE@unicampania.it
[2] *Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;* korob@math.nsc.ru
[3] *Second University of Naples, Caserta, Italy;* albaroviello@msn.com

The Morse – Sard theorem requires that a mapping $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ is of class C^k, $k > \max(n-m, 0)$. In 1957 Dubovitskiĭ generalized this result by proving that almost all level sets for a C^k mapping has $\mathcal{H}^\nu$-negligible intersection with its critical set, where $\nu = n-m-k+1$ and $\mathcal{H}^\nu$ is the Hausdorff measure. Here the critical set, or m-critical set is defined as $Z_{v,m} = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{rank} \nabla v(x) < m\}$. Another generalization was obtained independently by Dubovitskiĭ and Federer in 1966, namely for C^k mappings $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ and integers $m \le d$ they proved that the set of m-critical values $v(Z_{v,m})$ is $\mathcal{H}^{q_\circ}$-negligible for $q_\circ = m-1+\frac{n-m+1}{k}$. They also established the sharpness of these results within the C^k category.

Here we formulate and prove a *bridge theorem* that includes all the above results as particular cases: namely, if a function $v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ belongs to the Holder class $C^{k,\alpha}$, $0 \le \alpha \le 1$, then for every $q > m-1$ the identity

$$\mathcal{H}^\mu(Z_{v,m} \cap v^{-1}(y)) = 0$$

holds for $\mathcal{H}^q$-almost all $y \in \mathbb{R}^d$, where

$$\mu = n - m + 1 - (k+\alpha)(q - m + 1).$$

The result is new even for the classical C^k-case (when $\alpha = 0$); similar result is established for the Sobolev classes of mappings $W^k_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$ with minimal integrability assumptions $p = \max(1, n/k)$, i.e., it guarantees in general only the continuity of a mapping. We cover also the case of fractional Sobolev spaces.

As a limiting case in this bridge theorem (for $q = m-1$) we also establish a new coarea type formula. Finally, we establish for Sobolev mappings the relative analogs of the Luzin N-property with respect to lower dimensional Hausdorff measure. We found the sharp version of these N-properties and the corresponding nontrivial counterexample for the limiting cases is demonstrated (based on the classical theory of the lacunary Fourier series).

The proofs of the most results are based on our previous joint papers with J. Bourgain (Princeton) and J. Kristensen (Oxford), see [1]–[2].

The authors were supported by the Russian Foundation for the Basic Research (project no. 17-01-00875).

REFERENCES

1. *Bourgain J., Korobkov M. V., Kristensen J.*, “On the Morse – Sard property and level sets of $W^{n,1}$ Sobolev functions on $\mathbb{R}^n$,” J. Reine Angew. Math., **2015**, No. 700, 93–112 (2015).
http://dx.doi.org/10.1515/crelle-2013-0002
2. *Hajlasz P., Korobkov M. V., Kristensen J.*, “A bridge between Dubovitskii – Federer theorems and the coarea formula,” J. Funct. Anal., Online first,
http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2016.10.031

ON KOSTLAN – SHUB – SMALE RANDOM POLYNOMIALS

Gichev V. M.

Omsk Branch of the Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Omsk, Russia;
gichev@ofim.oscsbras.ru

Euclidean norm $|\cdot|$ in a finite dimensional real vector space corresponds to the Gaussian probability distribution whose density is proportional to $e^{-|x|^2}$. The Kostlan – Shub – Smale (KSS in the sequel) random polynomial relates to the inner product in the space $\mathcal{P}_n^{m+1}$ of homogeneous of degree n polynomials on $\mathbb{R}^{m+1}$ defined by the following conditions: the monomials are pairwise orthogonal and $|x^\alpha|^2 = \alpha!$ for any monomial x^α. It can be defined by the equality $\langle u, v\rangle = u\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) v$ and has many remarkable properties. In particular, it is $\mathrm{SO}(m+1)$-invariant. To the best of my knowledge, this inner product was introduced in [1], the results on KSS random polynomials appear in [2]–[4].

There is the well-known decomposition $\mathcal{P}_n^{m+1} = \sum_{j\in J_n} |x|^{n-j}\mathcal{H}_j^{m+1}$, where J_n is the set of all integers j such that $0 \le j \le n$ and $n-j$ is even, $\mathcal{H}_j^{m+1}$ is the subspace of all harmonic polynomials in $\mathcal{P}_j^{m+1}$. The $\mathrm{SO}(m+1)$-invariant inner product in $\mathcal{H}_j^{m+1}$ is unique up to a scalar factor. The expectation of volumes of the sets $N_u = u^{-1}(0)$ and other metric quantities for random $u \in \mathcal{P}_n^{m+1}$ depends on the distribution of u. In the KSS and $L^2(S^m)$ models, $\mathsf{E}(\mathrm{Vol}\,(N_u))$ grows as $\sqrt{n}$ and n, respectively, as $n \to \infty$. Set $\nu_n(j) = \mathsf{E}(|\pi_j u|^2)/\mathsf{E}(|u|^2)$, where π_j is the orthogonal projection onto $\mathcal{H}_j^{m+1}$, $|\cdot|$ is the norm of $L^2(S^m)$, and u is a random KSS polynomial. For a natural extension of ν_n onto $(0,\infty)$ and any $t > 0$ we have

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu_n(\mu_n t)}{\bar\nu_n} = \left(t^2 e^{1-t^2}\right)^{\frac{m-1}{2}},$$

where $\mu_n = \sqrt{(m-1)n}$ and $\bar\nu_n = \max\{\nu_n(t) : t > 0\} = \frac{A_m}{\sqrt{n}}(1+o(1))$. Thus ν_n concentrates near μ_n. Moreover, the KSS random polynomial admits a good approximation with probability close to 1 by polynomials of degree $C\sqrt{n\ln n}$ in the Sobolev spaces on S^m. For example, if $l_n > \sqrt{2mn\ln n}$, then the inequality $\mathrm{dist}(u, \mathcal{P}_{l_n}) < \varepsilon_n |u|$ holds for a random KSS polynomial u with probability greater than $1 - \eta_n$ for all sufficiently large n, where dist and $|\cdot|$ stand for the distance and norm in $L^2(S^m)$, $\varepsilon_n = \alpha n^{-\frac{m}{2}}$, $\eta_n = \beta n^{-\frac{m}{2}}$, and α, β are independent of n. Similar results hold for the Sobolev spaces $H^k(S^m)$. Furthermore, if m grows with n and $\frac{m}{n} \to a > 0$, then $\nu_n(\sqrt{n}t)$ is asymptotic to $\sqrt{\frac{4+a}{\pi n}}\, e^{-(1+\frac{a}{4})(t-\sqrt{n}\sigma_a)^2}$, where $\sigma_a = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4a} - a)$.

The proof for most of these results will be published soon (it is available in arXiv, preprint 1509.01449).

REFERENCES

1. *Stein E. M.*, Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton (1970).
2. *Kostlan E.*, “On the distribution of roots of random polynomials,” in: The work of Smale in differential topology, From Topology to Computation, Springer, 1993, pp. 419–431.
3. *Shub M., Smale S.*, “Complexity of BezoutB”s theorem II: volumes and probabilities,” in: Computational Algebraic Geometry, Birkhšauser, 1993, pp. 267–285.
4. *Kostlan E.*, “On the expected number of real roots of a system of random polynomial equations,” Foundations of Computational Mathematics, World Scientific Publishing, 2002, pp. 149–188.

QUASIMETRIC SPACES AND THEIR GENERALIZATIONS

Greshnov A. V.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;
greshnov@math.nsc.ru

Let X is an arbitrary set consisting of at least two points, and $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}_+$ is a function satisfying the identity axiom: $x = y \Leftrightarrow \rho(x, y) = 0$. We call ρ a distance function. The value $\rho(x, y)$ is called a distance from x to y. Distance function ρ is called quasimetric [1] if the following triangle inequality $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ holds for all x, y, $z \in X$. (X, ρ) is called quasimetric space. In many works dealing with some problems of theory of functional classes authors call a distance function ρ by quasimetric if ρ is symmetric ($\rho(x, y) = \rho(y, x)$) and satisfies the following general triangle inequality $\rho(x, z) \leq q(\rho(x, y) + \rho(y, z))$ $\forall x, y, z \in X$, $q = const > 1$ (see, for example, [2]).

Consider an arbitrary function $f\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ such that $f(t_1, t_2) \to 0$ when $(t_1, t_2) \to (0, 0)$. A distance function ρ is called *f-quasimetric* if the following *f-triangle inequality* holds $\rho(x, z) \leq f(\rho(x, y), \rho(y, z))$ $\forall x, y, z \in X$. The pair (X, ρ) is called f-quasimetric space. Obviously, if $f(t_1, t_2) = t_1 + t_2$ then ρ is quasimetric. In recent work [3] it was studied topology of f-quasimetric spaces; in particular, the quasi-metrization theorems for f-quasimetrics were proved in [3].

In the most important for applications case, $f(t_1, t_2) \equiv q_1 t_1 + q_2 t_2$ for some $q_1 > 0$, $q_2 > 0$. Then the function ρ is called *(q_1, q_2)-quasimetric* and the pair (X, ρ) is called *(q_1, q_2)-quasimetric space*. Note that in this case $q_1 \geq 1$, $q_2 \geq 1$ since set X contains at least two elements. (q_1, q_2)-quasimetric spaces were introduced by A. V. Arutunov and A. V. Greshnov in [4,5] were sufficient conditions for the existence of a coincidence point of two mappings acting between (q_1, q_2)-quasimetric spaces such that one was a covering mapping and the other satisfied the Lipschitz condition were obtained.

In our talk we will discuss some applications of theory of the f-quasimetric and (q_1, q_2)-quasimetric spaces to some problems of topology, functional classes and non-holonomic geometry.

The authors were supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 17-01-00801).

REFERENCES

1. *Wilson W. A.*, “On quasi-metric spaces,” American J. of Math., **53**, No. 3, 675–684 (1931).
2. *Heinonen U.*, Lectures on Analysis on Metric Spaces, Universitext, Springer, New York (2001).
3. *Arutyunov A. V., Greshnov A. V., Lokutsievskii L. V., Storojuk K. V.*, “Topological and geometrical properties of spaces with symmetric and nonsymmetric f-quasimetrics,” Topology Appl., **221**, 178–194 (2017).
4. *Arutyunov A. V., Greshnov A. V.*, “Theory of (q_1, q_2)-quasimetric spaces and coincidence points,” Dokl. Math., **94**, No. 1, 434–437 (2016).
5. *Arutyunov A. V., Greshnov A. V.*, “(q_1, q_2)-quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points,” Izv. Ross. Akad. Nauk, Ser. Mat. (accepted).

AVERAGING SCALE-INVARIANT CASSINIAN METRICS OF THE EUCLIDEAN SPACE WITH FINITE PUNCTURES

Ibragimov Zair Sh.

California State University at Fullerton, Fullerton, California, USA;
zibragimov@fullerton.edu

The hyperbolic metric has been a powerful tool in planar complex analysis. In higher dimensional Euclidean spaces, the hyperbolic metric exists only in balls and half-spaces and the lack of hyperbolic metric in general domains has been a primary motivation for introducing the so-called *hyperbolic-type metrics* (i.e., metrics that more or less resemble the hyperbolic metric) within the context of geometric function theory. Examples of hyperbolic-type metrics include quasihyperbolic metric, j-metric, $\tilde{j}$-metric, Ferrand's metric, Apollonian metric, Seittenranta's metric, half-apollonian metric, scale-invariant Cassinian metric and Möbius-invariant Cassinian metric. An important feature of the hyperbolic metric is its δ-hyperbolicity. The so-called *two-point* metrics such as, Apollonian metric, Seittenranta's metric and Möbius-invariant Cassinian metric, are δ-hyperbolic. But the *one-point* metrics such as, $\tilde{j}$-metric, half-apollonian metric and scale-invariant Cassinian metric, are δ-hyperbolic only if the domain on which they are defined is a punctured Euclidean space.

Given $p \in \mathbb{R}^n$, let $D_p = \mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ be a punctured space. The scale-invariant Cassinian metric $\tilde{\tau}_p$ on D_p is defined by

$$\tilde{\tau}_p(x,y) = \log\Big(1 + \frac{|x-y|}{\sqrt{|x-p||y-p|}}\Big).$$

For a general domain $D \subset \mathbb{R}^n$ with $\mathrm{Card}\,(\partial D) \geq 2$ the scale-invariant Cassinian metric $\tilde{\tau}_D$ on D is defined by

$$\tilde{\tau}_D(x,y) = \sup_{p\in\partial D} \tilde{\tau}_p(x,y) = \sup_{p\in\partial D} \log\Big(1 + \frac{|x-y|}{\sqrt{|x-p||y-p|}}\Big).$$

Theorem 1 [1, Remark 3.4]. *The metric $\tilde{\tau}_p$ is δ-hyperbolic with $\delta = \log 3$. If $D \subset \mathbb{R}^n$ is a domain with* $\mathrm{Card}\,(\partial D) \geq 2$*, then $\tilde{\tau}_D$ is not δ-hyperbolic for any $\delta \geq 0$.*

Suppose now that $D = \mathbb{R}^n \setminus \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ for some distinct points $p_1, p_2, \ldots, p_k$ in $\mathbb{R}^n$. Theorem 1 implies that the scale-invariant Cassinian metric $\tilde{\tau}_D$ on D is not δ-hyperbolic. Note that in this case, $\tilde{\tau}_D$ is the supremum of $\tilde{\tau}_{p_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. It turns out that if one defines a metric τ_D on D by takes the simple average of $\tilde{\tau}_{p_i}$ instead of their supremum, namely,

$$\tau_D(x,y) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \tilde{\tau}_{p_i}(x,y) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \log\Big(1 + \frac{|x-y|}{\sqrt{|x-p_i||y-p_i|}}\Big), \quad x, y \in D,$$

then δ-hyperbolicity can be preserved. Note that the average of metrics is easily seen to be a metric.

Theorem 2 [2, Theorem 4.5]. *The metric τ_D is δ-hyperbolic with $\delta \leq 3\log 3$. Moreover, δ is independent of k and the boundary at infinity of the space (D, τ_D) can be identified with the set $\{p_1, p_2, \ldots, p_k, \infty\}$.*

REFERENCES

1. *Ibragimov Z.*, "A scale-invariant Cassinian metric," J. Anal., DOI: 10.1007/s41478-016-0018-1 (2017).
2. *Aksoy A. G., Ibragimov Z., Whiting W.*, "Averaging scale-invariant Cassinian metrics," Preprint, 2017.

TWO SPECIAL DIFFERENTIAL OPERATORS ON HEISENBERG GROUP: INTEGRAL REPRESENTATION FORMULAS AND COERCITIVITY

Isangulova D. V.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia; dasha@math.nsc.ru

We consider Heisenberg group $\mathbb{H}$ with horizontal subbundle $H = \operatorname{span}\{X_1, X_2\}$ and Carnot – Carathéodory metric d where

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_2\frac{\partial}{\partial x_3}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} - 2x_1\frac{\partial}{\partial x_3}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} = -\frac{1}{4}[X_1, X_2]$$

are basis left-invariant vector fields. Set $\operatorname{Box}(\mathbf{0}, r) = \{|x_1| < r, |x_2| < r, |x_3| < r^2\}$, $r > 0$.

Consider a mapping $w = (u, v) \colon \Omega \subset \mathbb{H} \to \mathbb{R}^2$ of the class $W_p^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$. Define $\mathcal{Q}_1 w = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_1 w \\ \mathcal{T} w \end{pmatrix}$, $\mathcal{Q}_2 w = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_2 w \\ \mathcal{T} w \end{pmatrix}$, where $\mathcal{S}_1 w = \dfrac{D_h w + (D_h w)^t}{2}$, $D_h w = \begin{pmatrix} X_1 u & X_2 u \\ X_1 v & X_2 v \end{pmatrix}$, $\mathcal{S}_2 w = \dfrac{D_h w + (D_h w)^t}{2} - \dfrac{tr D_h w}{2} I$, $\mathcal{T} w = \begin{pmatrix} X_2 X_1 v - 2X_1 X_2 v - X_1^2 u \\ 2X_2 X_1 u - X_1 X_2 u + X_2^2 v \end{pmatrix}$.

Theorem 1. *Kernels of $\mathcal{Q}_1$ and $\mathcal{Q}_2$ coincide with horizontal part of mappings from the Lie algebra of the isometry group and of the group of conformal mappings on $\mathbb{H}$, respectively.*

Theorem 2. *Let $\varkappa = 2\sqrt{6} + \frac{3}{2}$. There are projectors $\mathbf{\Pi}_i \colon L_1(\operatorname{Box}(\mathbf{0}, 1); \mathbb{R}^2) \to \ker \mathcal{Q}_i$ such that for each function $w \in C^\infty(\operatorname{Box}(\mathbf{0}, \varkappa); \mathbb{R}^2)$ the integral representation formulas are fulfilled*:

$$w(\mathbf{x}) = \mathbf{\Pi}_i w(\mathbf{x}) + \int\limits_{\operatorname{Box}(\mathbf{0}, \varkappa)} \big(L_i(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \mathcal{Q}_i w(\mathbf{y}) + M_i(\mathbf{y}^{-1}\mathbf{x}) \mathcal{S}_i w(\mathbf{y}) + N_i(\mathbf{y}^{-1}\mathbf{x}) \mathcal{T} w(\mathbf{y}) \big)\, d\mathbf{y},$$

for every $\mathbf{x} \in \operatorname{Box}(\mathbf{0}, 1)$, $i = 1, 2$, where $L_i \in C^\infty(\mathbb{H} \times \mathbb{H})$, $\operatorname{supp} \underline{L_i(\cdot, \mathbf{x})} \subseteq \operatorname{Box}(\mathbf{0}, \varkappa)$ for $\mathbf{x} \in \operatorname{Box}(\mathbf{0}, 1)$, $M_i, N_i \in C^\infty(\mathbb{H} \setminus \{\mathbf{0}\})$, $\operatorname{supp} M_i, \operatorname{supp} N_i \subseteq \overline{\operatorname{Box}(\mathbf{0}, 1)}$, and

$$|X^J M_i(\mathbf{x})| \leqslant C d(\mathbf{x}, \mathbf{0})^{-k-3}, \quad |X^J N_i(\mathbf{x})| \leqslant C d(\mathbf{x}, \mathbf{0})^{-k-2}$$

for any multi-index $J = \{i_1, \ldots, i_k\} \in \{1, 2\}^k$. Here $X^J = X_{i_1} \ldots X_{i_k}$.

To prove Theorem 2 we use special integral representation formula from [1]. Next theorem shows coercitivity of operators $\mathcal{Q}_1$ and $\mathcal{Q}_2$.

Theorem 3. *Let $1 < p < \infty$, $w \in W_p^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$, Ω be a John domain $J(\alpha, \beta)$. Then the coercive estimates are fulfilled:*

$$\|w - \mathbf{\Pi}_i w\|_{q,\Omega} \leqslant C_i \Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{\theta_i} (\operatorname{diam} \Omega)^{1 - \frac{4}{p} + \frac{4}{q}} \Big[\|\mathcal{S}_i w\|_{p,\Omega} + \operatorname{diam} \Omega \|\mathcal{T} w\|_{p,\Omega} \Big],$$

$$\|D_h(w - \mathbf{\Pi}_i w)\|_{p,\Omega} \leqslant D_i \Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{2i+2} \Big[\|\mathcal{S}_i w\|_{p,\Omega} + \operatorname{diam} \Omega \|\mathcal{T} w\|_{p,\Omega} \Big], \quad i = 1, 2,$$

where $\theta_i = \begin{cases} 2i + 3 & \text{if } q \neq \infty, \\ 2i + 3 + 4/p & \text{if } q = \infty, \end{cases}$ $i = 1, 2$, $p \leqslant q \leqslant \frac{4p}{4-p}$ for $1 < p < 4$; $p \leqslant q < \infty$ for $p = 4$; $p \leqslant q \leqslant \infty$ for $p > 4$. Constants C_1, C_2, D_1, D_2 are independent of w and Ω. The work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project number 1.3087.2017/ПЧ).

REFERENCES

1. *Isangulova D. V., Vodopyanov S. K.*, "Coercive estimates and integral representation formulas on Carnot groups," Eurasian Math. J., **1**, No. 3, 58–96 (2010).

ON SOME USE OF GENERAL POSITION THEOREM FOR SELF-SIMILAR STRUCTURES

Kamalutdinov K. G.[1], **Tetenov A. V.**[2]

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;
[1]kirdan15@mail.ru, [2]a.tetenov@gmail.com

Let $\mathcal{S} = \{S_1, \dots S_m\}$ be a system of contraction mappings in $\mathbb{R}^n$, G be a semigroup, generated by $\mathcal{S}$. A nonempty compact set $K \subset \mathbb{R}^n$ is called an attractor of system $\mathcal{S}$, if $K = \bigcup\limits_{i=1}^{m} S_i(K)$. If all S_i are similarities, then K is called a self-similar set, and a pair $(K, \mathcal{S})$ is called a self-similar structure. A system $\mathcal{S}$ is said to satisfy the Weak Separation Condition, if $\mathrm{Id} \notin \overline{\{g^{-1}f : \ f, g \in G\}}$.

We consider a family of self-similar sets $K_{pq} \subset \mathbb{C}$, for p, $q \in \mathbb{C}$, $|p|$, $|q| \le 1/8$, which are defined as attractors of corresponding systems $\mathcal{S}_{pq} = \{S_1, \dots, S_4\}$ of similarities of $\mathbb{C}$, where $S_1(z) = pz$, $S_2(z) = qz$, $S_3(z) = pz - p + 1$, $S_4(z) = qz - q + 1$.

First we prove the following General Position Theorem for Hölder parametrized sets:

Theorem 1. *Let K_i, $i = 1, 2$ be compact metric spaces and $D \subset \mathbb{R}^d$ be a closed ball. Let $\varphi_i(\xi, x) \colon D \times K_i \to \mathbb{R}^n$ be continuous maps, such that*
(a) they are α-Hölder with respect to x with the same Hölder constant C;
(b) there is $M > 0$ such that for any $x_1 \in K_1$, $x_2 \in K_2$, the function $\Phi(\xi, x_1, x_2) = \varphi_1(\xi, x_1) - \varphi_2(\xi, x_2)$ satisfies the inequality $\|\Phi(\xi', x_1, x_2) - \Phi(\xi, x_1, x_2)\| \ge M\|\xi' - \xi\|$. Then $\Delta = \{\xi \in D| \quad \varphi_1(\xi, K_1) \cap \varphi_2(\xi, K_2) \ne \emptyset\}$ is a compact set with Hausdorff dimension not exceeding $\min\left\{\dfrac{\dim_H(K_1 \times K_2)}{\alpha}, d\right\}$.

Using modified version of Barnsley's Collage Theorem [1] and Theorem 1, we prove the following result about K_{pq} family:

Theorem 2. *There is a subset $\mathcal{D}$ of full measure in the set $\{(p, q) : \ |p|, |q| \le 1/8\} \subset \mathbb{C}^2$ such that the self-similar structures $(K_{pq}, \mathcal{S}_{pq}), (p, q) \in \mathcal{D}$, are pairwise isomorphic and possess the following properties:*
(i) each set K_{pq} is a discontinuum with $dim_H K_{pq} \le 2/3$;
(ii) the numbers p, q, generate a dense subgroup of second type [2] *in $\mathbb{C}$, so $\mathcal{S}_{pq}$ do not satisfy the Weak Separation Property;*
(iii) $\lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{K_{pq}}{t} = \mathbb{C}$.

The authors were supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00414).

REFERENCES

1. *Barnsley M. F.*, Fractals Everywhere, Academic Press (1988).
2. *Tetenov A. V., Kamalutdinov K. G., Vaulin D. A.*, "On two classes of dense 2-generator subgroups in $\mathbb{C}$," Sib. Èlektron. Mat. Izv., **11**, 891–895 (2014).

METRIC PROPERTIES OF HÖLDER MAPPINGS ON NON-HOLONOMIC STRUCTURES

Karmanova M. B.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;
maryka@math.nsc.ru

The results obtained in [1] and related papers for intrinsically Lipschitz mappings of non-holonomic structures are well-known in Carnot – Carathéodory spaces theory. Nevertheless, it is well-known that the construction of non-trivial examples of such mappings is a complicated problem requiring deep research (see, e.g., [2] and [3]) even for Carnot groups. In contrast to this, it is easy to construct examples of intrinsically Hölder mappings: all Lipschitz (in Riemannian sense) mappings are Hölder in sub-Riemannian sense. Moreover, graph mappings constructed basing on Lipschitz ones are also Hölder. The goal of the research is to deduce metric properties of these classes of mappings. The main tools are the new concepts of *polynomial sub-Riemannian differentiability* [4] (providing suitable approximation of Hölder mappings) and of *intrinsic measure* on image surfaces (preserving non-holonomic structure under Hölder mappings). The following results about the area formulas are obtained.

Theorem [5]. *The following area formula for intrinsic Hausdorff measure*

$$\int\limits_{\Omega} \mathcal{J}(\varphi_\Gamma, x)\, d\mathcal{H}^\nu(x) = \int\limits_{\varphi_\Gamma(\Omega)} d\mathcal{H}^\nu_\Gamma(y),$$

is valid for classes of graph mappings φ_Γ of Carnot groups, where $\varphi\colon \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$, $\Omega \subset \mathbb{G}$,

$$\mathcal{J}(\varphi_\Gamma, x) = \begin{cases} \prod\limits_{j=1}^{M} \sqrt{\det\bigl(E_{n_j} + (\widehat{D}\varphi)^*_{\widetilde{V}_j, V_j}(x)(\widehat{D}\varphi)_{\widetilde{V}_j, V_j}(x)\bigr)} & \text{if } \varphi \in \mathrm{Lip}_{SR}(\Omega, \widetilde{\mathbb{G}}) \\ \prod\limits_{j=1}^{M} \sqrt{\det\bigl(E_{n_j} + D\bigl((\widehat{D}_P\varphi)(x)\bigr)(x)^*_{V_j, \widetilde{V}_j} D\bigl((\widehat{D}_P\varphi)(x)\bigr)(x)_{V_j, \widetilde{V}_j}\bigr)} & \text{else.} \end{cases}$$

If $\dim \mathbb{G} \leq \dim \widetilde{\mathbb{G}}$ and $D\bigl((\widehat{D}_P\varphi)(x)\bigr)(x)$ is non-degenerate then

$$\int\limits_{\Omega} \sqrt{\det\bigl(D_{\mathrm{diag}}\bigl(\widehat{D}_P\varphi(x)\bigr)^*(x) D_{\mathrm{diag}}\bigl(\widehat{D}_P\varphi(x)\bigr)(x)\bigr)}\, d\mathcal{H}^\nu(x) = \int\limits_{\varphi(\Omega)} d\mathcal{H}^\nu_\Gamma(y)$$

is valid for classes of some Hölder mappings of Carnot groups.

Remark [5]. If we use the initial basis and measure in the image, then the sub-Riemannian Hausdorff measure of the image surface is different from that of the preimage. Moreover, there exist image surfaces such that second derivatives influence their sub-Riemannian Hausdorff measure essentially. The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-31-60036-mol-a-dk).

REFERENCES

1. *Vodopyanov S.*, "Geometry of Carnot – Carathéodory spaces and differentiability of mappings," in: The Interaction of Analysis and Geometry, Contemporary Mathematics **424**, Amer. Math. Soc., Providence, 2007, pp. 247–301.
2. *Koranyi A., Reimann H. M.*, "Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group," Adv. Math., **111**, 1–87 (1995).
3. *Warhurst B.*, "Jet spaces as nonrigid Carnot groups," J. Lie Theory, **15**, 341–356 (2005).
4. *Karmanova M. B.*, "The polynomial sub-Riemannian differentiability of some Höler mappings on Carnot groups," Sib. Math. J., **58**, No. 2, 232–254 (2017).
5. *Karmanova M. B.*, "Area formulas for classes of Hölder mappings of Carnot groups," Sib. Math. J., **58** (2017), to appear.

SOME APPLICATIONS OF BOOLEAN VALUED ANALYSIS

Kusraev A. G.[1], **Kutateladze S. S.**[2]

[1] *Vladikavkaz Scientific Centre RAS, Vladikavkaz, Russia;*
kusraev@smath.ru
[2] *Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;*
sskut@math.nsc.ru

A general scheme of applying the Boolean valued approach is as follows, see [1]. Assume that $\mathbf{X} \subset \mathbb{V}$ and $\mathbb{X} \subset \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ are two classes of mathematical objects, respectively *external* and *internal* with respect to a Boolean valued model $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ over a complete Boolean algebra $\mathbb{B}$. Suppose we are able to prove the following

Boolean Valued Representation Result: Every external $X \in \mathbf{X}$ embeds into an appropriate Boolean valued model $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ becoming an internal object $\mathcal{X} \in \mathbb{X}$.

Boolean Valued Transfer Principle then tells us that every theorem about $\mathcal{X}$ within Zermelo – Fraenkel set theory ZFC has its counterpart for the original object X interpreted as a Boolean valued object $\mathcal{X}$ within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.

Boolean Valued Machinery enables us to perform some translation of theorems from $\mathcal{X} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ to $X \in \mathbb{V}$ making use of appropriate general operations and the principles of Boolean valued models.

Consider some recent applications. The relevant information can be found in [1].

Theorem 1. *Let X be a nonlocally one-dimensional universally complete vector lattice. Then there exist a vector sublattice $X_0 \subset X$ and a band preserving linear bijection $T\colon X_0 \to X$ such that T^{-1} is also band preserving but X_0 and X are not lattice isomorphic.*

Theorem 2. *Let X be a universally complete vector lattice. Then X admits a structure of complex vector space with a band preserving complex multiplication if and only if there is no locally one-dimensional band in X.*

Theorem 3. *Let $X_1, \dots, X_n$ be vector lattices and $(Y, \circ)$ a unital f-algebra. For any lattice n-morphism $\Phi\colon X_1 \times \ldots \times X_n \to Y$ there exist n lattice homomorphisms $S_k : X_k \to Y$ $(k := 1, \dots, n)$ such that*

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = S_1(x_1) \circ \ldots \circ S_n(x_n) \quad (x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n).$$

Theorem 4. *Let A be a universally complete semiprime f-algebra and let K be a componentwise closed rationally complete subring of A with $A = K^{\perp\perp}$. Then there exists a band preserving additive operator S in A such that K coincides with the homogeneity ring $H_S := \{a \in A : S(ax) = aS(x)\}$ of S.*

Theorem 5. *Let K be a semiprime rationally complete commutative ring and let X be a separated injective module over K. There exists a partition of unity $(e_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ in $\mathbb{P}(K)$ with Γ a set of cardinals such that $e_\gamma X$ is strictly Hamel γ-homogeneous for all $\gamma \in \Gamma$. Moreover, X is isomorphic to $\prod_{\gamma\in\Gamma} e_\gamma X$ and the partition of unity $(e_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ is unique up to permutation.*

REFERENCES

1. *Kusraev A. G., Kutateladze S. S.*, Boolean Valued Analysis: Selected Topics, South. Math. Inst. VSC RAS, Vladikavkaz (2014).

FACTORIZATION OF HOMOGENEOUS POLYNOMIALS

Kusraeva Z. A.

Southern Mathematical Institute – the Affiliate of Vladikavkaz Scientific Centre RAS, Vladikavkaz, Russia; zali13@mail.ru

Definition 1. Fix any $s \in \mathbb{N}$ and consider vector lattices E and F. A mapping $P\colon X \to Y$ is called *a homogeneous polynomial of degree s* if $P(x) = \check{P}(x, \dots, x)$ $(x \in E)$ for some symmetric s-linear operator $\check{P}\colon E^s \to F$.

Definition 2. A homogeneous polynomial P from E to F is said to be *orthogonally additive*, whenever $|x| \wedge |y| = 0$ implies $P(x + y) = P(x) + P(y)$ for all x, $y \in E$.

Definition 3. Let E be a quasi-Banach lattice, Y be a quasi-Banach space, and $0 < p \le \infty$, $1 \le s \in \mathbb{N}$. An s-homogeneous polynomial $P\colon E \to F$ is said to be *p-concave* if there exists a constant $M \in \mathbb{R}_+$ such that

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \|P(x_k^+) - P(x_k^-)\|^{p/s} \right)^{1/p} \le M \left\| \left(\sum_{k=1}^{m} |x_k|^p \right)^{1/p} \right\|$$

for any finite collection $x_1, \dots, x_m \in E$.

Now we'll formulate one of two main results of this work.

Theorem 1. *Let E be a quasi-Banach lattice, Y be a quasi-Banach space, $1 \le s \in \mathbb{N}$ and $0 < p \le \infty$. An s-homogeneous orthogonally additive polynomial $P\colon E \to Y$ is p-concave if and only if there exist a p/s-concave quasi-Banach lattice F, a bounded linear operator $S\colon F \to Y$, and an order interval preserving lattice polymorphism $Q\colon E \to F$ so that $P = S \circ Q$.*

Proof. The proof is based on two facts. The first one is that the representation theorem for orthogonally additive polynomials obtained by Z. Kusraeva in [1], where it is shown that every orthogonally additive homogeneous polynomials represented as a composition of a linear bounded operator and an exponential-like function. The second one is a linear case of this theorem proved by S. Reisner in [2] and Y. Raynaud, P. Tradacete in [3], where they characterized q-concave linear operators as those factorable through q-concave Banach lattice.

In the second main result we obtain a version of Grothendieck's inequality for orthogonally additive polynomials in quasi-Banach lattices.

Theorem 2. *Let F be an L-convex quasi-Banach lattice. Then there exists a constant A depending only on F such that whenever E is a quasi-Banach lattice and $P\colon E \to F$ is a bounded orthogonally additive s-homogeneous polynomial then for any finite collection $x_1, \dots, x_n \in E$ the inequality holds:*

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^{n} |P(x_k^+) - P(x_k^-)|^2 \right)^{1/2} \right\| \le A\|P\| \left\| \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^{2s} \right)^{1/(2s)} \right\|^s.$$

For bounded linear operators between Banach spaces this was obtained by J. L. Krivine and extended by N. J. Kalton [4] to quasi-Banach setting.

REFERENCES

1. *Kusraeva Z. A.*, “Representation of orthogonally additive polynomials,” Sib. Math. J., **52**, No. 2, 248–255 (2011).
2. *Raynaud Y., Tradacete P.*, “Interpolation of Banach lattices and factorization of p-convex and q-concave operators,” Integral Equations Oper. Theory, **66**, No. 1. 79–112 (2010).
3. *Kalton N. J.*, “Convexity conditions for non-locally convex lattices,” Glasg. Math. J., No. 25, 141–142 (1984).

NON-HOLONOMIC GEODESIC EQUATIONS ON THE GROUP OF DIFFEOMORPHISMS OF THE UNIT CIRCLE

Markina I. G.

University of Bergen, Bergen, Norway; irina.markina@uib.no

We generalize the concept of sub-Riemannian geometry to infinite-dimensional manifolds modeled on convenient vector spaces. On a sub-Riemannian manifold M, the metric is defined only on a sub-bundle $\mathcal{H}$ of the tangent bundle TM, called the horizontal distribution. Similarly to the finite-dimensional case, we are able to split possible candidates for minimizing curves into two categories: semi-rigid curves that depend only on $\mathcal{H}$, and normal geodesics that depend both on $\mathcal{H}$ itself and on the metric on $\mathcal{H}$. In this sense, semi-rigid curves in the infinite-dimensional case generalize the notion of singular curves for finite dimensions. In particular, we study the case of regular Lie groups. In the talk I will concentrate on the group of sense-preserving diffeomorphisms $\mathrm{Diff}\ \mathrm{S}^1$ of the unit circle. The horizontal distributions chosen to be the Ehresmann connections with respect to a projection to the space of normalised univalent functions. In these cases we prove controllability and find formulas for the normal geodesics with respect to different metrics, one of which is obtained as the pullback of the invariant Kählerian metric on the class of normalized univalent functions. The geodesic equations are analogues to the Camassa – Holm, Hunter – Saxton, KdV, and other known non-linear PDE. Another example admitting the similar geometry is the central extension of the group of diffeomorphisms of the unit circle, called the Virasoro – Bott group.

The author was partially supported by ISP project 239033/F20 of Norwegian Research Council, as well as SIU project PNA-2015/10044.

REFERENCES

1. *Grong E., Markina I., Vasiliev A.,* "Sub-Riemannian structures corresponding to Kählerian metrics on the Universal Teichmüeller space and curve," in: Proceeding of the Conference "60 years Analytic Functions in Lublin" in memory of Jan G. Krzyz, 2012, pp. 98–115; arXiv:1202.6135.
2. *Grong E., Markina I., Vasiliev A.,* "Sub-Riemannian geometry of infinite dimensional manifolds," J. Geom. Anal., **25**, No. 4, 2474–2515 (2015).

ONE-PARAMETER EXTENSIONS OF THE HEISENBERG GROUP AS SUBGROUPS OF THE SYMPLECTIC GROUP AND ADMISSIBLE VECTORS

Namngam K.[1], **Schulz E.**[2]

[1]*Department of Mathematics, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok, Thailand;* knkampan@kmitl.ac.th
[2]*School of Mathematics, Suranaree University of Technology, Nakhon Ratchasima, Thailand;* eckart@g.sut.ac.th

The Heisenberg group $\mathbb{H}^n$ is the Euclidean space $\big\{(x,\omega,z) : x,\omega \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}\big\}$ with group operation $(x,\omega,z)(\tilde{x},\tilde{\omega},\tilde{z}) = \big(x+\tilde{x}, \omega+\tilde{\omega}, z+\tilde{z}+(\omega\tilde{x}-x\tilde{\omega})/2\big)$. Given a continuous one-parameter family of automorphisms α_t on $\mathbb{H}^n$ which leave position space $\{(x,0,0) : x \in \mathbb{R}^n\}$ and momentum space $\{(0,\omega,0) : \omega \in \mathbb{R}^n\}$ invariant, we consider the semi-direct product $G_{p,B} = \mathbb{H}^n \rtimes_\alpha \mathbb{R}$.

Theorem 1. *Let α_t be as above. There exists a unique pair $p \in \mathbb{R}$, $B \in M_n(\mathbb{R})$ so that $\alpha_t(x,\omega,z) = \big(e^{Bt}x, e^{pt}e^{-B^Tt}\omega, e^{pt}z\big)$ for all $(x,\omega,z) \in \mathbb{H}^n$.*

Theorem 2. *Two groups $G_{p,B}$ and $G_{\tilde{p},\tilde{B}}$ are isomorphic if and only if*

1. *either $p = \tilde{p} = 0$ and there exist matrices B_1, B_2 and $\alpha \neq 0$ so that*
$$B \simeq \mathrm{diag}(B_1,B_2) \quad \text{and} \quad \tilde{B} \simeq \alpha\, \mathrm{diag}(B_1, -{B_2}^T),$$
2. *or $p\tilde{p} \neq 0$ and there exist matrices B_1, B_2 so that*
$$B \simeq p\, \mathrm{diag}(B_1,B_2) \quad \text{and} \quad \tilde{B} \simeq \tilde{p}\, \mathrm{diag}(B_1, I-{B_2}^T).$$

Theorem 3. *Let $p \neq 0$, or $p = 0$ and $B \neq -B^T$. Then $G_{p,B}$ may be identified with a closed subgroup of the symplectic group $Sp(n+1,\mathbb{R})$ as well as a closed subgroup of the affine group $Aff(n+1,\mathbb{R})$ in a natural way. Furthermore, the corresponding metaplectic representation of $G_{p,B}$ is equivalent to a sum of two wavelet representations.*

Given a projective representation π of a locally compact group G on Hilbert space H, a vector $\phi \in H$ is called admissible if $\int_G |\langle \pi(g)\phi, \phi\rangle|^2\, dg = \|\phi\|^2$. Drawing on known admissibility conditions for the wavelet representation [1,2], we obtain:

Theorem 4. *Let $p \neq 0$. Then $\phi \in L^2(\mathbb{R}^{n+1})$ is an admissible vector for the metaplectic representation of $G_{p,B}$ if and only if*
$$2^{n+1}|p|^{-1} \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \overline{\phi\left((-1)^i u\right)}\, \phi\left((-1)^j u\right)\, \frac{du}{u_1^{2n+2}} = \delta_{i,j} \qquad \forall\, i,j \in \{0,1\}.$$
Here $\mathbb{R}^{n+1}_+$ denotes the half-space $\{u = (u_1,\ldots,u_{n+1}) : u_1 > 0\}$. There are no admissible vectors when $p = 0$.

We note that this admissibility condition is independent of the choice of matrix B.

REFERENCES

1. *Führ, H.*, Abstract Harmonic Analysis of Continuous Wavelet Transforms, Springer, Berlin (2005).
2. *Laugesen R. S., Weaver N., Weiss G., Wilson E. N.*, “A characterization of the higher dimensional groups associated with continuous wavelets,” J. Geom. Anal., **12**, 89–102 (2002).

SOME GENERALIZATIONS OF GAGLIARDO – NIRENBERG INEQUALITIES IN THE METRIC CASE

Romanovskii N. N.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia; nnrom@math.nsc.ru

In [1] a new definition of Sobolev spaces in measure-metric case was formulated. The definition appeared to be convenient to prove embedding theorems and other important estimates in the most general situation.

In the talk we consider inequalities generalizing Sobolev embedding theorems, Gagliardo – Nirenberg estimates, and the inequalities that could be used to prove rigidity of quasiisometries and other classes of mappings.

Let (X, ρ_X, μ) is a measure-metric space, μ is a borel measure, (Y, ρ_Y) is a separable metric space, $V \subset X$ is a completely bounded set. We consider a general case of mappings from V to Y.

Definition 1. We will say that a sequence $\Xi = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_j, \dots\}$ of partitions of a set V into disjoint μ-measurable sets E_i^j, $i = 1, \dots, n(j)$, satisfies d-condition, if for each i partition σ_{i+1} is subpartition of σ_i and the following inequalities holds $\mathrm{diam(E_i^j) \leq C_1 10^{-j}}$, $\mu(E_i^j) \geq C_2 10^{-jd}$. We suppose that $\sigma_0 = \{V\}$.

Definition 2. Let us fix a family of mappings $\mathfrak{A}$ of a set V to Y, such that for some constants C_1 and C_2 for any mapping $A \in \mathfrak{A}$ and a set $E_i^k \in \sigma_k$ the following inequality holds

$$\sup_{x \in E_i^k} |A(x)| \leq C_1 \frac{1}{E_i^k} \int_{E_i^k} |A(x)|\, d\mu(x) + C_2.$$

Definition 3. Suppose that there exists a function $h^r \in L_p(V)$ such that

$$\int_{E_i^j} \frac{d(u(x), A_i^j(x))^p}{10^{jrp}}\, d\mu(x) \leq \int_{E_i^j} (h^r(x))^p\, d\mu(x) \,\text{for any set}\, E_i^j \in \sigma_j.$$

Then we will write $u \in W^{r,p}_{\Xi,\mathfrak{A}}(V)$. Any function $h^r(x)$ satisfying (1) we will call an upper gradient of mapping u of order r. By seminorm in space $W^{r,p}_{\Xi,\mathfrak{A}}(V)$ we will call the minimum of norms $\|h^r\|_{L_p(U)}$ among all functions $h^r(x)$ satisfying the last inequality, i.e. among all upper gradient of mapping u of order r, and denote by $[u]_{W^{r,p}_{\Xi,\mathfrak{A}}(V)}$ or $[u]^{r,p}_{\Xi,\mathfrak{A}}$. Denote $\|u\|_{W^{r,p}_{\Xi,\mathfrak{A}}(V)} := \|u\|_{L_p(V,Y)} + [u]_{W^{r,p}_{\Xi,\mathfrak{A}}(V)}$.

Theorem. *Let $p \in [1, \infty)$, $r \in (0, \infty)$, $\Xi = (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_j, \dots)$ satisfy d-condition. Then the following inequality holds*

$$\left(\int_V d(u(x), g_0(x))^q\, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_V d(u(x), g_0(x))^{p_1}\, (h^r(x))^{p_2}\; d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p_1+p_2}},$$

where $g_0 \in \mathfrak{A}$, $h^r(x)$ is an upper gradient of order r of function u, $q = p_1 + \frac{dp_2}{d - rp_2}$.

The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 17-01-00801).

REFERENCES

1. *Romanovskii N. N.*, “Embedding theorems and a variational problem for functions on a metric measure space,” Sib. Math. J., **55**, No. 3, 511–529 (2014).

SPECTRA OF FIVE-ELECTRON SYSTEMS IN THE HUBBARD MODEL

Tashpulatov S. M.

National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Republic of Uzbekistan;
sadullatashpulatov@yandex.ru, toshpul@mail.ru

We consider the energy operator of five-electron systems in the Hubbard model and describe the structure of the essential spectra and discrete spectra of the system for sextet and first-quartet states. The Hamiltonian of the chosen model has the form $H = A\sum_{m,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m,\gamma} + B\sum_{m,\tau,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m+\tau,\gamma} + U\sum_m a^+_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^+_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow}$. Here A is the electron energy at a lattice site, B is the transfer integral between neighboring sites, τ means that summation is taken over the nearest neighbors, U is the parameter of the on-site Coulomb interaction of two electrons, γ is the spin index, and $a^+_{m,\gamma}$ $(a_{m,\gamma})$ are the respective electron creation (annihilation) operators at a site $m \in Z^\nu$.

The Hamiltonian H acts in the antisymmetric Fock space $\mathcal{H}_{as}$. Let φ_0 be the vacuum vector in the space $\mathcal{H}_{as}$. The sextet state corresponds basis functions $s^{\frac{5}{2}}_{m,n,p,q,r}$ $= a^+_{m,\uparrow}a^+_{n,\uparrow}a^+_{p,\uparrow}a^+_{q,\uparrow}a^+_{r,\uparrow}\varphi_0$. Let $\widetilde{\mathcal{H}}^{5/2}_s$ be the subspace, corresponding to the sextet state. By $H^s_{5/2}$ denote the restriction of H to the the subspace $\widetilde{\mathcal{H}}^{5/2}_s$. We prove that the spectrum of operator $\widetilde{H}^s_{5/2}$ is purely continuous and coincides with the segment $[5A - 10B\nu, 5A + 10B\nu]$. In the system there exist four type quartet states. The first quartet state corresponds to the basis functions ${}^1q^{3/2}_{m,n,p,q,r\in Z^\nu} = a^+_{m,\downarrow}a^+_{n,\uparrow}a^+_{p,\uparrow}a^+_{q,\uparrow}a^+_{r,\uparrow}\varphi_0$. Let ${}^1\widetilde{\mathcal{H}}^{3/2}_q$ be the subspace, corresponding to the first quartet state. By ${}^1\widetilde{H}^q_{3/2}$ denote ${}^1\widetilde{H}^q_{3/2}$ the restriction of H to the subspace ${}^1\widetilde{\mathcal{H}}^{3/2}_q$. Let $\Lambda_1 = \gamma + \theta$, $\Lambda_2 = \lambda + \mu$.

Theorem 1. *If $\nu = 1$ and $U < 0$, then the essential spectrum of the system first quartet state operator ${}^1\widetilde{H}^q_{3/2}$ is exactly the union of seven segments: $\sigma_{ess}({}^1\widetilde{H}^q_{3/2}) = [a+c+e, b+d+f]\cup[a+c+z_3, b+d+z_3]\cup[a+e+z_2, b+f+z_2]\cup[a+z_2+z_3, b+z_2+z_3]\cup[c+e+z_1, d+f+z_1]\cup[c+z_1+z_3, d+z_1+z_3]\cup[e+z_1+z_2, f+z_1+z_2]$. The discrete spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}^q_{3/2}$ is empty. Here $a = 2A - 4B\cos\frac{\Lambda_1}{2}$, $b = 2A + 4B\cos\frac{\Lambda_1}{2}$, $c = 2A - 4B\cos\frac{\Lambda_2}{2}$, $d = 2A + 4B\cos\frac{\Lambda_2}{2}$, $e = A - 2B$, $f = A + 2B$, $z_1 = 2A - \sqrt{U^2 + 16B^2\cos^2\frac{\Lambda_1}{2}}$, $z_2 = 2A - \sqrt{U^2 + 16B^2\cos^2\frac{\Lambda_2}{2}}$, $z_3 = A + 2\sqrt{U^2 + B^2}$.*

Theorem 2. *If $\nu = 1$ and $U > 0$, then the essential spectrum of the system first quartet state operator ${}^1\widetilde{H}^q_{3/2}$ is exactly the union of seven segments: $\sigma_{ess}({}^1\widetilde{H}^q_{3/2}) = [a+c+e, b+d+f]\cup[a+c+\widetilde{z}_3,\ b+d+\widetilde{z}_3]\cup[a+e+\widetilde{z}_2,\ b+f+\widetilde{z}_2]\cup[a+\widetilde{z}_2+\widetilde{z}_3,$ $b+\widetilde{z}_2+\widetilde{z}_3]\cup[c+e+\widetilde{z}_1,\ d+f+\widetilde{z}_1]\cup[c+\widetilde{z}_1+\widetilde{z}_3,\ d+\widetilde{z}_1+\widetilde{z}_3]\cup[e+\widetilde{z}_1+\widetilde{z}_2,$ $f+\widetilde{z}_1+\widetilde{z}_2]$. The discrete spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}^q_{3/2}$ is empty. Here $\widetilde{z}_1 = 2A + \sqrt{U^2 + 16B^2\cos^2\frac{\Lambda_1}{2}}$, $\widetilde{z}_2 = 2A + \sqrt{U^2 + 16B^2\cos^2\frac{\Lambda_2}{2}}$, $\widetilde{z}_3 = A - 2\sqrt{U^2 + B^2}$.*

Theorem 3. *If $\nu = 3$ and $-m' \le U < 0$, then the essential spectrum of the system first quartet state operator ${}^1\widetilde{H}^q_{3/2}$ is single segment: $\sigma_{ess}({}^1\widetilde{H}^q_{3/2}) = [5A - 6B - 4B\sum_{i=1}^3(\cos\frac{\Lambda_1^i}{2} + \cos\frac{\Lambda_2^i}{2}), 5A + 6B + 4B\sum_{i=1}^3(\cos\frac{\Lambda_1^i}{2} + \cos\frac{\Lambda_2^i}{2})]$. The discrete spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}^q_{3/2}$ is empty. Here, m' is some concrete number.*

СЕКЦИЯ 4

Дифференциальные уравнения и их приложения

Тезисы докладов

SECTION 4

Differential Equations and Their Applications

Abstracts

ВИДОИЗМЕНЕННАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ МНОГОМЕРНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Абдрахманов А. М.

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия; abdrai@mail.ru

Рассмотрим следующую систему

$$-\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)\Delta u_i+\lambda\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)=0,\quad i=1,2,\ldots,n. \qquad (1)$$

Характеристический определитель системы (1) имеет вид

$$\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2-\lambda\right)\left(\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2\right),$$

поэтому система (1) эллиптична везде, кроме точки $x_1=x_2=...=x_n=0$ и n-мерной сферы $x_1^2+x_2^2+...+x_n^2=\lambda$, где она вырождается.

При $n=2$ систему (1) можно считать системой Бицадзе.

1. Пусть область $D=\{X\in\mathbb{R}^n:\, x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2<R^2\}$, $R^2>\lambda$.

Рассматривается задача Дирихле для системы (1) в следующей постановке: найти регулярное в области D ограниченное решение системы (1), удовлетворяющее на границе $\Gamma=\{X:\, x_1^2+x_2^2+...+x_n^2=R^2\}$ условиям

$$u_j\big|_\Gamma=f_j:\, f_j\in C^{2,\alpha}(\Gamma),\quad j=1,2,\ldots,n-1, \qquad (2)$$

$$u_n\big|_{\delta_\Gamma}=f_n:\, f_n\in C^{1,\alpha}(\delta_\Gamma),\quad \delta_\Gamma=\{X:\, x_n=0,\, x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2=R^2\}. \qquad (3)$$

Доказано: задача (2), (3) для системы (1) разрешима, и ее решение единственно в классе функций, ограниченных на бесконечности.

2. В случае $R^2<\lambda$ к краевым условиям (2), (3) необходимо добавить условие

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\bigg|_\Gamma=f_{n+1},\quad f_{n+1}\in C^{1,\alpha}(\Gamma). \qquad (4)$$

Доказано: задача (2)–(4) для системы (1) разрешима, и ее решение единственно в классе ограниченных функций f_{n+1}.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Абдуллаев О. Х.

Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Республика Узбекистан; obidjon.mth@gmail.com

Пусть Ω — конечная область, ограниченная при $y>0$ отрезками $A_1A_2 = \{(x,y)\colon x=1,\, 0<y<h\}$, $A_2B_2 = \{(x,y)\colon y=h,\, 0<x<1\}$, $B_2B_1 = \{(x,y)\colon x=0,\, 0<y<h\}$ и характеристиками $A_1C_1\colon x-y=1$, $B_1C\colon x+y=0$ уравнения

$$0=\begin{cases} u_{xx}-D_{oy}^{\alpha}u+\sum\limits_{k=1}^{n}p_k I_{x1}^{\beta_k}u(x,0), & y>0,\\ u_{xx}-u_{yy}+\sum\limits_{k=1}^{n}q_k I_{\xi 1}^{\gamma_k}u\,(\xi,0), & y<0,\end{cases} \tag{1}$$

при $y<0$, где

$$I_{xa}^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{x}^{a}(t-x)^{\alpha-1}f(t)dt,\quad D_{xa}^{\alpha}f(x)=-\frac{d}{dx}I_{xa}^{1-\alpha}f(x),$$

$A_1(1,0)$, $A_2(1,h)$, $B_1(0,0)$, $B_2(0,h)$, $C(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$.

Здесь $\alpha, p_k, q_k, \beta_k, \gamma_k = \mathrm{const}$, причем $0<\alpha,\beta_k,\gamma_k<1$.

Введем обозначения: $\theta(x)=\frac{x}{2}-i\cdot\frac{x}{2}$ $(i^2=-1)$, $\xi=x+y$, $\eta=x-y$, $\Omega^+=\Omega\cap(y>0)$, $\Omega^-=\Omega\cap(y<0)$. В области Ω исследуется следующая задача.

Задача. Найти решение $u(x,y)$ уравнения (1) в области $\Omega^+\cup\Omega^-$ из класса

$$W=\{u\colon D_{oy}^{\alpha-1}u\in C(\overline{\Omega}^+),\ u\in C(\overline{\Omega}^-)\cap C^2(\Omega^-),\ u_{xx}, D_{oy}^{\alpha}u\in C(\Omega^+)\}$$

со следующими свойствами:
1) на линии изменения типа выполняются условия склеивания

$$\lim_{y\to+0}y^{1-\alpha}u(x,y)=u(x,-0),\quad x\in[0,1],$$

$$\lim_{y\to+0}y^{1-\alpha}\big(y^{1-\alpha}u(x,y)\big)'_y=\lambda_1(x)\int\limits_{x}^{1}r(t)u(t,-0)dt$$
$$+\lambda_2(x)u_y(x,-0)+\lambda_3(x)u(x,-0),\quad x\in(0,1);$$

2) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)\Big|_{A_1A_2}=\varphi(y),\quad u(x,y)\Big|_{B_1B_2}=\psi(y),\quad 0\leqslant y\leqslant h,$$

$$\frac{d}{dx}u\,(\theta(x))=a(x)u_y(x,0)+b(x)u_x(x,0)+c(x)u(x,0)+d(x),\quad x\in(0,\tfrac{1}{2}).$$

Здесь $\lambda_k(x)$, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$ $(k=1,2,3)$ — заданные достаточно гладкие функции.

При определенных условиях на заданные функции доказывается существование и единственность решения поставленной задачи.

КЛАССИЧЕСКАЯ ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Абылкаиров У. У.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Республика Казахстан; u.abylkairov@gmail.com

Многие математические вопросы теории уравнений Навье – Стокса однородной и неоднородной жидкостей изложены и решены в работах [1], [2].

Рассмотрим в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ систему Стокса

$$\left.\begin{array}{l} \nu\Delta\vec{\vartheta} - \nabla p - \rho\vec{f} = 0 \\ \operatorname{div}\vec{\vartheta} = 0 \end{array}\right\} \text{ в } Q_T \tag{1}$$

и уравнение для плотности среды

$$\partial_t\rho + (\vec{\vartheta}\nabla)\rho = 0 \text{ в } Q_T \tag{2}$$

с условием прилипания на границе $\partial\Omega$ и начальным условием

$$\vec{\vartheta}\Big|_{x\in\partial\Omega} = 0, \tag{3}$$

$$\rho\Big|_{t=0} = b(x), \tag{4}$$

где $Q_T = \Omega \times [0,T]$, $\vec{\vartheta} : Q_T \to \mathbb{R}^3$ (или $\mathbb{R}^2$) — векторное поле скорости, $p(x,t)$ — давление, $\rho(x,t) : Q_T \to \mathbb{R}$ — плотность жидкости, $\vec{f}(x,t)$ — плотность внешних сил, $t \in [0,T]$ — время, через x обозначается точка пространства $\mathbb{R}^3$ (или $\mathbb{R}^2$); $\partial\Omega$ — достаточно гладкая граница области Ω, предполагается её неподвижность.

Теорема. *Пусть в трехмерной задаче* (1)–(4) *граница* $\partial\Omega \in C^{1,\gamma}$, *где* $0<\gamma\leq 1$, $b(x) \in C^1(\Omega)$. *Тогда существует и причем единственное классическое решение задачи* (1)–(4) *на всей оси времени* $\mathbb{R}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
2. *Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983.

ОПТИМАЛЬНОЕ ПО РАСХОДУ РЕСУРСА УПРАВЛЕНИЕ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Александров В. М.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
vladalex@math.nsc.ru

Пусть управляемый объект описывается линейным дифференциальным уравнением $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$, $x(t_0) = x_0$, $x_0 \in D$, где u — m-мерный вектор управления, компоненты которого подчинены интервальным ограничениям: $M_j^1 \leqslant |u_j| \leqslant M_j^2$; $M_j^1, M_j^2 > 0$, $M_j^2 > M_j^1$, $j = \overline{1,m}$. Предполагается, что система покомпонентно полностью управляема и переводима в начало координат из ограниченной области начальных условий D.

Задача. Найти допустимое управление $u^0(t)$, переводящее за фиксированное время $T = t_k - t_0$ (где $T \geqslant T_0$) систему из начального состояния $x(t_0) = x_0$ в конечное состояние $x(t_k) = 0$ и минимизирующее функционал

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_k} \sum_{j=1}^{m} |u_j(\tau)| d\tau.$$

Здесь T_0 — время оптимального по быстродействию перевода системы.

Разработан метод вычисления оптимального по расходу ресурса управления с интервальными ограничениями на компоненты вектора управления. Метод основан на последовательном выравнивании величин квазиоптимальных управляющих воздействий до предельных значений. Найдена связь между отклонениями начальных условий сопряженной системы и отклонениями величин квазиоптимального управления от предельных значений. Дан способ задания начального приближения и отмечены его особенности. Разработан итерационный алгоритм. Приведены результаты моделирования и численных расчетов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00592а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров В.М.* Квазиоптимальное управление динамическими системами // Автоматика и телемеханика. 2016. № 7. С. 47–67.
2. *Александров В.М.* Оптимальное управление линейными системами с интервальными ограничениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2015. Т. 55, № 5. С. 749–765.

О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕТРИВИАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА В УГЛОВОЙ ОБЛАСТИ

Амангалиева М. М.[1]**, Дженалиев М. Т.**[2]**, Рамазанов М. И.**[3]

[1]*Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Республика Казахстан;* meiramkul.amangaliyeva@airastana.com
[2]*Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Республика Казахстан;* muvasharkhan@gmail.com
[3]*Институт прикладной математики, Карагандинский государственный университет им. Е. А. Букетова, Караганда, Республика Казахстан;* ramamur@mail.ru

Исследование уравнения Бюргерса имеет давнюю историю, часть из которой приводится в работе [1] и в книгах [2] и [3]. В работе [1] в соболевских классах установлены результаты о существовании, единственности и регулярности в классе Соболева решения уравнения Бюргерса в нецилиндрической (не вырождающейся) области, которая может быть преобразована в прямоугольную область регулярной заменой независимых переменных. В нашей работе мы показываем, что однородная граничная задача для уравнения Бюргерса в угловой (вырождающейся) области наряду с тривиальным может иметь и нетривиальное решение.

Изучается следующая граничная задача для уравнения Бюргерса:

$$u_t + uu_x - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < t, \quad t > 0, \quad u\big|_{x=0} = 0, \quad u\big|_{x=t} = 0. \tag{1}$$

Установлена следующая

Теорема. *Граничная задача* (1) *имеет только одно нетривиальное решение*

$$u(x,t) = \frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\left[w(x,t)\right]^{-1},$$

где

$$w(x,t) = \int\limits_0^t \left[E(x+\tau, t-\tau) + E(x-\tau, t-\tau)\right]\varphi(\tau)d\tau \geq \varepsilon > 0,$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left\{-\frac{t}{4a^2}\right\} + \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{\sqrt{t}}{2a}\right)\right],$$

$$E(z,\zeta) = \zeta^{-1/2}\exp\left\{-\frac{z^2}{4a^2\zeta}\right\}, \quad \mathrm{erf}(b) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^b \exp\{-y^2\}dy.$$

Работа выполнена при поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (проекты № 0085/ПЦФ-14, № 0823/ГФ4 и № 1164/ГФ4).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Benia Y., Sadallah B.-K.* Existence of solutions to Burgers equations in domains that can be transformed into rectangles // Electron. J. Differ. Equ. 2016. V. 2016, No 157. P. 1–13.
2. *Burgers J. M.* The nonlinear diffusion equation. Asymptotic solutions and statistical problems. Dordrecht, Boston: D. Reidel Publishing Company, 1974.
3. *Вишик М. И., Фурсиков А. В.* Математические задачи статистической гидродинамики. М.: Наука, 1980.

БИФУРКАЦИИ РЕШЕНИЙ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

Анашкин О. В.

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия; oanashkin@yandex.ru

Системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (импульсные системы) являются удобным инструментом моделирования эволюции во времени разнообразных процессов, параметры которых в некоторые моменты времени подвергаются резким изменениям под влиянием кратковременных внешних воздействий. Учитывая пренебрежимо малую длительность воздействий по сравнению с характерным временем эволюции моделируемого процесса, можно предполагать, что параметры процесса изменяются мгновенно. Пусть, кроме того, моменты τ_k импульсного воздействия известны заранее, т. е. фиксированы, тогда импульсную систему можно описать в виде

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad t \neq \tau_k, \quad x(t+0) = h(x(t)), \quad t = \tau_k, \tag{1}$$

где $x(t+0) = \lim\limits_{s \to t+0} x(s)$ — правое предельное значение $x(t)$ в точке t, $\tau_k = \tau_{k-1} + \theta_k$, $\tau_0 = 0$, $\theta_k > 0$ — заданные вещественные числа, $k = 0, 1, \ldots, \sum\limits_{k \geq 0} \theta_k = \infty$, функции f и h — достаточно гладкие из класса C^l, $l \geq 1$. Решение системы предполагается непрерывным слева, $x(t) = x(t-0)$.

Таким образом, импульсная система является суперпозицией (произведением) аналоговой компоненты, которая представлена в (1) автономным дифференциальным уравнением (динамическая система, поток), и дискретной компонентой, описывающей оператор импульсного воздействия (разностное уравнение, каскад). В результате решения импульсной системы наследуют типичные свойства решений разностных уравнений, в частности, уже одномерные импульсные системы могут иметь сколь угодно сложную структуру решений.

Мы ограничимся анализом простейшего случая, когда система (1) — θ-периодическая, полагая $\theta_k = \theta > 0$, и предположим, что $f(0) = h(0) = 0$, т. е. система имеет нулевое решение.

Линеаризация системы (1) в нуле имеет семейство периодических решений, если матрица монодромии $M = e^{\theta Df(0)} Dh(0)$ имеет простые собственные значения на единичной окружности в $\mathbb{C}$.

У одномерной системы (1) все решения линеаризации будут периодическими. Тогда, выбирая величину $Dh(0) \in \mathbb{R}$ в качестве бифуркационного параметра, мы показываем, что при переходе через критическое значение $e^{-\theta Df(0)}$ в одномерной системе (1) происходит бифуркация рождения периодического решения, и исследуем его устойчивость.

В качестве примера рассматривается одномерная система (1) общего положения, близкая в окрестности нуля к квадратичной системе

$$\frac{dx}{dt} = ax - rx^2, \quad t \neq k\theta, \quad x(t+0) = bx(t) + cx^2(t), \quad t = k\theta,$$

структуру решений которой можно детально исследовать, благодаря интегрируемости дифференциального уравнения.

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Аниконов Д. С.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
anik@math.nsc.ru

Рассматривается задача Коши для почти линейного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка для двух независимых переменных. Один из коэффициентов при производных является разрывной функцией. Вследствие этого характеристические линии оказываются кусочно гладкими линиями, а решение задачи Коши, понимаемое в некотором обобщенном смысле, приобретает специфические свойства. Актуальность таких задач объясняется некоторыми вопросами, возникающими в теории зондирования неоднородных сред.

Говоря более подробно, на плоскости переменных $x = (x_1, x_2)$ рассмотрим полуплоскость $G = \{(x_1, x_2) : x_1 > 0, -\infty < x_2 < \infty\}$ и предположим, что в области G содержится ограниченная, строго выпуклая область G_1, граница которой, т. е. линия ∂G_1 принадлежит классу $\mathbb{C}^1$. Рассмотрим также область $G_2 = G \backslash \overline{G_1}$. Интервалы, являющиеся проекциями области G_1 на оси Ox_1, Ox_2, обозначим (ξ_1, ξ_2) и (η_1, η_2) соответственно и предположим, что $\xi_1 > 0$, $\eta_1 > 0$. Обозначим $T = \{(x_1, x_2) : x_1 \in (\xi_1, \xi_2), -\infty < x_2 < \infty\}$.

В нашем случае характеристиками дифференциального уравнения являются лучи, а также ломаные линии, в которых точки между прямолинейными отрезками будем называть контактными, а соответствующую ломаную — составной характеристикой.

В области T рассматривается следующая задача Коши

$$\partial_1 u(x_1, x_2) + a(x_1, x_2)\partial_2 u(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, u), \quad u(0, x_2) = \varphi(x_2), \ -\infty < x_2 < \infty.$$

Теорема. *Существует функция $u(x)$, удовлетворяющая условию $u(0, x_2) = \varphi(x_2)$ и имеющая непрерывные частные производные $\partial_1 u(x_1, x_2), \partial_2 u(x_1, x_2)$ везде в T, кроме точек $x \in \partial G_1$. Во всех точках непрерывности производных выполняется равенство $\partial_1 u(x_1, x_2) + a(x_1, x_2)\partial_2 u(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, u)$. В T содержатся области G_3, G_4, G_5, $\overline{T} = \overline{G_3} \bigcup \overline{G_4} \bigcup \overline{G_5}$ со следующими свойствами.*

1. Область G_3 определяется как множество точек на непрерывных составных характеристиках, начинающихся в точках $(0, x_2)$, проходящих через области G_1, G_2 и продолжающихся неограниченно. В G_3 непрерывная функция $u(x)$ определяется единственным образом.

2. В ограниченной области G_4 функция $u(x)$ определяется однозначно и непрерывна везде, кроме $x \in T \bigcap \partial G_1$.

3. В области G_5, в отличие от областей G_3, G_4, наша трактовка поставленной задачи не позволяет определить единственное решение $u(x)$.

Математические эффекты, обнаруженные в выполненном исследовании, позволили рассмотреть и более общий случай дифференциального уравнения с тремя независимыми переменными, а также поставить и решить обратную задачу типа зондирования.

Работа выполнена при поддержке программы Президиума РАН, номер проекта 0314-2015-0010.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Аниконов Ю. Е.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
anikon@math.nsc.ru

В докладе рассмотрены многомерные представления решений дифференциальных уравнений с аспектами функциональных уравнений и идентификацией.

Хорошо известно, что функциональные уравнения играют важную роль в разнообразных проблемах математической физики.

В работах [1]–[5] развито новое направление исследований, связанное с задачами идентификации дифференциальных уравнений и функциональными уравнениями в линейных и нелинейных случаях.

Приводятся представления решений эволюционных уравнений с условиями симметрии, начально-краевыми данными. Существенным элементом поиска искомых функций здесь являются функциональные уравнения Шрёдера, Абеля. Изучаются также задачи идентификации нелинейных дифференциальных уравнений сведением к линейному функциональному уравнению общего вида.

Работа выполнена при поддержке проекта по программе "Вычислительная томография неоднородных и анизотропных сред" (проект № 0314-2015-0010).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Anikonov Yu. E.* Inverse problems for kinetic and other evolution equations. Utrecht: VSP, 2001.
2. *Anikonov Yu. E.* Inverse problems and classes of solution of evolution equations // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2003. V. 11, No 1. P. 1–26.
3. *Anikonov Yu. E., Gölgeleyen I., Yildiz M.* Identification problems for systems of nonlinear evolution equations and functional equations // Adv. Difference Equ. 2016. V. 2016, Article 152.
4. *Аниконов Ю. Е.* Некоторые замечания о функциональных уравнениях и их приложениях // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2015. Т. 15, вып. 4. С. 12–23.
5. *Anikonov Yu. E.* Representation of solutions to functional and evolution equations and identification problems // Sib. Electron. Math. Reports. 2013. V. 10. P. 591–614.

О СУЩЕСТВОВАНИИ УСТОЙЧИВОГО ЦИКЛА В ОДНОЙ МОДЕЛИ ГЕННОЙ СЕТИ

Аюпова Н. Б.[1], **Голубятников В. П.**[2]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
[1]ayupova@math.nsc.ru, [2]glbtn@math.nsc.ru

Для динамической системы, моделирующей молекулярный репрессилятор, установлены условия существования устойчивого цикла.

Для несимметричной динамической системы с положительными параметрами k_j, μ_j и переменными p_j, m_j (концентрации белков и соответствующих mРНК)

$$\begin{array}{ll} \mathrm{d}m_1/\mathrm{d}t = -k_1 m_1 + f_1(p_3), & \mathrm{d}p_1/\mathrm{d}t = \mu_1(m_1 - p_1), \\ \mathrm{d}m_2/\mathrm{d}t = -k_2 m_2 + f_2(p_1), & \mathrm{d}p_2/\mathrm{d}t = \mu_2(m_2 - p_2), \\ \mathrm{d}m_3/\mathrm{d}t = -k_3 m_3 + f_3(p_2), & \mathrm{d}p_3/\mathrm{d}t = \mu_3(m_3 - p_3) \end{array} \qquad (1)$$

в терминах матрицы ее линеаризации в стационарной точке установлены условия существования устойчивого цикла в ее фазовом портрете. Здесь f_j — гладкие монотонно убывающие функции, $j = 1, 2, 3$.

Замечание. В симметричном случае, $f_1 = f_2 = f_3$, $k_1 = k_2 = k_3 = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$, система (1) и ее многомерные аналоги изучались с целью моделирования генных сетей и цепочек RLC-контуров, см. [1]–[3].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-00745).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Elowitz M. B., Leibler S.* A synthetic oscillatory network of transcriptional regulators // Nature. 2000. V. 403, No 6767. P. 335–338.
2. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Явление буферности в кольцевых генных сетях // Теор. и мат. физика. 2016. Т. 187, № 3. С. 560–579.
3. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Явление буферности в кольцевых цепочках однонаправленно связанных генераторов // Изв. РАН. Сер. мат. 2014. Т. 78, № 4. С. 73–108.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Баландин А. С.

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия; balandin-anton@yandex.ru

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) + ax(t) + b\int_0^{\omega} e^{-cs}x(t-s)\,dr(s) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

где $\omega > 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, функция $r\colon [0,\omega] \to \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию, $r(0) = 0$, функция f локально суммируема. Интеграл понимается в смысле Римана – Стилтьеса.

Следуя [1, с. 9], назовём решением уравнения (1) локально абсолютно непрерывную функцию, удовлетворяющую (1) почти всюду. При отрицательных значениях аргумента полагаем, что доопределена суммируемой начальной функцией.

Заметим, что в виде (1) может быть записано любое линейное автономное функционально-дифференциальное уравнение с ограниченным последействием.

Будем считать функцию r фиксированной, тогда область устойчивости есть некоторое множество в пространстве параметров $\{a\omega, b\omega^2, c\omega\}$.

Как известно [2, с. 102], для того чтобы уравнение (1) было экспоненциально устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы все нули его характеристической функции лежали слева от мнимой оси.

Одним из наиболее эффективных методов исследования устойчивости автономных уравнений является метод D-разбиений [3]. При его использовании пространство параметров разбивается на некоторое (как правило, счетное) множество областей, среди которых нужно указать те, которые составляют область устойчивости. Анализируя частные случаи исходного уравнения, можно сформулировать гипотезу о виде области устойчивости, но основной проблемой оказывается доказательство того, что ни одна из оставшихся областей действительно не входит в область устойчивости. Поэтому, если наряду с построением D-разбиения удаётся доказать связность области устойчивости, то для уравнения (1) задачу устойчивости можно считать решённой.

Характеристическая функция уравнения (1) имеет вид

$$g(p,a,b,c) = p + a + b\int_0^{\omega} e^{-(p+c)\xi}\,dr(\xi), \quad p \in \mathbb{C}.$$

Отметим, что $g(p, a+\alpha, b, c+\alpha) = g(p+\alpha, a, b, c)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), т. е. сдвиг в пространстве параметров $\{a\omega, b\omega^2, c\omega\}$ сводится к сдвигу по аргументу p. На основе этого факта можно доказать следующий результат.

Теорема. *Область устойчивости уравнения* (1) *является связной в пространстве параметров* $\{a\omega, b\omega^2, c\omega\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
2. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972.
3. *Неймарк Ю. И.* Устойчивость линеаризованных систем (дискретных и распределённых). Л.: ЛКВВИА, 1949.

НЕЛОКАЛЬНЫЕ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ КРЫЛОВА – БОГОЛЮБОВА

Белоносов В. С.[1,2], **Санков И. И.**[2]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
bvs@math.nsc.ru

[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
sii200192@gmail.com

В гильбертовом пространстве H рассмотрим дифференциальное уравнение в так называемой стандартной форме $x'(t) = \varepsilon f(t, x)$, $t \geqslant 0$, с малым скалярным параметром ε. Классический метод усреднения Крылова – Боголюбова состоит в поиске такой замены переменных $x = y + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon^k \varphi_k(t, y)$, чтобы функции $\varphi_k(t, y)$ были ограничены при $t \to \infty$, а уравнение для y с точностью до слагаемых порядка ε^n приобрело вид $y'(t) = \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k f_k(y)$. Известно [1]–[2], что такая замена существует, если функция f имеет равномерно ограниченные производные по x достаточно высоких порядков в некоторой области $\Omega \subset H$ и почти периодична по t с конечным набором показателей Фурье. Решив автономное уравнение для y и вернувшись к переменной x, получим приближенное решение исходного уравнения с точностью порядка ε^n в области Ω.

Заметим, что фазовый портрет соответствующего автономного уравнения зависит от ε. При $\varepsilon \to 0$ существенные особенности этого портрета — стационарные точки, циклы, участки сепаратрис и т. д. — могут “выходить” за пределы области, где получена оценка погрешности приближенного решения. Поэтому классический метод усреднения имеет, вообще говоря, локальный характер. В частности, такая ситуация типична для уравнения Матье – Хилла $u'' = -a^2 u + \varepsilon p(t, u)$ с полиномиальными по u возмущениями, которое приводится к стандартной форме известной подстановкой, предложенной еще Ван-дер-Полем.

Предлагается модифицировать метод, построив такую замену переменных, чтобы после перехода к медленному времени $\tau = \varepsilon t$ автономное уравнение для y вообще перестало бы зависеть от ε. В общем виде эта задача достаточно сложна. Однако ее удалось решить для обобщенного уравнения Матье – Хилла $u'' = -A^2 u + \varepsilon P(t, u)$ в конечномерном пространстве, где A — самосопряженный оператор, а P — многочлен относительно компонент вектора u. Если перейти к новой переменной $v = \varepsilon^{\alpha} u$, а затем методом Крылова – Боголюбова построить усреднение второго порядка по степеням $\sqrt{\varepsilon}$, то при подходящем выборе α фазовый портрет соответствующей системы действительно не будет зависеть от ε. В докладе приведены достаточные условия, позволяющие реализовать такую модификацию метода усреднения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
2. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. Т. 3. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1985. С. 5–290.

МОДЕЛЬ, ОПИСЫВАЮЩАЯ ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ПОЛИМЕРНОЙ ЖИДКОСТИ С ОБЪЕМНЫМ ЗАРЯДОМ. АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ПРОБЛЕМЫ (ОСНОВНОЕ ТЕЧЕНИЕ — АНАЛОГ ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ)

Блохин А. М.[1], **Ткачев Д. Л.**[2]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
[1]blokhin@math.nsc.ru, [2]tkachev@math.nsc.ru

В работах [1], [2] доказана линейная неустойчивость аналога течения Пуазейля для модифицированной базовой реологической модели Виноградова – Покровского [3]. Оказывается, что в качественном отношении эта модель хорошо описывает течения растворов и расплавов полимеров в реальных технологических условиях, например, когда граница области обладает сложной геометрией [4].

В данной работе исследуется линейная устойчивость новой математической модели, учитывающей постоянные разности температур и потенциалов, приложенных к электродам (катоду и аноду) бесконечного плоского конденсатора. В качестве основного решения вновь рассматривается аналог течения Пуазейля [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Блохин А. М., Егитов А. В., Ткачев Д. Л.* Линейная неустойчивость решений математической модели, описывающей течения полимеров в бесконечном канале // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2015. Т. 55, № 5. С. 850–875.
2. *Блохин А. М., Ткачев Д. Л.* Линейная асимптотическая неустойчивость стационарного течения полимерной среды в плоском канале в случае периодических возмущений // Сиб. журн. индустр. математики. 2014. Т. 17, № 3. С. 12–25.
3. *Алтухов Ю.А., Гусев А. С., Пышнограй Г. В.* Введение в мезоскопическую теорию текучих полимерных систем. Барнаул: АлтГПА, 2012.
4. *Кошелев К. Б., Пышнограй Г. В., Кузнецов А. Е., Толстых М. Ю.* Зависимость гидродинамических характеристик течения полимерного расплава в сходящемся канале от температуры // Механика композиционных материалов и конструкций. 2016. Т. 22, № 2. С. 175–191.
5. *Блохин А. М., Ткачев Д. Л., Егитов А. В.* Асимптотика спектра для линеаризованной задачи об устойчивости стационарных течений несжимаемой полимерной жидкости с объемным зарядом // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2017 (принята в печать).

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ, ОПИСЫВАЕМЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Богданов А. Н.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; bogdanov@imec.msu.ru

Проведено количественное и качественное уточнение известных аналитических решений для некоторых задач течения газа.

Математический аппарат для решения задач течений жидкостей и газов — нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных — все еще остаются сложными как для аналитического исследования, так и для численного моделирования. Попытки упрощения исходных уравнений за счет пренебрежения некоторыми членами уравнений имеют особенности. Наличие сколь угодно малых членов высших порядков в системе дифференциальных уравнений может совершенно изменить характер решений. При формальном упрощении может оказаться, что при стремлении коэффициента в некотором члене уравнения к нулю решение исходного уравнения не стремится к решению уравнения, получаемого отбрасыванием члена с этим коэффициентом. Может быть, утрачено описание моделью некоторых существенных в изучаемом явлении процессов (нелинейность, нестационарность, пространственная неодномерность, сжимаемость, завихренность, конвекция и т. д.). Используемые при нахождении приближенных решений методы очень гибки, действуя решительно, можно получить ответ в достаточно сложной задаче.

Материал, вошедший в доклад, относится к различным газовым течениям (одномерные невязкие течения, двумерные течения с вязко-невязким взаимодействием). Математический аппарат, используемый для решения соответствующих задач, также различен (обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения в частных производных); общность же материала заключается в идее использования для анализа поставленных задач особых (сингулярных) возмущений (хотя бы и имеющих различную физическую природу и описываемых различными способами).

1. Выведено уравнение нелинейных околорезонансных колебаний газа в канале при воздействии периодической вынуждающей силы на одном из концов канала.

2. Предложено сингулярное уравнение, более правильно по сравнению с уравнением Линя – Рейсснера – Цяня, описывающее нестационарное течение в окрестности перехода через скорость звука (модифицированное уравнение Линя – Рейсснера – Цяня).

3. Предложена модифицированная модель для описания свободного нестационарного вязко-невязкого взаимодействия на трансзвуковых скоростях, использующая для описания течения в области невязкого свободного течения модифицированное уравнение Линя – Рейсснера – Цяня.

Работа выполнена в соответствии с планом исследований НИИ механики МГУ при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ (проект НШ-8425.2016.1), Российского научного фонда (проект 14-11-00773) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16-29-01092).

О ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ НАВЬЕ – СТОКСА

Боговский М. Е.

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына, ФИЦ “Информатика и управление” РАН, Москва, Россия; mbogovskii@gmail.com

Нелинейность Навье – Стокса, не претерпевшая никаких псевдодифференциальных модификаций, корректно вписывается в параболическое окружение, не препятствуя глобальной разрешимости задачи Коши в классе сильных решений не только в наиболее значимом 3D случае, но и с любым числом пространственных переменных $n \geqslant 2$. При этом задача Коши для квазилинейной параболической системы *дифференциальных* уравнений в частных производных с нелинейностью Навье – Стокса будет глобально разрешима в классе сильных решений в той же постановке, что и её линеаризация на нулевом решении.

Каноническим видом квадратичной нелинейности для системы Навье – Стокса

$$\boldsymbol{v}_t - \mu\Delta\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v},\nabla)\boldsymbol{v} + \nabla\psi = \boldsymbol{f}, \quad \mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0, \quad (x,t) \in Q_T = \mathbb{R}^n \times (0,T), \qquad (1)$$

при $n = 3$ считается стационарная часть ускорения сплошной среды $(\boldsymbol{v},\nabla)\boldsymbol{v}$. Замена $\psi = \widetilde{\psi} - |\boldsymbol{v}|^2/2$ приводит систему (1) к её эквивалентному виду

$$\boldsymbol{v}_t - \mu\Delta\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v},\nabla)\boldsymbol{v} - \nabla|\boldsymbol{v}|^2/2 + \nabla\widetilde{\psi} = \boldsymbol{f}, \quad \mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \qquad (2)$$

т. к. слабые постановки задач Коши для систем (1) и (2) совпадают ввиду соленоидальности пробных вектор-функций в соответствующих интегральных тождествах, означая совпадение самих слабых решений $\boldsymbol{v}$ класса Проди – Серрина

$$\int_0^T \|\boldsymbol{v}(\cdot,t)\|^r_{\boldsymbol{L}_p(\mathbb{R}^n)} dt < \infty, \quad p > n, \ r > 2\colon \ \frac{n}{p} + \frac{2}{r} \leqslant 1. \qquad (3)$$

При достаточной гладкости данных задачи Коши слабое решение $\boldsymbol{v}$ класса (3) будет иметь гладкость сильного решения. Нелинейности в (1) и (2) эквивалентны в том смысле, что существование разрешающего оператора для $\boldsymbol{v}$ в одной из двух задач Коши означает не только существование такого же оператора в другой задаче, но еще и совпадение их графиков. Очевидно, всякая нелинейность, эквивалентная в таком смысле канонической нелинейности $(\boldsymbol{v},\nabla)\boldsymbol{v}$, может рассматриваться как *нелинейность Навье – Стокса.*

Для квазилинейной параболической системы с нелинейностью Навье – Стокса

$$\boldsymbol{v}_t - \mu\Delta\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v},\nabla)\boldsymbol{v} - \nabla|\boldsymbol{v}|^2/2 = \boldsymbol{f}, \quad (x,t) \in Q_T, \qquad (4)$$

рассмотрим задачу Коши с решением из анизотропного пространства Соболева $\boldsymbol{V}_p(Q_T)$, элементы которого $\boldsymbol{v}$ и их слабые производные $\boldsymbol{v}_t, \partial_x^\alpha\boldsymbol{v}$ принадлежат к $\boldsymbol{L}_p(Q_T)$ при $|\alpha| \leqslant 2$. Условие $p \geqslant (n+2)/3$ обеспечивает для оператора, задающего задачу Коши, его непрерывность как оператора из наделенного стандартной нормой пространства $\boldsymbol{V}_p(Q_T)$ в пространство данных задачи Коши $\boldsymbol{L}_p(Q_T)\times\boldsymbol{W}^s_p(\mathbb{R}^n)$, где $s = 2 - 2/p$, что характеризует решение $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_p(Q_T)$ как сильное.

Ключевым моментом доказательства существования глобального сильного решения $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_p(Q_T)$ является вывод априорной ограниченности $\boldsymbol{V}_p(Q_T)$-нормы сильного решения при каком-либо $p \geqslant (n + 2)/3$. Такая априорная ограниченность, в свою очередь, гарантирована априорной ограниченностью какой-либо из анизотропных норм (3) сильного решения. Замечая, что скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ векторов $\boldsymbol{v}$ и $(\boldsymbol{v},\nabla)\boldsymbol{v} - \nabla|\boldsymbol{v}|^2/2$ равно нулю поточечно в Q_T, умножим систему (4) скалярно в $\mathbb{R}^n$ на $\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}|^{p-2}$ и проинтегрируем по Q_t при $t \in (0,T)$. Интегрируя затем по частям и отбрасывая неотрицательные члены, получим оценку

$$\|\boldsymbol{v}(\cdot,t)\|_{\boldsymbol{L}_p(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|\boldsymbol{v}(\cdot,0)\|_{\boldsymbol{L}_p(\mathbb{R}^n)} + \int_0^T \|\boldsymbol{f}(\cdot,\tau)\|_{\boldsymbol{L}_p(\mathbb{R}^n)} d\tau \ \ \forall\, t \in [0,T]\ \forall\, p > n,$$

из которой следует принадлежность $\boldsymbol{v}$ к классу Проди – Серрина (3).

ТРАЕКТОРНЫЙ И ГЛОБАЛЬНЫЙ АТТРАКТОРЫ ОДНОГО КЛАССА ВЯЗКОУПРУГИХ ЖИДКОСТЕЙ С ПАМЯТЬЮ

Болдырев А. С.

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия;
al-boldyrev@mail.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с локально-липшицевой границей Γ. Система уравнений, описывающих движение одного класса вязкоупругих жидкостей с памятью, имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_1 \mathrm{Div} \int\limits_0^t \mathcal{L}(t,s)\mathcal{E}(v)(s, Z_\delta(v)(s;t,x))\, ds$$

$$-\mu_0 \mathrm{Div}\, \mathcal{E}(v) = -\mathrm{grad}\, p + f, \quad (t,x) \in [0,+\infty) \times \Omega, \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\, v = 0, \quad v\big|_\Gamma = 0, \quad v(0,x) = v^0(x); \quad \int\limits_\Omega p\, dx = 0. \tag{2}$$

Здесь $v = (v_1, \ldots, v_n)$ — скорость, p — давление жидкости, f — плотность внешних сил; $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{ij}$ — тензор скоростей деформации, компоненты которого определяются формулами $\mathcal{E}_{ij} = 1/2(\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i)$ $(i,j = 1,\ldots,n)$. Знак Div обозначает дивергенцию матрицы-функции, $\mu_0 = 2\varkappa/\lambda$, $\mu_1 = 2\nu/\lambda - 2\varkappa/\lambda^2$, где λ — время релаксации, $\varkappa$ — время запаздывания, ν — вязкость жидкости; $\mathcal{L}(t,s)$ — измеримая функция, характеризующая память частицы жидкости. Предполагается, что $|\mathcal{L}(t,s)| \le e^{-(2\mu_1/\mu_0)(t-s)}$ $(s < t,\ s,t \in [0,+\infty))$. Рассмотрим траекторию, определяемую уравнением $z(\tau;t,x) = x + \int\limits_t^\tau S_\delta v(s, z(s;t,x))ds$. В этом уравнении используется оператор регуляризации S_δ такой, что для каждого $v \in L_2(0,T;V)$ это уравнение имеет единственное решение $Z_\delta(v)$. Разрешимость в слабом смысле рассматриваемой задачи установлена в работе [1]. Конструкция оператора регуляризации приведена в [2]. Подобные модели рассматриваются, например, в [3].

Теорема 1. *Пусть $f \in V^*$. Тогда существует минимальный траекторный аттрактор $\mathcal{U}$ пространства траекторий $\mathcal{H}^+$ задачи* (1)–(2).

Теорема 2. *Пусть $f \in V^*$. Тогда существует глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ пространства траекторий $\mathcal{H}^+$ задачи* (1)–(2).

Понятия минимального траекторного аттрактора, глобального аттрактора и пространства траекторий можно найти в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болдырев А. С.* Исследование одного класса вязкоупругих жидкостей с памятью // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. 2015. № 4. С. 62–77.
2. *Дмитриенко В. Т., Звягин В. Г.* Конструкции оператора регуляризации в моделях движения вязкоупругих сред // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. 2004. № 2. С. 148–153.
3. *Звягин В. Г., Дмитриенко В. Т.* О слабых решениях начально-краевой задачи для уравнений движения вязкоупругой жидкости // ДАН. 2001. Т. 380, № 3. С. 308–311.
4. *Звягин В. Г., Кондратьев С. К.* Аттракторы слабых решений регуляризованной системы уравнений движения жидких сред с памятью // Мат. сб. 2012. Т. 203, № 11. С. 83–104.

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В $W_p^l(\mathbb{R}_+^n)$

Бондарь Л. Н.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
b_lina@ngs.ru

В докладе рассматриваются краевые задачи в полупространстве $\mathbb{R}_+^n = \{x = (x', x_n) : x' \in \mathbb{R}^{n-1},\, x_n > 0\}$ для квазиэллиптических систем (см. [1]):

$$\begin{cases} \mathcal{L}(D_x)U = F(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^n, \\ \mathcal{B}(D_x)U\big|_{x_n=0} = \Phi(x'). \end{cases}$$

Хорошо известно (см. [2]–[4]), что краевая задача безусловно разрешима в W_p^l при $p > p* > 1$, где $p*$ — некоторое фиксированное число, зависящее от порядков дифференциальных операторов $\mathcal{L}(D_x)$, $\mathcal{B}(D_x)$, размерности пространства. В докладе указываются условия на $F(x)$ и $\Phi(x')$, которые с необходимостью возникают при исследовании разрешимости краевой задачи в W_p^l при $p \le p*$. Отметим, что в случае $\Phi(x') = 0$ эти условия совпадают с условиями из [2], [5] и являются достаточными.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Волевич Л. Р.* Локальные свойства решений квазиэллиптических систем // Мат. сб. 1962. Т. 59, № 3. С. 3–52.
2. *Демиденко Г. В.* Интегральные операторы, определяемые квазиэллиптическими уравнениями. II // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 1. С. 41–65.
3. *Demidenko G. V.* On solvability of boundary value problems for quasi-elliptic systems in $\mathbb{R}_+^n$ // J. Anal. Appl. 2006. V. 4, No 1. P. 1–11.
4. *Бондарь Л. Н.* Разрешимость краевых задач для квазиэллиптических систем // Вестн. Тамбовского ун-та. Сер. Естественные и технические науки. 2011. Т. 16, вып. 3. С. 771–775.
5. *Бондарь Л. Н.* Условия разрешимости краевых задач для квазиэллиптических систем в полупространстве // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 3. С. 341–350.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СЕМЕЙСТВ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Бравый Е. И.

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия; bravyi@perm.ru

Рассматриваются семейства функционально-дифференциальных уравнений. Для всех уравнений семейства ставится линейная краевая задача. Предлагается метод нахождения необходимых и достаточных условий разрешимости краевой задачи для всех уравнений семейства. Модификации этого метода используются для нахождения необходимых и достаточных условий положительности решений краевой задачи для всех уравнений семейства, а также получения неулучшаемых в данном семействе уравнений оценок решений.

Для нахождения условий разрешимости не используется метод последовательных приближений, полученные условия не сводятся к проверке сжимаемости некоторого оператора. Кроме того, при найденных условиях положительности решений оператор Грина краевой задачи может не быть положительным.

Показывается, что все рассматриваемые задачи (о неулучшаемых оценках решений, об условиях разрешимости краевой задачи, об условиях положительности решений краевой задачи для всех уравнений семейства) сводятся к задаче конечномерной оптимизации. В некоторых случаях удается получить аналитическое решение такой конечномерной задачи.

Необходимые и достаточные условия разрешимости краевой задачи для всех уравнений семейства могут интерпретироваться как неулучшаемые (в данном семействе) достаточные признаки разрешимости.

Изучаемые семейства уравнений могут задаваться набором неотрицательных функций, являющихся значениями положительных (в смысле некоторого конуса) функциональных операторов уравнения при действии на единичной функции. Именно такой выбор семейств позволяет находить эффективные необходимые и достаточные условия разрешимости и сводить задачу к стандартной процедуре минимизации на конечномерном множестве (см., например, [1]–[3]).

В теории устойчивости аналогом решаемой задачи является задача об абсолютной устойчивости, когда свойство устойчивости должно сохраняться при любом запаздывающем аргументе. В теории краевых задач такая постановка систематически не рассматривалась, хотя отдельные результаты в этом направлении получены, в частности, в работах А. Д. Мышкиса, Е. Л. Тонкова, Н. В. Азбелева, И. Т. Кигурадзе, V. Lakshmikantham, R. P. Agarval, А. Ломтатидзе, Р. Хакла, Ю. Шремра и многих других. В ряде случаев мы улучшаем и дополняем существующие результаты. В частности, находим неулучшаемые в определенном смысле константы в условиях разрешимости. Результаты могут применяться для исследования нелинейных краевых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бравый Е. И.* Разрешимость краевых задач для линейных функционально-дифференциальных уравнений. Москва, Ижевск: Регуляр. и хаот. динамика, 2011.
2. *Bravyi E.* On estimates of solutions of the periodic boundary value problem for first-order functional differential equations // Bound. Value Probl. 2014. V. 119. P. 1–12.
3. *Бравый Е. И.* О разрешимости периодической задачи для линейных функционально-дифференциальных уравнений высших порядков // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 4. С. 563–577.

ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ КУБИЧЕСКИХ СИСТЕМ ТИПА ДАРБУ

Волокитин Е. П.[1], **Чересиз В. М.**[2]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
[1]volok@math.nsc.ru, [2]vladimir.cheresiz@math.nsc.ru

В работе [1] были перечислены все различные с топологической точки зрения фазовые портреты грубых систем типа Дарбу с кубическими нелинейностями

$$\dot{x} = x + p_3(x, y), \;\; \dot{y} = y + q_3(x, y), \tag{D$_3$}$$

$p_3(x, y)$, $q_3(x, y)$ — однородные многочлены третьей степени.

Условия грубости состояли в следующем:

(A) Все особые точки системы (D_3) (конечные и бесконечные) являются невырожденными (определитель матрицы линейной части отличен от 0).

(B) Многочлены $p_3(x, y)$, $q_3(x, y)$ взаимно просты.

В настоящей работе рассматриваются системы вида (D_3), которые удовлетворяют только условию (B).

Используя результаты работы [2], мы получили полный список фазовых портретов системы (D_3), различных с точки зрения топологической эквивалентности. Список таких портретов насчитывает в дополнение к 14 типам грубых фазовых портретов, описанным в [1], ещё 13 типов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-00745).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Волокитин Е. П., Чересиз В. М.* Качественное исследование плоских полиномиальных систем типа Дарбу // Сиб. электрон. мат. изв. 2016. Т. 16. С. 1170–1186.
2. *Cima A., Llibre J.* Algebraic and topological classification of the homogeneous cubic vector fields in the plane // J. Math. Anal. Appl. 1990. V. 147, No 2. P. 420–448.

О РАЗДЕЛИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Гадоев М. Г.[1], **Исхоков Ф. С.**[2]

[1]*Политехнический институт (филиал) Северо-Восточного федерального университета им. М. К. Аммосова, Мирный, Россия;* gadoev@rambler.ru
[2]*Институт математики АН РТ, Душанбе, Республика Таджикистан;* fariduniskhokov@mail.ru

Пусть Ω — произвольное (ограниченное или неограниченное) открытое множество в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ и пусть r — некоторое натуральное число. Рассматривается дифференциальное выражение

$$L(x, D_x) = \sum_{|k|\le 2r} a_k(x) D_x^k \quad (x \in \Omega), \tag{1}$$

где $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ — мультииндекс, $|k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ — длина мультииндекса,

$$D_x^k = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1} \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{k_2} \cdots \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{k_n}$$

и i — мнимая единица. Множество всех мультииндексов k, для которых $a_k(x) \not\equiv 0$, обозначим через K. Пусть O_K — множество функций $u(x) \in L_{1,\,\mathrm{loc}}(\Omega)$, имеющих обобщенные производные в смысле С. Л. Соболева $D_x^k u(x)$ для всех $k \in K$.

Определение. Пусть $\omega(x)$ — положительная измеримая в Ω функция, $1 < p < +\infty$. Дифференциальное выражение (1) называется *L_p-разделимым с весом* $\omega(x)$, если для всех функций $u(x) \in O_K$ таких, что $\omega(x)u(x) \in L_p(\Omega)$, $\omega(x)L(x, D_x)u(x) \in L_p(\Omega)$, имеет место включение $\omega(x)a_k(x)D_x^k u(x) \in L_p(\Omega)$ для всех мультииндексов $k \in K$.

В докладе обсуждается разделимость дифференциального выражения (1) с весом $\omega(x)$, когда коэффициенты $a_k(x)$, $k \in K$, могут иметь нестепенное вырождение на границе области Ω и вырождения по разным независимым переменным характеризуются с помощью разных функций. Предполагается, что область Ω и функции, которые характеризуют вырождения коэффициентов дифференциального оператора, удовлетворяют "условию погружения", введенному П. И. Лизоркиным в [1] (см. также [2]). Первые результаты по теории разделимости обыкновенных дифференциальных операторов получены В. Н. Эвериттом и М. Гирцем в начале шестидесятых годов прошлого столетия (по поводу библиографии см., например, [3]). Дальнейшее развитие этой теории показало, что теоремы разделимости дифференциальных операторов играют важную роль в решении ряда вопросов в теории вложения нормированных пространств дифференцируемых функций, в спектральной теории дифференциальных операторов и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лизоркин П. И.* Оценки смешанных и промежуточных производных в весовых L_p-нормах // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1980. Т. 156. С. 130–142.
2. *Гадоев М. Г., Исхоков Ф. С.* Об обратимости одного класса вырождающихся дифференциальных операторов в лебеговом пространстве // Мат. заметки СВФУ. 2016. Т. 23, № 3. С. 3–26.
3. *Бойматов К. Х.* Теоремы разделимости, весовые пространства и их приложения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1984. Т. 170. С. 37–76.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ КАК МОДЕЛЬ ЭМБОЛИЗАЦИИ АРТЕРИОВЕНОЗНОЙ МАЛЬФОРМАЦИИ

Гологуш Т. С.[1], **Черевко А. А.**[2], **Петренко И. А.**[3], **Остапенко В. В.**[4]

[1] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;* tatiana_06.08@mail.ru
[2] *Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия;* cherevko@mail.ru
[3] *Владимирский государственный университет им. Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, Владимир, Россия;* petrenko_irina@bk.ru
[4] *Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия;* ostapenko_vv@ngs.ru

Артериовенозная мальформация (АВМ) является сложным и опасным пороком развития сосудов головного мозга. Эндоваскулярная эмболизация АВМ является эффективным средством лечения данных патологий, тем не менее существует опасность разрыва АВМ в течении нескольких часов после операции. Цель данной работы состоит в том, чтобы смоделировать этот процесс и построить оптимизационный алгоритм эмболизации АВМ.

АВМ может адекватно моделироваться пористой средой в силу неупорядоченного расположения вырожденных сосудов малых диаметров, осуществляющих сброс крови из артерии в вену. Процесс эмболизации в одномерном приближении описывается уравнением Баклея – Леверетта, которое решается численно с помощью новой модификации схемы Кабаре. Для проверки пригодности метода при расчёте задач эмболизации, были проведены численные эксперименты, в которых смоделированы основные моменты процесса эмболизации.

На процесс эмболизации накладывается требование об ограничении удельной нагрузки на узел АВМ при эмболизации. Это требование следует из нейрохирургической практики. Оно формулируется в виде ограничения

$$\Delta E/V \leq W_{\max},$$

где ΔE — энергия, рассеивающаяся в АВМ за единицу времени, V — объём АВМ, $W_{\max}$ — предельное допустимое значение удельной нагрузки.

Процесс эмболизации описывается как процесс оптимального управления, где, управляя концентрацией эмболизата, нужно добиться максимальной эмболизации за конечное время при выполнении ограничения удельной нагрузки на узел АВМ. Показано, что оптимальное управление состоит из интервалов, на которых либо концентрация крови на входе в АВМ достигает минимального допустимого значения, либо эмболизация проходит при предельной допустимой нагрузке.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства РФ (проект № 14.W03.31.0002).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кривошапкин А. Л., Панарин В. А., Орлов К. Ю., Берестов В. В., Шаяхметов Т. С., Горбатых А. В., Кислицин Д. С., Чупахин А. П., Черевко А. А., Хе А. К., Сергеев Г. С., Чебыкин Д. В.* Алгоритм предупреждения гемодинамических кровоизлияний при эмболизации церебральных артериовенозных мальформаций // Бюллетень СО РАМН. 2013. Т. 33, № 6. С. 65–73.
2. *Cherevko A. A., Gologush T. S., Ostapenko V. V., Petrenko I. A., Chupakhin A. P.* Modeling process of embolization arteriovenous malformation on the basis of two-phase filtration model // J. Phys., Conf. Ser. 2016. V. 722, Article ID 012009.

ВЫДЕЛЕНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ У РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УПРУГОСТИ

Гордиенко В. М.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
gordienk@math.nsc.ru

Рассматривается система уравнений линейной теории упругости в напряжениях для трёхмерного полупространства. Так как эта система является гиперболической, то в качестве начальных данных могут задаваться любые (достаточно гладкие) напряжения. Однако, если начальные напряжения не удовлетворяют условию совместности Сен-Венана, то решение системы упругости не будет выражаться через перемещения. В статье показано, как начальное напряжение разложить в сумму двух слагаемых, так что от первого слагаемого получится стационарное решение, не удовлетворяющее условию совместности (остаточное напряжение), а от второго — нестационарное, удовлетворяющее условию Сен-Венана и, следовательно, представляющееся через перемещение. Построение указанного разложения сводится к решению серии уравнений Пуассона.

В работе используются инвариантные операторы не только div, grad, переводящие скалярные величины в векторные и наоборот, но и их обобщения, переводящие векторы в девиаторы и девиаторы в векторы. Эти операторы естественно возникают в теории неприводимых представлений группы вращений и элементарнее часто используемых инвариантных дифференциальных операторов, меняющих ранг тензора.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гордиенко В. М.* Инвариантные операторы и выделение остаточных напряжений // Сиб. журн. индустр. математики. 2017. Т. 20, № 4.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКИХ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА ВДАЛИ ОТ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

Григорьев Ю. Н.[1], **Ершов И. В.**[2]

[1]*Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия;* grigor@ict.nsc.ru

[2]*Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет, Новосибирск, Россия;* i_ershov@ngs.ru

Построена асимптотическая теория линейной устойчивости плоских сдвиговых течений колебательно возбужденного газа вдали от термодинамического равновесия. Исходной математической моделью служила линеаризованная система для возмущений восьмого порядка уравнений двухтемпературной аэрогидродинамики, включающая релаксационное уравнение Ландау – Теллера для колебательной температуры. Рассматривались возмущения в виде плоских волн, бегущих в направлении невозмущенного потока. Асимптотические решения уравнений для амплитуд возмущений, определяющих спектральную задачу устойчивости, строились в форме разложения по малому параметру $1/\mathrm{Re}$. В нулевом приближении методом Фробениуса найдены два линейно независимых "невязких" решения задачи. Для системы в первом порядке приближения обосновано отщепление уравнения для колебательной температуры, позволившее перейти к рассмотрению "вязкой" системы шестого порядка при сохранении эффекта релаксации. Последняя при отсутствии релаксации переходит в "вязкую" систему Дана – Линя для совершенного газа. При построении ее линейно независимых решений и преобразовании характеристического уравнения (определителя) спектральной задачи использован современный аппарат обобщенных функций Эйри. В качестве приложения теории построены секулярные (характеристические) уравнения кривых нейтральной устойчивости для плоского течения Куэтта колебательно возбужденного и термически совершенного газов. Выполненное построение является существенным обобщением классической теории Лиза – Дана – Линя для плоского пограничного слоя на случай двухточечной спектральной задачи, которая ранее не была решена даже для случая совершенного газа. Полученные алгебраические характеристические уравнения и упрощенные уравнения для критического числа Рейнольдса решались численно. Результаты находятся в хорошем соответствии с численным решением исходной полной спектральной задачи, полностью воспроизводя все характерные особенности поведения нейтральной кривой. Максимальное расхождение по критическим числам Рейнольдса не превышает 10%. Все основные элементы теории, универсальные для плоских сдвиговых течений колебательно возбужденного газа, будут использованы для аналогичных построений в свободных и пограничных слоях на плоской пластине и конусе, интересных для практических приложений.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00209а).

БИНАРНЫЕ СООТВЕТСТВИЯ И МНОГОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ

Гутман А. Е.[1], **Кононенко Л. И.**[2]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
[1]gutman@math.nsc.ru, [2]larak@math.nsc.ru

Формальным аналогом понятия *задачи* удобно считать соответствие между элементами двух множеств, т. е. тройку $P = (A, B, C)$, где $C \subseteq A \times B$. Множества A, B и C трактуются как *область данных*, *область искомых* и *условие* задачи P. При этом включение $(a, b) \in C$ записывается в виде $P(a, b)$ и расценивается как условие, выражающее соответствие искомого b данному a. *Решением* задачи P для данного $a \in A$ называется любое искомое $b \in B$, удовлетворяющее условию $P(a, b)$. Такой подход дает простую и адекватную формализацию не только основных компонентов задач (условие, данные, искомые), но и их основных свойств и конструкций (разрешимость, однозначная разрешимость, обратная задача, композиция, ограничение задачи), позволяет формализовать топологические задачи и связанные с ними понятия (устойчивость, корректность), а также говорить о параметризациях задач и зависимости решений от параметров (см. [1]).

В качестве примера рассмотрим сингулярно возмущенную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую процесс химической кинетики и горения (см. [2]). Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $0 < \varepsilon_0 \in \mathbb{R}$, $X := \mathbb{R}^m$, Y — область в $\mathbb{R}^n$, $T := \mathbb{R}$, $E := \{\varepsilon \in \mathbb{R} : 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0\}$, $F := C(X \times Y \times T \times E, \mathbb{R}^m)$, $G := C(X \times Y \times T \times E, \mathbb{R}^n)$. Рассмотрим задачу P с областью данных $F \times G \times E$, областью искомых $C^1(T, X) \times C^1(T, Y)$ и условием

$$P\big((f, g, \varepsilon), (x, y)\big) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \dot{x}(t) = f\big(x(t), y(t), t, \varepsilon\big), \\ \varepsilon\, \dot{y}(t) = g\big(x(t), y(t), t, \varepsilon\big) \end{cases} \text{для всех } t \in T,$$

где $f \in F$, $g \in G$, $\varepsilon \in E$, $x \in C^1(T, X)$, $y \in C^1(T, Y)$. Обратная к P задача P^{-1}, имеющая пары функций (x, y) в качестве данных, оказывается непрактичной: в роли данных более адекватны конечные наборы значений функций или их производных, нежели всюду определенные функции. Соответствующая корректировка обратной задачи реализуется посредством композиции задачи P^{-1} и вспомогательной задачи Q с областью данных $(\mathbb{R}^k)^3$, областью искомых $C^1(T, X) \times C^1(T, Y)$ и условием

$$Q\big((t, \alpha, \beta), (x, y)\big) \;\Leftrightarrow\; x(t_1) = \alpha_1,\ \ldots,\ x(t_k) = \alpha_k,\ \dot{x}(t_1) = \beta_1,\ \ldots,\ \dot{x}(t_k) = \beta_k,$$

где $t, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^k$, $x \in C^1(T, X)$, $y \in C^1(T, Y)$. В [1] приведено условие разрешимости композиционной задачи $P^{-1} \circ Q$ для частного случая.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-00745).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gutman A. E., Kononenko L. I.* Formalization of inverse problems and applications to systems of equations with parameters // Geometric analysis and control theory: abstracts. Novosibirsk: Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, 2016. P. 40–42.
2. *Гольдштейн В. М., Соболев В. А.* Качественный анализ сингулярно возмущенных систем. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО АН СССР, 1988.

ВЕСОВЫЕ СОБОЛЕВСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ

Демиденко Г. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
demidenk@math.nsc.ru

В докладе обсуждается вопрос о свойствах изоморфизма некоторых классов матричных квазиэллиптических операторов $L(D_x)$ во всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Эти классы операторов входят в класс квазиэллиптических операторов, введенных Л. Р. Волевичем и С. М. Никольским, и содержат, в частности, однородные эллиптические операторы, эллиптические и параболические операторы по Петровскому, параболические операторы “с противоположными временами”, эллиптические операторы по Дуглису – Ниренбергу и др. При условиях квазиоднородности символов $L(i\xi)$ свойства изоморфизма ранее были установлены автором (см., например, [1]–[3]) и частично обобщены в работе [4]. Для формулировки теорем об изоморфизме в [1]–[3] использовались специально построенные [5] весовые соболевские пространства $W^l_{p,\sigma}(\mathbb{R}^n)$.

В настоящей работе рассматриваются классы операторов, для которых символы не являются квазиоднородными. Мы устанавливаем достаточные условия на младшие члены и определяем некоторые весовые соболевские пространства $W^l_{p,q,\sigma}(\mathbb{R}^n)$, для которых удается доказать теоремы об изоморфизме

$$L(D_x) : W^l_{p,q,\sigma}(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n).$$

Работа продолжает исследования [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демиденко Г. В.* О квазиэллиптических операторах в $\mathbb{R}^n$ // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 5. С. 1028–1037.
2. *Демиденко Г. В.* Квазиэллиптические операторы и уравнения соболевского типа, I, II // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 5. С. 1064–1076; 2009. Т. 50, № 5. С. 1060–1069.
3. *Демиденко Г. В.* Матричные квазиэллиптические операторы в $\mathbb{R}^n$ // ДАН. 2010. Т. 431, № 4. С. 443–446.
4. *Hile G. N.* Fundamental solutions and mapping properties of semielliptic operators // Math. Nachrichten. 2006. V. 279, No 13–14. P. 1538–1572.
5. *Демиденко Г. В.* О весовых соболевских пространствах и интегральных операторах, определяемых квазиэллиптическими уравнениями // ДАН. 1994. Т. 334, № 4. С. 420–423.
6. *Demidenko G.* Mapping properties of one class of quasielliptic operators // Proceedings of the Third International Conference “Mathematics and Computing” (Commun. Comput. Inf. Sci., V. 655). Berlin: Springer, 2017. P. 339–348.

УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА: НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ

Денисова Т. Е.

Московский городской психолого-педагогический университет, Москва, Россия;
tdenissova@mail.ru, DenisovaTE@mgppu.ru

Доклад посвящён изучению поведения решений краевых задач уравнений соболевского типа

$$D_t^2\nabla(A(x)\nabla u) + \nabla(B(x)\nabla u) = 0,$$

где $A(x)$ и $B(x)$ — матрицы коэффициентов.

Актуальность рассматриваемой задачи обусловлена её применимостью к широкому кругу практических задач физики плазмы, атмосферы и океана [1].

Отправной точкой в формировании теории уравнений соболевского типа является работа С. Л. Соболева [2], положившая начало функциональным методам исследования решений таких уравнений. Доклад посвящён дальнейшему развитию этих методов [3].

Как известно, одной из до сих пор не достаточно изученных и требующих дальнейшего исследования проблем является выяснение непрерывной зависимости решения уравнения соболевского типа от границы области.

В докладе рассматривается первая начально-краевая задача для уравнения соболевского типа для достаточно широкого класса пространственных областей: конечной меры с $(n-1)$-мерной гладкой границей.

Доказывается, что при усилении требований к гладкости решения по времени, производные решения в каждой точке пространственной области не могут монотонно расти или монотонно медленно (медленнее t^{-1}) стабилизироваться к нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
2. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. Т. 18, № 1. С. 3–50.
3. *Денисова Т. Е.* Асимптотическое поведение решения первой начально-краевой задачи для уравнений соболевского типа с точки зрения осцилляции // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 2. С. 196–206.

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНОЙ И ИНТЕГРАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Джамалов С. З.

Институт математики при Национальном университете Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Республика Узбекистан; siroj63@mail.ru

Пусть Ω — ограниченная односвязная область в пространстве $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$.

В области $Q = \Omega \times (0, T)$ рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$Lu = K(x,t)u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}(x)u_{x_j}\right) + \alpha(x,t)u_t + c(x,t)u = f(x,t). \qquad (1)$$

Пусть $K(x,0) \le 0 \le K(x,T)$, и предположим, что коэффициенты уравнения (1) — достаточно гладкие функции. Уравнение (1) относится к уравнениям смешанного типа второго рода, т. к. на знак функции $K(x,t)$ по переменной t внутри области Q не налагается никаких ограничений. Пусть выполнено одно из условий:

(a) $a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \ge a_0|\xi|^2$, $a_{i,j} = a_{j,i}$, где $a_0 > 0$ — const, $\xi \in \mathbb{R}^n$;

(b) $a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \le a_1|\xi|^2$, где $a_1 < 0$ — const, $x \in \overline{\Omega}$, $|\xi|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2$.

Краевая задача. Найти обобщенное решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x,0) = \gamma(x)u(x,T) + \int_0^T A(x,t)u(x,t)dt, \qquad (2)$$

$$u\big|_{\partial Q} = 0. \qquad (3)$$

В данной работе в случае, когда $\gamma(x)$ и $A(x,t) \ne 0$, при выполнении некоторых условий на коэффициенты краевой задачи доказывается методами “ε-регуляризации” и продолжения по параметру однозначная разрешимость задачи (1)–(3) из пространства Соболева $W_2^3(Q)$.

К РЕШЕНИЮ ПСЕВДОВОЛЬТЕРРОВОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Дженалиев М. Т.[1], Искаков С. А.[2], Рамазанов М. И.[2]

[1]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Республика Казахстан;* muvasharkhan@gmail.com

[2]*Институт прикладной математики, Карагандинский государственный университет им. Е. А. Букетова, Караганда, Республика Казахстан;* isagyndyk@mail.ru, ramamur@mail.ru

При изучении параболических задач со свободными границами [1], когда область независимых переменных имеет вырождение, возникает необходимость решения особого интегрального уравнения Вольтерры, которое названо *псевдовольтерровым интегральным уравнением*. Для последнего установлена формула общего решения, а также оценка резольвенты.

Мы изучаем вопросы разрешимости следующего особого интегрального уравнения Вольтерры:

$$\varphi(t)+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\left[\frac{t+\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}+\frac{3}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{t-\tau}{4a^2}\right\}\right.$$

$$\left.-\frac{4}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\right]\sqrt{\frac{t}{\tau}}\,\varphi(\tau)d\tau=f(t),\quad t>0. \tag{1}$$

В работе [2] было показано, что соответствующее однородное интегральное уравнение для (1) имеет ненулевое решение $\varphi_0(t)$.

Теорема. *Интегральное уравнение* (1) *для любой правой части* $\sqrt{t}\,f(t)\in L_\infty\,(0,\infty)$ *имеет общее решение*

$$\varphi(t)=f(t)+\int\limits_0^t R(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau+C\,\varphi_0(t),$$

где $C=\mathrm{const}\ge 0$, $\sqrt{t}\,\varphi(t)\in L_\infty\,(0,\infty)$, *и для резольвенты справедлива оценка*

$$|R(t,\tau)|\le C\left|\frac{\sqrt{t}\,\sqrt{\tau}}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right\}+\frac{\sqrt{t}\,\sqrt{\tau}}{\sqrt{t-\tau}\,(2t-\tau)}\right|\exp\left\{-\frac{t-\tau}{4a^2}\right\}.$$

Работа выполнена при поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (проекты № 0085/ПЦФ-14, № 0823/ГФ4 и № 1164/ГФ4).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Солонников В. А., Фазано А.* Об одномерной параболической задаче, возникающей при изучении некоторых задач со свободными границами // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2000. Т. 269. С. 322–338.
2. *Jenaliyev M. T., Ramazanov M. I.* On a homogeneous parabolic problem in an infinite corner domain // AIP Conf. Proc. 2016. V. 1759. P. 020085-1–020085-6.

О ВСТРЕЧНЫХ УРАВНЕНИЯХ И МОДЕЛИРОВАНИИ

Егоршин А. О.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
egorshin@math.nsc.ru

1. Показано, что основой уравнений алгебраических процессов (последовательных преобразований алгебраических объектов) являются уравнения двусторонней (встречной) ортогонализации невырожденных векторных систем в гильбертовых пространствах. Речь идет об уравнениях следующих последовательных алгебраических процессов: обращения матриц (окаймляемых и суммируемых), их право- и левотреугольные факторизации, а также последовательные решения пере- и недоопределенных линейных алгебраических уравнений методами наименьших квадратов.

Показано, что в однородных (изометрических) векторных системах $Y_L = |y_0, \ldots, U^L y_0|$ уравнения двусторонней ортогонализации тесно связаны. Получены нелинейные разностные системы так называемых встречных уравнений. Они описывают процессы двусторонней ортогонализации однородных систем.

2. Показано, что встречные уравнения ортогонализации приводят к решениям ряда вариационных задач для финитных последовательностей. Речь идет о задачах кусочно-линейной динамической аппроксимации отсчетов (функций, сигналов, процессов) решениями стационарных динамических моделей.

Так названы модели, которые описываются обыкновенными линейными разностными уравнениями заданного порядка n с постоянными коэффициентами α_i, $i = \overline{0,n}$. Показано, что этими моделями описываются отсчеты решений дифференциальных уравнений этого же типа $\sum_0^n y^{(i)} a_i = 0$ на заданной сетке в конечном интервале I. Коэффициенты уравнений α_i, a_i могут быть не известны. Поставленные задачи аппроксимации есть обобщение классических задач аппроксимации отсчетов функций полиномами p_{n-1}. Достаточно увидеть, что $p_{n-1}^{(n)} = 0$.

3. На основе указанного класса моделей решены следующие обратные вариационные задачи для финитных последовательностей. Во-первых, задачи сглаживания и так называемой быстрой линейной фильтрации. Причем полученные вариационные быстрые фильтры являются более быстрыми и простыми, чем полученные рядом исследователей (Т. Кайлат и др.) быстрые фильтры на основе фильтров Р. Калмана для стационарных систем. Во-вторых, это задачи нелинейной фильтрации для оценки как состояний, так и неизвестных коэффициентов α_i уравнений моделей. Так осуществляется идентификация исследуемых процессов.

4. Линейные задачи сглаживания и их частный случай — задачи фильтрации (оценки состояний модели) — есть задачи ортогонального проектирования в E^{L+1} на ядра $\mathcal{D}(\alpha) \subset E^{L+1}$ разностных операторов с заданными коэффициентами α.

Нелинейные задачи идентификации (оценки вектора α) есть задачи проектирования (поиска ближайшего элемента) на множество $\Omega = \{\mathcal{D}(\alpha) : \alpha \in \omega \subset E^{n+1}\}$ подпространств. Дано определение класса подпространств, которые могут быть ядрами разностных операторов и составляют множество Ω [1].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00592).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Егоршин А. О.* О ядрах автономных разностных операторов // Соболевские чтения. Тез. докл. Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2016. С. 92.

ЗАДАЧА ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ ДЛЯ МОДЕЛИ КЕЛЬВИНА – ФОЙГТА

Звягин А. В.

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия;
zvyagin.a@mail.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3,$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^2. В $Q_T = [0,T] \times \Omega$ рассматривается начально-краевая задача

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - 2\mathrm{Div}(\nu(\theta)\mathcal{E}) - \varkappa \frac{\partial \Delta v}{\partial t} - 2\varkappa \mathrm{Div}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_i}\right) + \nabla p = f; \quad (1)$$

$$\mathrm{div}\, v = 0 \text{ в } Q_T; \qquad v|_{t=0} = v_0 \text{ в } \Omega; \qquad v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \chi \Delta\, \theta = 2\left(\nu(\theta)\mathcal{E} + \varkappa \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \varkappa \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_i}\right) : \mathcal{E}(v) + g; \quad (3)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0 \text{ в } \Omega; \qquad \theta|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \quad (4)$$

Здесь v, θ и p — вектор-функция скорости, функции температуры и давления среды соответственно, f — плотность внешних сил, g — источник внешнего тепла, $\varkappa > 0$ — время ретардации, $\chi > 0$ — коэффициент теплопроводности, $\nu(\theta) > 0$ — вязкость жидкости, $\mathcal{E}$ — тензор скоростей деформаций. Обзор математической модели Кельвина – Фойгта можно найти в [1], а результаты по изучаемым в данном докладе моделям с вязкостью, зависящей от температуры, — в [2].

Введём пространства: $E_1 = \{v : v \in L_\infty(0,T,V^1), v' \in L_2(0,T;V^{-1})\}$ и $E_2 = \{v : v \in L_p(0,T;W_p^1(\Omega)), v' \in L_1(0,T;\, W_p^{-1}(\Omega)),\ 1 < p < +\infty\}$.

Определение. *Слабым решением* задачи (1)–(4) называется пара $(v,\theta) \in E_1 \times E_2$, удовлетворяющая начальным условиям $v|_{t=0} = v_0$ и $\theta|_{t=0} = \theta_0$ и соотношениям:

$$\begin{gathered}\int_\Omega \partial v/\partial t\, \varphi\, dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \partial\varphi_j/\partial x_i\, dx + \int_\Omega (2\nu(\theta)\mathcal{E}(v) + \varkappa\mathcal{E}(\partial v/\partial t)) : \mathcal{E}(\varphi)\, dx \\ -\varkappa \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k(\partial v_i/\partial x_j - \partial v_j/\partial x_i)\partial^2\varphi_j/\partial x_i \partial x_k\, dx \\ = \langle f, \varphi\rangle \quad \forall\, \varphi \in V \text{ и п.в. } t \in [0,T],\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\int_\Omega \partial\theta/\partial t\, \phi\, dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i\theta_j \partial\phi_j/\partial x_i\, dx + \chi\int_\Omega \mathcal{E}(\theta) : \mathcal{E}(\phi)\, dx \\ = 2\int_\Omega \big((\nu(\theta)\mathcal{E}(v) + \varkappa\partial\mathcal{E}(v)/\partial t + \varkappa\sum_{i=1}^n v_i \partial\mathcal{E}(v)/\partial x_i) : \mathcal{E}(v)\big) : \phi\, dx \\ +\langle g, \phi\rangle \quad \text{при всех } \phi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ и п.в. } t \in [0,T].\end{gathered}$$

Теорема. *Пусть функция $\nu(\theta) \in C^2(-\infty,+\infty)$ является монотонно возрастающей и $0 \le \nu(\theta) \le M$, $f \in L_2(0,T;V^{-1})$, $g \in L_1(0,T;H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))$, $v_0 \in V^1$, $\theta_0 \in W_p^{1-2/p}(\Omega)$. Тогда при $1 < p < 4/3$ для $n = 2$ и для $1 < p < 5/4$ при $n = 3$ существует слабое решение задачи (1)–(4).*

Аналогичный результат для частного случая данной начальной-краевой задачи (для модели Фойгта) получен в [3]–[4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Звягин В. Г., Турбин М.В.* Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред. М.: Красанд, 2012.
2. *Zvyagin V. G., Orlov V. P.* On certain mathematical models in continuum thermomechanics // J. Fixed Point Theory Appl. 2014. V. 15, No 1. P. 3–47.
3. *Звягин А. В., Орлов В. П.* Разрешимость задачи термовязкоупругости для одной модели Осколкова // Изв. вузов. Матем. 2014. № 9. С. 69–74.
4. *Звягин А. В., Орлов В. П.* Исследование разрешимости задачи термовязкоупругости для линейно упруго-запаздывающей жидкости Фойгта // Мат. заметки. 2015. Т. 97, № 5. С. 681–698.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ЖИДКОСТИ БИНГАМА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ПЕРЕМЕННЫМ

Звягин В. Г.[1], **Турбин М. В.**[2]

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия;
[1]zvg_vsu@mail.ru, [2]mrmike@mail.ru

На практике часто возникает задача управления (оптимального управления) движением жидкости при помощи внешних сил. Обычно при решении таких задач управление выбирается из некоторого заданного (конечного) множества управлений. Однако, в работах В. Г. Звягина, В. В. Обуховского, М. В. Турбина (см., например, [1]–[3] и приведённую там библиографию) были рассмотрены задачи, когда внешняя сила, которая и является управлением, зависит от скорости движения жидкости (такие задачи называются задачами с обратной связью). Эта модель позволяет более точно выбирать управление, поскольку в данном случае управление выбирается не из конечного набора имеющихся управлений, а принадлежит образу некоторого многозначного отображения (естественно, что на это отображение накладываются условия, а именно, зачастую оно должно быть ограничено, полунепрерывно сверху, слабо замкнуто и иметь непустые, компактные и выпуклые значения), что может позволить более точно выбрать управление.

Решением поставленной задачи управления движением жидкости является пара (v, f), где v — скорость движения жидкости, а f — управление (плотность внешних сил). При этом f принадлежит образу некоторого многозначного отображения, зависящему от скорости движения жидкости v. В связи с тем, что таких пар может быть много, естественным образом возникает понятие оптимального решения — решения, дающего минимум заданному функционалу качества.

Мы рассматриваем задачу управления с обратной связью для математической модели Бингама движения жидкости в трехмерном случае с периодическими условиями по пространственным переменным. Сначала на основе аппроксимационно-топологического подхода к исследованию задач гидродинамики показывается, что существует решение задачи управления с обратной связью. После чего доказывается, что среди решений поставленной задачи существует решение, дающее минимум заданному функционалу качества.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Obukhovskii V. V., Zecca P., Zvyagin V. G.* Optimal feedback control in the problem of the motion of a viscoelastic fluid // Topol. Methods Nonlinear Anal. 2004. V. 23, No 2. P. 323–337.
2. *Zvyagin V. G., Turbin M. V.* Optimal feedback control in the mathematical model of low concentrated aqueous polymer solutions // J. Optim. Theory Appl. 2011. V. 148, No 1. P. 146–163.
3. *Zvyagin V. G., Kuzmin M. Y.* On an optimal control problem in the Voight model of the motion of a viscoelastic fluid // J. Math. Sci. 2008. V. 149, No 5. P. 1618–1627.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Зикиров О. С.

Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Республика Узбекистан; zikirov@yandex.ru

В области $D = \{(x, y) : 0 < x < l,\ 0 < y < h\}$ рассмотрим гиперболическое уравнение третьего порядка в виде

$$Mu \equiv \left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial t}\right) u_{xt} + Lu = g(x, t), \tag{1}$$

где α, β — заданные постоянные числа, причем $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, а L — линейный дифференциальный оператор вида

$$Lu \equiv a(x, t)u_{xx} + 2b(x, t)u_{xt} + c(x, t)u_{tt} + d(x, t)u_x + e(x, t)u_t + f(x, t)u.$$

Задачи с интегральными условиями образуют один из классов нелокальных задач, к исследованию которых приводят математические модели различных физических процессов. Представляют интерес смешанные задачи для гиперболических уравнений с нелокальными интегральными условиями, они активно изучаются (см., например, [1]).

Для уравнения (1) в области D рассмотрим нелокальную задачу в следующей постановке: найти регулярное в области D решение $u(x, y)$ уравнения (1), непрерывное в $\overline{D}$ и удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u_y(x, 0) = \varphi_2(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

$$u(0, y) = \lambda(y) \int_0^l u(x, y)dx + \int_0^y \rho(y, \eta)u(l, \eta)d\eta + \mu_1(y), \quad 0 \le y \le h, \tag{3}$$

$$u_x(0, y) = \mu_2(y), \quad 0 \le y \le h, \tag{4}$$

здесь $\varphi_i(x)$, $\mu_i(y)$ $(i = 1, 2)$, $\lambda(y)$ и $\rho(y, \eta)$ — заданные гладкие функции, причем

$$\varphi_1'(0) = \mu_2(0), \quad \varphi_1(0) = \lambda(0) \int_0^l \varphi_1(x)dx + \mu_1(0);$$

$$\varphi_2(0) = \lambda'(0) \int_0^l \varphi_1(x)dx + \lambda(0) \int_0^l \varphi_2(x)dx + \rho(0, 0)\varphi_1(l) + \mu_1'(0).$$

В поставленной задаче в краевых условиях содержится нелокальность по времени, что впервые рассмотрено в работе А. И. Кожанова [2].

С помощью сведения задачи к интегральному уравнению Вольтерра второго рода установлено существование единственного регулярного решения для рассматриваемой задачи (1)–(4).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пулькина Л. С.* Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений. Самара: Самарский университет, 2012.
2. *Кожанов А. И.* Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 6. С. 763–774.

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА С ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

Золототрубова Г. О.

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия;
Galinazolototrubowa@yandex.ru

Рассмотрим движение в открытой ограниченной локально-липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей Γ. Система уравнений Навье – Стокса имеет вид:

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n} v_i\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)-\mu\Delta v+\operatorname{grad} p=\rho f, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n} v_i\frac{\partial \rho}{\partial x_i}=0, \tag{2}$$

$$\operatorname{div} v=0, \tag{3}$$

$$v\big|_{t=0}=v_0, \quad \rho\big|_{t=0}=\rho_0, \tag{4}$$

$$v(x,t)=0 \quad \forall (x,t)\in\Gamma\times[0,T]. \tag{5}$$

Определение. Пара (v,ρ) называется слабым решением системы уравнений Навье – Стокса (1)–(5), если: $v \in L_2(0,T,V)\cap C_\omega(0,T;H)$, $v' \in L_1(0,T;V^*)$, $\rho \in L_\infty(0,T,L_\infty)$, $0<m<\rho<M$, где m и M — константы; (v,ρ) удовлетворяет (3)–(5), и для любых $\varphi \in V$, $\psi \in H^1$ почти всюду при $t\in[0,T]$ выполняются два интегральных равенства:

$$\left(\rho\frac{\partial v}{\partial t},\varphi\right)(t)+\sum_{i=1}^{n}\left(v_i\rho\frac{\partial v}{\partial x_i},\varphi\right)(t)+\mu(\nabla v,\nabla\varphi)(t)=(\rho f,\varphi)(t), \tag{6}$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t},\psi\right)(t)+\sum_{i=1}^{n}\left(v_i\frac{\partial \rho}{\partial x_i},\psi\right)(t)=0. \tag{7}$$

Теорема 1. *Система* (4) *и* (7) *имеет единственное слабое решение* $\rho \in L_\infty(0,T,L_2)$ *для* $v\in L_2(0,T,V)$.

Будем предполагать, что $\rho\in L_\infty(0,T,L_2)$ ограниченно, т. е. $0<m<\rho<M$.

Теорема 2. *Для любого* $v\in L_2(0,T,V)\cap C_\omega(0,T;H)$ *система, состоящая из равенства:*

$$\left(\rho(v)\frac{\partial \overline{v}}{\partial t},\varphi\right)(t)+\sum_{i=1}^{n}\left(\rho(v)v_i\frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i},\varphi\right)(t)+\mu(\nabla\overline{v},\nabla\varphi)(t)=(\rho(v)f,\varphi)(t), \tag{8}$$

где $\varphi\in V$, *начально-краевых условий системы Навье – Стокса* (4)–(5), *условия несжимаемости жидкости* (3), *имеет единственное слабое решение*

$$\overline{v}\in L_2(0,T,V)\cap C_\omega(0,T;H), \quad \overline{v}'\in L_1(0,T;V^*).$$

Теорема 3. *Существует* v *такое, что решение (8)* $\overline{v}=v$, *где* $v\in L_2(0,T,V)\cap C_\omega(0,T;H)$.

Из результатов теорем 1, 2 и 3 следует теорема 4.

Теорема 4. *Пусть* $f\in L_2(0,T,V)$, $v_0\in V$, $\rho_0\in L_\infty(\Omega)$, $0<m<\rho<M$, *тогда существует хотя бы одно слабое решение системы уравнений Навье – Стокса* (1)–(5).

ПРЕДЕЛЬНАЯ ФОРМА ЦИКЛИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СИНТЕЗА

Иванов В. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
iva@math.nsc.ru

Одна из наиболее интенсивно изучаемых моделей многостадийного синтеза описывается циклической системой дифференциальных уравнений

$$\tau\dot{x}_1 + nx_1 = \tau g(t, y_n), \quad \tau\dot{x}_k + nx_k = nx_{k-1}, \quad \tau\dot{y}_n + \tau\vartheta y_n = nx_n,$$

где $1 < k \leq n$. Здесь $\tau > 0$, параметр $\vartheta = \vartheta(t)$ определен и непрерывен при $t \geq 0$, функция $g(t, y)$ определена, непрерывна, ограничена и неотрицательна при $t, y \geq 0$. Для каждого набора $\mu_1^n, \ldots, \mu_n^n, m_n \geq 0$ система имеет решение $x_1(t), \ldots, x_n(t), y_n(t)$ на всей временной полуоси $t \geq 0$, для которого $x_k(0) = \mu_k^n$ при всех k и $y_n(0) = m_n$. Если функции $x_1, \ldots, x_n$ играют "промежуточную" роль, то функции y_n выражают конечную цель синтеза. Но размерности систем, приводящих к функциям y_n, порою так высоки [1], что естественно попытаться узнать, когда и куда сходятся эти функции с ростом n. Развивая результаты статьи [2] и следуя работе [3], для полного ответа на эти вопросы "начальные" массы $m_n, \mu_n^n, \ldots, \mu_1^n$ ровно в этом порядке поместим в точки $0, \tau/n, \ldots, n\tau/n = \tau$ и для каждого $t \geq 0$ посчитаем совокупную массу $F_n(t)$, оказавшуюся в точках отрезка от нуля до t. Пусть Θ означает первообразную ϑ, равную нулю в нуле.

Теорема. *Функции y_n сходятся почти всюду к некоторой функции y тогда и только тогда, когда функции F_n, построенные по тем же начальным массам, почти всюду сходятся к некоторой функции F. Можно считать, что функции y и F определены и непрерывны справа на всей полуоси. Если $Y(t) = e^{\Theta(t)}y(t)$, то*

$$Y(t) = F(0) + \int_0^t e^{\Theta(s)}dF(s), \quad F(t) = Y(0) + \int_0^t e^{-\Theta(s)}dY(s),$$

когда $0 \leq t \leq \tau$, а если $t > \tau$, функция y вычисляется по рекуррентной формуле

$$Y(t) = Y(\tau) + \int_\tau^t e^{\Theta(s)}g(s-\tau, y(s-\tau))ds,$$

так что функции y и F выражаются одна через другую явными интегралами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Марри Дж.* Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. М.: Мир, 1983.
2. *Демиденко Г. В., Мельник И. А.* Об одном способе аппроксимации решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 3. С. 528–546.
3. *Иванов В. В.* Интегралы Эйлера – Дирака и монотонные функции в моделях циклического синтеза // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 6. С. 1291–1312.

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ СПЕКТРА ОДНОГО НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Исхоков С. А.

Институт математики АН РТ, Душанбе, Республика Таджикистан;
sulaimon@mail.ru

Во всем n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ рассматривается дифференциальный оператор

$$L[u] = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left(1+|x|^2\right)^{\tau} a_{ij}(x) A(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right).$$

Считается, что $\tau > 1$, $A(x)$ — квадратная матрица-функция порядка l и $u(x) = (u_1(x), \ldots, u_l(x))$. Оператор L рассматривается в пространстве $H_l = L_2(\mathbb{R}^n)^l$. Область определения оператора L задается следующим образом:

$$D(L) = \left\{u \in \overset{\circ}{W}{}^1_{2;\tau}(\mathbb{R}^n)^l \cap W^2_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)^l : L[u] \in H_l\right\},$$

где $\overset{\circ}{W}{}^1_{2;\tau}(\mathbb{R}^n)^l$ — замыкание класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ по норме

$$\|u\|_+ = \left\{\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{\tau} \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^2_{\mathbb{C}^l} dx + \int\limits_{B_1} |u(x)|^2_{\mathbb{C}^l}\, dx\right\},$$

$$B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}.$$

Предполагается, что коэффициенты $a_{ij}(x)$ и элементы матрицы-функции $A(x)$ ограничены и принадлежат пространству $C^2(\mathbb{R}^n)$.

Теорема. *Пусть коэффициенты $a_{ij}(x)$ такие, что*

$$a_{ij}(x) \equiv a_{ji}(x)\ (i,j = \overline{1,n}); \quad |s| \le M \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) s_i \bar{s}_j\ \ (x \in \mathbb{R}^n,\, s \in \mathbb{C}^n),$$

и пусть при любом $x \in \mathbb{R}^n$ матрица-функция $A(x)$ имеет простые собственные значения $\mu_1(x), \ldots, \mu_l(x)$, расположенные в комплексной плоскости следующим образом: $\arg \mu_j(x) \equiv 0$ $(j = \overline{1,k})$, $\mu_j(x) \notin \overline{\Phi}$ $(j = \overline{k+1,l})$, *где* $\Phi = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \psi\}$, $\varphi \in (0, \pi)$. *Тогда оператор L имеет дискретный спектр. Для любого $\psi \in (0, \varphi)$ справедлива оценка*

$$\left\|(L - \lambda E)^{-1}\right\| \le M_\psi |\lambda|^{-1} \quad (\lambda \in \Phi_\psi,\, |\lambda| \ge C_\psi),$$

где M_ψ, $C_\psi > 0$ — достаточно большие числа, $\Phi_\psi = \{z \in \mathbb{C} : \psi \le |\arg z| \le \psi\}$.

При некоторых дополнительных ограничениях установлены асимптотические формулы для функции распределения собственных значений оператора L.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Исхоков С. А.* Распределение собственных значений некоторых классов несамосопряженных эллиптических систем дифференциальных операторов // ДАН. 1993. Т. 330, № 5. С. 549–553.
2. *Исхоков С. А.* О распределении собственных значений вырождающихся эллиптических дифференциальных операторов, далеких от самосопряженных // Успехи мат. наук. 1995. Т. 50, вып. 6. С. 181–182.
3. *Самирипур А., Седдики К.* Распределение собственных значений несамосопряженных эллиптических систем, вырождающихся на границе области // Мат. заметки. 1997. Т. 61, вып. 3. С. 463–467.

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Казаков А. Л.[1], **Кузнецов П. А.**[2]

[1]*Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия;* kazakov@icc.ru
[2]*Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия;* pav_ku@mail.ru

Рассмотрена одна специальная краевая задача с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности (the porous medium equation) [1]. Построено решение в виде сходящегося степенного ряда, доказана теорема существования и единственности решения.

Объектом исследования является нелинейное уравнение в частных производных
$$u_t = u\Delta u + \frac{1}{\sigma}(\nabla u)^2, \tag{1}$$
в котором $u = u(t, \mathbf{x})$ — неизвестная функция, $\sigma > 0$ — константа. Уравнение вида (1) наиболее часто используется при описании процессов теплопроводности и фильтрации, однако имеет и ряд других интересных приложений.

Для уравнения (1) рассматривается задача с данными на замкнутой достаточно гладкой кривой, ограничивающей звездную область в $\mathbb{R}^2$, в силу чего удобно перейти в полярную систему координат. Задача запишется в виде
$$u_t = u\left(\frac{1}{\rho}u_\rho + u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2}u_{\varphi\varphi}\right) + \frac{1}{\sigma}\left(u_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}u_\varphi^2\right); \tag{2}$$
$$u(t,\rho,\varphi)\big|_{\rho=R(t,\varphi)} = f(t,\varphi). \tag{3}$$
Здесь функции $R(t,\varphi) > 0$ и $f(t,\varphi)$ определены в некоторой окрестности $t = 0$ и при всех $\varphi \in [-\pi;\pi]$, причем $f_t(0,\varphi) > 0$ и $f(0,\varphi) = 0$. Последнее равенство вкупе с краевым условием (3) делают уравнение (2) неразрешенным относительно старшей производной [2] и приводят к вырождению его типа. Для задачи (2), (3) доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть функции f и R аналитичны на всей своей области определения. Тогда задача* (2), (3) *имеет единственное аналитическое решение.*

Также построено решение задачи в виде двойного ряда Тейлора по степеням t и $\rho - R(t,\varphi)$. Данные результаты обобщают ранее полученные авторами [3] для случая стационарной границы, т. е. при $R(t,\varphi) \equiv R(\varphi)$.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 16-01-00608 и № 16-31-00291).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vazquez J. L.* The porous medium equation: Mathematical theory. Oxford: Clarendon Press, 2007.
2. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
3. *Казаков А. Л., Кузнецов П. А.* Об одной краевой задаче для нелинейного уравнения теплопроводности в случае двух пространственных переменных // Сиб. журн. индустр. математики. 2014. Т. 17, № 1. С. 46–54.

НЕЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ С ЗАДАННЫМ ТЕПЛОВЫМ ФРОНТОМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Казаков А. Л.[1], Орлов Св. С.[1], Орлов С. С.[2]

[1] *Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия;*
kazakov@icc.ru, s.orlov@icc.ru
[2] *Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия;*
orlov_sergey@inbox.ru

Рассмотрим краевую задачу

$$u_t = uu_{\rho\rho} + \frac{u_\rho^2}{\sigma} + \frac{\nu}{\rho}uu_\rho, \quad t \geq 0, \quad \rho \geq 0; \tag{1}$$

$$u\big|_{\rho=f(t)} = 0, \tag{2}$$

в которой уравнение (1) представляет собой одномерный вариант уравнения нелинейной теплопроводности с показателем $\sigma > 0$ степенной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры (porous medium equation) [1] для случаев плоской ($\nu = 0$), осевой ($\nu = 1$) и сферической ($\nu = 2$) симметрий.

Настоящая работа посвящена проблеме разрешимости задачи (1), (2), а также вопросам о глобальных свойствах и поведении ее точных решений типа тепловой волны. Под тепловой волной понимается конфигурация, образованная двумя поверхностями: $u = u(t, \rho)$ (неотрицательной части решения уравнения (1)) и $u = 0$ (фоновое тривиальное решение), непрерывно стыкующихся в плоскости переменных (t, ρ) вдоль некоторой достаточно гладкой кривой $\rho = f(t)$, которую называют фронтом тепловой волны [2]. Вдоль фронта тепловой волны уравнение (1) не может быть разрешено относительно старшей (второй) производной [3].

В работе предъявлены некоторые допустимые семейства тепловых фронтов. Для теплового фронта $\rho = f(t)$ логарифмического, степенного и экспоненциального типов доказана разрешимость задачи (1), (2) в классе функций конечной гладкости и построены ее точные решения. Проведен качественный анализ точных решений, установлены их глобальные свойства и поведение. Кроме того, показано, что значения параметров, входящих в вид решений задачи (1), (2), оказывают существенное влияние на структуру тепловых волн. В частности, могут возникать LS- и HS-режимы с обострением [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 16-01-00608, № 16-31-00291).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vazquez J. L.* The porous medium equation: Mathematical theory. Oxford: Clarendon Press, 2007.
2. *Сидоров А. Ф.* Избранные труды: Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001.
3. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
4. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ГЛОБАЛЬНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ В АТМОСФЕРЕ

Калинин А. В.[1], **Слюняев Н. Н.**[2], **Изосимова О. А.**[3]

[1]*Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия;* avk@mm.unn.ru

[2]*Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород, Россия;* slyunyaev.n@gmail.com

[3]*Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия;* izosimova93@yandex.ru

Концепция глобальной электрической цепи (ГЭЦ) является основой для понимания электромагнитных явлений в атмосфере Земли [1], [2]. Наиболее важным компонентом ГЭЦ является так называемый квазистационарный ток, который, согласно гипотезе, выдвинутой Вильсоном [3], [4], поддерживается за счет постоянного разделения зарядов в грозовых и других электрифицированных облаках.

В работе рассматриваются математические задачи, возникающие при моделировании глобальной электрической цепи в нестационарном случае и в различных приближениях (стационарное приближение и электрическое нерелятивистское приближение). Обсуждаются вопросы корректности различных постановок с неклассическими уравнениями и неклассическими граничными условиями, мотивированными приложениями [5], [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rycroft M. J., Harrison R. G., Nicoll K. A., Mareev E. A.* An overview of Earth's global electric circuit and atmospheric conductivity // Space Sci. Rev. 2008. V. 137. P. 83–105.
2. *Williams E., Mareev E.* Recent progress on the global electrical circuit // Atmos. Res. 2014. V. 135–136. P. 208–227.
3. *Wilson T. R.* Investigations on lightning discharges and on the electric field of thunderstorms // Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A. 1921. V. 221. P. 73–115.
4. *Wilson T. R.* The electric field of a thundercloud and some of its effects // Proc. Phys. Soc. London. 1924. V. 37. P. 32D–37D.
5. *Roble R. G., Hays P. B.* A quasi-static model of global atmospheric electricity: 2. Electrical coupling between the upper and lower atmosphere // J. Geophys. Res. 1979. V. 84. P. 7247–7256.
6. *Makino M., Ogawa T.* Responses of atmospheric electric field and air-earth current to variations of conductivity profiles // J. Atmos. Terr. Phys. 1984. V. 46, No 5. P. 431–445.

О НЕКОТОРЫХ ТОЖДЕСТВАХ НА ЕДИНИЧНОЙ СФЕРЕ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Карачик В. В.

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия;
karachik@susu.ru

Хорошо известно, что для гармонической в единичном шаре $S \subset \mathbb{R}^n$ функции $u \in C^m(\overline{S})$ верно равенство $\int\limits_{\partial S} \frac{\partial^m u}{\partial \nu^m}\, ds_x = 0$, $m \in \mathbb{N}$ (см., например, [1]). В настоящей работе выясняется, какие еще равенства такого вида могут иметь место для нормальных производных от k-гармонических в S функций $u(x)$, т. е. таких функций, что $\Delta^k u = 0$ в S. В работе [2] исследовано свойство среднего для полигармонических функций и получены некоторые результаты, на основании которых выполнено настоящее исследование. Пусть полиномы $P_n(t)$ находятся из рекуррентного равенства $P_n(t) + (2n-3)P_{n-1}(t) = t^2 P_{n-2}(t)$, $n \geq 2$, где следует считать, что $P_0(t) = 1$, $P_1(t) = 1$.

Теорема. *Для всякой m-гармонической в S функции $u \in C^k(\overline{S})$ при $k \geq m$ верны равенства*

$$\int\limits_{\partial S} P_{m-i}\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\frac{\partial^{2i} u}{\partial \nu^{2i}}\, ds_x = 0, \quad \int\limits_{\partial S} \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\, ds_x = 0,$$

где $0 \leq i \leq m-1$ и $2m \leq j \leq k$ при $2m \leq k$.

В работе [3] при исследовании арифметического треугольника, возникающего из условий разрешимости задачи Неймана для полигармонического уравнения, был получен арифметический треугольник, похожий на арифметический треугольник, который составляют коэффициенты полиномов $P_n(t)$.

Пример. Если k-гармоническая в S функция $u \in C^k(\overline{S})$ удовлетворяет на ∂S равенствам $\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\big|_{\partial S} = \varphi_j(x)$, $j = 1, \ldots, k$, т. е. $u(x)$ — решение однородной задачи Неймана для полигармонического уравнения в S, то для функций $\varphi_j(x)$, $j = 1, \ldots, k$ необходимо выполнение условия [4]

$$\int\limits_{\partial S} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+k} \binom{2k-j-1}{j-1} (2k-2j-1)!!\, \varphi_j(x)\, ds_x = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карачик В. В.* О свойстве среднего для полигармонических функций в шаре // Мат. тр. 2013. Т. 16, № 2. С. 69–88.
2. *Karachik V. V.* On the mean-value property for polyharmonic functions // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. модел. програм. 2013. Т. 6, № 3. С. 59–66.
3. *Карачик В. В.* Об арифметическом треугольнике, возникающем из условий разрешимости задачи Неймана // Мат. заметки. 2014. Т. 96, вып. 2. С. 228–238.
4. *Карачик В. В.* Об условиях разрешимости задачи Неймана для полигармонического уравнения в единичном шаре // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 4. С. 61–74.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО РОДА ВОЛЬТЕРРОВСКОГО ТИПА

Кожанов А. И.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
kozhanov@math.nsc.ru

Доклад посвящен изложению результатов о разрешимости уравнений

$$h(t)u(t) + \int_0^t N(t-\tau)u(\tau)\,d\tau = f(t),$$

$$h(t)u(x,t) + \int_0^t N(t-\tau)(Bu)(x,\tau)\,d\tau = f(x,t)$$

$$(0 < t < T < +\infty,\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n)$$

с функцией $h(t)$, меняющей знак произвольным образом, и с эллиптическим оператором B, действующим по пространственным переменным. Первое из этих уравнений представляет собой интегральное уравнение Вольтерра третьего рода, второе же можно назвать интегродифференциальным уравнением третьего рода вольтеровского типа (ко второму уравнению естественным образом добавляются соответствующие граничные условия на множестве $\partial\Omega \times (0, T)$).

Для изучаемых уравнений доказываются теоремы существования и единственности решений.

КРИТЕРИЙ РАВНОМЕРНОЙ ГЛОБАЛЬНОЙ ДОСТИЖИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Козлов А. А.

Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Беларусь;
kozlovaa@tut.by

Предложен критерий равномерной глобальной достижимости линейных дифференциальных систем с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами.

Рассмотрим линейную нестационарную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geqslant 0,$$

с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными матрицами коэффициентов A и B. Замкнем эту систему с помощью управления u, заданного в виде линейной обратной связи $u = U(t)x$, где U — некоторая измеримая и ограниченная $(m \times n)$-матрица. В результате получим замкнутую систему

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

коэффициенты которой локально интегрируемы и интегрально ограничены.

Определение. Система (1) называется *равномерно глобально достижимой* [1], если существует число $T > 0$, при котором для любых $r \geqslant 1$ и $0 < \rho \leqslant 1$ найдется такая величина $d = d(r, \rho) > 0$, что для любого числа $t_0 \geqslant 0$ и всякой $(n \times n)$-матрицы H такой, что $\|H - E\| \leqslant r$ и $\det H \geqslant \rho$, существует измеримое и ограниченное управление $U : [t_0, t_0 + T] \to \mathbb{R}^{mn}$, удовлетворяющее для всех $t \in [t_0, t_0+T]$ оценке $\|U(t)\| \leqslant d$, при котором для матрицы Коши $X_U(t, s)$, $t, s \geqslant 0$, системы (1) с этим управлением обеспечивается равенство $X_U(t_0 + T, t_0) = H$.

Замечание. Наличие у системы (1) свойства равномерной глобальной достижимости обеспечивает возможность управления всем конечномерным базисом пространства решений этой системы на произвольном отрезке длины T. Представленное свойство применяется при доказательстве глобальной управляемости асимптотических инвариантов линейных дифференциальных систем [2].

Для любых чисел $r > 1$ и $0 < \rho \leqslant 1$ обозначим через $\mathcal{LU}_n(r, \rho)$ совокупность всех верхне- и нижнетреугольных $(n \times n)$-матриц с положительными диагональными элементами, удовлетворяющих неравенствам $\|H - E\| \leqslant r$ и $\det H \geqslant \rho$.

Теорема. *Система* (1) *равномерно глобально достижима тогда и только тогда, когда найдется величина* $\Delta > 0$, *при которой для любых чисел* $r \geqslant 1$ *и* $0 < \rho \leqslant 1$ *существует такая величина* $\theta = \theta(r, \rho) > 0$, *что при всяком числе* $t_0 \geqslant 0$ *и произвольной матрице* $H \in \mathcal{LU}_n(r, \rho)$ *найдется измеримое и ограниченное на отрезке* $[t_0, t_0 + T]$ *управление* $U = U(t)$, *удовлетворяющее при всех* $t \in [t_0, t_0 + \Delta]$ *оценке* $\|U(t)\| \leqslant \theta$ *и гарантирующее для матрицы Коши* $X_U(t, s)$ *системы* (1) *выполнение равенства* $X_U(t_0 + \Delta, t_0) = H$.

Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь "Конвергенция–2020" (подпрограмма 1, задание № 1.2.01).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зайцев В. А., Тонков Е. Л.* Достижимость, согласованность и метод поворотов В. М. Миллионщикова // Изв. вузов. Матем. 1999. № 2. С. 60–67.
2. *Макаров Е. К., Попова С. Н.* Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Минск: Беларус. навука, 2012.

СТАБИЛИЗАЦИЯ СИНГУЛЯРНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ДЕКОМПОЗИЦИИ

Козлов М. В.

Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва, Саранск, Россия; kozlov.mvl@yandex.ru

Доклад посвящен задаче стабилизации сингулярно возмущенных систем с полиномиальной правой частью следующего вида

$$\dot{x} = A_{11}x^{[m]} + A_{12}y^{\{m\}} + BU, \quad \varepsilon\dot{y} = A_{21}x^{[m]} + A_{22}y^{\{m\}}, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y \in \mathbb{R}^{n_2}$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $m > 1$ — натуральное нечетное число; $x^{[m]}$ есть вектор-столбец, составленный из мономов вида $x_1^{k_1} \dots x_{n_1}^{k_{n_1}}$ ($k_1, \dots, k_{n_1} \geq 0$ — целые числа, $k_1 + \dots + k_{n_1} = m$), упорядоченных в лексикографическом порядке; $y^{\{m\}} = (y_1^m, y_2^m, \dots, y_{n_2}^m)^T$; $B \in \mathbb{R}^{n_1, r}$ — постоянная матрица, $U \in \mathbb{R}^r$ — вектор управляющих воздействий. Предполагается, что доступными для измерения являются только координаты вектора медленных переменных x, поэтому управление U строится в следующей форме:

$$U = Kx^{[m]}, \tag{2}$$

где K — постоянная вещественная матрица, подлежащая определению. Подобная задача была рассмотрена в работе [1] в предположении, что измеряются только координаты вектора быстрых переменных y. Более полный обзор современного состояния задачи об устойчивоподобных свойствах сингулярных систем представлен в работе [2].

На основе теоремы из работы [3] об асимптотической устойчивости сингулярных систем с полиномиальной правой частью можно установить справедливость следующей теоремы.

Теорема. *Если матрица A_{22} — диагональная отрицательно определенная и существует матрица K такая, что нулевое решение системы*

$$\dot{x} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} + BK)x^{[m]} \tag{3}$$

асимптотически устойчиво, то при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ нулевое решение системы (1) *также асимптотически устойчиво (ε_0 — некоторое достаточно малое число, U в системе* (1) *выбрано в соответствии с равенством* (2)).

Матрицу K для системы (3) можно построить различными способами в зависимости от вида и свойств матриц A_{ij} и B.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Косов А. А., Козлов М. В.* Стабилизация одного класса сингулярных систем на основе декомпозиции // Информационные технологии и проблемы математического моделирования сложных систем. 2016. № 15. С. 77–84.
2. *Zhang Y., Naidu D. S., Cai Ch., Zou Y.* Singular perturbations and time scales in control theories and applications: an overview 2002–2012 // Int. J. Inf. Syst. Sci. 2014. V. 9, No 1. P. 1–36.
3. *Косов А. А.* Об устойчивости сингулярных однородных систем // Материалы конф. “Ляпуновские чтения”. Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2014. С. 42.

ОДНА ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Коновалова Д. С.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
dsk@math.nsc.ru

В полупространстве $\mathbb{R}^3_+$ рассматривается задача Коши для почти линейного дифференциального уравнения

$$a(x)\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + b_1(x)\frac{\partial U(x,t)}{\partial x_1} + b_2(x)\frac{\partial U(x,t)}{\partial x_2} = F(x,t,U(x,t)), \tag{1}$$

$$U(x,0) = \varphi(x). \tag{2}$$

Будем считать, что b_1, b_2 — постоянные числа, а функция $a(x)$ — кусочно постоянна. Точнее говоря, предположим, что существует ограниченная строго выпуклая область $G_2 \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей ∂G_2 класса C^1 такая, что $a(x) = a_2$ при $x \in G_2$ и $a(x) = a_1$ при $x \in G_1$, где $G_1 = \mathbb{R}^2 \backslash G_2$, $a_1 \neq a_2$. Сначала рассматривается прямая задача, дается определение обобщенного решения, доказывается его существование и единственность. Основным содержанием работы является исследование следующего вопроса.

Обратная задача. Найти линию ∂G_2, зная числа a_1, a_2, b_1, b_2 и значения обобщенного решения задачи (1), (2) на некоторой плоскости S, удаленной от искомой линии.

Поставленная задача относится к теории зондирования неоднородных сред. При этом двумерная область G_2 интерпретируется как неоднородное включение, а значения $U(x,t)$ на S рассматриваются как зондирующий сигнал. Важно отметить, что задания функций φ, F не требуется — для нас существенны только их свойства.

В работе доказано, что $\partial_3 U(x,t)$ имеет на S ненулевые разрывы при определенных значениях аргументов, если выполнено следующее условие:

$$K(x) = b_1\partial_1\varphi(x) + b_2\partial_2\varphi(x) - F(x,0,\varphi(x)) \neq 0, \quad x \in \partial G_2, \tag{3}$$

что позволяет построить алгоритм нахождения области G_2. В рамках нашего метода величину $|K(x)|$ можно назвать мерой видимости неоднородности. Действительно, предложенный алгоритм реализуем, только если выполнено условие (3), а увеличение $|K(x)|$ способствует более четкому проявлению используемого математического эффекта. Однако требование $K(x) \neq 0$ вряд ли будет препятствием для широкого применения полученных результатов, поскольку обращение в ноль $K(x)$ означало бы наличие очень специфической связи между независимыми функциями φ и F.

Работа выполнена при поддержке программы Президиума РАН, номер проекта 0314-2015-0010.

О РОБАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СО СТРУКТУРИРОВАННОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ

Кононов А. Д.

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия; my_official@rambler.ru

Рассматривается стационарная система дифференциальных уравнений

$$Ax'(t) + (B + C\Delta D)x(t) = 0, \quad t \in T = [0, +\infty), \tag{1}$$

со структурированной неопределенностью $C\Delta D$. Здесь A, B, C и D — $(n \times n)$ заданные матрицы, пучок $\lambda A + B$ регулярен, $\det A = 0$. Такие системы называются *дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ)*. Мерой неразрешенности ДАУ относительно производной служит целочисленная величина, называемая *индексом*.

Исследуется вопрос об асимптотической устойчивости системы (1) в условиях, когда асимптотически устойчива невозмущенная система

$$Ax'(t) + Bx(t) = 0, \quad t \in T. \tag{2}$$

Анализ проводится в предположениях, обеспечивающих существование оператора

$$\mathcal{R} = R_0 + R_1\frac{d}{dt} + \dots + R_r\left(\frac{d}{dt}\right)^r,$$

действие которого преобразует систему (2) к виду

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{n-d} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_1 & E_d \\ J_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = 0, \quad t \in T,$$

где r — индекс неразрешенности, E_d — единичная матрица указанного порядка; $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = Qx(t)$, Q — матрица перестановки строк; J_1 и J_2 — некоторые матрицы соответствующих размеров [1].

Основная сложность, возникающая при исследовании робастных свойств ДАУ, связана с тем, что в случае высокого индекса при возмущении входных данных может измениться внутренняя структура системы.

Для системы (1) индексов неразрешенности 1 и 2 в условиях, при которых структурированное возмущение $C\Delta D$ не меняет структуру системы, получены достаточные условия робастной устойчивости.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-31-00101) и Комплексной программы фундаментальных научных исследований СО РАН № II.2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Щеглова А. А.* Существование решения начальной задачи для вырожденной линейной гибридной системы с переменными коэффициентами // Изв. вузов. Матем. 2010. № 9. С. 57–70.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И РАЗМЕРНОСТЬ ЯДРА ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА И БИ-ЛАПЛАСА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Кошанов Б. Д.[1], **Адильбеков Е. Н.**[2], **Дуйсен Е.**[3]

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Республика Казахстан;
[1]koshanov@list.ru, [2]ermurat.91@mail.ru, [3]erlan.duysen@mail.ru

Как известно, многие стационарные физические процессы, например, распределения потенциала электростатического поля, описываются с помощью уравнения Пуассона. При исследовании колебаний тонких пластин возникают бигармонические уравнения. Интересным является, с точки зрения приложений, изучение поведений решений уравнения Пуассона, а также бигармонического уравнения в неограниченной области. Здесь появляется необходимость введения дополнительных условий на бесконечности, однозначно определяющих решения уравнений. Такие требования называются условиями излучения типа Зоммерфельда [1], они могут быть физически интерпретированы. Корректные краевые задачи для уравнения Лапласа в неограниченных областях известны давно. В работе [2] и в статье [3] этот вопрос изучается для некоторых классов уравнений в частных производных. Широкий обзор литературы имеется по исследованию краевых задач для уравнения Пуассона и для бигармонического уравнения в ограниченных областях. В работе [4] построена функция Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре произвольной размерности. Данная работа посвящена исследованию решения уравнения Пуассона и неоднородного бигармонического уравнения в неограниченной области. Результаты данной работы связаны с введением весового пространства, которое можно воспринимать как некоторое интегральное условие на бесконечности. Вычислены размерности пространств решений задачи Дирихле для уравнения Пуассона и бигармонического уравнения.

Работа выполнена при поддержке гранта 3492/ГФ4 МОН РК.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
2. *Кондратьев В. А., Олейник О. А.* О периодических решениях параболического уравнения второго порядка во внешних областях // Вестн. Московского ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1985. № 4. С. 38–47.
3. *Кудрявцев Л. Д.* Решение первой краевой задачи для самосопряженных и эллиптических уравнений в случае неограниченных областей // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1967. Т. 31, № 5. С. 354–366.
4. *Кальменов Т. Ш., Кошанов Б. Д.* Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 3. С. 534–539.

О СВЯЗИ МЕЖДУ РЕШЕНИЯМИ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Лагерр Р.

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия;
laguerreka@sci.pfu.edu.ru

Для ограниченных и неограниченных односвязных областей $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с липшицевыми границами $\partial\Omega$ устанавливается явная взаимная связь между решениями задачи Дирихле

$$\operatorname{div}(a\nabla u) = \operatorname{div} \boldsymbol{f}, \quad x \in \Omega; \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{1}$$

с решениями задачи Неймана

$$\operatorname{div}(b\nabla v) = \operatorname{div} \boldsymbol{g}, \quad x \in \Omega; \quad (\partial_n v - (\boldsymbol{g}, \boldsymbol{n}))\,|_{\partial\Omega} = 0 \tag{2}$$

при заданных $\boldsymbol{f} : \Omega \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}_p(\Omega)$, и $\boldsymbol{g} : \Omega \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{L}_p(\Omega)$, где ∂_n — производная по нормали $\boldsymbol{n}$ к $\partial\Omega$, а коэффициенты удовлетворяют условиям:

$$0 < \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} a(x) < \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} a(x) < \infty, \quad 0 < \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} b(x) < \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} b(x) < \infty.$$

Краевые задачи (1), (2) рассматриваются в слабой постановке для решений с первыми производными из $L_p(\Omega)$, т. е. класса $L^1_p(\Omega)$ в смысле стандартных интегральных тождеств. Так, слабым решением задачи Дирихле (1) будем называть элемент $u \in \mathring{L}^1_p(\Omega) \overset{\text{def}}{=} \{w \in L^1_p(\Omega)\colon\ w|_{\partial\Omega} = 0\}$, удовлетворяющий интегральному тождеству

$$\int\limits_\Omega a(x)\nabla u \cdot \nabla\psi\, dx = \int\limits_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \nabla\psi\, dx \quad \forall\, \psi \in \mathring{C}^\infty(\Omega).$$

Тогда как слабым решением задачи Неймана (2) будем называть определенный с точностью до аддитивной константы элемент $v \in L^1_p(\Omega)$, удовлетворяющий интегральному тождеству

$$\int\limits_\Omega b(x)\nabla v \cdot \nabla\psi\, dx = \int\limits_\Omega \boldsymbol{g} \cdot \nabla\psi\, dx \quad \forall\, \psi \in \mathring{C}^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Установлено, что при любом значении показателя $p \in (1, \infty)$ слабое решение $u \in \mathring{L}^1_p(\Omega)$ задачи Дирихле (1) с каким-либо $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}_p(\Omega)$ существует тогда и только тогда, когда для $\boldsymbol{g} = b(x)(-f_2\,, f_1)$ существует слабое решение $v \in L^1_p(\Omega)$ задачи Неймана (2) с коэффициентом $b(x) = 1/a(x)$. При этом для всякого слабого решения $u \in \mathring{L}^1_p(\Omega)$ задачи Дирихле (1) с $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}_p(\Omega)$ векторное поле $(f_2 - a\partial_{x_2} u, a\partial_{x_1} u - f_1)$ оказывается потенциальным с некоторым потенциалом $v \in L^1_p$, который будет слабым решением задачи Неймана (2) для $\boldsymbol{g} = b(f_2, -f_1)$ с коэффициентом $b(x) = 1/a(x)$, и при этом равенством $\nabla v = (f_2 - a\partial_{x_2} u, a\partial_{x_1} u - f_1)$ градиент решения $v \in L^1_p(\Omega)$ будет определен однозначно. Верно и обратное, а именно: для всякого слабого решения $v \in L^1_p(\Omega)$ задачи Неймана (2) с $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{L}_p(\Omega)$ векторное поле $(g_2 - b\partial_{x_2} v, b\partial_{x_1} v - g_1)$ оказывается потенциальным с некоторым потенциалом $u \in \mathring{L}^1_p(\Omega)$, который будет слабым решением задачи Дирихле (1) для $\boldsymbol{f} = a(g_2, -g_1)$ с коэффициентом $a(x) = 1/b(x)$, причем равенством $\nabla u = (g_2 - b\partial_{x_2} v, b\partial_{x_1} v - g_1)$ решение $u \in \mathring{L}^1_p(\Omega)$ будет определено однозначно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дудкина А. А.* К L_p-теории эллиптических операторов с разрывными коэффициентами // ДАН. 2010. Т. 430, № 3. С. 304–307.
2. *Дудкина А. А.* К L_p-теории эллиптических краевых задач с разрывными коэффициентами // Канд. дисс. М.: РУДН, 2010.

НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С ЧАСТИЧНО ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Лукина Г. А.

Политехнический институт (филиал) Северо-Восточного федерального университета им. М. К. Аммосова, Мирный, Россия; lukina-g@mail.ru

Исследуется разрешимость нелокальных задач с интегральными граничными условиями по пространственной переменной для вырождающихся уравнений с кратными характеристиками.

Пусть Ω есть интервал $(0,1)$ оси Ox, Q есть прямоугольник $\Omega \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$, $N(x)$, $K(t)$, $\alpha(t)$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$.

Нелокальная задача I: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$K(t)u_t + u_{xxx} + c(x,t)u = f(x,t) \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 < t < T, \tag{3}$$

$$u_x(1,t) = \int_0^1 N(x)u(x,t)dx, \quad 0 < t < T.$$

Нелокальная задача II: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2), (3), а также условие

$$u_x(1,t) = \alpha(t)u_x(0,t), \quad 0 < t < T.$$

Для рассматриваемых задач доказываются теоремы существования регулярных решений.

СВЕРХУСТОЙЧИВОСТЬ И АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ

Люлько Н. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
natlyl@mail.ru

Линейная система

$$\frac{d}{dt}u(t) = A(t)u(t), \quad u(0) \in X \quad (0 < t < \infty), \tag{1}$$

рассматриваемая в банаховом пространстве X, называется *асимптотически устойчивой* с показателем $\gamma > 0$, если существует число $M > 0$ такое, что для всех решений u этой системы при $t \geq 0$ справедлива оценка $\|u(t)\| \leq Me^{-\gamma t}\|u(0)\|$. Система (1) называется *сверхустойчивой*, если она асимптотически устойчива с любым показателем $\gamma > 0$, т. е. все решения u этой системы убывают быстрее экспоненты в любой степени [1].

Для линейной гиперболической системы первого порядка рассмотрим в полуполосе $\Pi = \{(x,t)\colon\ 0 < x < 1,\ t > 0\}$ смешанную задачу, которую запишем в виде системы (1), где u — n-мерная вектор-функция и

$$A(t) : L^2(0,1) \longrightarrow L^2(0,1) : \quad (A(t)u)\,(x) = a(x,t)u_x + b(x,t)u,$$

$$D(A(t)) = \{u \in L^2(0,1) :\ u_x \in L^2(0,1),\ P(u(0,t), u(1,t)) = 0\}.$$

Здесь a, b — гладкие матрицы размерности $n \times n$, при этом a — диагональная матрица с отличными от нуля в замыкании Π элементами; P — линейный оператор, задающий граничные условия на боковых сторонах Π; $n \geq 2$. В [2] выделен класс гиперболических линейных сверхустойчивых задач, все решения которых стабилизируются к нулю за конечное время, не зависящее от начальных данных $u(0)$. Доказано, что при малом возмущении матрицы b возмущенные системы становятся асимптотически устойчивыми, при этом получена оценка на показатель экспоненциального убывания в зависимости от величины возмущения. Найдены условия, при которых возмущенные системы обладают свойством повышения гладкости решений по любым начальным данным $u(0) \in L^2(0,1)$.

Работа выполнена при поддержке программы Президиума РАН (проект № 121 программы № 15 “Информационные, управляющие и интеллектуальные технологии и системы”).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Balakrishnan A. V.* Superstability of systems // Appl. Math. Comput. 2005. V. 164, No 2. P. 321–326.
2. *Kmit I. Y., Lyulko N. A.* Perturbations of superstable linear hyperbolic systems // arxiv.org/abs/1605.04703.

ОБ ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ И ЗНАКООПРЕДЕЛЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Малыгина В. В.

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия; mavera@list.ru

Появление осциллирующих решений у дифференциальных уравнений с последействием (начиная с линейных уравнений первого порядка) — одно из свойств, где отличие уравнений с последействием от обыкновенных дифференциальных уравнений оказывается качественным [1]. С точки зрения прикладных задач (физики, химии, биологии, экономики) осциллирующие решения оказываются не просто вполне допустимыми: они дают более точную картину моделируемого процесса [2].

Усложнение свойств решений уравнений потребовало как существенного продвижения общей теории функционально-дифференциальных уравнений, так и разработки новых и совершенствования известных методов исследования осцилляции решений. Для уравнений первого порядка актуальными оказались задачи получения признаков осцилляции, оценки промежутка неосцилляции, определения количества нулей на заданном интервале, определения расстояния между нулями и т. п.

Необходимость разделения осциллирующих и знакоопределённых решений возникает также при решении задач, напрямую не связанных с вопросами осцилляции, в частности, при изучении устойчивости уравнений с последействием.

Если решение знакоопределённое (часто — в силу уравнения — также монотонное), то для исследования его асимптотического поведения удобно использовать методы монотонных операторов [3, гл. 10]. Потеря устойчивости для таких решений происходит при переходе через стационарные решения.

Если решение осциллирующее, то требуются оценки промежутков монотонности и величин максимумов и минимумов решения. Такие решения удается исследовать за счет удачного выбора уравнения сравнения (test-метод [4]) или тонких двусторонних оценок [1, гл. VI]. Потеря устойчивости происходит при переходе через периодические решения.

Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки РФ (проект № 1.5336.2017/БЧ).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972.
2. *Hutchinson G. E.* Circular causal systems in ecology // Ann. N. Y. Acad. Sci. 1948. V. 50. P. 221–246.
3. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
4. *Малыгина В. В., Чудинов К. М.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с несколькими переменными запаздываниями. I, II, III // Изв. вузов. Матем. 2013. № 6. С. 25–36; № 7. С. 3–15; № 8. С. 44–56.

О ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СМЕСЕЙ

Мамонтов А. Е.[1], **Прокудин Д. А.**[2]

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия; [1]aemamont@hydro.nsc.ru, [2]prokudin@hydro.nsc.ru

Рассматривается модель многокомпонентных многоскоростных смесей. Для нее теоремы о глобальном существовании слабых решений многомерных задач были получены совсем недавно (см., например, [1]–[3]), благодаря чему состояние этой теории стало сопоставимым с таковым для однокомпонентных моделей. При этом открылись проблемы, характерные именно для смесей и отличающие их принципиально от однокомпонентных моделей. В определенной степени эти трудности описаны в [4]. Для многих из них пока неясны пути преодоления.

Как и в многомерном случае, классические результаты для однокомпонентного вязкого газа не переносятся на многокомпонентный одномерный случай каким-то автоматическим образом, в частности, в силу принципиально иной структуры вязких членов — наличия недиагональной матрицы вязкостей. Это отличие по своей сложности не зависит от размерности движения. Корректность для моделей смесей с диагональной матрицей вязкостей в одномерном случае изучена в [5], [6].

В докладе будет представлена теорема о существовании и единственности сильного решения начально-краевой задачи для одномерных уравнений движения многокомпонентных многоскоростных смесей с недиагональной матрицей вязкостей, будут обсуждаться перспективы и трудности дальнейшего развития теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кучер Н. А., Мамонтов А. Е., Прокудин Д. А.* Стационарные решения уравнений динамики смесей вязких сжимаемых теплопроводных жидкостей // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 6. С. 1338–1353.
2. *Мамонтов А. Е., Прокудин Д. А.* Разрешимость стационарной краевой задачи для уравнений движения однотемпературной смеси вязких сжимаемых теплопроводных жидкостей // Изв. РАН. Сер. мат. 2014. Т. 78, № 3. С. 135–160.
3. *Мамонтов А. Е., Прокудин Д. А.* Существование слабых решений задачи о трехмерных стационарных баротропных движениях смесей вязких сжимаемых жидкостей // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 1. С. 148–164.
4. *Mamontov A. E., Prokudin D. A.* Viscous compressible multi-fluids: modeling and multi-d existence // Methods Appl. Anal. 2013. V. 20, No 2. P. 179–195.
5. *Кажихов А. В., Петров А. Н.* Корректность начально-краевой задачи для модельной системы уравнений многокомпонентной смеси // Динамика сплошной среды. 1978. Т. 35. С. 61–73.
6. *Петров А. Н.* Корректность начально-краевых задач для одномерных уравнений взаимопроникающего движения совершенных газов // Динамика сплошной среды. 1972. Т. 56. С. 105–121.

ОБ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С НЕСКОЛЬКИМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

Матвеева И. И.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
matveeva@math.nsc.ru

В работе рассматриваются системы дифференциальных уравнений нейтрального типа

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \sum_{j=1}^{m} B_j(t)y(t-\tau_j) + \sum_{j=1}^{m} C_j(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau_j), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где $A(t)$, $B_j(t)$, $C_j(t)$ — матрицы размера $n\times n$ с непрерывными T-периодическими элементами, $\tau_j > 0$ — параметры запаздывания, $k = 1, \dots, m$.

Используя функционал Ляпунова – Красовского специального вида [1], установлены условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения и получены оценки, характеризующие скорость убывания решений систем вида (1) при $t \to \infty$ [2].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00592).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Матвеева И. И.* Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 2. С. 344–352.
2. *Матвеева И. И.* Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа с несколькими запаздываниями // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53, № 6. С. 730–740.

ОБЛАСТИ D-РАЗБИЕНИЯ С ПРЯМОЛИНЕЙНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Мулюков М. В.

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия; mulykoff@gmail.com

Рассмотрим систему $\dot{x}(t) + \int_0^h dR(s)x(t-s) = 0$, где $x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^N$, R — вещественная $N \times N$-матричная функция ограниченной вариации, такая что $R(0)$ — нулевая матрица, а интеграл понимается в смысле Римана – Стилтьеса. Доопределим x суммируемой начальной вектор-функцией при $t \in [-h, 0)$. Решение системы — локально абсолютно непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая данной системе почти всюду на $\mathbb{R}_+$, существует и единственно.

Исследование асимптотической устойчивости этой системы сводится к изучению расположения корней функции $\Phi(z) = \det\big(Iz + \int_0^h e^{-zs} dR(s)\big)$ относительно мнимой оси. Наиболее эффективным способом построения области устойчивости в пространстве параметров функции Φ является метод D-разбиения [1].

Пусть Φ линейно зависит от вещественных параметров r_1, r_2, тогда характеристическое уравнение имеет вид $f_0(z) + r_1 f_1(z) + r_2 f_2(z) = 0$. Ю. И. Неймарк указал на то, что области D-разбиения могут состоять из криволинейных и прямолинейных участков (отрезков, лучей, прямых). Для криволинейных участков им было предложено “правило штриховки”, при этом на некоторые прямолинейные участки невозможно нанести штриховку непосредственно — в этих случаях предлагалось либо нанести штриховку так, чтобы она не противоречила штриховке на кривых, либо “деформировать” прямую в кривую. Однако в ряде случаев оказывается выгодно не только исследовать прямолинейные участки сами по себе, но и специально выбрать параметры задачи так, чтобы криволинейных участков не было.

Структура областей D-разбиения определяется тремя функциями:

$$\Delta(\varphi) = \operatorname{Im} f_1(-i\varphi) f_2(i\varphi), \quad u_1(\varphi) = \operatorname{Im} f_2(-i\varphi) f_0(i\varphi), \quad u_2(\varphi) = \operatorname{Im} f_0(-i\varphi) f_1(i\varphi).$$

Если выполняется хотя бы одно из двух условий:

а) функции f_0, f_1 и f_2 имеют общий корень на мнимой оси,

б) функции Δ, u_1 и u_2 тождественно равны нулю,

то область устойчивости пуста. В противном случае любая область D-разбиения состоит из не более чем счётного множества гладких криволинейных и прямолинейных участков.

Теорема. *Пусть ни одно из условий а), б) не выполнено. Для того, чтобы граница любой области D-разбиения состояла только из прямолинейных участков, необходимо и достаточно, чтобы функции Δ, u_1, u_2 были линейно зависимы.*

Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки РФ, проект № 1.5336.2017/БЧ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Неймарк Ю. И.* Устойчивость линеаризованных систем (дискретных и распределённых). Л.: ЛКВВИА, 1949.

МЕТОД ШТРАФОВ И УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Мусабеков К. С.

Кокшетауский государственный университет им. Ш. Уалиханова, Кокшетау, Республика Казахстан; it.kgu@mail.ru

В работе рассматривается задача оптимального управления химическим реактором, учет температурного ограничения в котором осуществляется посредством метода штрафов.

Пусть $\Omega = \{x : 0 < x < 1\}$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, T — фиксированное число. В области Q_T рассмотрим систему дифференциальных уравнений, являющуюся математической моделью неадиабатического трубчатого реактора:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_1(x,t)}{\partial t} = a\,\dfrac{\partial^2 v_1(x,t)}{\partial x^2} - \dfrac{\partial v_1(x,t)}{\partial x} - c\,v_1\,f(v_2), \\ \dfrac{\partial v_2(x,t)}{\partial t} = b\,\dfrac{\partial^2 v_2(x,t)}{\partial x^2} - \dfrac{\partial v_2(x,t)}{\partial x} + k\,v_1\,f(v_2) + g\,(v_3(t) - v_2(x,t)), \\ \dfrac{dv_3(t)}{dt} = p\left(\displaystyle\int_0^1 v_2(x,t)dx - v_3(t)\right) + u(t)\,(E - v_3(t)), \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} a\,\dfrac{\partial v_1(0,t)}{\partial x} - v_1(0,t) = -1, \quad \dfrac{\partial v_1(1,t)}{\partial x} = 0, \\ b\,\dfrac{\partial v_2(0,t)}{\partial x} - v_2(0,t) = -1, \quad \dfrac{\partial v_2(1,t)}{\partial x} = 0, \end{cases} \tag{2}$$

$$v_1(x,0) = v_{10}(x), \quad v_2(x,0) = v_{20}(x), \quad v_3(0) = v_{30}, \tag{3}$$

где $f(v_2) = \exp(\Gamma - \Gamma/v_2(x,t))$; a, b, c, Γ, k, g, p, E, v_{30} — константы, положительные параметры системы; $u(t)$ — управляющая функция (управление); $v_1(x,t)$, $v_2(x,t)$, $v_3(t)$ — функции концентрации реагирующей смеси, температуры реактора, температуры охладителя соответственно.

Рассматривается задача минимизации функционала

$$J(u) = \int_0^T v_1(1,t)dt, \tag{4}$$

т. е. суммарного за время T количества непрореагировавшего вещества на выходе реактора, при условиях (1)–(3) и ограничении на функцию $v_2(x,t)$:

$$v_2(x,t) \le v_2^* = \mathrm{const}. \tag{5}$$

В работе [1] доказано существование и единственность классического решения системы (1)–(3) при произвольной ограниченной и измеримой функции $u(t)$ и доказано существование оптимального управления в задаче (1)–(5). Учет фазового ограничения (5) осуществляется посредством метода штрафов. В работе показан способ изменения параметра штрафа и выбор его начального значения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусабеков К. С.* Существование оптимального управления в одной регуляризованной задаче с фазовым ограничением // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, вып. 2. С. 71–84.

ПОЛЯ БЕЛЬТРАМИ, ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Нещадим М. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
neshch@math.nsc.ru

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\operatorname{rot}^m A = \lambda A, \tag{1}$$

где λ — функция и $A = (P, Q, R)$ — вектор-функция переменных (x, y, z), $m \in \mathbb{N}$ и $\operatorname{rot} A = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$. Решения уравнения (1) при $m = 1$ называются *полями Бельтрами* [1]. Все рассматриваемые функции предполагаются аналитическими. Соотношение (1) рассматривается с точки зрения переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных. Система (1) приводится в инволюцию и находится произвол ее решения. Ответ зависит от четности числа m и функции λ. Приведем утверждение для нечетного m и $\lambda = 1$.

Теорема. *Общее решение системы* (1) *для* $m = 2k+1$, $k \geq 0$ — *целое, и* $\lambda = 1$ *определяется из решения следующей системы уравнений:*
1) функция R — *решение уравнения* $\triangle D^2 R + R = 0$;
2) функция Q — *решение системы уравнений*

$$\begin{array}{rcl} D^2 Q_{zz} & = & D^2 R_{yz} - D R_x - Q, \\ D Q_{xz} & = & D R_{xy} + Q_y + R_z, \\ D Q_{yz} & = & -D R_{xx} - D R_{zz} - Q_x, \\ Q_{xx} & = & -Q_{yy} - \triangle D R_x - R_{yz}, \end{array}$$

которая находится в инволюции в силу уравнения на R;
3) функция P *определяется формулой* $P = D R_y - D Q_z$.
Здесь $D = (-1)^k \triangle^k$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 16-41-02006).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аминов Ю. А.* Геометрия векторного поля. М.: Наука, 1990.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

Никитенко Е. В.

Рубцовский индустриальный институт (филиал) Алтайского государственного технического университета им. И. И. Ползунова, Рубцовск, Россия; evnikit@mail.ru

В докладе предполагается изложить новые результаты по асимптотическим свойствам решений задачи Коши для неоднородного уравнения внутренних волн

$$\Delta u_{tt} + u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = e^{i\lambda t} f(x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0,$$

где $f(x) \in S(\mathbb{R}^3)$, $\lambda \geq 0$ — параметр. Решение данной задачи однозначно определяется в классе функций, убывающих при $|x| \to \infty$ [1]. При выводе асимптотических разложений при $t \to \infty$ решений $u(t, x, \lambda)$ используется вариант метода стационарной фазы, изложенного в [2].

В настоящее время имеется большое число работ, в которых проводились исследования поведения асимптотики при $t \to \infty$ решений краевых задач для конкретных уравнений и систем, не разрешенных относительно старшей производной. Среди них отметим работу [3], в которой рассматривалась задача Коши для неоднородного уравнения Соболева

$$\Delta u_{tt} + u_{x_nx_n} = e^{i\lambda t} f(x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0,$$

где $f(x) \in S(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \geq 0$ — параметр, $n \geq 3$. В данной работе были установлены асимптотические разложения при $t \to \infty$ решений $u(t, x, \lambda)$ в зависимости от значений параметра λ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Секерж-Зенькович С. Я.* Теорема единственности и явное представление решения задачи Коши для уравнения внутренних волн // ДАН СССР. 1981. Т. 256, № 2. С. 320–324.
2. *Успенский С. В., Демиденко Г. В., Перепелкин В. Г.* Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. Новосибирск: Наука, 1984.
3. *Булдыгерова Л. Н., Демиденко Г. В.* Асимптотические свойства решений неоднородного уравнения Соболева // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Изд-во ин-та математики СО РАН, 2005. С. 50–59.

ПРИМЕНЕНИЕ М-МАТРИЦ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ЗАДАЧАХ БИОМАТЕМАТИКИ

Перцев Н. В.

Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омск, Россия; homlab@ya.ru

Многие математические модели живых систем можно рассматривать как задачу Коши для дифференциальных уравнений определенного типа. На практике часто встречаются высокоразмерные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, включая системы, содержащие несколько запаздываний, а также существенно нелинейные системы. Изучение свойств решений задач Коши для этих систем, как правило, представляет трудную проблему. Классические методы и приемы не всегда приводят к конструктивным результатам. Один из подходов к изучению указанных задач Коши опирается на учет структуры правых частей уравнений, методы теории монотонных операторов и априорные неравенства. Среди них можно выделить методы и неравенства, использующие свойства матриц специального вида, а именно — невырожденных М-матриц [1], [2].

В настоящем докладе представлены результаты применения невырожденных М-матриц к анализу асимптотической устойчивости тривиальных решений линейных дифференциальных уравнений [3]. Приведены примеры использования этих матриц для изучения асимптотического поведения решений задач Коши для систем нелинейных дифференциальных уравнений. Первый пример связан с исследованием динамики популяции, развивающейся под воздействием комплекса загрязняющих веществ, поступающих в среду обитания особей [4]. Показано, что анализ асимптотической устойчивости нетривиальных положений равновесия высокоразмерной модели сводится к анализу асимптотической устойчивости положений равновесия одномерной модели специального вида. Полученный результат опирается на свойства невырожденных М-матриц и не требует привлечения широко используемой в биоматематике теоремы о “быстрых” и “медленных” переменных. Второй пример посвящен исследованию асимптотического поведения решений высокоразмерной модели распространения ВИЧ-инфекции среди населения некоторого региона [5]. Структура уравнений модели предполагает произвольное количество групп восприимчивых и инфицированных индивидуумов, объединенных по некоторым признакам. На основе свойств невырожденных М-матриц получены достаточные условия экспоненциального снижения численности всех групп инфицированных индивидуумов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Berman A., Plemmons R. J.* Nonnegative matrices in the mathematical sciences. New York: Academic Press, 1979.
2. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
3. *Pertsev N. V.* Application of M-matrices in construction of exponential estimates for solutions to the Cauchy problem for systems of linear difference and differential equations // Sib. Adv. Math. 2014. V. 24, No 4. P. 240–260.
4. *Pertsev N. V., Tsaregorodtseva G. E.* Modeling population dynamics under the influence of harmful substances on the individual reproduction process // Autom. Remote Control. 2011. V. 72, No 1. P. 129–140.
5. *Pertsev N. V.* Study of solutions of continuous-discrete model of HIV infection spread // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2016. V. 31, No 5. P. 281–291.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО ТИПА С КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ В СТАРШЕЙ ЧАСТИ

Пинигина Н. Р.[1], **Кожанов А. И.**[2]

[1]*Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск, Россия;* n-pinig@mail.ru
[2]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;* kozhanov@math.nsc.ru

Пусть Ω есть ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты — бесконечно дифференцируемой) границей Γ, Q есть цилиндр $\Omega \times (0,T)$, $S = \Gamma \times (0,T)$ — боковая граница Q. Далее, пусть $f(x,t)$ — заданная функция, определенная при $(x,t) \in \overline{Q}$, p — заданное натуральное число, μ — заданное действительное число. Через Δ будем обозначать оператор Лапласа, действующий по пространственным переменным, и для целого неотрицательного числа k через D_t^k будем обозначать производную $\frac{\partial^k}{\partial t^k}$ (подразумевая, что $D_t = D_t^1$).

Целью работы является исследование разрешимости краевых задач для уравнений

$$D_t((-1)^{p+1}D_t^{2p}u - \Delta u) + \mu u = f(x,t), \tag{1}$$

$$D_t^2((-1)^{p+1}D^2p_tu - \Delta u) + \mu u = f(x,t), \tag{2}$$

а также для некоторых других, близких к ним.

Краевая задача I: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,t)|_S = 0, \tag{3}$$

$$D_t^k u(x,t)|_{t=0} = 0, \quad k = 0,\dots,p-1, \quad x \in \Omega,$$

$$D_t^k u(x,t)|_{t=T} = 0, \quad k = p,\dots,2p, \quad x \in \Omega.$$

Краевая задача II: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (2) и такую, что для нее выполняются условие (3), а также условия

$$D_t^k u(x,t)|_{t=0} = 0, \quad k = 0,\dots,p, \quad x \in \Omega,$$

$$D_t^k u(x,t)|_{t=T} = 0, \quad k = p+1,\dots,2p+1, \quad x \in \Omega.$$

Доказываются теоремы существования и единственности регулярных (имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в уравнение) решений.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2017–2019 гг. (проект № 6069).

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА ЖЕВРЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Попов С. В.[1], **Антипин В. И.**[2]

Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск, Россия; [1]guspopov@mail.ru, [2]antvasiv@mail.ru

Разрешимость краевых задач Жевре для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками

$$u_{xxx} - \operatorname{sgn} x \; u_t = 0 \tag{1}$$

рассматривалась в работах Т. Д. Джураева [1], где разрешимость краевой задачи Жевре сводится к системе сингулярных интегральных уравнений, которая в классе регулярных решений однозначно и безусловно разрешима. В работе [2] явно представлены условия гладкой разрешимости краевых задач Жевре, где были рассмотрены непрерывные условия склеивания. В работе рассматриваются вопросы корректности краевых задач Жевре, типа Жевре для уравнений вида (1) с весовыми условиями склеивания, найдены зависимости показателей гёльдеровских пространств от весовых функций склеивания.

Задача Жевре. Найти решение уравнения (1) из пространства Гёльдера $H_{x\ t}^{p,p/3}(Q^{\pm})$, $p = 3l + \gamma$, $0 < \gamma < 1$, удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi_1(x),\ x > 0, \quad u(x,T) = \varphi_2(x),\ x < 0, \tag{2}$$

и условиям склеивания

$$\sigma_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(-0,t) = \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(+0,t) \quad (k = 0,1,2). \tag{3}$$

При выполнении условий $\sigma_0\sigma_2 \geq \sigma_1^2 > 0$, $\sigma_0\sigma_1 > 0$ краевая задача (1)–(3) имеет не более одного решения в пространстве ограниченных функций. В случае $\sigma_0 \neq \sigma_1$ разрешимость краевой задачи (1)–(3) сводится к разрешимости сингулярного интегрального уравнения

$$a\beta_1(t) + \frac{b}{\pi}\int\limits_0^T \frac{\beta_1(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = Q(t), \quad a = \frac{\sigma_0 + \sigma_1 + 2\sigma_2}{\sqrt{3}}, \quad b = \sigma_1 - \sigma_0,$$

а в случае $\sigma_0 = \sigma_1$ — к интегральному уравнению Винера – Хопфа [2].

Задача типа Жевре. Найти решение уравнения $u_{xxx} - u_t = 0$ из пространства Гёльдера $H_{x\ t}^{p,p/3}(Q^{\pm})$, удовлетворяющее начальным условиям $u(x,0) = \varphi_1(x)$, $x > 0$, $u(x,0) = \varphi_2(x)$, $x < 0$, и условиям склеивания (3).

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2017–2019 гг. (проект № 6069).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнения смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: ФАН, 1979.
2. *Антипин В. И., Попов С. В.* О гладких решениях задачи Жевре для уравнения третьего порядка // Мат. заметки СВФУ. 2015. Т. 22, № 1. С. 3–12.

О ФОРМУЛЕ Д'АЛАМБЕРА ДЛЯ ДРОБНОГО ДИФФУЗИОННО-ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Псху А. В.

Институт прикладной математики и автоматизации, Нальчик, Россия;
pskhu@list.ru

Рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(x,y) = 0, \tag{1}$$

где $0 < \alpha < 2$; через $\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}$ обозначен оператор дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна [1, 2], ассоциированный с последовательностью $\{\gamma_k\}_0^m$, порядка $\alpha = \gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_m - 1$, $\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} = D_{0y}^{\{\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_m\}}$.

Уравнение (1) при $\alpha = 1$ переходит в уравнение диффузии $u_y - u_{xx} = 0$, а при $\alpha = 2$ — в волновое уравнение $u_{yy} - u_{xx} = 0$. Как известно [3], всякое решение последнего уравнения может быть представлено формулой Д'Аламбера

$$u(x,y) = u^+(x,y) + u^-(x,y), \tag{2}$$

где функции $u^+(x,y)$ и $u^-(x,y)$ — решения уравнений $u_x + u_y = 0$ и $u_x - u_y = 0$, соответственно.

В данной работе строится аналог представления (2) для уравнения (1). Пусть Ω — область, целиком лежащая в верхней полуплоскости, и вместе с каждой точкой $(x,y) \in \Omega$ содержащая интервал, соединяющий точки (x,y) и $(x,0)$. Показано, что любое решение уравнения (1) в области Ω может быть представлено в виде (2), где $u^+(x,y)$ и $u^-(x,y)$ являются, соответственно, решениями уравнений ($\beta = \alpha/2$):

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta}\right) u^+(x,y) = 0 \qquad \text{и} \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta}\right) u^-(x,y) = 0.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00462).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джрбашян М. М., Нерсесян А. Б.* Дробные производные и задачи Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН Армянской ССР. Математика. 1968. Т. 3, № 1. С. 3–28.
2. *Псху А. В.* Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка // Изв. РАН. Сер. мат. 2009. Т. 73, № 2. С. 141–182.
3. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995.

СИНГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПРОТЕКАНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА

Пухначев В. В.

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
pukhnachev@gmail.com

Рассматривается стационарная краевая задача для уравнений Навье – Стокса в ограниченной области трехмерного пространства или плоскости, граница которой имеет несколько связных компонент. На границе области задан вектор скорости. В работе Ж. Лерэ (1933) доказана разрешимость этой задачи при дополнительном условии нулевого потока через каждую связную компоненту границы области течения. Имеет ли эта задача решение при выполнении лишь необходимого условия суммарного нулевого потока, до сих пор неизвестно. В работах М. В. Коробкова, К. Пилецкаса и Р. Руссо положительный ответ на этот вопрос получен для плоских и осесимметричных течений без ограничений на топологию области течения (см. ссылки в обзоре [1]).

В работах [2], [3] рассмотрен случай, когда граница плоской области состоит из жордановой кривой и точки внутри нее, в которой помещен источник или сток мощности q. Асимптотика поля скоростей вблизи источника имеет вид $v_r = (2\pi r)^{-1} + O(1)$, $v_\varphi = O(1)$, $r \to 0$ (r, φ — полярные координаты). Достаточным условием разрешимости такой задачи является неравенство $|q| < 2\pi\nu$, где ν — кинематическая вязкость жидкости. Существенно, что поле скоростей в решении задачи имеет бесконечный интеграл Дирихле. Мы предполагаем, что ограничение на $|q|$ связано с существом дела. В пользу этого предположения свидетельствуют результаты М. А. Гольдштика, В. Н. Штерна и Н. И. Яворского (1989), которые построили решения двумерных уравнений Навье – Стокса с источником, отличные от радиальных (см. также В. Шверак, 2011).

Другой вариант сингулярной задачи протекания — двумерное течение в области с угловой точкой на ее границе. Данная задача имеет решение, если $|q| < 2\pi f(\alpha)$, где α — величина соответствующего угла. При этом $f \to \infty$, если $\alpha \to 0$. Рассмотрен также осесимметричный аналог сингулярной задачи протекания. Область течения ограничена поверхностью вращения. На пересечении области с осью симметрии расположены источники или стоки с постоянной линейной плотностью q. Здесь достаточным условием разрешимости задачи является выполнение одностороннего неравенства $q < 2\pi\nu$.

Работа выполнена при поддержке программы “Ведущие научные школы Российской Федерации” (грант НШ-8146.2016.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коробков М. В., Пилецкас К., Пухначев В. В., Руссо Р.* Задача протекания для уравнений Навье – Стокса // Успехи мат. наук. 2014. Т. 69, № 6. С. 115–176.
2. *Russo A., Tartaglione A.* On the singular solutions of the Navier–Stokes equations // Lith. Math. J. 2013. V. 53, No 4. P. 423–437.
3. *Pukhnachev V. V.* Singular solutions of Navier–Stokes equations // Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society. Volume XV: Advances in Mathematical Analysis of Partial Differential Equations, dedicated to the memory of O. A. Ladyzhenskaya. New York: AMS Transl. Series 2. Vol. 232. 2014. P. 193–218.

ГРАНИЦЫ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ МАКСИМАЛЬНЫХ ОТКЛОНЕНИЙ

Рогалев А. Н.

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия;
rogalyov@icm.krasn.ru

Для некоторых практических задач изменение вектора состояния системы происходит в условиях априорной неопределенности либо под действием внешних воздействий, либо того и другого одновременно. Величина внешних воздействий может быть неизвестна. При этом определены лишь общие характеристики возмущений и погрешностей измерения. К подобным задачам относится задача Булгакова о максимальном отклонении (накоплении возмущений), получившая свое дальнейшее развитие и приложения в наши дни [1]–[3]. Возможны случаи, когда для возмущений известны лишь ограничения на эти возмущения.

Такие задачи приходится, например, исследовать при моделировании технических устройств, для нахождения максимального отклонения управляемой системы от желаемого состояния, в задачах контроля за накопившимися боковыми отклонениями движения самолета, или построения включения области достижимости при движении самолета на горизонтальной плоскости.

Статья рассматривает вопросы применения гарантированных методов, основанных на символьном представлении формул решений в типичных задачах накопления возмущений [4]–[6], при решении которых необходимо учитывать влияние многих реально существующих возмущений на движение системы. Применение гарантированных методов состоит из двух этапов — предиктор и корректор. На первом этапе (предиктор) происходит построение (запись) символьных формул приближенных решений как векторных функций $\mathrm{S}^{\mathrm{n}}(\mathrm{Y}^0) \circ \mathrm{S}^{\mathrm{n}-1}(\mathrm{Y}^0) \circ \ldots \circ \mathrm{S}^1(\mathrm{Y}^0)$, где вектор Y^0 — вектор начальных значений, рассматриваемых как символьные величины. Эти формулы аппроксимируют оператор сдвига вдоль траектории решения. На втором этапе вычисляются границы области значений S_{y} этой формулы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Булгаков Б. В.* Накопление возмущений линейных осциллирующих систем // ДАН. 1946. Т. 51, № 5. С. 339–342.
2. *Гноенский Л. С.* О точности некоторых нестационарных следящих систем // Автоматика и телемеханика. 1986. Вып. 9. С. 5–19.
3. *Жермоленко В. Л.* О максимальном отклонении линейной системы // Автоматика и телемеханика. 2012. Вып. 7. С. 3–14.
4. *Rogalyov A. N.* Computation of reachable sets guaranteed bounds // Proc. IASTED Int. Conf. on Automation, Control, and Information Technology. Control, Diagnostics, and Automation. Calgary: Acta Press, 2010. P. 132–139.
5. *Рогалев А. Н.* Безопасность сложных систем и оценки областей допустимых отклонений // Современные технологии, системный анализ, моделирование. 2014. № 4 (44). С. 84–91.
6. *Рогалев А. Н.* Гарантированный метод определения устойчивости на конечном интервале времени // Соболевские чтения. Международная школа-конференция: тез. докл. Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2016. С. 134.

МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТИ ДЛЯ МОДЕЛИ УПРУГОГО ТЕЛА, АРМИРОВАННОГО ТОНКИМ УПРУГИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Рудой Е. М.

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия; rem@hydro.nsc.ru

Рассматривается краевая задача, описывающая равновесие двумерного линейно-упругого тела с тонким прямолинейным упругим включением и возможным отслоением. Для описания напряженно-деформированного состояния включения используются уравнения теории упругих балок Бернулли – Эйлера. Наличие отслоения означает существование трещины между включением и упругой матрицей. На берегах трещины задаются нелинейные краевые условия, исключающие взаимное проникание берегов, что приводит к задаче с неизвестной областью контакта. Предложен итерационный алгоритм численного решения задачи, основанный на методе декомпозиции области и алгоритме Удзавы решения вариационных неравенств. Приведены результаты расчетов, иллюстрирующие эффективность предложенного алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Khludnev A. M., Leugering G.* Delaminated thin elastic inclusion inside elastic bodies // Math. Mech. Complex Syst. 2014. V. 2, No 4. P. 1–21.
2. *Rudoy E. M.* Domain decomposition method for crack problems with nonpenetration condition // ESAIM, Math. Model. Numer. Anal. 2016. V. 50, No 4. P. 995–1009.

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА В ОБЛАСТИ, ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ КОТОРОЙ — ПОЛУПОЛОСА

Рузиев М. Х.

Институт математики при Национальном университете Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Республика Узбекистан; mruziev@mail.ru

Пусть область D является суммой областей $D^+ \cup D^-$, первая из которых представляет собой эллиптическую полуполосу $0 \le x \le 1$, $y \ge 0$, а вторая — характеристический треугольник OBC, где OC и BC — две пересекающиеся в точке $C(\frac{1}{2}, -(\frac{m+2}{2})^{\frac{2}{m+2}})$ характеристики уравнения

$$\operatorname{sign} y\,|y|^m\,u_{xx} + u_{yy} - \frac{m}{2y}u_y = 0, \quad m > 0, \tag{1}$$

исходящие из точек $O(0,0)$ и $B(1,0)$, а OB — отрезок прямой $y = 0$.

Задача BS. Требуется найти в области D функцию $u(x,y)$, которая:

1) $u(x,y) \in C(\overline{D})$;

2) $u(x,y) \in C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;

3) $u(x,y)$ является обобщенным решением класса R_1 ([1], $\tau'(x), \nu(x) \in H$, причем $\tau'(x)$, $\nu(x)$ непрерывны в точке $x = 0$) уравнения (1) в области D;

4) $\lim\limits_{y\to+\infty} u(x,y) = 0$ равномерно по $x \in [0,1]$;

5) удовлетворяет краевым условиям

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \quad u(1,y) = \varphi_2(y), \quad y \ge 0,$$

$$u[\theta_0(x)] = \mu u[\theta_k(x)] + (1-\mu)u(x,0) + \psi(x), \quad x \in (0,1), \tag{2}$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y\to+0} y^{-\frac{m}{2}}u_y = \lim_{y\to-0} (-y)^{-\frac{m}{2}}u_y, \quad x \in (0,1).$$

Пределы при $x = 1$ могут иметь особенности порядка ниже единицы, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\psi(x)$ — заданные функции, $\mu \ne 1$ — постоянная, $\theta_0(x) = \frac{x_0}{2} - i(\frac{m+2}{4}x_0)^{\frac{2}{m+2}}$, $\theta_k(x) = \frac{kx_0}{1+k} - i(\frac{(m+2)x_0}{2(1+k)})^{\frac{2}{m+2}}$ — аффиксы точек пересечения характеристики OC и кривой $OC_1 : x - \frac{2k}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0$, $k = \text{const} > 1$, где $C_1 \in BC$, с характеристикой, исходящей из точки $(x_0, 0)$, $x_0 \in (0,1)$.

Отметим, что краевая задача с условием (2) для уравнения (1) в конечной области исследована в работе [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта (№ ОТ-Ф4-88).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа. М.: Высшая школа, 1985.
2. *Мирсабуров М., Хайруллаев И. Н., Бобомуродов У. Э.* Об одном обобщении задачи Бицадзе – Самарского для уравнения смешанного типа // Изв. вузов. Матем. 2016. № 10. С. 36–40.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Сабатулина Т. Л.

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия; TSabatulina@gmail.com

Рассмотрим дифференциальное уравнение с распределённым запаздыванием

$$\dot{x}(t) + ax(t) + b \int\limits_{t-h}^{t} e^{-c(t-s)} x(s)\, ds = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}$, $h > 0$. Следуя [1, с. 9], назовём решением уравнения (1) локально абсолютно непрерывную функцию, удовлетворяющую (1) почти всюду. При отрицательных значениях аргумента полагаем, что функция x доопределена суммируемой начальной функцией.

Как известно [2, с. 102], для того чтобы уравнение (1) было экспоненциально устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы все нули его характеристической функции лежали слева от мнимой оси.

Одним из наиболее эффективных методов исследования устойчивости автономных уравнений является метод D-разбиений [3], применение которого существенно упрощается, если удается установить связность области устойчивости.

Уравнение (1) обладает следующим интересным свойством: при замене переменных $x(t) = e^{\alpha t} y(t)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) уравнение (1) переходит в уравнение того же вида ($a \mapsto a + \alpha$, $b \mapsto b$, $c \mapsto c + \alpha$). Опираясь на этот факт, для уравнения (1) удаётся показать, что область устойчивости является связной в пространстве параметров $\{ah, bh^2, ch\}$.

В работе [4] построена область экспоненциальной устойчивости уравнения (1) при $c = 0$. Далее, учитывая связность области экспоненциальной устойчивости уравнения (1) при c любого знака, нетрудно построить эту область в пространстве параметров $\{ah, bh^2, ch\}$.

При $c \leqslant 0$ граница области устойчивости лежит на кривой, которая является графиком монотонной функции. При $c > 0$ кривая, на которой лежит граница области устойчивости, имеет самопересечения, так называемые "петли". Граница области устойчивости состоит из участков между этими "петлями".

Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки РФ, задание № 1.5336.2017/БЧ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.
2. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972.
3. *Неймарк Ю. И.* Устойчивость линеаризованных систем (дискретных и распределённых). Л.: ЛКВВИА, 1949.
4. *Сабатулина Т. Л., Малыгина В. В.* Некоторые признаки устойчивости линейного автономного дифференциального уравнения с распределённым запаздыванием // Изв. вузов. Матем. 2007. № 6. С. 55–63.

О МНОГООБРАЗИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ОБОБЩЁННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

Сафаров Д. С.[1], **Замонов М. З.**[2]

[1]*Курган-Тюбинский государственный университет им. Н. Хусрава, Курган-Тюбе, Республика Таджикистан;* safarov-5252@mail.ru
[2]*Российско-Таджикский (Славянский) университет, Душанбе, Республика Таджикистан;* mzamonov@mail.ru

Найдено многообразие решений уравнения обобщенных аналитических функций с одним отклонением аргумента через две двоякопериодические аналитические функции.

На комплексной плоскости $\mathbb{C}$ рассмотрим уравнение вида

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + aw(z) + bw(z+h) = 0, \tag{1}$$

где $z = x + iy$, $w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $2w_{\bar{z}} = \partial_x w + i\partial_y w$, a, b, h — постоянные. Отметим, что частные решения уравнения (1) можно искать посредством двух функций $\upsilon_1(z) = e^{\lambda\bar{z}}$, $\upsilon_2(z) = e^{\mu z}$, где λ, μ — постоянные числа.

Подставляя $\upsilon_1(z)$, $\upsilon_2(z)$ в уравнение (1), получим, что λ, μ должны удовлетворять, соответственно, трансцендентным уравнениям

$$\lambda + a + be^{\lambda\bar{h}} = 0, \quad a + b^{\mu h} = 0. \tag{2}$$

Т. к. уравнение (1) линейно, то справедлива теорема.

Теорема. *Пусть в уравнении* (1) λ, μ, *соответственно, — корни уравнений* (2) *и отклонение* $h = m_1 w_1 + m_2 w_2$, $\mathrm{Im}\,(w_1/w_2) \neq 0$, *где* m_1, m_2 *— некоторые целые числа, а* $\varphi(z)$, $\phi(z)$ *— двоякопериодические аналитические функции с периодами* w_1, w_2. *Тогда все функции вида*

$$w(z) = \varphi(z)e^{\lambda\bar{z}} + \psi(z)e^{\mu z}$$

дают решения уравнения (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
2. *Сафаров Д. С.* Двоякопериодические обобщенные функции. Душанбе: Дониш, 2012.

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕКОТОРОГО НЕИЗВЕСТНОГО ПАРАМЕТРА В УРАВНЕНИИ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

Сафиуллова Р. Р.

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия; regina-saf@yandex.ru

Необходимость исследования разрешимости тех или иных краевых задач довольно часто возникает в математическом моделировании колебательных процессов. Задачи, в которых вместе с решением того или иного дифференциального уравнения требуется определить также коэффициент (коэффициенты) самого уравнения, или же правую часть уравнения, в математике называют обратными задачами.

Пусть Ω есть ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (бесконечно дифференцируемой) границей Γ, Q — цилиндр $\Omega \times (0, T)$ конечной высоты T, $S = \Gamma \times (0, T)$, $f(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$ и при $t \in [0, T]$, A — заданное положительное число.

Обратная задача: найти функцию $u(x,t)$ и число a такие, что для них в цилиндре Q выполняется уравнение

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + au = f(x,t), \tag{1}$$

и при этом для функции $u(x,t)$ выполняются условия

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u(x,t)|_S = 0, \tag{3}$$

$$\int\limits_{\Omega} u^2(x,T)dx = A. \tag{4}$$

В данной обратной задаче условия (2) и (3) являются условиями первой начально-краевой задачи, условие же (4) есть условие переопределения, необходимое для нахождения неизвестного параметра a.

Замечание. Следует отметить, что в работе [1] изучались близкие по постановке обратные задачи для параболических уравнений, но при этом методы этих работ напрямую на рассматриваемую обратную задачу не переносятся. Техника доказательства разрешимости обратной задачи (1)–(4) подобна той, что использовалась в работе [2]. Применяются метод регуляризации, метод срезки, методы продолжения по параметру и неподвижной точки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lorenzi A., Mola G.* Identification of a real constant in linear evolution equations in Hilbert spaces // Inverse Probl. Imaging. 2011. V. 5, No 3. P. 695–714.
2. *Kozhanov A. I., Safiullova R. R.* Linear inverse problems for parabolic and hyperbolic equations // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2010. V. 18, No 1. P. 1–18.

ОБ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНОГО ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Седова Н. О.

Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия;
sedovano@ulsu.ru

Для систем с запаздыванием даже в линейном случае критерии устойчивости известны лишь для очень небольшого класса скалярных уравнений; в общем случае разработаны лишь способы получения достаточных условий устойчивости и построения оценок для решений некоторых типов систем. Проверка имеющихся условий, в свою очередь, может оказаться достаточно серьезной самостоятельной задачей даже для линейной системы с постоянными параметрами, а преимущества того или иного способа зависят от конкретного вида системы. Поэтому универсальных рецептов в этой области по сей день не существует, и исследования в этом направлении продолжаются.

При этом многие известные результаты опираются на свойства скалярного уравнения вида

$$\dot{x}(t) = -a(t)x(t - r(t)), \tag{1}$$

которому посвящены многочисленные исследования, начиная с работ А. Д. Мышкиса и К. Кука [1], [2]. Значительная доля полученных к настоящему времени результатов об оценках решений уравнения (1) использует в том или ином виде так называемые "3/2-признаки" (некоторые ссылки на соответствующие источники представлены в статье [3]). В форме таких признаков представлены и "точные" (неулучшаемые в общем случае) условия устойчивости и ограниченности решений для уравнения (1), которые, однако, могут быть существенно ослаблены при наличии некоторых специальных свойств функций $a(t)$ и $r(t)$.

В докладе предлагается обзор и сравнение результатов об устойчивости и оценках решений для уравнения (1), а также обсуждаются возможности их модификации при различных дополнительных условиях. Для обоснования используются "неклассические" функции Ляпунова. Рассматриваются, в том числе, способы получения оценок решений на основе использования функций, производная которых при условиях Разумихина может быть знакопеременной (см., например, [4]). При этом допускаются, вообще говоря, как ограниченные, так и неограниченные функции $r(t) \geq 0$ (при условии, что $t - r(t)$ неограниченно возрастает при $t \to +\infty$), в предположении, по крайней мере, локальной интегрируемости коэффициента $a(t)$. Получены также результаты об устойчивости для некоторых видов линейных систем с запаздыванием с переменными параметрами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мышкис А. Д.* О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом // Мат. сб. 1951. Т. 28, № 3. С. 641–658.
2. *Cooke K. L.* Asymptotic theory for the delay-differential equation $u'(t) = -au(t-r(u(t)))$ // J. Math. Anal. Appl. 1967. V. 19. P. 160–173.
3. *Knyazhishche L. B., Shcheglov V. A.* On the sign definiteness of Liapunov functionals and stability of a linear delay equation // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 1998. No 8. P. 1–13.
4. *Zhou B., Egorov A. V.* Razumikhin and Krasovskii stability theorems for time-varying time-delay systems // Automatica. 2016. V. 71. P. 281–291.

ОБ УСТОЙЧИВЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ПОРОЖДАЮЩИХ РАВНОМЕРНО ОГРАНИЧЕННУЮ ГРУППУ

Сказка В. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
skazka@math.nsc.ru

В работе речь пойдет о решениях задачи Коши в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$:

$$\frac{du}{dt} = Au + Q(t)(\varepsilon K(t)u + B(t,u)), \quad u\big|_{t=0} = u_0. \tag{1}$$

Предполагается, что оператор A является инфинитезимальным производящим оператором некоторой группы $U(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$ класса C_0 (см [1]). Причем существует такая константа C_U, что для любого $\varphi \in \mathfrak{B}$ справедливо $\|U(t)\varphi\|_{\mathfrak{B}} \le C_U \|\varphi\|_{\mathfrak{B}}$. В качестве решений задачи (1) рассматриваются решения интегрального уравнения

$$u(t) = U(t)u_0 + \int\limits_0^t U(t-\tau)Q(\tau)(\varepsilon K(\tau)u + B(\tau,u))d\tau. \tag{2}$$

Предполагается, что существуют две константы B_1, B_2 такие, что

$$\|B(t,u_1) - B(t,u_2)\|_{\mathfrak{B}} \le B_2 \left(\|u_1\|_{\mathfrak{B}} + \|u_2\|_{\mathfrak{B}}\right) \left(\|u_1 - u_2\|_{\mathfrak{B}}\right)$$

и

$$\|B(t,u)\|_{\mathfrak{B}} \le B_1 \|u\|^2_{\mathfrak{B}}.$$

Оператор-функция $K(t)$ — непрерывная, равномерно ограниченная функция в метрике банахова пространства линейных ограниченных операторов пространства $\mathfrak{B}$; $\sup\limits_t \left\| \int\limits_0^t U(t-\tau)Q(\tau)u(\tau)\, d\tau \right\|_{\mathfrak{B}} \le C \sup\limits_t \|u(t)\|_{\mathfrak{B}}$ для непрерывных функций $u(t)$. При этих условиях справедлива теорема.

Теорема. *Существуют $\bar\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $P > 0$ такие, что для любого ε, $|\varepsilon| < \bar\varepsilon$, и любого u_0, $\|u_0\|_{\mathfrak{B}} < \delta$, решение задачи (2) $u(t)$ существует при $t \in (-\infty,\infty)$, причём $\|u(t)\|_{\mathfrak{B}} \le P\|u_0\|_{\mathfrak{B}}$.*

В качестве примера применения данной теоремы можно назвать некоторые системы гиперболических уравнений с одной пространственной переменной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М: Иностранная литература, 1962.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ В ОДНОЙ МОДЕЛИ ХИЩНИК-ЖЕРТВА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Скворцова М. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
sm-18-nsu@yandex.ru

Рассматривается система дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, описывающая взаимодействие популяций хищников и жертв, обитающих на одной территории [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = rx(t)\left(1 - \dfrac{x(t)}{K}\right) - px(t)y(t), \\ \dfrac{d}{dt}y(t) = bpe^{-c\tau}x(t-\tau)y(t-\tau) - dy(t), \\ \dfrac{d}{dt}z(t) = bpx(t)y(t) - bpe^{-c\tau}x(t-\tau)y(t-\tau) - cz(t). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $x(t)$ — численность популяции жертв, $y(t)$ — численность популяции взрослых хищников, $z(t)$ — численность популяции молодых хищников. Предполагается, что только взрослые хищники могут нападать на жертв и воспроизводить потомство. Параметр запаздывания τ отвечает за время взросления хищников, r — коэффициент прироста популяции жертв, K — максимально допустимая численность популяции жертв, p — коэффициент взаимодействия жертв и взрослых хищников, b — коэффициент рождаемости хищников, c — коэффициент смертности молодых хищников, d — коэффициент смертности взрослых хищников. Все параметры системы предполагаются положительными.

В работе изучается асимптотическая устойчивость положений равновесия системы (1). Получены условия на коэффициенты системы, при которых положения равновесия являются асимптотически устойчивыми. Используя модифицированные функционалы Ляпунова – Красовского [2], установлены оценки скорости сходимости решений к положениям равновесия и оценки на области притяжения. Результаты частично опубликованы в [3].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-00745).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Forde J. E.* Delay differential equation models in mathematical biology // PhD thesis. University of Michigan, 2005.
2. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, вып. 3. С. 20–28.
3. *Скворцова М. А.* Устойчивость решений в модели хищник-жертва с запаздыванием // Мат. заметки СВФУ. 2016. Т. 23, № 2. С. 108–120.

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ИНВАРИАНТНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА

Талышев А. А.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
tal@academ.org

Система дифференциальных уравнений называется автоморфной относительно группы Ли, если все её решения находятся на орбите одного из них [1, § 25]. Автоморфная система максимального ранга участвует в групповом расслоении [1, § 26]. А решения автоморфных систем меньшего ранга названы в [1, с. 336] дифференциально-инвариантными решениями. Каждое дифференциально-инвариантное решение относительно каждой группы характеризуется конечной неубывающей последовательностью размерностей орбит $d_0, \ldots, d_{k_3}$ в продолженных пространствах [2].

В настоящей работе результаты из работ [2]–[4] используются для построения некоторых классов дифференциально-инвариантных решений трехмерных уравнений Навье – Стокса

$$U_t + (U \cdot \nabla)U + \nabla P = \nu \triangle U, \quad \operatorname{div} U = 0, \tag{1}$$

где $U(t, x, y, z)$ — трехмерное векторное поле скоростей, $p(t, x, y, z)$ — давление и $\nu = \text{const}$ — коэффициент кинематической вязкости.

Уравнения (1) допускают бесконечно-параметрическую группу симметрий Ли [5]. В настоящей работе построены дифференциально-инвариантные решения относительно нескольких конечно-параметрических и бесконечно-параметрических подгрупп допускаемой группы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. *Талышев А. А.* О дифференциально-инвариантных решениях // Сиб. журн. чист. и прикл. матем. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 75–84.
3. *Талышев А. А.* Об автоморфных системах конечномерных групп Ли // Уфимск. мат. журн. 2012. Т. 4, № 4. С. 130–138.
4. *Талышев А. А.* Об интегрировании автоморфных систем конечномерных групп Ли // Уфимск. мат. журн. 2014. Т. 6, № 1. С. 108–114.
5. *Бытев В. О.* Групповые свойства уравнений Навье – Стокса // Численные методы механики сплошной среды. 1972. Т. 3, № 3. С. 13–17.

О НЕПРЕРЫВНЫХ ПО ЛИПШИЦУ РЕШЕНИЯХ АНИЗОТРОПНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Терсенов Ал. С.[1], **Терсенов Ар. С.**[2]

[1] *Университет Крита, Ираклион, Греция;* tersenov@math.uoc.gr
[2] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;* atersenov@math.nsc.ru

В докладе будет рассмотрена первая краевая задача, а также задача Коши для анизотропных параболических уравнений вида

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} (|u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i})_{x_i} = f(t, x, u, \nabla u) \quad \text{в} \quad \Omega_T = \Omega \times (0, T), \tag{1}$$

где Ω — ограниченная область. Уравнения вида (1) принадлежат к широкому классу уравнений, часто называемых *уравнениями с нестандартными условиями роста*. Как известно, при исследовании этих уравнений широко применяются методы вариационного исчисления, которые встречают серьезные трудности в случае, когда правая часть зависит от градиента решения. Классическими методами исследования являются также аппроксимационные методы, например, метод Галеркина. Одной из главных отличительных черт этих уравнений от классического p-лапласиана является отсутствие достаточно полной теории регулярности решений. Известно, что непрерывность по Липшицу этих решений по пространственным переменным является лучшим результатом на сегодняшний день. В случае, когда f не зависит от градиента, нам удалось показать глобальную липшицевость решений по всем переменным, включая переменную t, в выпуклых областях. Причем липшицевость по времени можно получить в областях, удовлетворяющих условию внешней сферы. Существование решений доказывается путем регуляризации исходного уравнения и построении решения как предела классических решений регуляризованной задачи.

В случае сильных градиентных нелинейностей одной из главных сложностей является переход к пределу в нелинейных членах. С помощью теории вязких по Лионсу решений нам удалось доказать существование решения и в случае градиентных нелинейностей, не удовлетворяющих условию Бернштейна, которое является локально непрерывным по Гельдеру по t и глобально липшицевым по пространственным переменным. Стоит отметить, что последний результат получен в случае, когда показатели p_i зависят от времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Antontsev S., Shmarev S.* Evolution PDEs with nonstandard growth conditions: existence, uniqueness, localization, blow-up. V. 4. Atlantis studies in differential equations. Amsterdam, Paris, Beijing: Atlantis Press, 2015.
2. *Tersenov Al. S., Tersenov Ar. S.* Existence of Lipschitz continuous solutions to the Cauchy–Dirichlet problem for anisotropic parabolic equations // J. Funct. Anal. 2017. V. 272, No 10. P. 3965–3986.

ЗАДАЧИ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ С НЕЭЛЛИПТИЧЕСКИМ СИМВОЛОМ ГРАНИЦЫ: НЕДАВНИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И НЕРЕШЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Трахинин Ю. Л.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
trakhin@math.nsc.ru

В докладе обсуждаются недавние результаты и нерешенные проблемы для задач со свободными границами с неэллиптическим символом границы. Для таких задач граничные условия на свободной границе $F(t,x) = 0$ не разрешимы для градиента $(F_t, \nabla F)$. В этом случае линеаризованная задача может удовлетворять только слабому условию Лопатинского (нейтральная устойчивость), что влечет потерю производных в априорных оценках решения в пространствах Соболева. Однако основная трудность заключается в потере “контроля над границей”, выражающаяся в недостаточности условия Лопатинского для корректности исходной нелинейной задачи. Требуется дополнительное условие на свободной границе, примером которого является известное условие Рэлея – Тейлора.

В докладе рассматриваются задачи со свободными границами для уравнений Эйлера [1] и уравнений магнитной гидродинамики идеальной сжимаемой и несжимаемой жидкости [2]–[9], а также для системы (первого порядка в эйлеровых координатах), описывающей упругие волны в сжимаемых и несжимаемых средах [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Trakhinin Y.* Local existence for the free boundary problem for nonrelativistic and relativistic compressible Euler equations with a vacuum boundary condition // Commun. Pure Appl. Math. 2009. V. 62, No 11. P. 1551–1594.
2. *Trakhinin Y.* On the well-posedness of a linearized plasma-vacuum interface problem in ideal compressible MHD // J. Differ. Equations. 2010. V. 249, No 10. P. 2577–2599.
3. *Trakhinin Y.* Stability of relativistic plasma-vacuum interfaces // J. Hyperbolic Differ. Equ. 2012. V. 9, No 3. P. 469–509.
4. *Secchi P., Trakhinin Y.* Well-posedness of the plasma-vacuum interface problem // Nonlinearity. 2014. V. 27, No 1. P. 105–169.
5. *Morando A., Trakhinin Y., Trebeschi P.* Well-posedness of the linearized plasma-vacuum interface problem in ideal incompressible MHD // Q. Appl. Math. 2014. V. 72, No 3. P. 549–587.
6. *Mandrik N., Trakhinin Y.* Influence of vacuum electric field on the stability of a plasma-vacuum interface // Commun. Math. Sci. 2014. V. 12, No 6. P. 1065–1100.
7. *Morando A., Trakhinin Y., Trebeschi P.* Well-posedness of the linearized problem for MHD contact discontinuities // J. Differ. Equations. 2015. V. 258, No 7. P. 2531–2571.
8. *Trakhinin Y.* On well-posedness of the plasma-vacuum interface problem: the case of non-elliptic interface symbol // Commun. Pure Appl. Anal. 2016. V. 15, No 4. P. 1371–1399.
9. *Morando A., Trakhinin Y., Trebeschi P.* Local existence of MHD contact discontinuities // arxiv.org/abs/1612.04123.
10. *Trakhinin Y.* Well-posedness of the free boundary problem in compressible and incompressible elastodynamics // (in press).

ЗАДАЧА ФЛОРИНА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ

Тураев Р. Н.

Институт математики при Национальном университете Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Республика Узбекистан; rasul.turaev@mail.ru

Требования современной науки и техники приводят к необходимости рассматривать процессы, происходящие в нелинейных средах. Здесь можно указать задачи гидро- и газодинамики, физики плазмы, теории химических реакций и др. В связи с постановкой новых задач возникает необходимость разработки новых подходов в исследовании нелинейных задач математической физики, решающихся математическими моделями процессов в нелинейных средах. При этом многие из указанных задач для параболических уравнений приводятся к краевым задачам со свободной границей [1], [2].

Задачи со свободной границей с нелокальными граничными условиями используются для математического моделирования процессов загрязнения в реках, морях, вызываемого сточными водами [3], [4].

В настоящей работе изучается нелокальная задача Флорина для квазилинейного параболического уравнения.

Постановка задачи. Требуется найти на некотором отрезке $0 < t \leq T$ непрерывно дифференцируемую функцию $s(t)$ такую, что $s(0) = s_0 > 0$, $0 < \dot{s}(t) \leq N$, $s(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера, а функция $u(t,x)$ в области $D = \{(t,x) :\ 0 < t \leq T,\ 0 < x < s(t)\}$ удовлетворяет уравнению

$$u_t = a(t,x,u_x)u_{xx} + b(t,x)u_x + c(t,x,u_x), \quad (t,x) \in D,$$

и следующим начальным и граничным условиям:

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq s_0,$$

$$u_x(t,0) = \psi_1(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$\alpha u(t,x_0) = u(t,s(t)), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$u_x(t,s(t)) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Исследование проводится по следующей схеме. Сначала задача сводится к задаче типа Стефана и доказывается их эквивалентность. Далее устанавливаются априорные оценки свободной границы, решений и их производных в нормах Гёльдера. На основе установленных оценок исследуется поведение свободной границы в рассматриваемом промежутке времени, доказывается единственность решения первоначальной задачи. И в итоге доказывается существование решения полученной и первоначальной задачи при помощи метода неподвижной точки Шаудера [3], [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.
2. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995.
3. *Тахиров Ж. О.* Неклассические нелинейные задачи со свободной границей. Ташкент: ФАН, 2014.
4. *Тахиров Ж. О., Тураев Р. Н.* Нелокальная задача Стефана для квазилинейного параболического уравнения // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2012. № 3 (28). С. 8–16.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ НА ПОЛУОСИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Уварова И. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
sibirochka@ngs.ru

В работах [1]–[4] были определены классы систем вида

$$\frac{dx}{dt} = A_n x + F_n(t,x), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

для которых было установлено, что приближенное нахождение значений компонент решений задачи Коши для этих систем можно свести к решению начальной задачи для уравнения с запаздывающим аргументом

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau. \tag{2}$$

В этих работах были получены оценки аппроксимации $x_n(t) \approx y(t)$ при $n \gg 1$, $t \in [0,T]$. Отметим, что эти оценки существенно зависят от величины T.

В данной работе мы изучаем свойства решений систем вида (1) на всей полуоси $[0,\infty)$. При дополнительных условиях на правую часть системы мы получаем оценки аппроксимации $x_n(t) \approx y(t)$, $n \gg 1$, при всех $t \geq 0$. Установление таких оценок позволяет, в частности, проводить исследования качественных свойств решений уравнения (2), используя результаты для систем уравнений (1).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-41-543365).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демиденко Г. В., Лихошвай В. А., Котова Т. В., Хропова Ю. Е.* Об одном классе систем дифференциальных уравнений и об уравнениях с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 1. С. 58–68.
2. *Демиденко Г. В., Мельник (Уварова) И. А.* Об одном способе аппроксимации решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 3. С. 528–546.
3. *Демиденко Г. В.* О классах систем дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнениях с запаздывающим аргументом // Итоги науки. Юг России. Сер.: Математический форум. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011. Т. 5. С. 45–56.
4. *Демиденко Г. В.* Системы дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнения с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 6. С. 1274–1282.

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ОСКОЛКОВА

Устюжанинова А. С.[1], **Турбин М. В.**[2]

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия;
[1]nastyzhka@gmail.com, [2]mrmike@mail.ru

Рассматривается следующая система уравнений:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu\Delta v + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \varkappa\frac{\partial \Delta v}{\partial t} - \varkappa\sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial \Delta v}{\partial x_k} + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} v = 0 \tag{1}$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ с границей $\partial\Omega$ класса C^3 на промежутке времени $[0, T]$, $0 < T < \infty$. Физический смысл данной системы уравнений подтверждается экспериментальными исследованиями растворов полимеров (см, например, [1]).

Для системы (1) рассмотрим начально-краевую задачу с начальным и граничным условиями

$$v|_{t=0} = a(x),\ x \in \Omega, \quad v|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0. \tag{2}$$

Задача (1)–(2) впервые была рассмотрена А. П. Осколковым в ряде работ. Однако в работе [2] им было замечено, что его доказательство содержит пробелы и что в ограниченной области Ω ему методом Галеркина – Фаэдо не удалось доказать теоремы существования даже слабых решений для рассматриваемой задачи. О. А. Ладыженская в своей работе [3] отмечает, что метод введения вспомогательной вязкости, использованный А. П. Осколковым для изучения этой начально-краевой задачи, является ошибочным, и вопрос о существовании решений данной начально-краевой задачи оставался открытым.

Пусть $f \in L_2(0, T; V^{-1})$, $a \in V^2$.

Определение. *Слабым решением* начально-краевой задачи (1)–(2) называется функция $v \in W = \{u : u \in C([0, T], V^2),\ u' \in L_2(0, T; V^2)\}$, удовлетворяющая для любого $\varphi \in V^1$ и почти всех $t \in (0, T)$ равенству

$$\int_\Omega v'\varphi dx + \varkappa\int_\Omega \nabla(v') : \nabla\varphi dx + \nu\int_\Omega \nabla v : \nabla\varphi dx$$
$$- \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega v_i(I - \varkappa\Delta)v_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i} dx = \langle f, \varphi\rangle$$

и начальному условию $v(0) = a$.

Теорема. *Существует хотя бы одно слабое решение начально-краевой задачи* (1)–(2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Павловский В. А.* К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров // ДАН СССР. 1971. Т. 200, № 4. С. 809–812.
2. *Осколков А. П.* О некоторых квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1975. Т. 52. С. 128–157.
3. *Ладыженская О. А.* О погрешностях в двух моих публикациях по уравнениям Навье – Стокса и их исправлениях // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2000. Т. 271. С. 151–155.

СТАЦИОНАРНЫЙ МЕТОД ГАЛЕРКИНА В ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ

Федоров В. Е.

Научно-исследовательский институт математики
Северо-Восточного федерального университета им. М. К. Аммосова,
Якутск, Россия; vefedorov58@mail.ru

В цилиндрической области рассматривается уравнение нечетного порядка по времени и второго порядка по пространственным переменным. На знак старшего коэффициента уравнения внутри области никаких ограничений не накладывается. Поэтому в этот класс входят эллиптико-параболические уравнения, уравнения с меняющимся направлением времени и другие уравнения. Для одного из случаев знакоопределенности старшего коэффициента уравнения на основаниях цилиндра с помощью стационарного метода Галеркина доказана однозначная регулярная разрешимость в пространстве Соболева первой краевой задачи для данного уравнения. При этом, в отличие от работы [1], где эта задача была исследована по другой методике, априорные оценки для приближенных решений задачи получены сразу по всей области.

На основании этих оценок установлена оценка погрешности приближенных решений относительно точного решения задачи через собственные значения самосопряженной спектральной задачи для квазиэллиптического уравнения, собственные функции которой выбираются в качестве базиса при построении приближенных решений.

Замечание. Отметим, что в работе [2] аналогичные результаты по этой краевой задаче получены для другого случая знакоопределенности старшего коэффициента уравнения на основаниях цилиндра, но в весовом пространстве Соболева.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках базовой части государственного задания на выполнение НИР на 2017–2019 гг. (проект № 6069).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Егоров И. Е., Федоров В. Е.* Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995.
2. *Ефимова Е. С.* Применение стационарного метода Галеркина к неклассическому уравнению высокого порядка с меняющимся направлением времени // Мат. заметки ЯГУ. 2012. Т. 17, № 2. С. 32–38.

БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ В ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ С ПОВОРОТОМ НА ОКРУЖНОСТИ

Хазова Ю. А.

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Таврическая академия, Симферополь, Россия; hazova.yuliya@hotmail.com

Рассматривается параболическое уравнение на окружности с преобразованием поворота пространственной переменной. Исследованы случаи рождения устойчивых периодических решений типа бегущих волн. На основе метода центральных многообразий доказана теорема о рождении устойчивого предельного цикла.

Рассмотрим уравнение на окружности S^1

$$\dot{u} = \mu \triangle u - u - \Lambda Q u + \frac{\Lambda}{6} Q u^3,$$

$$u(\varphi + 2\pi, t) = u(\varphi, t).$$

Собственными функциями оператора $L(\mu)u = \mu\triangle u - u - \Lambda Q u$, рассматриваемого в качестве неограниченного оператора на пространстве $L_2(S^1)$ и областью определения $H^2(S^1)$, являются функции $e^{ik\varphi}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, с соответствующими собственными значениями $\lambda_k(\mu) = -1 - k^2\mu - \Lambda e^{ik\frac{2\pi}{3}}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Пусть $\Lambda = -\frac{4}{\sqrt{3}}$. Тогда при $\mu > 1$ нулевое решение задачи экспоненциально устойчиво. При уменьшении μ и его прохождении через $\mu = 1$ нулевое решение задачи теряет устойчивость. Пара комплексно сопряженных точек спектра проходит через мнимую ось с ненулевой скоростью. В результате от нулевого решения бифурцирует однопараметрическое семейство периодических решений типа бегущих волн.

Воспользуемся для построения бегущих волн и их представления методом центральных многообразий. В результате приближенным периодическим решением исходной задачи, ответвляющимся от нуля при прохождении параметра μ через 1, является

$$u(\varphi, t) = \rho_1(\mu) e^{i\omega_1(\mu)\varphi} e^{i\varphi} + \rho_1(\mu) e^{-i\omega_1(\mu)\varphi} e^{-i\varphi}$$

$$+ \frac{\rho_1^3(\mu) e^{3i\omega_1(\mu)\varphi} e^{3i\varphi}}{3\lambda_1 - \lambda_3} + \frac{\rho_1^3(\mu) e^{-3i\omega_1(\mu)\varphi} e^{-3i\varphi}}{3\overline{\lambda}_1 - \overline{\lambda}_3}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хазова Ю. А.* Динамика стационарных структур в параболической задаче на отрезке с отражением пространственной переменной // Динамические системы. 2014. Т. 4, № 3–4. С. 245–257.
2. *Хазова Ю. А.* Стационарные структуры в параболической задаче с отражением пространственной переменной // Таврический вестник информатики и математики. 2015. № 3. С. 82–95.
3. *Хазова Ю. А.* Стационарные структуры в параболической задаче с отражением пространственной переменной // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. 2015. Т. 3, № 8-4. С. 314–317.

О МНОГОМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ СТЕКЛОВА С СИНГУЛЯРНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

Чечкина А. Г.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; chechkina@gmail.com

На основе метода, предложенного в [1], исследуется сингулярно возмущённая задача типа Стеклова с малым параметром для скалярного эллиптического оператора в ограниченной многомерной области в случае вырождения условия Стеклова. Доказывается, что при стремлении малого параметра к нулю собственные значения этой задачи стремятся к бесконечности. При этом удаётся оценить скорость стремления к бесконечности собственных значений и скорость стремления к нулю собственных функций.

Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, с гладкой границей $\partial\Omega$.

Мы предполагаем, что $\partial\Omega = \Gamma_\varepsilon \cup \gamma_\varepsilon$, причём Γ_ε состоит из участков Γ_ε^j, $j = 1, \ldots, N_\varepsilon$, где $N_\varepsilon = O(|\ln\varepsilon|^{(1-\frac{\delta}{2})n-1})$, $0 < \delta < 2 - \frac{2}{n}$. При этом диаметр Γ_ε^j меньше или равен ε, а расстояние между ними больше или равно 2ε, где ε — положительный малый параметр. Рассматривается задача типа Стеклова (здесь и далее предполагается суммирование по повторяющимся индексам) вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{ij}\dfrac{\partial u_\varepsilon^k}{\partial x_j}\right) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \\ u_\varepsilon^k = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_\varepsilon, \\ a^{ij}\dfrac{\partial u_\varepsilon^k}{\partial x_j}\nu_i = \lambda_\varepsilon^k u_\varepsilon^k \quad \text{на} \quad \Gamma_\varepsilon, \end{cases}$$

где $a^{ij}(x)$ — ограниченные измеримые функции в Ω, удовлетворяющие условию эллиптичности, т. е. $\varkappa_1|\xi|^2 \leq a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \varkappa_2|\xi|^2$, $\varkappa_1, \varkappa_2 = \text{const} > 0$, $x \in \Omega$, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — единичная внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$.

Исследуется предельное поведение собственных значений и собственных функций этой задачи Стеклова в случае, когда ε стремится к нулю. Предполагается, что собственные функции ищутся в пространстве $H^1(\Omega, \gamma_\varepsilon)$, а собственные значения занумерованы в порядке неубывания с учётом кратности, т. е. $\lambda_\varepsilon^1 \leq \lambda_\varepsilon^2 \leq \ldots$ Пространство $H^1(\Omega, \gamma_\varepsilon)$ определяется как пополнение множества функций из пространства $C^\infty(\overline{\Omega})$, обращающихся в ноль в окрестности γ_ε, с нормой $\|u\|_1 = \left(\int\limits_\Omega \left(u^2 + |\nabla u|^2\right)dx\right)^{\frac{1}{2}}$. Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема. *Для собственных значений исследуемой спектральной задачи при достаточно малых ε справедлива следующая оценка $\lambda_\varepsilon^k \geq C_1(k)|\ln\varepsilon|^\delta$, $k = 1, 2, \ldots$, для собственных функций этой задачи справедлива оценка $\|u_\varepsilon^k\|_1 \leq C_2(k)|\ln\varepsilon|^{-\delta}$, $k = 1, 2, \ldots$, где $\delta \in \left(0, 2 - \frac{2}{n}\right)$, а $C_1(k)$, $C_2(k)$ не зависят от ε.*

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Программы Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ России” (грант 14.W02.16.7461-НШ), а также РФФИ (проект 15-01-07920).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chechkin G. A., Oleinik O. A.* On asymptotics of solutions and eigenvalues of the boundary value problems with rapidly alternating boundary conditions for the system of elasticity // Rendiconti Lincei: Matematica e Applicazioni. Serie IX. 1996. V. 7, No 1. P. 5–15.

ТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОСЦИЛЛЯЦИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Чудинов К. М.

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия; cyril@list.ru

Предметом доклада являются достаточные условия осцилляции всех решений дифференциальных и разностных уравнений с несколькими переменными запаздываниями, выраженные в терминах параметров уравнения. Основное внимание уделим разностному уравнению

$$\Delta x(n)+\sum_{k=1}^{m}p_k(n)x(\tau_k(n))=0,\quad n=0,1,2,\ldots \tag{1}$$

Обобщения достаточных условий осцилляции, полученных для уравнения с одним запаздыванием, на случай нескольких запаздываний, как правило, используют суммирование коэффициентов на промежутках длины, равной минимальному из запаздываний. Тем самым разные запаздывающие члены оказываются учтены в разной степени. Ниже представлены условия осцилляции решений, лишенные этого недостатка.

Определим для $k=\overline{1,m}$, $n=0,1,2,\ldots$, семейства множеств

$$E_k(n)=\{i\geqslant n \mid \tau_k(i)\leqslant n-1\},\quad H_k(n)=\{i\geqslant n \mid \tau_k(i)\leqslant n\}.$$

Теорема 1 [1]. *Если* $p_k(n)\geqslant 0$, $\tau_k(n)\leqslant n-1$, $\tau_k(n)\to+\infty$ *при* $n\to+\infty$ *и*

$$\varliminf_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i\in E_k(n)}p_k(i)>\frac{1}{e}, \tag{2}$$

то все решения уравнения (1) *осциллируют.*

Теорема 2. *Если* $p_k(n)\geqslant 0$, $\tau_k(n)\leqslant n$, $\tau_k(n)\to+\infty$ *при* $n\to+\infty$ *и*

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i\in H_k(t)}p_k(i)>1, \tag{3}$$

то все решения уравнения (1) *осциллируют.*

Константы в правых частях неравенств (2) и (3) неулучшаемы.

Левая часть неравенства (3) допускает существенное уточнение на основе итерационного подхода, предложенного для дифференциальных уравнений в работе [2] и разработанного для разностных уравнений в недавней статье [3].

Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки РФ (проект № 1.5336.2017/БЧ).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chudinov K.* New oscillation conditions for difference equations with several variable delays // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2017. (to appear).
2. *Koplatadze R. G., Kvinikadze G.* On the oscillation of solutions of first order delay differential inequalities and equations // Georgian Math. J. 1994. V. 3. P. 675–685.
3. *Braverman E., Chatzarakis G. E., Stavroulakis I. P.* Iterative oscillation tests for difference equations with several non-monotone arguments // J. Difference Equ. Appl. 2015. V. 21, No 9. P. 854–874.

НЕСКОЛЬКО ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ КдФ ПЯТОГО ПОРЯДКА

Чуешева Н. А.

Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия;
`chuesheva@ngs.ru`

В статье Kato Takamori [1] рассматривается задача Коши для следующего уравнения Кортевега-де-Фриза пятого порядка

$$u_t - u_{xxxxx} + c_1(u^3)_x + c_2\left((u_x)^2\right)_x + c_3\,(u\,u_{xx})_x = 0 \tag{1}$$

в $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $u(x,0)=u_1(x)$, $x\in\mathbb{R}$, где $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$, $c_3\neq 0$. При этом функция $u(x,t)$ может быть и действительной, и комплексной. Найдены условия корректности поставленной задачи.

В статье [2] выписаны несколько точных решений уравнения (1), которые являются либо вещественной, либо комплексной функциями:

1) при $c_2=-1$, $c_1=c_3=1$ — вещественная функция

$$u(x,t) = 8b^2 - 12b^2\tanh^2\left(-a - bx + 16b^5 t\right), \quad a,b\in\mathbb{R};$$

2) при $c_1=-2/3$, $c_2=c_3=-1$ — комплексная функция

$$u(x,t) = 5 - i\sqrt{55} + \frac{75+i57\sqrt{55}}{23-i3\sqrt{55}}\cdot\tanh^2\left(8 - x + i3\sqrt{55}\,t\right).$$

Пример 1. Если в уравнении (1) коэффициенты $c_1=15$, $c_2=\frac{75}{2}$, $c_3=-\frac{15}{2}$, то решением уравнения (1) будет вещественная функция

$$u(x,t) = \tan^2(x+t).$$

Если в уравнении (1) коэффициенты $c_1=2$, $c_2=31$, $c_3=-1$, то решением уравнения (1) будет аналитическая на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ без точек $z_k=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, функция

$$u(z) = a + \tan^2(x+it), \quad a = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}\sqrt[4]{10036}\,e^{i\varphi}, \quad \varphi = \pi - \frac{1}{2}\arctan\frac{3}{50}.$$

Точки z_k являются полюсами второго порядка этого решения уравнения (1).

Пример 2. Если в уравнении (1) коэффициент $c_1=0$, то при:

1) $c_2=\frac{15}{2}$, $c_3=-\frac{15}{2}$ решением уравнения (1) будет вещественная функция

$$u(x,t) = \sin^2(x+t);$$

2) $c_2=8$, $c_3=-8$ решением уравнения (1) будет аналитическая на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ функция

$$u(z) = -\frac{i}{32} + \sin^2(x+it).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Takamori K.* Well-posedness for the fifth order KdV equation // Funkc. Ekvacioj, Ser. Int. 2012. V. 55, No 1. P. 17–53.
2. *Чуешева Н. А.* Несколько уравнений высокого порядка // Сиб. журн. чист. и прикл. матем. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 103–117.

ОБОБЩЕННЫЙ ОПЕРАТОР ГРИНА МАТРИЧНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Чуйко С. М.

Донбасский государственный педагогический университет, Славянск, Украина; chujko-slav@inbox.ru

Исследована задача о построении решений $Z(t) \in C^1[a;b]$ обобщенной матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи

$$\mathcal{D}Z(t) = \mathcal{A}Z(t) + F(t), \quad \mathcal{L}Z(\cdot) = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}. \tag{1}$$

Здесь

$$\mathcal{D}Z(t) := \sum_{i=1}^{p} S_i(t)Z'(t)R_i(t), \quad \mathcal{A}Z(t) := \sum_{j=1}^{q} \Phi_j(t)Z(t)\Psi_j(t)$$

— линейные матричные операторы, $S_i(t), \Phi_i(t) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, $R_i(t), \Psi_j(t) \in \mathbb{R}^{\gamma\times\delta}$ и $F(t)$ — непрерывные матрицы; $\mathcal{L}Z(\cdot)$ — линейный ограниченный матричный функционал: $\mathcal{L}Z(\cdot) : C^1[a;b] \to \mathbb{R}^{\mu\times\nu}$, кроме того, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \nu$ — произвольные натуральные числа. Уравнение (1) обобщает традиционные постановки как для нетеровых краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [1], так и постановки задач для матричных дифференциальных и дифференциально-алгебраических уравнений [2]–[5].

Найдены конструктивные условия существования, а также схема построения решений линейной матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи (1). Предложена конструкция обобщенного оператора Грина для построения решений линейной матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи (1), а также условия регуляризации матричной дифференциально-алгебраической задачи (1) в случае ее неразрешимости [8]. Приведены примеры построения решений линейных матричных дифференциально-алгебраических краевых задач [5]–[7].

Работа выполнена при поддержке Государственного Фонда фундаментальных исследований Украины (номер государственной регистрации 0115U003182).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. Berlin, Boston: De Gruyter, 2016.
2. *Campbell S. L.* Singular systems of differential equations. Pitman Advanced Publishing Program, 1980.
3. *Чистяков В. Ф.* Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. Новосибирск: Наука, 1996.
4. *Boichuk A. A., Krivosheya S. A.* Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type // Ukr. Math. J. 1998. V. 50, No 8. P. 1162–1169.
5. *Chuiko S. M.* Generalized Green operator of Noetherian boundary-value problem for matrix differential equation // Russ. Math. 2016. V. 60, No 8. P. 64–73.
6. *Chuiko S. M.* The Green's operator of a generalized matrix differential-algebraic boundary value problem // Sib. Math. J. 2015. V. 56, No 4. P. 752–760.
7. *Chuiko S. M.* A generalized matrix differential-algebraic equation // J. Math. Sci. (New York). 2015. V. 210, No 1. P. 9–21.
8. *Chuiko S. M.* On the regularization of a matrix differential-algebraic boundary-value problem // J. Math. Sci. (New York). 2017. V. 220, No 5. P. 591–602.

О РЕШЕНИИ АВТОНОМНЫХ НЕТЕРОВЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ НЬЮТОНА

Чуйко С. М.[1], **Несмелова (Старкова) О. В.**[2]

[1]*Донбасский государственный педагогический университет, Славянск, Украина;* chujko-slav@inbox.ru
[2]*Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Славянск, Украина;* star-o@ukr.net

Исследована задача о построении решений $z(t) \in C^1[a;\check{b}]$ автономной краевой задачи [1], [2]

$$z' = Az + f + Z(z), \quad \ell z(\cdot) = \alpha + J(z(\cdot)). \tag{1}$$

Решения нетеровой $m \neq n$ задачи (1) ищем в окрестности решения $z_0(t) \in C^1[a;b]$ порождающей задачи

$$z_0' = Az_0 + f, \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha \in \mathbb{R}^m, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad f \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Здесь $Z(z)$ — нелинейная вектор-функция, непрерывно дифференцируемая по неизвестной $z(t)$ в окрестности решения порождающей задачи, $\ell z(\cdot)$ — линейный и $J(z(\cdot))$ — нелинейный векторный функционалы:

$$\ell z(\cdot) : C^1[a;b] \to \mathbb{R}^m, \quad J(z(\cdot)) : C^1[a;\check{b}] \to \mathbb{R}^m, \quad 0 \le |\check{b} - b| \ll 1.$$

Исследован критический случай: $P_{Q^*} \neq 0$; здесь $Q := \ell X(\cdot) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — постоянная матрица, $X(t)$ — нормальная $(X(a) := I_n)$ фундаментальная матрица однородной части дифференциальной системы (2), P_{Q^*} — матрица-ортопроектор: $P_{Q^*} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(Q^*)$. В критическом случае правый конец промежутка $[a;\check{b}]$ неизвестен [1].

В случае простых корней уравнения для порождающих амплитуд [1] для краевой задачи (1) нами получены необходимые и достаточные условия существования и предложена сходящаяся итерационная схема, построенная с использованием метода Ньютона – Канторовича [3]. Особенностью предложенной итерационной схемы является высокая точность, с которой приближения к решениям краевой задачи (1) удовлетворяют краевому условию (1), в частности, в случае периодической краевой задачи вида (1) в приближениях к решениям с высокой точностью отсутствуют вековые члены. В качестве примера исследована задача о нахождении периодических решений нелинейного уравнения Ван-дер-Поля.

Работа выполнена при поддержке Государственного Фонда фундаментальных исследований Украины (номер государственной регистрации 0115U003182).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Boichuk A. A., Chuiko S. M.* Autonomous weakly nonlinear boundary-value problems // Differ. Equations. 1992. V. 28, No 10. P. 1353–1358.
2. *Boichuk A. A.* Nonlinear boundary-value problems for systems of ordinary differential equations // Ukr. Math. J. 1998. V. 50, No 2. P. 186–195.
3. *Chuiko S. M., Pirus O. E.* On the approximate solution of an autonomous boundary-value problem by the Newton method // J. Math. Sci. (New York). 2013. V. 191, No 3. P. 449–463.

ДВУМЕРНЫЕ КВАЗИ-ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ СЕТКИ

Чумаков Г. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия; chumakov@math.nsc.ru

Построение двумерных регулярных квази-изометрических сеток мы рассматриваем как краевую задачу: при заданном квази-изометрическом отображении границы ∂R единичного квадрата R на границу $\partial\mathcal{D}$ физической области $\mathcal{D}$ продолжить это отображение внутрь R как квази-изометрическое решение системы Бельтрами с коэффициентами g_{ik} из заданного класса. Граничные условия этой краевой задачи являются либо условиями Дирихле, либо “свободными” граничными условиями, при которых точки сетки на $\partial\mathcal{D}$ не фиксированы и могут перемещаться вдоль $\partial\mathcal{D}$. При такой постановке задачи разностная сетка получается как единственное решение рассматриваемой краевой задачи. Кроме того, линии сетки являются прообразами отрезков геодезических линий поверхностей постоянной кривизны. Чтобы найти квази-изометрическое отображение, академик С. К. Годунов предложил специальный класс метрик, который был изучен в [1].

Квази-изометрические сетки, ортогональные вдали от углов. Пусть $\mathcal{D}$ есть криволинейный четырехугольник с углами $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$ $(0 < \varphi_i < \pi)$ и конформным модулем $\mathcal{M}$. Для построения квази-изометрической сетки в $\mathcal{D}$ мы рассматриваем однопараметрическое семейство $\{D_\delta\}$ *канонических* областей с теми же самыми углами φ_i и конформным модулем $\mathcal{M}(D_\delta)$, изменяющимся от 0 до $+\infty$ при $-\infty < \delta < +\infty$. Предположим, что границы $\{D_\delta\}$ являются ляпуновскими многообразиями. Для того чтобы построить квази-изометрическую сетку в $\mathcal{D}$, мы найдем квази-изометрическое отображение между $\mathcal{D}$ и соответствующей канонической областью D_{δ^*} из $\{D_\delta\}$. Мы доказали, что существует δ^*, для которого отображение из D_{δ^*} на $\mathcal{D}$ является конформным, вершины D_{δ^*} отображаются в соответствующие вершины $\mathcal{D}$, и производная отображения ограничена вплоть до границы.

В [2] семейство канонических областей $\{D_\delta\}$ состоит из геодезических четырехугольников на поверхностях постоянной кривизны. D_δ строится из исходного прямоугольника путем замены маленьких прямоугольников в углах прямоугольника на четыре геодезических четырехугольника на некоторых поверхностях постоянной кривизны. Каждый из этих геодезических четырехугольников имеет три прямых угла, а четвертый угол выбирается равным углу физической области $\mathcal{D}$. Эта процедура позволяет построить каноническую область для любого дефекта углов $\gamma = \sum_{i=1}^{4} \varphi_i - 2\pi$ физической области $\mathcal{D}$ за счет использования сферической геометрии или геометрии Лобачевского (соответственно для положительного и отрицательного дефекта углов геодезических четырехугольников).

В этой статье мы представляем семейство $\{D_\delta\}$ с монотонной функцией $\mathcal{M}(D_\delta)$ от параметра δ и доказываем, что для любой области $\mathcal{D}$ существует единственное значение δ^* такое, что отображение из D_{δ^*} на $\mathcal{D}$ конформно и имеет ограниченную производную вплоть до границы. Заметим, что эта теорема единственности имеет фундаментальное значение для приложений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chumakov G. A., Chumakov S. G.* A method for the 2D quasi-isometric regular grid generation // J. Comput. Phys. 1998. V. 143. P. 1–28.
2. *Chumakov G. A.* On 2-D quasi-isometric regular grids that are orthogonal far from corners // Appl. Numer. Math. 2003. V. 46. P. 279–294.

СЛОЖНОСТЬ В КИНЕТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ГЕТЕРОГЕННЫХ КАТАЛИТИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ С ИЕРАРХИЕЙ ВРЕМЕН

Чумакова Н. А.[1,3], **Чумаков Г. А.**[2,3], **Лашина Е. А.**[1,3]

[1] *Институт катализа им. Г. К. Борескова СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[2] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[3] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
chum@catalysis.ru, chumakov@math.nsc.ru, lashina@catalysis.ru

Различные каталитические реакции демонстрируют сложную динамику. Мы изучаем явление возникновения хаоса в трехмерной кинетической модели с быстрой, умеренной и медленной переменными, которая описывает динамику гетерогенной каталитической реакции взаимодействия водорода и кислорода с учетом влияния реакционной среды на активность катализатора.

Представляет большой интерес сценарий перехода от релаксационных автоколебаний, соответствующих устойчивому предельному циклу на сильно деформированном торе, к хаосу. Для распада инвариантного тора при некотором значении варьируемого параметра тор должен потерять гладкость. Мы приводим один из способов потери гладкости тора при изменении параметра [1]. В рассматриваемой кинетической модели найдены параметры, при которых реализуется предложенный сценарий перехода от устойчивого периодического решения к хаотическим (двухмодовым) многопиковым колебаниям вблизи бифуркации разрушения двумерного инвариантного тора. Для такого типа хаоса отображение Пуанкаре на аттракторе выглядит как облако точек.

Рождение аттракторов в рассматриваемой модели также может быть связано с существованием трансверсальных гомоклинических орбит к некоторым гиперболическим циклам с ориентированными или неориентированными двумерными инвариантными многообразиями. В частности, мы получили субгармонический каскад удвоения периода, приводящий к глобальному аттрактору. В этом случае отображение Пуанкаре, построенное на аттракторе, можно аппроксимировать одномерной кривой в силу того, что в динамической системе имеет место иерархия характерных временных масштабов. Хотя одномерное отображение не описывает все детали потока на аттракторе, тем не менее, рассмотрение одномерного отображения Пуанкаре F, являющегося гладкой аппроксимацией двумерного отображения Пуанкаре, и его второй итерации F^2 позволило доказать существование трансверсальной гомоклинической траектории к орбите Мёбиуса.

Локальные устойчивые и неустойчивые инвариантные многообразия орбиты Мёбиуса вращаются вокруг этой периодической орбиты, как лист Мёбиуса вокруг его центральной линии с нечетным числом полуоборотов. Мы показали, что F и F^2 пересекаются трансверсально в двух точках. Одна из них соответствует орбите Мёбиуса γ, которая рождается на аттракторе в результате первой бифуркации в каскаде удвоения периода. Вторая точка соответствует трансверсальной гомоклинической траектории к γ, которая является пределом последовательности 2^k-циклов при $k \to \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chumakov G. A., Chumakova N. A., Lashina E. A.* Modeling the complex dynamics of heterogeneous catalytic reactions with fast, intermediate, and slow variables // Chem. Eng. J. 2015. V. 282. P. 11–19.

ИССЛЕДОВАНИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ

Шадрина Н. Н.

Бурятский государственный университет, Улан-Удэ, Россия;
shadrinann8@yandex.ru

В работе исследуется вопрос о существовании и единственности решения краевой задачи с условиями сопряжения для уравнения эллиптического типа в цилиндре $\Omega \times (-1, 1)$, разделенном плоскостью $y = 0$ на две части — цилиндры $Q^- = \Omega \times (-1, 0)$, $Q^+ = \Omega \times (0, 1)$, где Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты — бесконечно дифференцируемой) границей Γ.

Рассматривается задача сопряжения, для которой L — дифференциальный оператор, его действие на заданной функции $v(x, y)$ определяется равенством

$$Lv \equiv \Delta_x v + \frac{\partial}{\partial y}(p(x, y)v_y) + c(x, y)v,$$

где $\Delta_x = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $p(x, y), c(x, y), f(x, y), \alpha_i(x), \beta_i(x)$ $(i = \overline{1, 4})$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $y \in [-1, 1]$, причем функция $p(x, y)$ строго положительна при $(x, y) \in \overline{Q}$ и может иметь разрыв первого рода при переходе через плоскость, $(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x), \alpha_4(x)), (\beta_1(x), \beta_2(x), \beta_3(x), \beta_4(x))$ — линейно независимые при каждом фиксированном $x \in \overline{\Omega}$ вектор-функции, B_1 и B_2 есть линейные операторы, ставящие в соответствие функции $u(x, y)$ функцию $(B_i u)(x)$.

В ходе доказательства теорем получены условия существования и единственности решения краевой задачи, а также степень влияния линейных операторов B_1 и B_2 на существование и единственность решения краевой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шадрина Н. Н.* О разрешимости некоторых задач сопряжения для уравнений эллиптического типа // Мат. заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 1. С. 75–89.

ЛОКАЛЬНАЯ АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

Шаманаев П. А., Язовцева О. С.

Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва, Саранск, Россия; kurinaos@gmail.com

Идея разбиения множества систем обыкновенных дифференциальных уравнений на классы эквивалентности на основе асимптотического поведения их решений принадлежит А. М. Ляпунову. В работах [1]–[3] для классификации нелинейных систем введены понятия покомпонентной асимптотической эквивалентности по Брауэру и Левинсону относительно некоторых эталонных функций. Введенные определения локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности позволяют распространить методику на более широкий класс нелинейных систем, чем в работах [1]–[3], получены достаточные условия эквивалентности для нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с возмущениями в виде векторных полиномов.

В настоящей работе проведено исследование устойчивости по части переменных нетривиального положения равновесия системы нелинейных уравнений, представляющих собой кинетическую модель химической реакции, сведенное к исследованию устойчивости тривиального положения равновесия линейного приближения системы на основании установления локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности по Брауэру. Нелинейная система представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений с возмущениями в виде векторных полиномов.

Метод исследования основан на построении оператора, переводящего решения нелинейной системы в решения ее линейного приближения. В соответствии с методикой, представленной в [1], доказательство существования оператора основано на принципе Шаудера о неподвижной точке. Доказательство проводится с использованием оценок элементов фундаментальной матрицы линейного приближения и возмущений нелинейной системы [2].

Существование оператора позволяет построить отображение, связывающее начальные точки исследуемой системы и ее линейного приближения, что обеспечивает локальную покомпонентную асимптотическую эквивалентность по Брауэру.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Воскресенский Е. В.* Асимптотические методы: теория и приложения. Саранск: СВМО, 2000.
2. *Воскресенский Е. В., Артемьева Е. Н., Белоглазов В. А., Мурюмин С. М.* Качественные и асимптотические методы интегрирования дифференциальных уравнений. Саранск: Изд-во Саратовск. ун-та. Саранский филиал, 1988.
3. *Воскресенский Е. В.* Методы сравнения в нелинейном анализе. Саранск: Изд-во Саратовск. ун-та. Саранский филиал, 1990.
4. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966.

НОВЫЕ СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ДВУМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Шамолин М. В.

Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

При построении понятия интегрируемости необходимо учитывать, в каком смысле оно понимается, в классе каких функций ищутся первые интегралы и т. д. В работе принимается такой подход, который учитывает в качестве класса функций как первых интегралов трансцендентные функции. Здесь трансцендентность понимается, прежде всего, в смысле наличия у них существенно особых точек (в силу классификации, принятой в теории функций комплексного переменного, когда функция имеет существенно особые точки).

Ранее в [1], [2] уже была показана полная интегрируемость уравнений пространственного движения тела в сопротивляющейся среде, когда у системы динамических уравнений существует полный набор трансцендентных первых интегралов. Далее, в [2], [3] была исследована динамическая часть уравнений движения различных динамически симметричных многомерных твердых тел. При этом рассматриваемые системы в некоторых случаях сводились к системе с диссипацией на касательном расслоении двумерной сферы.

В данной работе сначала рассматриваются уравнения геодезических на касательном расслоении гладкого двумерного многообразия (система в отсутствии внешнего поля сил). Строится переход к удобным координатам касательного пространства. В дальнейшем сначала вводятся внешние силовые поля, которые являются потенциальными, и рассматриваемые системы четвертого порядка обладают полным набором (тремя) гладких первых интегралов. А затем в таких системах вводятся дополнительные члены, в результате чего системы перестают быть консервативными, а точнее, становятся системами с так называемой знакопеременной диссипацией [1], [2], [3]. При этом при некоторых условиях они обладают полным набором (негладких) трансцендентных первых интегралов, в ряде случаев выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-00848-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фунд. и прикл. математика. 2008. Т. 14, № 3. С. 3–237.
2. *Шамолин М. В.* Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2013. Т. 125. С. 3–251.
3. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения // Фунд. и прикл. математика. 2015. Т. 20, № 4. С. 3–231.

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ

Шамсудинов Ф. М.

Курган-Тюбинский государственный университет им. Н. Хусрава, Курган-Тюбе, Республика Таджикистан; faizullo100@yahoo.com

Пусть D — прямоугольник: $D = \{(x,y) : 0 < x < \delta_1,\ 0 < y < \delta_2\}$. Далее обозначим

$$\Gamma_1 = \{y = 0,\ 0 < x < \delta_1\}, \quad \Gamma_2 = \{x = 0,\ 0 < y < \delta_2\}.$$

В области D рассмотрим систему следующего вида:

$$\begin{cases} r^{\alpha+\beta}u_{xy} + r^{\beta}a_1(x,y)u_x + r^{\alpha}b_1(x,y)u_y + c_1(x,y)u = f_1(x,y), \\ r^{\gamma}u_{xx} + a_2(x,y)u_x + c_2(x,y)u = f_2(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

где $r^2 = x^2 + y^2$, $a_j(x,y)$, $b_1(x,y)$, $c_j(x,y)$, $j = 1,2,$ — заданные функции области D, $\alpha < 1$, $\beta < 1$, $\gamma = 2$.

Проблеме исследования уравнений и переопределенных систем дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами посвящены работы [1]–[3]. Доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть в системе уравнений* (1) *коэффициенты и правые части удовлетворяют следующим условиям: 1)* $a_1(x,y), a_2(x,y) \in C_x^1(\overline{D})$, $a_2(x,y) \in C_y^1(\overline{D})$, $c_j(x,y), f_j(x,y) \in C(\overline{D})$, $j = 1,2$; *2)* $c_3(x,y)$ *и* $c_4(x,y)$ *связаны с помощью коэффициентов первого и второго уравнения системы соответствующими равенствами; 3)* $|A_2(x) - A_2(0)| \le H_1 x^{\gamma_1}$, $H_1 = \mathrm{const}$, $\gamma_1 > 1$; *4)* $a_2(0,0) < 0$; *5) функции* $a_1(x,y)$ *и* $a_2(x,y)$, $f_1(x,y)$ *и* $f_2(x,y)$ *удовлетворяют соответствующим условиям совместности; 6)* $f_2(x,0) = o(x^{\lambda_1})$, $\lambda_1 > 1$, $\varphi_1(x) = o(x^{\lambda_2})$, $\lambda_2 > 1$. *Тогда любое решение системы уравнений* (1) *из класса* $C_2(D)$ *представимо в виде*

$$u(x,y) = K_1(\varphi_1(x), \psi_1(y), f_1(x,y)),$$

$$\varphi_1(x) = T^2_{A_{2,1}}(c_1, f_2(x,0)),$$

$$\psi_1(y) = \exp\left[-\omega^{\alpha}_{a_1}(0,y)\right]\frac{d}{dy}F_1(y,\psi_2(y)) \ \ \text{при} \ \ y^{\beta}a_2(0,y) = y^2 b_1(0,y),$$

где $K_1(\varphi_1(x), \psi_1(y), f_1(x,y))$, $T^2_{A_{2,1}}(c_1, f_2(x,0))$, $F_1(y,\psi_2(y))$ *— известные интегральные операторы,* c_1 *— произвольная постоянная,* $\psi_2(y)$ *— произвольная функция одной независимой переменной* y *точек контура* Γ_2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wilczynski E. J.* Projective differential geometry of curves and ruled surfaces. Leipzig: B. G. Teubner, 1906.
2. *Раджабов Н.* Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами. Душанбе: Изд-во ТГУ, 1992.
3. *Раджабов Н., Абдель-Аал М. Э.* Переопределенная линейная система второго порядка с сингулярными и сверхсингулярными линиями. LAP Lambert Academic Publishing, 2011.

АНАЛИЗ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ СПЕЦИАЛЬНЫЙ КЛАСС ДВУМЕРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Шанько Ю. В.

Институт вычислительного моделирования ФИЦ КНЦ СО РАН, Красноярск, Россия; shy70@mail.ru

В работе рассматривается переопределенная система уравнений

$$\begin{gathered}u_t + uu_x + vu_y + p_x = 0,\\ v_t + uv_x + vv_y + p_y = 0,\\ u_x + v_y = 0,\\ p_t + up_x + vp_y = 0.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь t — время, x, y — пространственные координаты, u, v — компоненты вектора скорости, p — отклонение давления от заданной величины p_0.

Система (1) описывает двумерные движения идеальной жидкости с условием постоянства давления в частице. Кроме того, она является двумерным аналогом общей трехмерной системы, задача исследования на совместность которой была поставлена в статье Л. В. Овсянникова [1]. Этой системе удовлетворяют так называемые тепловые (с постоянной плотностью), а также изотермические (с постоянной скоростью звука) движения политропного газа.

Анализ системы (1) удобнее выполнять в специальных лагранжевых координатах [2]. За лагранжеву переменную η выбирается давление ($\eta = p$), а вторая переменная ξ задается так, чтобы якобиан перехода от x, y к ξ, η равнялся 1. Полученная система состоит из двух линейных и одного нелинейного уравнений:

$$x_\xi = -y_{tt}, \quad y_\xi = x_{tt}, \quad x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi = 1. \tag{2}$$

Переопределенная система (2) приведена к пассивному виду и полностью проинтегрирована. Дана интерпретация полученных решений как течений идеальной несжимаемой жидкости, ограниченной свободной поверхностью или движущейся твердой стенкой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л. В.* О "простых" решениях уравнений динамики политропного газа // Прикл. механика и техн. физика. 1999. Т. 40, № 2. С. 5–12.
2. *Нещадим М. В., Чупахин А. П.* О некоторых решениях уравнений движения сплошной среды со специальной термодинамикой // Сиб. электрон. мат. изв. 2011. Т. 8. С. 317–332.

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ НАГРУЗОК В КОНСТРУКЦИЯХ С ПЛОСКОЙ ДВУСВЯЗНОЙ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Шишканова А. А.

Запорожский национальный технический университет, Запорожье, Украина;
shganna@mail.ru

При исследовании прочности элементов конструкций, ослабленных плоскими разрезами (трещинами) различной конфигурации, существенное значение имеет определение предельных нагрузок на контуре трещины, при достижении которых появляется возможность распространения трещины и последующее разрушение.

Рассматривается однородное неограниченное упругое тело, в котором есть несимметричная двусвязная в плане макроскопическая трещина, противоположные берега которой не взаимодействуют между собой. Тело подвергается одноосному растяжению перпендикулярно плоскости трещины. В механике деформируемого твердого тела основное интегродифференциальное уравнение, выражающее зависимость между нормальными напряжениями $\sigma(\rho, \theta)$ и вертикальными перемещениями, которое содержит потенциал простого слоя, имеет вид

$$\sigma(\rho_0, \theta_0) = \frac{E}{4\pi(1-\nu^2)}\,\Delta \iint_S \frac{w(\rho, \theta)}{r}\mathrm{d}S,$$

здесь $w(\rho, \theta)$ — неизвестная функция, характеризующая перемещения, Δ — оператор Лапласа, S — область в плоскости (ρ, θ), которую занимает плоская трещина. Пусть уравнения границ контура трещины зависят от двух малых параметров. Допускаем, что искомая функция $w(\rho, \theta)$ также зависит от них и может быть представлена в виде разложения по степеням этих параметров.

Кольцевая трещина рассмотрена в [1]. В случае двусвязной трещины используется алгоритм [2] сведения такой задачи к последовательности аналогичных задач для круговой кольцевой трещины, использующий разложение потенциала простого слоя по малому параметру. Для решения несимметричных задач возникает необходимость вычисления потенциалов простого слоя, когда плотность не имеет круговой симметрии [3]. Используя разложения по полиномам Лежандра производящей функции, получено разложение потенциала простого слоя с несимметричной плотностью и доказана его сходимость и на границах.

Исследовано напряженно-деформируемое состояние тела с плоской двусвязной трещиной, несимметричной относительно одной из осей. Найдены функциональные зависимости вертикальных перемещений и нормальных напряжений. Получены значения предельных нагрузок при различных конфигурациях трещины и направления ее распространения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гринченко В. Г., Улитко А. Ф.* Растяжение упругого пространства, ослабленного кольцевой трещиной // Прикл. механика. 1995. Т. 1, вып. 10. С. 61–64.
2. *Шишканова С. Ф.* О напряженном состоянии упругого пространства, ослабленного плоской трещиной, близкой к кольцевой // Прикл. механика. 1990. Т. 26, вып. 5. С. 9–15.
3. *Shyshkanova G. A.* Solution of the integral equations in the three-dimensional nonsymmetrical contact problems with the friction taken into account // TWMS J. Pure Appl. Math. 2011. V. 2, No 1. P. 134–145.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Ыскак Т. К.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
istima92@mail.ru

Рассматривается система дифференциальных уравнений с несколькими запаздываниями с параметром

$$\frac{d}{dt}y(t) = \mu A(t)y(t) + \sum_{j=1}^{M} B_j(t)y(t-\tau_j), \quad t > 0,$$

где $\mu > 0$ — параметр, $\tau_1 > \tau_2 > \cdots > \tau_M > 0$ — запаздывания, $A(t)$, $B_j(t)$ — непрерывные T-периодические матрицы $n \times n$. Предполагается, что спектр матрицы $A(t)$ лежит в левой полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < 0\}$ при всех $t \in [0, T]$.

В случае $B(t) \equiv 0$ в [1] и в случае с одним запаздыванием в [2] показано, что асимптотическая устойчивость нулевого решения гарантируется при всех достаточно больших параметрах μ.

В работе указаны условия на параметр $\mu \gg 1$, при которых нулевое решение асимптотически устойчиво, установлена оценка, характеризующая экспоненциальную скорость убывания решений на бесконечности.

При получении результатов была использована модификация функционала Ляпунова – Красовского, введенного в [3], [4].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-41-543365 р_мол_а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. М.: Наука, 1970.
2. *Demidenko G. V., Matveeva I. I.* Asymptotic stability of solutions to a class of linear time-delay systems with periodic coefficients and a large parameter // J. Inequal. Appl. 2015. V. 2015, No 331. P. 1–10.
3. *Demidenko G. V.* Stability of solutions to linear differential equations of neutral type // J. Anal. Appl. 2009. V. 7, No 3. P. 119–130.
4. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 1059–1077.

PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS IN SOBOLEV SPACES WITH VARIABLE EXPONENTS

Antontsev S. N.[1], **Shmarev S. I.**[2]

[1] *Center of Mathematics and Fundamental Applications, University of Lisbon, Lisbon, Portugal; Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Novosibirsk, Russia;* antontsevsn@mail.ru

[2] *University of Oviedo, Oviedo, Spain;* shmarev@uniovi.es

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded domain with Lipschitz-continuous boundary Γ and $Q = \Omega \times (0, T]$. We study the degenerate parabolic equations of the form

$$u_t = \operatorname{div} A(x, t, u, \nabla u) + B(x, t, u, \nabla u) \quad \text{in } (x, t) \in Q, \tag{1}$$

$$u = 0 \text{ on } \partial\Omega \times [0, T], \quad u(x, 0) = u_0(x) \text{ in } \Omega,$$

where $A, B : Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ are Carathéodory functions satisfying the conditions

$$A(x, t, u, \xi) \cdot \xi \geq C_1|\xi|^p - C_2|u|^q - C_3 f, \quad |A(x, t, u, \xi)| \leq C_4|\xi|^{p-1} + h,$$
$$|B(x, t, u, \xi)| \leq C_5|u|^\beta + C_6 g.$$

Here C_1–C_6 are constants, $f(x, t)$, $g(x, t)$, $h(x, t)$ and the exponents $p(x, t)$, $q(x, t)$, $\beta(x, t)$ are given functions. The following equation is a prototype of the class (1):

$$u_t = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x,t)-2}\nabla u).$$

In the past decade, there was an impetuous growth of interest in the study of equations with variable nonlinearity which appear in a natural way in the mathematical modeling of various physical phenomena, e.g., the flows of electro-rheological fluids or fluids with temperature-dependent viscosity, processes of filtration through inhomogeneous anisotropic media. The study of equations with variable nonlinearity stimulated as well the development of the theory of variable Lebesgue and Sobolev spaces [3]. Various definitions of weak (variational) solutions are discussed, the existence and uniqueness theorems are proven. We also consider systems of parabolic equations and stationary equations of the type (1). The effects of localization (vanishing) and blow-up for the solutions of (1) and its stationary counterpart are studied. The detailed proofs can be found in [1]–[5].

The first author was supported by the Russian Science Foundation, Russia (project no. 15-11-20019). The second author acknowledges the support of the Research Project MTM2013-43671-P, MICINN, Spain.

REFERENCES

1. *Antontsev S. N., Shmarev S. I.,* Evolution PDEs with Nonstandard Growth Conditions: Existence, Uniqueness, Localization, Blow-up; Series: Atlantis Studies in Differential Equations, Vol. 4, Atlantis Press, Amsterdam, 2015.
2. *Antontsev S. N., Díaz J. I., Shmarev S. I.,* Energy Methods for Free Boundary Problems: Applications to Nonlinear PDEs and Fluid Mechanics; Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Vol. 48, Bikhäuser, Boston, 2002.
3. *Diening L., Harjulehto P., Hästö P., Růžička M.,* Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents; Series: Lecture Notes in Mathematics, Vol. 2017, Springer, Berlin, 2011.
4. *Antontsev S. N., Zhikov V. V.,* "Higher integrability for parabolic equations of $p(x, t)$-Laplacian type," Adv. Differ. Equ., **10**, No. 9, 1053–1080 (2005).
5. *Antontsev S. N., Miranda F., Santos L.,* "Blow-up and finite time extinction for $p(x, t)$-curl systems arising in electromagnetism," J. Math. Anal. Appl., **440**, No. 1, 300–322 (2016).

SUBMODELS OF MODEL OF NONLINEAR DIFFUSION WITH NON-STATIONARY ABSORPTION

Chirkunov Yu. A.

Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering, Novosibirsk, Russia; chr101@mail.ru

We study the model describing a nonlinear diffusion process (or a heat propagation process) in an inhomogeneous medium with non-stationary absorption (or source). We found three submodels of the original model of the nonlinear diffusion process (or the heat propagation process), having different symmetry properties. We found all invariant submodels. All essentially distinct invariant solutions describing these invariant submodels are found either explicitly, or their search is reduced to the solution of the nonlinear integral equations. For example, we obtain the invariant solution describing the nonlinear diffusion process (or the heat distribution process) with two fixed “black holes”, and the invariant solution describing the nonlinear diffusion process (or the heat distribution process) with the fixed “black hole” and the moving “black hole”. The presence of the arbitrary constants in the integral equations, that determine these solutions provides a new opportunities for analytical and numerical study of the boundary value problems for the received submodels, and, thus, for the original model of the nonlinear diffusion process (or the heat distribution process). For the received invariant submodels we study diffusion processes (or heat distribution process) for which at the initial moment of the time at a fixed point there are specified either a concentration (a temperature) and its gradient, or a concentration (a temperature) and its rate of change. Solving of boundary value problems describing these processes are reduced to the solving of nonlinear integral equations. We establish the existence and uniqueness of solutions of these boundary value problems under some additional conditions. The obtained results can be used to study the diffusion of substances, diffusion of conduction electrons and other particles, diffusion of physical fields, propagation of heat in inhomogeneous medium.

The reported study was funded by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00446 a).

REFERENCES

1. *Chirkunov Yu. A.,* “Submodels of model of nonlinear diffusion with non-stationary absorption,” Int. J. Non-Linear Mech., **91**, 86–94 (2017).

INVARIANT MODELING OF THE MODEL OF THERMAL MOTION OF GAS IN A RAREFIED SPACE

Chirkunov Yu. A.[1], **Pikmullina E. O.**[2]

[1]*Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering, Novosibirsk, Russia;* chr101@mail.ru

[2]*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia;* elena187@list.ru

A model describing the thermal motion of gas in a rarefied space is investigated in [1]. This model can be used in the study of the motion of gas in outer space, and the processes occurring inside the tornado, and the state of the medium behind the shock front of the wave after a very intense explosion [2]–[4]. The multi-dimensional model was investigated in [5]–[7]. The two-dimensional model was investigated in [8]. Exact solutions and conservation laws for the three-dimensional model were obtained in [9]. For a given initial pressure distribution, a special choice of mass Lagrange variables leads to a reduced system of differential equations describing this motion, in which the number of independent variables is one less than the original system. This means that there is a stratification of a highly rarefied gas with respect to pressure. Namely, in a strongly rarefied space for each given initial pressure distribution, at each instant of time all gas particles are localized on a two-dimensional surface moving in this space. At each point of this surface, the acceleration vector is collinear with its normal vector. The resulting system admits an infinite Lie transformation group. All significantly various submodels that are invariant with respect to the subgroups of its eight-parameter subgroup generated by the transfer, extension, rotation, and hyperbolic rotation operators (the Lorentz operator) are found. For invariant submodels of rank 1, the basic mechanical characteristics of the gas flow described by them are obtained. Conditions for the existence of these submodels are given. For invariant submodels of rank 2, integral equations describing these submodels are obtained. For some submodels, the problem of describing the gas flow from the initial location of its particles and the distribution of their velocities has been investigated.

The reported study was funded by the Russian Foundation for Basic Research according to the research project no. 16-01-00446 a.

REFERENCES

1. *Ovsyannikov L. V.*, "The "PODMODELI" program. Gas dynamics," J. Appl. Math. Mech., **58**, No. 4, 601–627 (1994).
2. *Sedov L. I.*, "Propagation of strong blast waves" [in Russian], J. Appl. Math. Mech., **10**, No. 2, 241–250 (1946).
3. *Taylor G.*, "The formation of a blast wave by a very intense explosion. I. Theoretical discussion," Proc. R. Soc. Lond. A, **201**, No. 1065, 159–174 (1950).
4. *von Neuman J.*, "The point source solution," in: *Bethe H. A., Fuchs K., Hirschfelder J. O., Magee J. L., Peierls R. E., von Neumann J.*, Blast Wave, Los-Alamos Scientific Laboratory Report LA–2000, 1958, pp. 27–55.
5. *Chirkunov Yu. A.*, "The conservation laws and group properties of the equations of gas dynamics with zero velocity of sound," J. Appl. Math. Mech., **73**, No. 4, 421–425 (2012).
6. *Chirkunov Yu. A.*, Group Analysis of Linear and Quasi-Linear Differential Equations [in Russian], NSUEM, Novosibirsk (2007).
7. *Chirkunov Yu. A., Khabirov S. V.*, Elements of Symmetry Analysis of Differential Equations of Continuum Mechanics [in Russian], NSTU, Novosibirsk (2012).
8. *Khabirov S. V.*, "The plane isothermal motions of an ideal gas without expansions," J. Appl. Math. Mech., **78**, No. 3, 287–297 (2014).
9. *Chirkunov Yu. A.*, "Exact solutions of the system of the equations of thermal motion of gas in the rarefied space," Int. J. Non-Linear Mech., **83**, 9–14 (2016).

BLOW-UP PROBLEM FOR NONLINEAR PARABOLIC EQUATIONS WITH NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS

Gladkov A. L.

Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus; gladkoval@mail.ru

We consider the initial boundary value problem for semilinear parabolic equation

$$u_t = \Delta u - c(x,t)u^p, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} = \int\limits_{\Omega} k(x,y,t)u^l(y,t)\,dy, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

where $p > 0$, $l > 0$, Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^n$ for $n \geq 1$ with smooth boundary $\partial\Omega$, ν is unit outward normal on $\partial\Omega$. The functions $c(x,t)$, $k(x,y,t)$, and $u_0(x)$ are nonnegative and satisfy some regularity conditions.

We prove some global existence results. Criteria on this problem which determine whether the solutions blow up in finite time for large or for all nontrivial initial data are also given. Our global existence and blow-up results depend on the behavior of $c(x,t)$ and $k(x,y,t)$ as $t \to \infty$.

In particular, we prove the following blow-up result. Let $\psi(x)$ be a positive solution of problem

$$\Delta\psi = 1, \quad x \in \Omega; \quad \frac{\partial \psi(x)}{\partial \nu} = \frac{|\Omega|}{|\partial\Omega|}, \quad x \in \partial\Omega,$$

and $m_0 = \inf\{\sup\limits_{\Omega} \psi(x)\}$. We suppose that

$$c(x,t) \leq c_1(t), \quad c_1(t) \in C^1([t_0,\infty)), \quad c_1(t) > 0 \ \text{ for } \ t \geq t_0, \tag{4}$$

where t_0 is some positive constant,

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{c_1'(t)}{c_1(t)} > -\frac{p-1}{m_0} \tag{5}$$

and

$$\lim_{t\to\infty} \left\{ [c_1(t)]^{(1-l)/(p-1)} \inf_{\partial\Omega\times\Omega} k(x,y,t) \right\} = \infty. \tag{6}$$

Theorem. *Let $l > p > 1$ and (4)–(6) hold. Then any nontrivial solution of (1)–(3) blows up in finite time.*

We prove a certain optimality of Theorem. Under some conditions we show that blow-up occurs only on the boundary.

The problem (1)–(3) with Dirichlet boundary condition has been considered in [1], [2].

REFERENCES

1. *Gladkov A., Guedda M.,* “Blow-up problem for semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition,” Nonlinear Anal., **74**, 4573–4580 (2011).
2. *Gladkov A., Guedda M.,* “Semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition,” Appl. Anal., **91**, 2267–2276 (2012).

STEADY STATES IN LEITH'S MODEL OF TURBULENCE

Grebenev V. N.[1], Griffin A.[2], Medvedev S. B.[3], Nazarenko S. V.[4]

[1]*Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, Russia;*
vngrebenev@gmail.com
[2]*Mathematical Institute, University of Warwick, Coventry, United Kingdom;*
a.griffin.1@warwick.ac.uk
[3]*Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, Russia;*
serbormed@gmail.com
[4]*Mathematical Institute, University of Warwick, Coventry, United Kingdom;*
s.v.nazarenko@warwick.ac.uk

We present a comprehensive study and full classification of the stationary solutions in Leith's energy spectral model of turbulence [1] with a generalized viscosity. Three typical types of boundary value problems are considered: problems 1 and 2 with a finite positive value of the spectrum at the left (right) and zero at the right (left) boundaries of a wave number range, and problem 3 with finite positive values of the spectrum at both boundaries. Settings of these problems and analysis of existence of their solutions are based on a phase-space analysis of orbits of the underlying dynamical system. One of the two fixed points of the underlying dynamical system is found to correspond to a "sharp front"where the energy flux and the spectrum vanish at the same wave number. The other fixed point corresponds to the only *exact* power-law solution — the so-called dissipative scaling solution. The roles of the Kolmogorov, dissipative and thermodynamic scaling, as well as of sharp front solutions, are discussed.

Transient solutions of the inviscid Leith model arising from an initial spectrum compactly supported at low k were investigated in [2]. These solutions precede the formation of a steady cascade in the full Leith model. It was shown that this regime becomes self-similar just before the breaking of the energy conservation (which occurs once the cascade has proceeded far enough to generate a finite flux of energy to $k = \infty$). The self-similar solutions which were analyzed numerically in [2] has a "sharp"nonlinear front which accelerates explosively reaching $k = \infty$ at a finite time $t = t_*$. In [3] we recovered this result analytically and established the existence of a self-similar solution with a power-law asymptotic on the low-wavenumber end and a sharp boundary on the high-wavenumber end which propagates to infinite wavenumbers in a finite-time t_*. It was shown that such a self-similar solution is realized by a heteroclinic orbit of the corresponding dynamical system.

The results of the present talk were fully published in [4] and included in collection of highlights showcases some of the excellent papers we published in 2016 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical.

The first author was partially supported by the Grant Scientific Schools 7214.2016.9.

REFERENCES

1. *Leith C.*, "Diffusion approximation to inertial energy transfer in isotropic turbulence," Phys. Fluids, **10**, No. 7, Article ID 1409 (1967).
2. *Connaughton C., Nazarenko S. V.*, "Warm cascade and anomalous scaling in a diffusion model of turbulence," Phys. Rev. Lett., **92**, No. 4, Article ID 044501 (2004).
3. *Grebenev V. N., Nazarenko S. V., Medvedev S. B., Schwab I. V., Chirkunov Yu. A.*, "Self-similar solution in the Leith model of turbulence: anomalous power law and asymptotic analysis," J. Phys. A, Math. Theor., **47**, No. 2, Article ID 025501 (2014).
4. *Grebenev V. N., Griffin A., Nazarenko S. V., Medvedev S. B.*, "Steady states in the Leith's model of turbulence," J. Phys. A, Math. Theor., **49**, No. 36, Article ID 365501 (2016).

ABOUT A PROBLEM FOR THE DEGENERATING MIXED TYPE EQUATIONS WITH CAPUTO FRACTIONAL DIFFERENTIAL OPERATOR

Ochilova N. K.

Tashkent Financial Institute, Tashkent, Republic of Uzbekistan;
nargiz.ochilova@gmail.com

We consider equation

$$0=\begin{cases} u_{xx}-D_{oy}^{\alpha}u, & \text{at} \quad x>0,\ y>0, \\ y^m u_{xx}-(-x)^n u_{yy}, & \text{at} \quad x<0,\ y>0, \end{cases} \tag{1}$$

where

$$D_{oy}^{\alpha}u=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^y (y-t)^{-\alpha}u_t(x,t)dt,$$

$0<\alpha$, $m,n=\text{const}$, $m>n$.

Let Ω be a domain bounded by segments: $AB=\{(x,y):\ y=0,\ 0<x<h_1\}$, $BB_0=\{(x,y):\ x=h_1,\ 0<y<h_0\}$, $A_0B_0=\{(x,y):\ y=h_0,\ 0<x<h_1\}$ at $y>0$, and by the characteristics $AC:\ \frac{1}{p}y^p-\frac{1}{q}(-x)^q=0$, $A_0C:\ \frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}(-x)^q=1$; of equation (1) at $x<0$, $y>0$, where $A\,(0,0)$, $A_0\,(0,h_0)$, $B\,(h_1,0)$, $B_0\,(h_1,h_0)$, and $C\left(-\left(\frac{p}{2}\right)^{1/p},\left(\frac{q}{2}\right)^{1/q}\right)$.

Here $2q=n+2$, $2p=m+2$, $h_0=p^{1/p}$, $h_1>0$, and $m>n$.

Introduce designations: $2\alpha_1=n/(n+2)$, $2\beta_1=m/(m+2)$, $0<\alpha_1<\beta_1<\frac{1}{2}$, $\Omega^+=\Omega\cap\{x>0,\ y>0\}$, $\Omega^-=\Omega\cap\{x<0,\ y>0\}$, $I_1=\{x:\ 0<x<h_1\}$, $I_0=\{y:\ 0<y<h_0\}$.

For equation (1) we consider the following problem.

Problem. We find a solution $u(x,y)$ of equation (1) from the following class of functions:

$$\Delta=\left\{u(x,y):\ u(x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega^-),\ u_{yy}\in C\left(\Omega^+\right),\ D_{oy}^{\alpha}u\in C\left(\Omega^+\right)\right\}$$

satisfying boundary conditions

$$u(x,y)\big|_{AB}=\varphi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant h_1, \quad u(x,y)\big|_{BB_0}=\varphi_0(y), \quad 0\leqslant y\leqslant h_0,$$

$$u(x,y)\big|_{AC}=\psi(y), \quad 0\leqslant y\leqslant \left(\frac{p}{2}\right)^{1/p}$$

and matching condition

$$u_x(-0,y)=u_x(+0,y), \quad (0,y)\in AA_0,$$

where $\varphi(x)$, $\varphi_0(y)$, $\psi(y)$ are given functions.

LAPLACE OPERATORS AND WAVE EQUATIONS ON POLYHEDRAL SURFACES

Shafarevich A. I.

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia; shafarev@yahoo.com

We study Laplace operators and wave equations on 2D polyhedral surfaces. The operators are defined via extension theory. We describe kernels of Laplacians, trace formulae for its exponent and study solutions of the corresponding wave equations. In particular, we describe fronts of localized asymptotic solutions.

EQUATIONS OF STEADY FLOWS OF THE COSSERAT–BINGHAM FLUIDS: EXISTENCE

Shelukhin V. V.

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics,
Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;
shelukhin@hydro.nsc.ru

The equations for Cosserat–Bingham fluids are considered [1] and existence of a weak solution for steady flows is proved for the three-dimensional boundary-value problem with the use of the Lipschitz truncation argument [2]. In contrast to the classical Bingham fluid, the micropolar Bingham fluid supports local micro-rotations and two types of plug zones [3]. Our approach is based on an approximation of the constitutive relation by a generalized Newtonian constitutive relation and a subsequent limiting process [4].

REFERENCES

1. *Shelukhin V. V., Ruzicka M.*, "On Cosserat-Bingham fluids," Z. Angew. Math. Mech., **93**, No. 1, 57–72 (2013).
2. *Ruzicka M., Shelukhin V. V., Santos M. M.*, "Steady flows of Cosserat-Bingham fluids," Math. Methods Appl. Sci. (accepted).
3. *Shelukhin V. V., Neverov V. V.*, "Flow of micropolar and viscoplastic fluids in a Hele–Shaw cell," J. Appl. Mech. Tech. Phys., **55**, No. 6, 3–15 (2014).
4. *Shelukhin V. V., Chemetov N. V.*, "Global solvability of the one-dimensional Cosserat–Bingham fluid," J. Math. Fluid Mech., **17**, No. 3, 495–511 (2015).

MODELLING POPULATION DYNAMICS IN RIVERS VIA REACTION–DIFFUSION–ADVECTION EQUATIONS

Vasilyeva O. I.

Memorial University of Newfoundland, Grenfell Campus, Corner Brook, Canada;
ovasilyeva@grenfell.mun.ca

Many aquatic organisms living in advective environments (streams, rivers) manage to persist in their original habitats despite being washed out downstream. The first mathematical explanation of this phenomenon (known as the "drift paradox") was offered by Speirs and Gurney in [1], where a linear reaction–diffusion–advection (RDA) model was used to describe the spatial dynamics of such organisms. The habitat was represented as an interval $[0, L]$, with the population density $u(t, x)$ satisfying the RDA equation $u_t = du_{xx} - qu_x + ru$, along with the "reflecting" upstream boundary condition $qu(t, 0) = du_x(t, 0)$ and the "hostile" downstream condition $u(t, L) = 0$. Here q is the flow speed in the habitat, d is the diffusivity coefficient, and r is the growth rate of the organisms. It was determined that the diffusive movement of the organisms plays the crucial role in persistence by balancing the biased downstream movement. In [2], we introduced a nonlinear version of Speirs–Gurney model, with a more realistic logistic reaction term $ru(1-u)$, and a more favourable "outflow" downstream boundary condition $u_x(t, L) = 0$. As in [1], there are critical values $q_c = 2\sqrt{dr}$ and $L_c(q, d, r)$ of flow speed q and domain size L such that the persistence is only possible when $q < q_c$ and $L \geq L_c$. Under this persistence conditions, we showed the existence and uniqueness of a stable positive steady state solution of this nonlinear RDA model.

To better capture the ecological reality, an aquatic habitat can be viewed as a dendritic network represented by a tree-like metric graph with the population density subject to an RDA equation on each segment and the junction conditions in addition to the boundary conditions. This "quantum graph" approach was introduced in [3] and [4], where linear RDA models were used to study persistence conditions in river networks. We will discuss a nonlinear version of the RDA model for river networks. Our main focus is the existence of steady states in this new setting.

In case of certain aquatic insects (e.g. mayflies), the drift paradox could be explained by the upstream dispersal of winged adults. This approach was recently explored in [5] via an impulsive RDA model with non-local impulse, combining local (diffusive) and non-local (flight) modes of dispersal.

The author is supported by the Natural Science and Engineering Council of Canada (NSERC) Individual Discovery Grant "Nonlinear population dynamics in rivers and river networks".

REFERENCES

1. *Speirs D. C., Gurney W. S. C.*, "Population persistence in rivers and estuaries," Ecology, **82**, No. 5, 1219–1237 (2001).
2. *Vasilyeva O., Lutscher F.*, "Population dynamics in rivers: analysis of steady states," Can. Appl. Math. Q., **18**, No. 4, 439–469 (2010).
3. *Ramirez J. M.*, "Population persistence under advection–diffusion in river networks," J. Math. Biol., **65**, No. 10, 919–942 (2012).
4. *Sarhad J., Carlson R., Anderson K. E.*, "Population persistence in river networks," J. Math. Biol., **69**, No. 2, 401–448 (2014).
5. *Vasilyeva O., Lutscher F., Lewis M.*, "Analysis of spread and persistence for stream insects with winged adult stages," J. Math. Biol., **72**, No. 4, 851–875 (2016).

СЕКЦИЯ 5

Обратные и некорректные задачи

Тезисы докладов

SECTION 5

Inverse and Ill-Posed Problems

Abstracts

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИСТОЧНИКА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ И ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Аблабеков Б. С.

Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, Бишкек, Кыргызская Республика; aablabekov_63@mail.ru

Рассмотрим следующие обратные задачи.

Задача 1. Найти пару функций $u(x,t)$ и $f(t)$ из условий

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + h(x)f(t), \quad x\in(0,\pi), \quad t\in(0,T],$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0\le x\le\pi,$$

$$u_x(0,t) = \mu_1(t), \quad u_x(\pi,t) = \mu_2(t), \quad 0\le t\le T,$$

$$u(x_0,t) = \psi(t), \quad 0\le t\le T.$$

Здесь функции $u_0(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $h(x)$, $\psi(t)$ и постоянные $T > 0$, $0 < x_0 < \pi$ будем считать заданными, а $u(x,t)$, $f(t)$ — искомыми.

Задача 2. Найти пару функций $V(x,t)$ и $f_\varepsilon(t)$ из условий

$$V_t(x,t) - V_{xx}(x,t) - \varepsilon V_{xxt}(x,t) = f_\varepsilon(t)h(x), \quad x\in(0,\pi), \quad t\in(0,T],$$

$$V(x,0) = V_0(x), \quad 0\le x\le\pi,$$

$$V_x(0,t) = \mu_1(t), \quad V_x(\pi,t) = \mu_2(t), \quad 0\le t\le T,$$

$$V(x_0,t) = \psi(t), \quad 0\le t\le T,$$

где ε — положительный параметр.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия гладкости: $u_0(x)\in C^2([0,\pi])$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)\in C^1([0,t])$, $h(x)\in C^3([0,\pi])$, $\varphi\in C^1([0,T])$, $h(x_0)\neq 0$, и выполнены условия согласования $u_0'(0) = \mu_1(0)$, $u_0'(l) = \mu_2(0)$, $u_0(x_0) = \psi(0)$, кроме того, $h(0) = h(\pi) = 0$, $h''(0) = h'(\pi) = 0$. Тогда существует единственное решение $f(t)\in C([0,T])$ обратной задачи 1.*

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия гладкости: $V_0(x)\in C^2([0,\pi])$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)\in C^1([0,t])$, $h(x)\in C^3([0,\pi])$, $\psi\in C^1([0,T])$, $h(x_0)\neq 0$, и выполнены условия согласования $V_0'(0) = \mu_1(0)$, $V_0'(l) = \mu_2(0)$, $u_0(x_0) = \psi_1(0)$, кроме того, $h(0) = h(\pi) = 0$, $h''(0) = h''(\pi) = 0$. Тогда для любого $\varepsilon \ge 0$ существует единственное решение $f_\varepsilon(t)\in C([0,T])$ обратной задачи 2. При $\varepsilon\to 0$ решение обратной задачи 1 сходится к решению обратной задачи 2, т. е. $||f_\varepsilon(t) - f(t)||_{C[0,T]} \to 0$ при $\varepsilon\to 0$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аблабеков Б. С.* Обратные задачи для псевдопараболических уравнений. Бишкек: Илим, 2001.
2. *Денисов А. М.* Асимптотика решений обратных задач для гиперболического уравнения с малым параметром при старшей производной // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2013. Т. 53, № 5. С. 744–752.

РЕГУЛЯРНЫЕ МЕТОДЫ ЛОКАЛИЗАЦИИ ОСОБЕННОСТЕЙ ПО ЗАШУМЛЕННЫМ ДАННЫМ

Агеев А. Л.[1], **Антонова Т. В.**[2], **Сережникова Т. И.**[3]

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия;

[1]ageev@imm.uran.ru, [2]tvantonova@imm.uran.ru, [3]sti@imm.uran.ru

Рассматриваются некорректно поставленные задачи локализации (определения положения) линий разрыва функции двух переменных. Такого рода проблемы возникают, например, при обработке изображений, поскольку границы объектов часто являются линиями, на которых интенсивность изображения испытывает скачок первого рода. В качестве исходных данных известно либо приближение точной функции в пространстве L_2, либо точная функция является решением уравнения первого рода с приближенно заданной правой частью в L_2.

Для задачи локализации линий разрыва зашумленной функции проведено построение и теоретическое исследование регулярных методов усреднения для разных типов априорной информации [1]–[5]. Для всех построенных методов получены оценки точности аппроксимации и порога разделимости (важной характеристики методов локализации) на классах функций с особенностями как для непрерывной задачи, так и для ее дискретного аналога.

Для задачи решения уравнения первого рода построен регуляризирующий алгоритм определения решения уравнения с одновременным определением градиента искомой функции [6]. Основу алгоритма составляет итерационный процесс, реализующий минимум функционала Тихонова со стабилизатором в пространстве функций ограниченной вариации. Алгоритм дополнен эвристической процедурой определения скачков градиента функции, позволяющих локализовать границы объектов на изображениях. Проведены модельные расчеты, демонстрирующие эффективность представленных методов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-00629).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Агеев А. Л., Антонова Т. В.* О некорректно поставленных задачах локализации особенностей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 30–45.
2. *Антонова Т. В.* Метод локализации линии разрыва приближенно заданной функции двух переменных // Сиб. журн. вычисл. математики. 2012. Т. 15, № 4. С. 345–357.
3. *Агеев А. Л., Антонова Т. В.* Аппроксимация линий разрыва зашумленной функции двух переменных // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 1. С. 3–13.
4. *Агеев А. Л., Антонова Т. В.* Методы аппроксимации линий разрыва зашумленной функции двух переменных со счетным числом особенностей // Сиб. журн. индустр. математики. 2015. Т. 18, № 2. С. 3–11.
5. *Агеев А. Л., Антонова Т. В.* О дискретизации методов локализации особенностей зашумленной функции // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 1. С. 3–13.
6. *Васин В. В., Сережникова Т. И.* Регулярный алгоритм аппроксимации негладких решений для интегральных уравнений 1-го рода // Журн. вычисл. техники. 2010. Т. 15, № 2. С. 15–23.

МЕТОД ОБРАТНОГО ДИЗАЙНА В ЗАДАЧАХ МАСКИРОВКИ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТЕЛ

Алексеев Г. В.

Институт прикладной математики ДВО РАН,
Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия;
alekseev@iam.dvo.ru

В течение последнего десятилетия интенсивно развиваются методы решения задач дизайна средств, обеспечивающих невидимость материальных тел от их обнаружения с помощью различных физических полей (электромагнитных, акустических, магнитных и тепловых).

В общем случае разработанные к настоящему времени методы и стратегии маскировки объектов для обеспечения их невидимости принято разбивать на два основных класса: классы активных и пассивных стратегий. Класс активных стратегий основан на использовании для подавления (или компенсации) рассеяния маскируемого объекта активных источников способ, который напоминает разработанный в 70-е годы прошлого столетия метод подавления шума. Среди пассивных стратегий маскировки различают, в первую очередь, метод оптических преобразований, метод компенсации рассеяния за счет плазмонических устройств либо метаповерхностей, а также метод подавления рассеяния за счет аномальных локализованных резонансов (см. подробнее о них в [1]).

Для решения указанных задач к настоящему времени разработаны два основных метода: методы прямого и обратного дизайна. Метод прямого дизайна основан на анализе решения прямой задачи рассеяния для модели используемого физического поля. Нужно отметить, что решения, полученные с помощью этого метода обладают рядом недостатков. Так, решениям, полученным на основе метода оптических преобразований, отвечает непрерывно изменяющиеся от 0 до ∞ материальные параметры, описывающие сингулярную неоднородную анизотропную среду, которую невозможно реализовать технически из-за отсутствия природных материалов такого типа. Аналогичные трудности присущи и решениям, полученным с помощью других пассивных стратегий.

Основной способ преодоления трудностей технической реализации состоит в том, чтобы при решении задач маскировки учесть хотя бы некоторые из требований, налагаемых априори на решение, т. е. на маскировочные оболочки. Учитывая, что задачи маскировки относятся по своему физическому смыслу к обратным задачам [1], [2], естественно использовать для этой цели методы решения обратных задач. Поскольку в теории обратных задач, начиная с работ А. Н. Тихонова, достаточно активно используются оптимизационные методы, часть исследователей для решения задач маскировки стала применять оптимизационные методы. На этом пути возникло новое направление в теории невидимости, получившее название стратегии обратного дизайна (“inverse design strategy”).

В настоящей работе обсуждаются результаты, полученные при применении метода обратного дизайна для решения ряда конкретных задач, связанных с обеспечением невидимости материальных объектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алексеев Г. В.* Проблема невидимости в акустике, оптике и теплопереносе. Владивосток: Дальнаука, 2016.
2. *Романов В. Г.* Обратная задача дифракции для уравнений акустики // ДАН. 2010. Т. 431, № 3. С. 319–322.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ПО СХЕМЕ “ДИСКРЕТИЗАЦИЯ – ОПТИМИЗАЦИЯ”

Алимова А. Н.[1], **Касенов С. Е.**[2]

[1]*Казахский национальный исследовательский технический университет им. К. И. Сатпаева, Алматы, Республика Казахстан;* anic2002@mail.ru
[2]*Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Республика Казахстан;* syrym.kassenov@kaznu.kz

В работе [1] рассмотрена задача Дирихле для волнового уравнения, где представлено решение задачи по схеме “оптимизация – дискретизация”. В данной работе рассмотрена другая схема решения обратных задач, т. е. схема “дискретизация – оптимизация”. Прямую задачу рассматриваем в дискретном виде, вычисляем градиент функционала в дискретном виде, используя формулы суммирования по частям, получаем постановку сопряженной задачи в дискретном виде. Строим алгоритм решения обратной задачи. Численно решаем обратную задачу.

Рассмотрим алгоритм решения обратной задачи методом итераций Ландвебера.

1. Выбираем начальное приближение q_0.

2. Предположим, что q_n известно, тогда численно решаем прямую задачу:
$$\begin{aligned}&(u_i^{k+1}-2u_i^k+u_i^{k-1})/\tau^2=(u_{i+1}^k-2u_i^k+u_{i-1}^k)/h^2,\\&u_0^k=u_{N_x}^k=0,\\&u_i^0=0,\\&(u_i^1-u_i^0)/\tau=q_i.\end{aligned}$$

3. Вычисляем значение функционала: $J(q_n)=\sum\limits_{i=0}^{N_x-1}[u_i^{N_t}-f_i]^2\,h$.

4. Если значение целевого функционала не достаточно мало, тогда решаем сопряженную задачу:
$$\begin{aligned}&(\psi_i^{k+1}-2\psi_i^k+\psi_i^{k-1})/\tau^2=(\psi_{i+1}^k-2\psi_i^k+\psi_{i-1}^k)/h^2,\\&\psi_0^k=\psi_{N_x}^k=0,\\&\psi_i^{N_t}=0,\\&(\psi_i^{N_t-1}-\psi_i^{N_t})/\tau=2\,[u_i^{N_t}-f_i].\end{aligned}$$

5. Вычисляем градиент функционала $J'q_n=\psi_i^0$.

6. Вычисляем следующее приближение $q_{n+1}=q_n-\alpha J'q_n$, где $\alpha=\big(0,\|A\|^{-2}\big)$, и переходим пункту 2.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки МОН РК №1746/ГФ4 “Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач естествознания”.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kabanikhin S. I., Bektemesov M. A., Nurseitov D. B., Krivorotko O. I., Alimova A. N.* An optimization method in the Dirichlet problem for the wave equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2012. V. 20, No 2. P. 193–211.

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ТЕСТОВЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА I РОДА В ИНТЕГРАЛЬНЫХ МОДЕЛЯХ РАЗВИВАЮЩИХСЯ СИСТЕМ

Апарцин А. С.[1], **Сидлер И. В.**[2]

Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, Иркутск, Россия; [1]apartsyn@isem.irk.ru, [2]inna.sidler@mail.ru

При моделировании процессов старения и замены элементов развивающейся системы важную роль играет балансовое интегральное уравнение Вольтерра I рода для n возрастных групп ($n \geq 1$). Теория таких уравнений детально изучена лишь при $n = 1$ [1]. Их специфику для $n > 1$ позволяют понять простые тестовые уравнения. В [2], [3] для $n = 2$ показано, что при степенном росте модуля коэффициента эффективности элементов старшей возрастной группы решение с течением времени неизбежно становится неустойчивым. Получена априорная оценка величины узла сетки, в котором погрешность любого численного метода превысит заданный (сколь угодно большой) порог. В данной работе рассматривается случай $n = 3$. Введены тестовые уравнения, обобщающие уравнение для $n = 2$ и требующие более сложной техники исследования. Приводятся результаты численных расчетов для модифицированных методов левых и средних прямоугольников, реализованных в авторских программах [4], [5]. Эксперименты дали полное согласие с теоретическими результатами.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-01425).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Апарцин А. С.* Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. Новосибирск: Наука, 1999.
2. *Апарцин А. С.* К исследованию устойчивости неклассических тестовых уравнений Вольтерра I рода // Сиб. электрон. мат. изв. 2015. Т. 12. Труды VI международной молодежной школы-конференции “Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач”. С. C15–C20.
3. *Апарцин А. С., Сидлер И. В.* О тестовых уравнениях Вольтерра I рода в интегральных моделях развивающихся систем // Автоматика и телемеханика. 2017 (в печати).
4. *Сидлер И. В.* Программное средство для численного решения неклассических уравнений Вольтерра I рода модифицированным методом левых прямоугольников // А.с. № 2015612206, опубл. 13.02.2015.
5. *Сидлер И. В.* Программное средство для численного решения неклассических уравнений Вольтерра I рода модифицированным методом средних прямоугольников // А.с. № 2015612208, опубл. 13.02.2015.

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ГИЛЬБЕРТ-ОПТИКИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОБЪЕКТОВ

Арбузов Э. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
`arbuzov@math.nsc.ru`

Обратная задача восстановления показателя преломления $n(r)$ осесимметричного объекта по данным гильберт-оптики описывается операторным уравнением I рода, которое моделирует результат воздействия на исходный сигнал оптической системы, преобразующей фазовые изменения зондирующих полей в изменения интенсивности. Соответствующий оператор $\mathbf{A} = H * A$ является суперпозицией интегрального оператора Абеля

$$A[n](x) = \frac{4\pi}{\lambda} \int\limits_{x}^{R} \frac{n(\rho) - 1}{\sqrt{\rho^2 - x^2}} \rho d\rho = \varphi(x),$$

определяющего фазовые изменения исходного сигнала (плоской волны), и нелинейного интегрального оператора гильберт-фильтрации

$$H[\varphi](x) = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\varphi(x')}{x - x'} dx' \right)^2 + \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\varphi(x')}{x - x'} dx' \right)^2,$$

моделирующего последующее воздействие на сигнал оптической системы.

Для решения задачи предложен численный метод, основанный на аппроксимации регистрируемых данных полиномами Бернштейна и построения квазирешения, зависящего от $2(m+1)$ параметра, где m — степень соответствующего полинома. При этом учитывается полная информация об интенсивности регистрируемых полей, а не только положения экстремумов.

Ранее разработанный пакет программ для восстановления фазы и определения физических параметров среды применялся при обработке экспериментальных данных для восстановления полей температуры и скорости термогравитационных плюмов над линейным источником [1] и определения энергетических характеристик фазового перехода вода-лед [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арбузов В. А., Арбузов Э. В., Дубнищев Ю. Н., Бердников В. С., Мелёхина О. С.* Визуализация фазовой структуры термогравитационной струи с реконструкцией температурного поля // Научная визуализация. 2017. Т. 9, № 1. С. 112–123.
2. *Арбузов В. А., Арбузов Э. В., Дубнищев Ю. Н., Бердников В. С., Мелёхина О. С.* Оптическая диагностика фронта кристаллизации, индуцированного температурным градиентом на верхней границе горизонтального слоя жидкости // Автометрия. 2017. Т. 53, № 2. С. 39–44.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Асанов А.[1], **Каденова З. А.**[2]

[1]*Кыргызско-Турецкий университет "Манас",*
Бишкек, Кыргызская Республика; avyt.asanov@mail.ru
[2]*Министерство труда и социального развития,*
Бишкек, Кыргызская Республика; kadenova71@mail.ru

В данной работе доказывается единственность решений для одного класса линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными в пространстве квадратично суммируемых функций и построены регуляризирующие операторы по М. М. Лаврентьеву.

Рассмотрим интегральное уравнение вида

$$Ku \equiv \int\limits_a^b K(t,x,y)u(t,y)dy + \int\limits_{t_0}^t H(t,x,s)u(s,x)ds + \int\limits_{t_0}^t \int\limits_a^b C(t,x,s,y)u(s,y)dyds$$

$$= f(t,x), \quad (t,x) \in G = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t_0 \le t \le T,\, a \le x \le b\right\}, \tag{1}$$

где

$$K(t,x,y) = \begin{cases} A(t,x,y), \ t_0 \le t \le T, \ a \le y \le x \le b, \\ B(t,x,y), \ t_0 \le t \le T, \ a \le x \le y \le b, \end{cases}$$

$A(t,x,y)$, $B(t,x,y)$, $H(t,x,s)$, $C(t,x,s,y)$ — известные функции, $f(t,x)$ и $u(t,x)$ — соответственно известная и неизвестная функции.

Различные вопросы для интегральных уравнений первого рода исследовались во многих работах. Но основополагающие результаты для интегральных уравнений Фредгольма первого рода получены в [1], [2], где для решения линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода построены регуляризирующие операторы по М. М. Лаврентьеву. В [3] изучены вопросы регуляризации и устойчивости решений для одного класса линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода с двумя независимыми переменными. В данной работе методом неотрицательных квадратичных форм доказывается единственность решений линейных интегральных уравнений (1) в пространстве $L_2(G)$ и построены регуляризирующие операторы по М. М. Лаврентьеву.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М. М.* Об интегральных уравнениях первого рода // ДАН СССР. 1959. Т. 127, № 1. С. 31–33.
2. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
3. *Иманалиев М. И., Асанов А., Каденова З. А.* Один класс линейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода с двумя независимыми переменными // ДАН. 2014. Т. 454, № 5. С. 518–522.

НАХОЖДЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ РАЗРЫВОВ КОЭФФИЦИЕНТОВ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОЛИХРОМАТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Балакина Е. Ю.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
balakina@math.nsc.ru

Рассмотрим нестационарное линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial f(t,r,\omega,E)}{\partial t}+\omega\cdot\nabla_r f(t,r,\omega,E)+\mu(t,r,E)f(t,r,\omega,E)=J(t,r,\omega,E).$$

Это уравнение описывает, в частности, процесс переноса частиц сквозь среду. Здесь t — временная переменная, $t\in[0,T]$; r — пространственная переменная, $r\in G\subset\mathbb{R}^3$, G — выпуклая ограниченная область; $\omega\in\Omega=\{\omega\in\mathbb{R}^3:|\omega|=1\}$; $E\in I=[E_1,E_2]$, $E_1>0$, $E_2<\infty$. Функция $f(t,r,\omega,E)$ интерпретируется как плотность потока частиц в момент времени t в точке r с энергией E, летящих в направлении ω. Функции μ и J характеризуют среду G.

К уравнению добавляются начальное условие и краевые: определяется плотность падающего потока h и усреднённая плотность выходящего потока H — при этом известной считается только функция H.

Рассматривается задача о нахождении поверхностей разрывов коэффициентов уравнения μ и J. Иными словами, ставится вопрос об определении внутренней структуры среды G. Такая постановка является продолжением цикла исследований Д. С. Аниконова [1].

Для решения поставленной проблемы сначала исследуется прямая задача о нахождении плотности потока f при заданных начальном условии и плотности падающего потока h (такая же постановка, но в случае непрерывных коэффициентов, была рассмотрена А. И. Прилепко [2]). Затем рассматривается специальная функция

$$Ind(r)=\left|\,\nabla\int_d^T\int_\Omega H(t,r+d(r,\omega)\omega,\omega)d\omega dt\,\right|,$$

зависящая от известных данных, функция $d(r,\omega)$ — расстояние от точки r до границы ∂G в направлении ω, d — диаметр области G. Доказывается, что функция Ind принимает неограниченное значение только на искомых поверхностях.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-31-00112 мол_а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аниконов Д. С., Ковтанюк А. Е., Прохоров И. В.* Использование уравнения переноса в томографии. М.: Логос, 2000.
2. *Прилепко А. И., Иванков А. Л.* Обратные задачи определения коэффициента и правой части нестационарного многоскоростного уравнения переноса по переопределению в точке // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 1. С. 109–119.

ЛУЧЕВОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ С НЕПОЛНЫМИ ДАННЫМИ В n-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ЗАДАЧА АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ

Бегматов Акб. Х.

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия; begmatov@ami.nstu.ru

Рассматривается задача обращения лучевого преобразования в n-мерном пространстве [1], [2]. Этот важный класс задач интегральной геометрии имеет многочисленные приложения в теории дифференциальных уравнений с частными производными, акустической томографии, восстановлении сигналов. Доказана теорема единственности решения, показана сильная некорректность задачи и получены логарифмические оценки устойчивости ее решения. Линейные задачи интегральной геометрии рассматривались в наших недавних работах [3]–[6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Begmatov Akb. H., Begmatov Akr. H.* Inversion of the X-ray transform and the Radon transform with incomplete data // Integral Methods in Science and Engineering. Res. Notes Math., V. 418. Boka Raton: Chapman&Hall/CRC, 2000. P. 51–56.
2. *Begmatov A. H.* Inversion of X-ray transforms with incomplete data in n-dimensional space // International forum on strategic technology. Conference proceedings. Part 2. Novosibirsk: NSTU Publ., 2016. P. 99–101.
3. *Begmatov A. H., Pirimbetov A. O., Seidullaev A. K.* Reconstruction stability in some problems of X-ray and seismic tomography // International forum on strategic technology. Conference proceedings. V. II. Tomsk: Tomsk Polytechnic University, 2012. P. 261–266.
4. *Бегматов А. Х., Джайков Г. М.* Линейная задача интегральной геометрии с гладкими весовыми функциями и возмущением // Владикавказский мат. журн. 2015. Т. 17, № 3. С. 14–22.
5. *Бегматов А. Х., Пиримбетов А. О., Сеидуллаев А. К.* Слабонекорректные задачи интегральной геометрии с возмущением на семействе ломаных // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 1. С. 5–12.
6. *Begmatov A. H., Djaikov G. M.* Numerical recovery of function in a strip from given integral data on linear manifolds // International forum on strategic technology. Conference proceedings. Part 1. Novosibirsk: NSTU Publ., 2016. P. 478–483.

ЗАДАЧА ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ СЕМЕЙСТВА КОНУСОВ В ТРЁХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Бегматов Акб. Х.[1], **Бектемиров И. Т.**[2]

Новосибирский государственный технический университет,
Новосибирск, Россия; [1]`begmatov@ami.nstu.ru`, [2]`nsk_good@list.ru`

В работе рассматривается задача определения функции в трехмерном пространстве по ее интегралам с заданной весовой функцией по прямым круговым конусам, опирающимся на плоскость $z = 0$. Это задача интегральной геометрии вольтеровского типа [1], [2].

Доказаны теоремы единственности и существования решения, получено аналитическое представление решения в классе гладких финитных функций. Представлены оценки решения задачи в соболевских пространствах, которые показывают ее слабую некорректность, что позволило разработать алгоритм устойчивого решения задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Begmatov A. H.* Volterra-type integral geometry problems // Integral Methods in Science and Engineering. Res. Notes Math., V. 418. Boka Raton: Chapman&Hall/CRC, 2000. P. 46–50.
2. *Бегматов А. Х.* О единственности решения задачи интегральной геометрии вольтерровского типа на плоскости // ДАН. 2009. Т. 427, № 4. С. 439–441.

ЧИСЛЕННОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ПО ИНТЕГРАЛЬНЫМ ДАННЫМ НА ОТРЕЗКАХ

Бегматов Акб. Х.[1], **Джайков Г. М.**[2]

[1] *Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия;* begmatov@ami.nstu.ru
[2] *Нукусский филиал Ташкентского университета информационных технологий, Нукус, Республика Узбекистан;* gafur_djaykov@mail.ru

В настоящей работе рассматривается задача определения функции внутри области по её интегральным данным на отрезках прямых, пересекающих область или ее часть. Такие постановки относятся к задачам интегральной геометрии вольтерровского типа [1], [2]. В работе получено аналитическое представление решения в классе гладких финитных функций. Представлены оценки решения задачи в соболевских пространствах, откуда следует ее слабая некорректность. Подобные задачи рассматривались в наших недавних статьях [3], [4].

На основе формулы обращения разработаны алгоритмы определения внутренней структуры объекта с помощью интегральных характеристик. Проведены вычислительные эксперименты по выявлению влияния случайного шума на погрешность восстановления внутренней структуры объекта. В среде C++ разработаны программы, в которых реализованы указанные алгоритмы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Begmatov A. H.* Volterra-type integral geometry problems // Integral Methods in Science and Engineering. Proceedings of the 5th International Conference. Res. Notes Math., V. 418. Boka Raton: Chapman&Hall/CRC, 2000. P. 46–50.
2. *Бегматов А. Х.* О единственности решения задачи интегральной геометрии вольтерровского типа на плоскости // ДАН. 2009. Т. 427, № 4. С. 439–441.
3. *Бегматов А.Х.* Линейная задача интегральной геометрии с гладкими весовыми функциями и возмущением // Владикавказский мат. журн. 2015. Т. 17, № 3. С. 14–22.
4. *Begmatov A. H., Djaikov G. M.* Numerical recovery of function in a strip from given integral data on linear manifolds // International Forum on Strategic Technology. Conference proceedings. Part 1. Novosibirsk: NSTU, 2016. P. 478–483.

ОБ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ В ТЕРМИНАХ ОПЕРАТОРА ПЕРЕХОДА

Бектемесов М. А.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Республика Казахстан; maktagali.bektemessov@kaznu.kz

Классическое условие устойчивости произвольной двухслойной схемы в терминах оператора перехода записывается следующим образом:

$$\|R_j\| \leq 1 + c_0\tau, \quad j = 0, \ldots, N-1, \tag{1}$$

где $R_j \in L(H)$ есть оператор перехода с j-го на $(j+1)$-й слой, число c_0 не зависит от τ. Известно, что из условия (1) вытекает оценка устойчивости по правой части и начальным данным [1]. В работе [2] А. Л. Бухгейм в теореме 7.1 утверждает, что введенное определение финитной устойчивости является расширением классического определения устойчивости. И показано, насколько понятие финитной устойчивости шире классического определения устойчивости.

Пусть оператор R не зависит от j. Тогда условие финитной устойчивости в терминах оператора перехода записывается в виде неравенства

$$\tau^2 \,\mathrm{Re}R \geq \big(\mathrm{Im}R\big)^2/s_0, \tag{2}$$

где s_0 — произвольное сколь угодно большое число.

В частности, при условии (2) переходит в условие $R \geq 0$. Если $\big[\mathrm{Re}R, \mathrm{Im}R\big] = 0$, т. е. оператор R-нормален, то условие (2) означает, что спектр оператора R лежит в круге $|\lambda| \leq 1+c_0\tau$, а условие (2) добавляет к этому множеству хвост в виде внутренности параболы на комплексной плоскости [3]. Так с помощью сравнительно несложной программы были получены цветные картинки области устойчивости разностной задачи Коши в терминах оператора перехода в комплексной плоскости. Причем наблюдается довольно сложная динамика: на границе процесс хаотичен настолько, насколько это возможно. Это происходит за счет того, что в рассматриваемое множество точек комплексной плоскости входят хаотические и периодические точки, при этом хаотические притягиваются к периодическим. Изучение полученной конфигурации приводит к предположению, что она является фракталью.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки МОН РК №1746/ГФ4 "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач естествознания".

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М: Наука, 1977.
2. *Бухгейм А. Л.* Введение в теорию обратных задач. Новосибирск: Наука, 1988.
3. *Кабанихин С. И., Бектемесов М. А., Шишленин М. А.* Задачи продолжения и фрактальные множества // Сиб. электрон. мат. изв. 2015. Т. 12. Труды VI международной молодежной школы-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач". С. С97–С103.

УРАВНЕНИЯ ТИПА УРЫСОНА В ЗАДАЧАХ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ТОЧЕК ПОВЕРХНОСТИ

Белозуб В. А., Козлова М. Г., Лукьяненко В. А.

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия; art-inf@yandex.ru

Задача восстановления характерных точек изображений по данным косвенных измерений является востребованной в различных приложениях. Как правило, такие задачи моделируются линейными и нелинейными операторными уравнениями первого рода и являются некорректно поставленными. Разработка устойчивых регуляризирующих алгоритмов связана с адекватным использованием априорной и другой информации о решении, модели, способах получения данных косвенных измерений. В работе рассматриваются модели в виде разностных аналогов нелинейных интегральных уравнений типа свертки первого рода. Разнообразие регуляризирующих алгоритмов определяется выбором способа переработки доступной информации (знаний) в решение [1]. Тем самым, формируется интеллектуальная система, базовыми элементами которой являются ультрасистемы (по терминологии А. В. Чечкина) — преобразователи семантической информации — ультраоператоры. На первом этапе решается задача восстановления экстремальных точек поверхности ("блестящих"). Для этого используются асимптотические модели [2]–[4].

Следующий шаг состоит в синтезе интеллектуальной системы по обработке данных косвенных измерений из множества взаимодействующих интеллектуальных агентов (ИА) и соответствующей интеллектуальной системы управления (ИСУ). Информация, полученная одним ИА, может быть прецедентной, априорной для другого ИА. Например, два ИА решают задачу дистанционного зондирования выделенного участка поверхности (трассы). Решение, полученное в виде набора экстремальных точек одним ИА, может итерационно уточняться другим. ИА размещаются на одном устройстве или нескольких. Системы уравнений моделируют процесс сканирования поверхности антенными устройствами, характер сигнала и его отражение от сканируемой поверхности. Такие нелинейные системы алгебраических уравнений являются аналогами нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Урысона 1 рода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васин В. В., Еремин И. И.* Операторы и итерационные процессы фейеровского типа (теория и приложения). Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2005.
2. *Лукьяненко В. А., Хазова Ю. А.* Решение нелинейных интегральных уравнений Урысона типа свертки // Анализ, моделирование, управление, развитие экономических систем: сборник научных трудов V Международной школы-симпозиума АМУР-2011. Симферополь: ТНУ им. В. И. Вернадского, 2011. С. 214–220.
3. *Лукьяненко В. А., Белозуб В. А.* Нелинейные уравнения типа свертки с дельтообразными ядрами // XXVI Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сб. тез. докл. Симферополь: ООО ФОРМА, 2015. С. 95.
4. *Lukyanenko V. A.* Some tasks for integral equations of Urison's type // Proceedings of the International Conference "Integral Equations–2010". Lviv, Ukraine: PAIS, 2010. P. 80–84.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ НА РЕШЕТКАХ

Бондаренко А. Н.[1], **Бугуева Т. В.**[1,2], **Фадеев С. А.**[2]

[1]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[2]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
bondarenkoan1953@mail.ru, bugueva@math.nsc.ru, stepan-fadeev@mail.ru

Диффузионные потоки на алгебраических структурах издавна привлекали внимание математиков [1]–[2]. Функционалы от решений диффузионных уравнений давали неоценимую информацию о строении самого многообразия.

Впервые это выяснилось, когда удалось получить краткое доказательство теоремы об индексе эллиптического оператора в главном расслоении с помощью так называемого метода теплового ядра (a method of heat kernel), автором которого является М. Кац [3].

С другой стороны, в последние годы, в основном, в теоретической физике все большее внимание уделяется исследованию дискретных вариантов физических моделей. Это связано с тем, что такие модели, как считают физики, несут в себе основные математические трудности, но при этом не отягощены функциональными конструкциями.

В настоящей работе рассматривается следующая обратная задача. Мы рассматриваем случайное блуждание на регулярной решетке "с повреждениями". Ставится задача: какие "удобные для измерения" функционалы от решения дискретного аналога уравнения теплопроводности можно выбрать наиболее эффективным образом для определения характеристик повреждения среды.

Рассмотрен ряд некоторых обратных задач, для которых получены точные аналитические решения. В качестве эффективного инструмента для построения задач, имеющих точное аналитическое решение, использовался подход, основанный на дискретном аналоге интеграла Винера.

ЛИТЕРАТУРА

1. *De La Pena V., Gzyl H., McDonald P.* Inverse problems for random walks on trees: network tomography // Statistics and Probability Letters. 2008. V. 78. P. 3176–3183.
2. *Grunbaum F. A.* Diffuse tomography as a source of challenging nonlinear inverse problems for a general class of networks // Modern Signal Processing, MSRI Publications. 2003. V. 46. P. 137–146.
3. *Кац М.* Вероятность и смежные вопросы в физике. М.: Мир, 1965.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА НА ГРАФАХ

Бондаренко А. Н.[1], **Дедок В. А.**[2]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
[1]bondarenkoan1953@mail.ru, [2]dedok@math.nsc.ru

В работе исследуются алгоритмы численного решения обратной задачи рассеяния на некомпактных квантовых графах (метрическом графе с определенным на нем оператором Шредингера).

Оператором Шредингера $H = L + Q$ на графе G называется оператор, действующий на соболевском пространстве $W_2^2(G)$ функций, ограничение которых на каждое ребро b_j графа принадлежит пространству $W_2^2(b_j)$, по правилу

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x).$$

Некомпактный граф состоит из конечного числа ребер конечной длины и конечного числа полубесконечных ребер, "приклеенных" к компактной части.

В теории обратных задач для уравнения Шредингера на графах рассматривается несколько классов проблем: задачи на восстановление геометрической структуры графа по данным рассеяния, задачи на восстановление рассеивающего потенциала на графе с известной топологией и данными рассеяния и т. д.

Подобные задачи являются трудными для исследования. В работе [1] описаны примеры неединственности, показано, что даже обладая достаточно большим набором знаний об исследуемом объекте (данные рассеяния, топологическая структура графа), однозначно решить обратную задачу невозможно. В работе [2] предъявляются условия, выполнение которых позволяет однозначно решить обратную задачу по восстановлению топологической и метрической структуры графа, однако они являются физически трудно реализуемыми.

В данной работе рассматриваются обратные задачи по восстановлению структуры рассеивающего ступенчатого потенциала на некоторых семействах графов известной топологической структуры ("кольца", "цепочки" и т. д.), предлагается численный алгоритм решения. В основу численных алгоритмов положены идеи трансформации данных рассеяния при деформации рассеивающего потенциала, разработанные в [3].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00120).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kurasov P., Stenberg F.* On the inverse scattering problem on branching graphs // J. Phys. A. 2002. V. 35, P. 101–121.
2. *Bondarenko A. N., Dedok V. A.* Inverse scattering problem on quantum graphs in optical tomography technology // Proceedings of 7th Korea-Russia International Symposium on Science and Technology. 2003. V. 3. P. 105–110.
3. *Бондаренко А. Н., Дедок В. А.* Спектральные преобразования для оператора Шредингера на графах // Международная конференция "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений", посвященная 105-летию со дня рождения С. Л. Соболева. Тез. докладов. Новосибирск, 2013. С. 99.

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ МАТЕРИАЛОВ С ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫМИ ПОКРЫТИЯМИ

Ватульян А. О.[1], **Нестеров С. А.**[2]

[1] *Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия;*
vatulyan@math.rsu.ru
[2] *Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН, Владикавказ, Россия;*
1079@list.ru

Тела с покрытиями — широко распространенный класс современных материалов. Все чаще в качестве покрытий для реальных материалов применяются функционально-градиентные материалы, неоднородные по толщине. Поэтому актуальной задачей в настоящее время является проблема надежной идентификации термомеханических характеристик неоднородных покрытий, основанная на решении коэффициентной обратной задачи (КОЗ) термоупругости.

В работе покрытие, нанесенное на изделие, моделируется в виде термоупругого слоя с неоднородными по глубине термомеханическими свойствами. Введенные функции имеют точку разрыва первого рода (что моделирует структуру с покрытием). Обратная задача состоит в определении термомеханических характеристик покрытия на основе анализа граничных физических полей. Схема решения основана на предварительном сведении с помощью преобразования Фурье к двум более простым и одномерным несвязанным задачам относительно усредненных характеристик, каждая из которых сводится к известной КОЗ, что позволяет использовать ранее построенные в [1], [2] итерационные схемы и регуляризующие алгоритмы. Однако в вычислительных экспериментах в работах [1], [2] материальные характеристики моделировались непрерывными функциями. Настоящая задача рассмотрена в предположении, что характеристики имеют разрывы первого рода в известной точке.

Прямая задача термоупругости для слоя после применения преобразования Лапласа решается на основе метода сведения к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода и обращения решений на основе теории вычетов. Для решения обратной задачи построен итерационный процесс, на каждом этапе которого находятся поправки восстанавливаемых характеристик путем решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода.

В ходе вычислительных экспериментов проведен анализ влияния жесткости покрытия, монотонности характеристик в приповерхностном слое, относительной толщины покрытия, параметра термомеханической связанности на результаты реконструкции неоднородных термомеханических характеристик.

Работа выполнена при поддержке программы Президиума РАН "Фундаментальные проблемы математического моделирования" (№ 114072870112).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ватульян А. О., Нестеров С. А.* Об одном способе идентификации термоупругих характеристик для неоднородных тел // Инженерно-физический журнал. 2014. Т. 87, № 1. С. 217–224.
2. *Ватульян А. О., Нестеров С. А.* К определению неоднородных термомеханических характеристик трубы // Инженерно-физический журнал. 2015. Т. 88, № 4. С. 951–959.

ДВЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА В СВЕРТКАХ НА ПОЛУПРЯМОЙ

Воронин А. Ф.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
voronin@math.nsc.ru

В докладе будет рассмотрено неоднородное интегральное уравнение первого рода в свертках на полубесконечном интервале:

$$\int_0^\infty k(t-s)u(s)\,ds = f(t), \quad t \in (0,\infty), \tag{1}$$

где

$$k \in L_1(R),\ f \in L_1(0,\infty),\ f' \in L_1((0,\infty)\setminus b). \tag{2}$$

Кроме того, предполагается, что ядро k имеет ограниченный носитель на $(0,\infty)$,

$$k(t) = 0,\ t \in (b,\infty),\ 0 < b,\ k' \in L_1(-\infty,b),\ k(b-0) = c_0 \neq 0. \tag{3}$$

Решается следующая

задача (A_1)(задача реконструкции истории): из уравнения (1) найти две функции $u \in L_1(0,\infty)$ и $f(t), t \in (0,b)$, по заданным значениям $f(t), t \in (b,\infty)$, при условиях (2)–(3).

С задачей (A_1) тесно связана

задача (A_2)(задача обращения интегрального оператора): найти решение $u \in L_1(0,\infty)$ уравнения первого рода (1) при условиях (2)–(3).

Таким образом, задачу (A_1) можно трактовать как задачу (A_2), в которой известна лишь часть информации о функции f (известна $f(t),\ t \in (b,\infty)$), и дополнительно требуется найти $f(t),\ t \in (0,b)$.

Цель работы — получить необходимые и достаточные (эффективно проверяемые) условия разрешимости и единственности задач (A_1) и (A_2), построить явные формулы для их решения.

Уравнение (1) имеет широкие приложения и является одним из наиболее востребованных интегральных уравнений. Рассматриваемые задачи (A_1) и (A_2) исследованы не были. Задачи (A_1) и (A_2) изучались в работе автора [1] в частном случае, когда $k(t) = 0,\ t < 0$. В этом случае уравнение (1) — уравнение Вольтерра 1-го рода в свертках.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Воронин А. Ф.* Восстановление решения уравнения Вольтерра 1-го рода в свертках на полупрямой по неполным данным // Сиб. электрон. мат. изв. 2012. Т. 9, С. 464–471.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРА И УПРАВЛЕНИЕ В ПРОЦЕССАХ ТЕПЛОПЕРЕНОСА

Гончаренко О. В.

Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, Россия;
ovg@ugrasu.ru

Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей Γ и $Q = (0,T) \times G$. Математическая модель записывается в виде

$$u_t - L_0 u + p(t)u = f(x,t), \quad (t,x) \in Q, \tag{1}$$

$$L_0 u = A_0 u + B_0 u, \quad A_0 u = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_i}(a_{ij}(x) u_{x_j}), \quad B_0 u = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) u_{x_i} + a_0(x) u.$$

Уравнение (1) дополняется начальными и граничными условиями

$$u|_{t=0} = u_0, \quad Bu|_S = g(t,x), \quad S = (0,T) \times G, \tag{2}$$

где

$$Bu = \sigma \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) n_i u_{x_j} + b(x) u \right) + (1-\sigma) u,$$

где n_i — i-я координата внешней единичной нормали к Γ, $\sigma(x) \in C(\Gamma)$ — непрерывная функция, принимающая два значения 0, 1. Неизвестными в (1), (2) являются решение u и функции $p(t)$. Условия переопределения записываются в виде

$$u(x_0, t) = \psi(t), \tag{3}$$

где $\psi(t)$ — некоторая данная функция. Подобные задачи возникают при исследовании процессов тепломассопереноса, диффузии и в ряде других областей (см. [1], [2]). Основной результат — теорема о разрешимости в целом по времени задачи (1)–(3). Условия разрешимости сформулированы в терминах некоторых неравенств, и доказательство основано на принципе максимума.

Работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований и правительства Ханты-Мансийского автономного округа – Югры (грант № 15-41-00063).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ozisik M. N., Orlando H. A. B.* Inverse heat transfer. New-York: Taylor & Francis, 2000.
2. *Dehghan M.* Numerical computation of a control function in a partial differential equation // Appl. Math. Comput. 2004. V. 147, No 2. P. 397–408.

О КОРРЕКТНОСТИ НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА В ПРОСТРАНСТВЕ

Джамалов С. З.

Институт математики при Национальном университете Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Республика Узбекистан; sirojб3@mail.ru

Пусть Ω — ограниченная односвязная область в пространстве $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Обозначим через $Q = \Omega \times (0,T) \times (0,\ell) = Q_1 \times (0,\ell) = \{(x,t,y) : x \in \Omega,\, 0 < t < T < +\infty,\, 0 < y < \ell < +\infty\}$ область с кусочно-гладкой границей ∂Q. В области Q рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка:

$$K(x,t)u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}(x)u_{x_j}\right) - a(x,t)u_{yy} + \alpha(x,t)u_t + c(x,t)u = f(x,t,y). \quad (1)$$

Уравнение (1) относится к уравнениям смешанного типа второго рода, т. к. на знак функции $K(x,t)$ по переменной t внутри области Q не налагается никаких ограничений, т. е. $K\,(x,0) \le 0 \le K\,(x,T)$.

Пусть выполнено одно из условий:

(a) $a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \ge a_0|\xi|^2$; $a_{i,j} = a_{j,i}$, где $a_0 - \mathrm{const} > 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$;

(b) $a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \le a_1|\xi\,|^2$; где $a_1 - \mathrm{const} < 0$, $x \in \overline{\Omega}$, $|\xi|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2$.

Пусть $f(x,t,y) = g(x,t,y) + h(x,t)\,\psi(x,t,y)$, где $g(x,t,y)$ и $\psi(x,t,y)$ — заданные функции.

Задача. Найти функции $(u(x,t,y), h(x,t))$, входящие в уравнение (1) в области Q, удовлетворяющие краевым условиям

$$u(x,0,y) = \gamma\, u(x,T,y),$$

$$u\,|_{\partial Q} = 0,$$

где $\gamma - \mathrm{const} \ne 0$, дополнительному условию

$$u(x,t,\ell_0) = \phi_0(x,t), \quad 0 < \ell_0 < \ell < +\infty,$$

и принадлежащие классу

$$U = \left\{(u,h) :\, u \in W_2^2(Q);\, h \in W_2^2(Q_1);\, D_y^3\left\{\, u_{xx}, u_{tx},\, u_{tt}\right\},\, D_y^4 u \in L_2(Q)\right\}.$$

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В ПОВЫШЕНИИ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАЗВЕДКИ И РАЗРАБОТКИ МЕСТОРОЖДЕНИЙ УГЛЕВОДОРОДОВ

Ерохин Г. Н.[1], Кремлев А. Н.[2], Строков В. И.[3]

НИИ прикладной информатики и математической геофизики Балтийского федерального университета им. И. Канта, Калининград, Россия;
[1]GErokhin@Kantiana.ru, [2]AKremlev@Kantiana.ru, [3]VIStrokov@Kantiana.ru

В докладе рассматривается применение методов активной сейсморазведки на рассеянных волнах и пассивной 4Д микросейсмики к решению задач эффективной разведки и оптимальной разработки месторождений углеводородов. Отмечается, что математическая постановка задач, лежащих в основе этих методов, относится к обратным задачам математической геофизики. Дается обзор общих подходов к их решению, и приводятся конкретные примеры реализации алгоритмов обратных задач на модельных и реальных данных. Приводятся многочисленные примеры тестирования предлагаемых методов на практике. Предлагается комплексное применение разработанных методов в рамках проекта “Умное месторождение”, технологической основой которого являются современные тотальные системы регистрации геофизических полей, суперкомпьютерные технологии и математический аппарат обратных задач.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-11-10027).

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ B-ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Ибрагимова Н. А.

Казанский государственный энергетический университет, Казань, Россия;
NAI.liya@yandex.ru

В работе строится фундаментальное решение одного многомерного вырождающегося B-эллиптического уравнения с положительным параметром. Дается интегральное представление решения уравнения и изучаются свойства решения.

Пусть $\mathbb{E}_p^{++}$ — часть p-мерного евклидова пространства, где $x_{p-1} > 0$, $x_p > 0$, D — конечная область в $\mathbb{E}_p^{++}$, ограниченная поверхностью Γ и частями Γ_0 и Γ_1 плоскостей $x_{p-1} = 0$, $x_p = 0$, соответственно. Обозначим через $x = (x', x_p)$, $x' = (x'', x_{p-1})$, $x'' = (x_1, x_2, \ldots, x_{p-2})$ точки евклидова пространства, а через $C^k_{B^l}(D)$ — множество функций k раз непрерывно дифференцируемых в D и удовлетворяющих условию $\frac{\partial u}{\partial x_l} = \mathrm{o}(1)$ при $x_l \to 0$.

Рассмотрим в $\mathbb{E}_p^{++}$ вырождающееся B-эллиптическое уравнение с положительным параметром вида

$$x_p^m \left(\sum_{l=1}^{p-2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_l^2} + B_{x_{p-1}} u \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_p^2} + \lambda^2 x_p^m u = 0, \tag{1}$$

где $B_{x_{p-1}} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_{p-1}^2} + \dfrac{k}{x_{p-1}} \dfrac{\partial}{\partial x_{p-1}}$ — оператор Бесселя, $m > 0$, $k > 0$, $p \geqslant 3$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Фундаментальным решением уравнения (1) с особенностью в точке x_0 является функция

$$\Omega(x, x_0) = \alpha C_k \int\limits_0^\pi \left(C_\gamma \int\limits_0^\pi \rho_\varphi^{-\nu} \mathrm{H}_\nu^{(1)}(\lambda \rho_\varphi) \sin^{\gamma-1} \varphi \, d\varphi \right) \sin^{k-1} \varphi \, d\varphi,$$

где $\mathrm{H}_\nu^{(1)}(\lambda\rho_\varphi)$ — функция Ханкеля, $\rho_\varphi = \Big(|x'' - x_0''|^2 + x_{p-1}^2 + x_{p-1_0}^2 - 2x_{p-1} \times$ $\times x_{p-1_0} \cos\varphi + \frac{4}{(m+2)^2} \Big(x_p^{m+2} + x_{p_0}^{m+2} - 2 x_p^{\frac{m+2}{2}} x_{p_0}^{\frac{m+2}{2}} \cos\varphi \Big) \Big)^{\frac{1}{2}}$, $C_\gamma = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$, $C_k = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$, $\alpha = \frac{2^{2-\nu+\gamma} \lambda^\nu}{i\,(m+2)^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \pi^{\frac{p-4}{2}}}$, $\nu = \frac{p+k+\gamma-2}{2}$, $\gamma = \frac{m}{m+2}$.

Для любого решения $u(x)$ из класса $C^2_{B^{p-1}}(D) \cap C^2_{B^p}(D) \cap C^1(\overline{D})$ и любой точки $x_0 \in D$ имеет место следующее интегральное представление

$$u(x_0) = \int\limits_\Gamma \left[\Omega(\xi, x_0) A[u(\xi)] - u(\xi) A[\Omega(\xi, x_0)] \right] \xi_{p-1}^k d\Gamma. \tag{2}$$

Из интегрального представления (2) вытекает следующее свойство решения уравнения (1):

- существует решение $u(x)$ уравнения (1) в области $D_e = \mathbb{E}_p^{++} \setminus \overline{D}$, удовлетворяющее условию

$$u(x) = \mathrm{O}\left(r^{-\frac{p+k+\gamma-1}{2}} \right) \quad \text{при} \quad r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_p^2} \to \infty.$$

МЕТОДЫ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ЗАДАЧ ПРОДОЛЖЕНИЯ С ЧАСТИ ГРАНИЦЫ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Кабанихин С. И.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
kabanikhin@sscc.ru

Рассматриваются задачи продолжения решений всех типов уравнений математической физики. Задачи продолжения являются некорректными и формулируются в виде операторного уравнения $Aq = f$, для решения которого применяется метод сопряженных градиентов минимизации целевого функционала и метод сингулярного разложения [1], [2].

В качестве примеров рассмотрены задачи продолжения теплового поля в недоступную для наблюдений зону, продолжения данных георадара, задачи продолжения тепловых полей.

На серии численных экспериментов показано, что метод позволяет восстановить граничные условия на недоступной части границы, а также получить информацию о неоднородностях (количество, расположение, примерные объемы), расположенных в области недоступности.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 16-01-00755, 16-29-15120 и 17-51-540004)), Министерства образования и науки Российской Федерации и Международного математического центра Новосибирского государственного университета.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kabanikhin S. I., Nurseitov D. B., Shishlenin M. A., Sholpanbaev B. B.* Inverse problems for the ground penetrating radar // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2013. V. 21, No 6. P. 885–892.
2. *Kabanikhin S. I., Gasimov Y. S., Nurseitov D. B., Shishlenin M. A., Sholpanbaev B. B., Kasenov S. E.* Regularization of the continuation problem for elliptic equations // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2013. V. 21, No 6. P. 871–884.

МЕТОД ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КЛЕТОК НОВООБРАЗОВАНИЯ И ИММУНИТЕТА В УСЛОВИЯХ РАДИОТЕРАПИИ

Кабанихин С. И.[1,2], **Криворотько О. И.**[1,2], **Кондакова Е. А.**[2]

[1]*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[2]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
kabanikhin@sscc.ru, olga.krivorotko@sscc.ru, ekondak95@mail.ru

Численно исследована задача Коши для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которая характеризует взаимодействие новообразований и иммунных клеток в условиях радиотерапии [1]. Параметры исследуемой математической модели характеризуют степень новообразования, а также скорость иммунного ответа.

В работе, опираясь на исследования фазовых портретов системы [2], рассматриваются вопросы устойчивости задачи Коши для системы нелинейных ОДУ. Установлено влияние члена на устойчивость, отвечающего за лечение. Цель работы состоит в разработке и исследовании численного алгоритма определения оптимального лечения для математической модели взаимодействия иммунных клеток с новообразованиями с периодическим лечением радиотерапией [3]–[4]. Приведены и проанализированы численные расчеты, демонстрирующие преимущество оптимального лечения перед неэффективным полным лечением или его отсутствием.

Работа проводилась при частичной поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (4.1.3 совместные лаборатории НГУ – ННЦ СО РАН), грантом Президента Российской Федерации МК-1214.2017.1 и проектом с Республикой Казахстан № 1746/ГФ4 “Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач естествознания”.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Liu Z., Yang Ch.* A mathematical model of cancer treatment by radiotherapy // Hindawi Publishing Corporation Computational and Mathematical Methods in Medicine. 2014. Article ID 172923.
2. *Годунов С. К.* Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 1997.
3. *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.
4. *Ledzewicz U., Mosalman M. S. F., Schattler H.* Optimal controls for a mathematical model of tumor-immune interactions under targeted chemotherapy with immune boost // Discrete Contin. Dyn. Syst., Ser. B. 2013. V. 18, No 4. P. 1031–1051.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Кабанихин С. И.[1], **Шишленин М. А.**[2], **Шолпанбаев Б. Б.**[3]

[1] *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;* ksi52@mail.ru

[2] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;* mshishlenin@ngs.ru

[3] *Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы, Республика Казахстан;* Bahtygerey@mail.ru

Рассмотрим обратную задачу в области $\Omega = \Delta(L_x) \times (0, L_y)$, где $\Delta(L_x) = \{(x,t): x \in (0, L_x),\ t \in (x, 2L_x - x)\}$:

$$u_{tt} + \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} u_t = u_{xx} + u_{yy}, \quad (x,t) \in \Delta(L_x), \tag{1}$$

$$u_x(0,y,t) = g(y,t), \quad y \in (0, L_y), \quad t \in (0, 2L_x), \tag{2}$$

$$u(x,y,x) = q(x,y), \quad x \in (0, L_x), \quad y \in (0, L_y), \tag{3}$$

$$u(x,0,t) = u(x,L_y,t) = 0, \quad (x,t) \in \Delta(L_x). \tag{4}$$

В **прямой задаче** (1)–(4) требуется определить $u(x,y,t)$ по заданным $q(x,y)$ и $g(y,t)$.

Обратная задача заключается в определении функции $q(x,y)$ из соотношений (1)–(4) по дополнительной информации:

$$u(0,y,t) = f(y,t).$$

Алгоритм решения обратной задачи

1. Выбираем начальное приближение q_0.
2. Решаем прямую задачу (1)–(4) с заданным q_n.
3. Вычисляем значение функционала $J(q_n) = \int\limits_0^{L_y}\int\limits_0^{2L_x} [u(0,y,t;q_n) - f(y,t)]^2 dydt$.
4. Если значение целевого функционала не достаточно мало, тогда решаем сопряженную задачу.
5. Вычисляем градиент функционала $J'q_n = \psi_t(x,y,x) + \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}}\psi(x,y,x)$.
6. Вычисляем следующее приближение $q_{n+1} = q_n - \alpha J'q_n$ и переходим к пункту 2.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки МОН РК №1746/ГФ4 "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач естествознания".

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кабанихин С. И., Нурсеитов Д. Б., Шолпанбаев Б. Б.* Задача продолжения электромагнитного поля в сторону залегания неоднородностей // Сиб. электрон. мат. изв. 2014. Т. 11. Труды V международной молодежной школы-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач". С. C85–C102.
2. *Kabanikhin S. I., Nurseitov D. B., Shishlenin M. A., Sholpanbaev B. B.* Inverse problems for the ground penetrating radar // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2013. V. 21, No 6. P. 885–892.

ДВОЙСТВЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В КВАЗИСТАЦИОНАРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Калинин А. В.[1], Сумин М. И.[2], Тюхтина А. А.[3]

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия;
[1]avk@mm.unn.ru, [2]m.sumin@mail.ru, [3]kalinmm@yandex.ru

В работе изучаются задачи о восстановлении источников и начальных данных по известной с определенной погрешностью конфигурации магнитного поля в конечный момент времени для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении [1], которые формулируются как обратные задачи финального наблюдения для системы дифференциальных уравнений, описывающих напряженность магнитного поля.

Методы, развитые в работах [2], [3] для ограниченных проводящих областей, распространяются на задачи в неограниченной области, содержащей проводящие и непроводящие включения. Сформулированные постановки для напряженности магнитного поля приводят в этом случае к начально-краевым задачам для уравнений эллиптико-параболического типа [4].

Для исследуемых обратных задач применяются оптимизационные методы, использующие теорию двойственности. Спецификой изучаемых задач является то, что функциональные пространства, в которых ищется решение, зависят от характеризующих свойства среды параметров, которые также могут задаваться с некоторой погрешностью. В работе обосновывается возможность применения различных версий устойчивых секвенциальных принципов Лагранжа и теорем Куна – Таккера [2], [3] для конструирования устойчивых к ошибкам начальных данных и коэффициентов системы алгоритмов решения рассматриваемых обратных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rodriguez A. A., Valli A.* Eddy current approximation of Maxwell equations. Milan: Springer-Verlag Italia, 2010.
2. *Калинин А. В., Сумин М. И., Тюхтина А. А.* Устойчивые секвенциальные принципы Лагранжа в обратной задаче финального наблюдения для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 5. С. 608–624.
3. *Калинин А. В., Сумин М. И., Тюхтина А. А.* Об обратных задачах финального наблюдения для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении и устойчивых секвенциальных принципах Лагранжа для их решения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2017. Т. 57, № 2. С. 18–40.
4. *Arnold L., Harrach B.* A unified variational formulation for the parabolic-elliptic eddy current equations // SIAM J. Appl. Math. 2012. V. 72, No 2. P. 558–576.

О РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА 1-ГО РОДА ТИПА СВЁРТКИ

Карчевский А. Л.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
karchevs@math.nsc.ru

Рассмотрим интегральное уравнение $\int_0^t K(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s = g(t)$ $(g(0)=0)$.

Пусть $F^\beta[0,T]$ — пространство непрерывных функций $f(t)$ на интервале $[0,T]$, разложимых в ряд Фурье $f(t)=b_0+\sum_{k=1}^\infty\Big(a_k\sin(\omega_k t)+b_k\cos(\omega_k t)\Big)$, $(\omega_k=2\pi k/T)$, и $|a_k|\le Ak^{-\beta}$ и $|b_k|\le Bk^{-\beta}$ (A, B, β — положительные постоянные).

Теорема 1. *Пусть функция $K(t)$ является кусочно-непрерывной функцией на интервале $[0,T]$ и $|K(t)|\le m_0$. Для существования решения $f(t)\in F^{1+\alpha}[0,T]$ $(\alpha>0)$ указанного выше интегрального уравнения необходимо и достаточно, чтобы функция $g(t)$ на интервале $[0,T]$ могла быть представлена в виде $g(t)=b_0g_0'(t)+\sum_{k=1}^\infty\Big(a_kg_k(t)+b_kg_k'(t)\Big)$, где функции $g_k(t)$ $(k=0,1,2,...)$ есть решения задач $g_k''(t)+\omega_k^2g_k(t)=K(t)$, $g_k(0)=0$, $g_k'(0)=0$; и $|a_k|\le Ak^{-\alpha}$, $|b_k|\le Bk^{-(1+\alpha)}$, и $A>0$, $B>0$ и b_0 — некоторые постоянные. Решение интегрального уравнения будет иметь вид $f(t)=b_0+\sum_{k=1}^\infty\Big(\frac{a_k}{\omega_k}\sin(\omega_kt)+b_k\cos(\omega_kt)\Big)$.*

Теорема 2. *Пусть для функций $g^i(t)$ $(i=1,2)$ имеют место представления $g^i(t)=b_0^ig_0(t)+\sum_{k=1}^\infty\Big(a_k^ig_k(t)+b_k^ig_k'(t)\Big)$, где b_0^i, a_k^i и b_k^i удовлетворяют условиям из Теоремы 1 и $K(t)\not\equiv 0$. Если $|b_0^1-b_0^2|\le\delta$, $|a_k^1-a_k^2|\le\delta k^{-\alpha}$, $|b_k^1-b_k^2|\le\delta k^{-(1+\alpha)}$ $(k=1,2,...)$, тогда для решений $f^i(t)$ $(i=1,2)$ вышеуказанного интегрального уравнения верно неравенство $|f^1(t)-f^2(t)|\le C\delta$, где постоянная $C=C(T,\alpha)$.*

Из Теоремы 2 следует единственность и непрерывная зависимость от входных данных решения вышеуказанного интегрального уравнения.

Доказанные теоремы дают возможность предложить новый численный метод решения данного интегрального уравнения. Пусть необходимо найти решение на интервале $[0,T]$ и правая часть уравнения известна с некоторой ошибкой, т. е. $g_\delta(t)$. Будем искать решение интегрального уравнения как решение следующей задачи минимизации $J[a_1,\dots,a_N,b_0,b_1,\dots,b_N]\equiv\int_0^T n^2(t)\,\mathrm{d}t \;\to\; \min$, где $n(t)=b_0g_0(t)+\sum_{k=1}^N\Big(a_kg_k(t)+b_kg_k'(t)\Big)-g_\delta(t)$.

Представлены примеры реализации данного численного метода.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ АКУСТИКИ

Касенов С. Е.[1], **Нурсеитов Д. Б.**[2], **Алимова А. Н.**[3]

[1]*Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Республика Казахстан;* syrym.kassenov@kaznu.kz

[2]*Казахский национальный исследовательский технический университет им. К. И. Сатпаева, Алматы, Республика Казахстан;* ndb80@mail.ru

[3]*Казахский национальный исследовательский технический университет им. К. И. Сатпаева, Алматы, Республика Казахстан;* anic2002@mail.ru

Рассмотрим обратную задачу в области $\Omega = \Delta(L_x) \times (0, L_y)$, где $\Delta(L_x) = \{(x,t) : x \in (0, L_x),\, t \in (x, 2L_x - x)\}$:

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} - \left(\frac{\rho_x}{\rho}u_x + \frac{\rho_y}{\rho}u_y\right), \quad (x,t) \in \Delta(L_x), \tag{1}$$

$$u_x(0,y,t) = g(y,t), \quad y \in (0, L_y), \quad t \in (0, 2L_x), \tag{2}$$

$$u(x,y,x) = q(x,y), \quad x \in (0, L_x), \quad y \in (0, L_y), \tag{3}$$

$$u(x,0,t) = u(x, L_y, t) = 0, \quad (x,t) \in \Delta(L_x). \tag{4}$$

В **прямой задаче** (1)–(4) требуется определить $u(x,y,t)$ по заданным $q(x,y)$ и $g(y,t)$.

Обратная задача заключается в определении функции $q(x,y)$ из соотношений (1)–(4) по дополнительной информации о решении прямой задачи (1)–(4):

$$u(0,y,t) = f(y,t).$$

Алгоритм решения обратной задачи

1. Выбираем начальное приближение q_0.
2. Решаем прямую задачу (1)–(4) с заданным q_n.
3. Вычисляем значение функционала $J(q_n) = \int\limits_0^{L_y}\int\limits_0^{2L_x} [u(0,y,t;q_n) - f(y,t)]^2 dydt$.
4. Если значение целевого функционала не достаточно мало, тогда решаем сопряженную задачу.
5. Вычисляем градиент функционала $J'(q_n) 2\psi_t(x,y,x) + \dfrac{\rho_x}{\rho}\psi(x,y,x)$.
6. Вычисляем следующее приближение $q_{n+1} = q_n - \alpha J' q_n$ и переходим к пункту 2.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки МОН РК №1746/ГФ4 "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач естествознания".

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kabanikhin S. I., Shishlenin M. A., Nurseitov D. B., Nurseitova A. T., Kasenov S. E.* Comparative analysis of methods for regularizing an initial boundary value problem for the Helmholtz equation // J. Appl. Math. 2014. V. 2014, Article ID 786326.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ: НОВЫЕ ПОСТАНОВКИ, НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Кожанов А. И.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
kozhanov@math.nsc.ru

В докладе излагаются результаты о разрешимости обратных коэффициентных задач в случаях, когда новыми являются либо условия переопределения, либо классы, которым должны принадлежать неизвестные коэффициенты. В частности, будут изложены результаты о разрешимости

а) обратных задач нахождения коэффициентов $q(t)$ или $p(t)$ в уравнениях

$$u_t - \Delta u + q(t)u = f(x,t),$$

$$p(t)u_t - \Delta u + c(x,t)u = f(x,t)$$

при задании условий гранично-интегрального переопределения;

б) обратных задач нахождения параметра a в телеграфном уравнении

$$u_{tt} - \Delta u + au = f(x,t)$$

при задании финально-интегрального переопределения;

в) обратных задач нахождения неизвестного коэффициента составного вида в параболическом уравнении.

О НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ДАННЫМИ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО ТИПА

Короткова Е. М.

Югорский научно-исследовательский институт информационных технологий, Ханты-Мансийск, Россия; korotkovaem@uriit.ru

Рассматривается параболическая система уравнений:

$$u_t + A(t,x,D_x)u = \sum_{i=1}^{r} b_i(t,x)q_i(t,x') + f, \quad (t,x) \in Q, \quad x = (x', x''), \tag{1}$$

где G — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей Γ класса C^{2m}, $Q = (0,T) \times G$, $T < \infty$, $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $x'' = (x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n)$, b_i, $i = 1,2,\ldots,r$, и f — заданные вектор-функции, причём компоненты векторов b_i, начиная с номера r_0+1 ($r_0 < h$), равны 0. A — матричный эллиптический оператор порядка $2m$ с матричными коэффициентами размерности $h \times h$, представимый в виде

$$A(t,x,D_x) = \sum_{i=r+1}^{sr_0} q_i(t,x')A_i(t,x,D_x) + A_{sr_0+1}(t,x,D_x),$$

$$A_i = \sum_{|\alpha| \le 2m} a_{i\alpha}(t,x)D_x^{\alpha}, \quad i = r+1, \ldots, sr_0+1, \quad D_x = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \ldots, \partial_{x_n}).$$

Неизвестными в (1) являются решение u и функции $q_i(t,x')$, $i = 1,2,\ldots,sr_0$, $sr_0 \ge r$, входящие как в правую часть (1), так и в оператор A как коэффициенты. Уравнение (1) дополняется начальными и граничными условиями

$$u\big|_{t=0} = u_0, \quad B_j u|_S = \sum_{|\beta| \le m_j} b_{j\beta}(t,x)D_x^{\beta}u\big|_S = g_j(t,x), \tag{2}$$

где $m_j < 2m$, $j = 1,2,\ldots,m$, и $S = (0,T) \times \Gamma$.

Обозначим через $P_0 a$ вектор длины $r_0 < h$, координаты которого совпадают с первыми r_0 координатами исходного вектора a длины h. Условия переопределения для нахождения функций q_i имеют вид

$$P_0 u\big|_{S_i} = \psi_i(t,x'), \quad S_i = (0,T) \times \Gamma_i, \quad i = 1,2,\ldots,s, \tag{3}$$

где $\{\Gamma_i\}$ — множество гладких k-мерных поверхностей, лежащих в G, и ψ_i, $i = 1,2,\ldots,s$, — заданные вектор функции.

При выполнении условия параболичности доказана локальная по времени корректность задачи (1)–(3). Все рассмотрения проводятся в пространствах Соболева.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-06582 а).

О КОМПЛЕКСНОМ СПЕКТРЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

Костин А. Б.

Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, Россия; abkostin@yandex.ru

Исследуется задача о расположении спектра эллиптического оператора в ограниченной области как с классическими, так и с более специальными граничными условиями. Построено множество на комплексной плоскости, в котором находятся все собственные значения соответствующего оператора.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$. Рассмотрим задачу на собственные значения

$$Lw + \lambda w = 0, \quad x \in \Omega; \qquad \mathcal{B}w = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{1}$$

$$\text{где} \quad Lw = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial w}{\partial x_j}\Big) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial w}{\partial x_i} + c(x)w$$

— равномерно эллиптический оператор с вещественными коэффициентами $a_{ij} = a_{ji} \in C^1(\overline{\Omega})$; $b_i, c \in L_\infty(\Omega)$, $\nu > 0$ — константа эллиптичности. Считаем, что

$$c(x) \le -q,\ q \in \mathbb{R}, \quad |\mathbf{b}(x)|^2 \equiv |b_1(x)|^2 + \ldots + |b_n(x)|^2 \leqslant b^2 \ \text{ в } \ \Omega.$$

Граничные условия имеют вид: $\mathcal{B}w \equiv w$ или $\mathcal{B}w \equiv \partial w/\partial N + \sigma(x)\, w$ на $\partial\Omega$, где $\partial w/\partial N$ — производная по внешней конормали, $\sigma \in C^1(\partial\Omega)$, $\sigma(x) \ge 0$ на $\partial\Omega$.

Известно, что у задачи (1) существует счётное множество собственных значений, вообще говоря, комплексных, причём $|\lambda_k| \to \infty$, а соответствующие собственные функции $w_k \in W_2^2(\Omega)$, $\mathcal{B}w_k = 0$ на $\partial\Omega$.

В работе доказано, что все собственные значения $\lambda = \alpha + i\beta$ задачи (1) и других более общих краевых задач для эллиптического оператора L лежат во множестве $\mathcal{D}_0$, которое может быть задано неравенствами

$$\mathcal{D}_0 = \begin{cases} \alpha \ge \dfrac{\nu}{b^2}\,\beta^2 - |\beta| + q, & \text{если } |\beta| \ge \dfrac{b^2}{2\nu}; \\[2ex] \alpha \ge q - \dfrac{b^2}{4\nu}, & \text{если } |\beta| \le \dfrac{b^2}{2\nu}. \end{cases}$$

Приведены примеры, показывающие “асимптотическую точность” найденного множества $\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{C}_\lambda$. Построен пример задачи Дирихле в круге с комплексными собственными значениями и пример неединственности решения для параболической обратной задачи с финальным наблюдением.

Работа частично поддержана программой повышения конкурентоспособности Национального исследовательского ядерного университета МИФИ, проект № 02.a03.21.0005 от 27.08.2013.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Костин А. Б.* О комплексных собственных значениях эллиптического оператора и примере неединственности решения обратной задачи // ДАН. 2013. Т. 453, № 2. С. 138—141.
2. *Костин А. Б.* Контрпримеры в обратных задачах для параболических, эллиптических и гиперболических уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2014. Т. 54, № 5. С. 779–792.

ГРАНИЧНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА В МОДЕЛИ “ВЛАСТЬ – ОБЩЕСТВО”

Латыпов И. И., Бигаева Л. А., Латыпова А. З., Набиуллин А. Р., Лобов В. Л.

Бирский филиал Башкирского государственного университета, Бирск, Россия;
LatypovII@Rambler.ru, Bigla@Rambler.ru

Рассматривается модель, описывающая иерархию власти и/или властных полномочий [1]–[3], в виде:

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\kappa(x,\,t)\,\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}\right] + \int\limits_0^L \chi(\xi,t)\,[p(\xi,t) - p(x,t)]\,d\xi + F(p,p_1,p_2)\,, \quad (1)$$

$$(x,t) \in \Omega = \{(x,t) : 0 < x < L,\, t > t_0\}\,, \quad p(x,t_0) = p_0(x) \geq 0, \quad 0 < x < L,$$

$$\kappa_0(x,t)\,\frac{\partial p}{\partial x}\Big|_{x=0} = \varepsilon\,\varphi(t)\,, \quad -\kappa_1(x,t)\,\frac{\partial p}{\partial x}\Big|_{x=L} = 0. \quad (2)$$

В рамках данной модели ставится и решается граничная обратная задача [4] по определению внешнего влияния в распределение властных полномочий в иерархии: найти управляющую функцию $\varphi(t)$ при выполнении условия $p(x,t) = \psi(t)$, $x = d$, $0 < d < L$. Используя интегральное представление решения $p(x,t)$ краевой задачи (1)–(2) и сечение данной функции при $x = d$, для определения искомой функции $\varphi(t)$ получим интегральное уравнение Вольтерра первого рода типа свертки. Полученная обратная задача решается методом регуляризации Тихонова [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михайлов А. П.* Моделирование системы “власть – общество”. М.: Физматлит, 2006.
2. *Латыпов И. И., Бигаева Л. А., Латыпова А. З.* Параметрический анализ модели “власть – общество” при случайных возмущениях // Математическое моделирование на основе статистических методов. Материалы всероссийской научно–практической конференции. Бирск: Бирский филиал БашГУ, 2015. С. 96–105.
3. *Латыпов И. И., Бигаева Л. А., Латыпова А. З.* Параметрический анализ модели “власть – общество” // Современное общество: наука, техника, образование. Материалы Всероссийской научной конференции с международным участием: в 4-х томах. 2016. С. 133–138.
4. *Латыпов И. И.* Обратная задача в модели “власть – общество” // Международная конференция “Обратные и некорректные задачи математической физики”, посвященная 80-летию со дня рождения академика М. М. Лаврентьева. Тезисы докладов. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2012. С. 211–212.
5. *Бигаева Л. А., Латыпов И. И., Усманов С. М., Набиуллин А. Р., Шиян Д. А., Улитин Н. В.* О проблеме решения обратной некорректной задачи в химической технологии полимеров: интерпретация гель–хроматограмм // Вестник Казанского технологического университета. 2015. Т. 18, № 3. С. 86–93.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ИММУНОЛОГИИ И ИССЛЕДОВАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТИ

Латышенко В. А.[1], Криворотько О. И.[2], Кабанихин С. И.[3]

[1] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;* Latushenko_varia@mail.ru
[2] *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;* krivorotko.olya@mail.ru
[3] *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;* ksi52@mail.ru

В данной работе исследована базовая математическая модель инфекционного заболевания, разработанная под руководством Г. И. Марчука [1]. Модель состоит из четырех обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с запаздывающим аргументом, которые описывают изменение числа антигенов, рост плазматических клеток, баланс числа антител и характеристику пораженной части органа. Модель содержит большое количество коэффициентов, характеризующих иммунный статус организма и свойства антигена. Оценка параметров системы уравнений по клиническим данным (измерения характеристик организма) позволяет моделировать динамику заболевания и строить прогнозы течения и исхода болезни для конкретного человека.

Построен алгоритм численного решения задачи определения коэффициентов системы ОДУ с запаздыванием (обратная задача) по дополнительным данным о решении прямой задачи в заданный момент времени [2]. Для решения прямой задачи используется метод Рунге – Кутты – Фельберга четвертого порядка аппроксимации. Решение обратной задачи сводится к нахождению минимума целевого функционала в смысле наименьших квадратов, который численно определяется генетическим алгоритмом.

Определено оптимальное количество измерений, которые необходимо брать у пациента в течении болезни, чтобы достаточно точно определить характеристики заболевания и организма конкретного человека с наименьшими затратами. Для этого проведен апостериорный (практический) анализ [3] модели на идентифицируемость с помощью исследования числа обусловленности матрицы чувствительности.

В докладе представлены результаты численных расчетов определения параметров и результаты практической идентифицируемости.

Работа проводилась при частичной поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации и грантом Президента Российской Федерации № МК-1214.2017.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Марчук Г. И.* Математическое моделирование в иммунологии. Вычислительные методы и эксперименты. М.: Наука, 1991.
2. *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2008.
3. *Miao H., Xia X., Perelson A. S., Wu H.* On identifiability of nonlinear ODE models and applications in viral dynamics // SIAM Rev. Soc. Ind. Appl. Math. 2011. V. 53, No 1. P. 3–39.

МЕТОДЫ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ С ОПТИМАЛЬНЫМ И ЭКСТРАОПТИМАЛЬНЫМ КАЧЕСТВОМ

Леонов А. С.

Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Москва, Россия; asleonov@mephi.ru

1. Пусть Z и U — нормированные пространства с элементами z и u соответственно. В пространстве Z зададим некоторую топологию секвенциальной сходимости τ. Пусть, далее, $\mathcal{D} \neq \varnothing$ — заданное "множество ограничений" в Z, $F: Z \to U$ — некоторый оператор, возможно, нелинейный. Предположим, что операторное уравнение $F(z) = u$ имеет для данной правой части $u \in U$ единственное решение $\bar{z} \in \mathcal{D}$. Далее, считаем, что вместо точных данных задачи мы знаем их приближения: оператор $F_h : Z(T) \to U$ и элемент $u_\delta \in U$. Приближенные данные (F_h, u_δ), аппроксимирующие точные данные (F, u), удовлетворяют условиям: $\|F_h(z) - F(z)\| \le \Psi(h, \Omega[z])$, $\|u_\delta - u\| \le \delta$, в которых величины $\eta = (h, \delta)$ являются известными характеристиками точности аппроксимации, а $\Omega[z] \ge 0$ — заданный функционал. Свойства функционала $\Omega[z]$ и меры аппроксимации $\Psi(h, \Omega[z])$ будут указаны в докладе. Требуется по данным $(F_h, u_\delta, h, \delta, \Psi)$ найти устойчивое приближение $z_\eta \in \mathcal{D}$ для $\bar{z}$: $z_\eta \xrightarrow{\tau} \bar{z}$ при $\eta \to 0$.

2. Такая задача в общем случае является некорректно поставленной. Для ее решения следует применять регуляризующие алгоритмы (РА). Получаемые в результате приближения могут значительно отличаться друг от друга для разных РА. Представляется естественным применять те РА, которые дают приближенные решения с некоторыми дополнительными оптимальными свойствами. Эти свойства можно описать с помощью вводимого функционала "качества" $Q(z_1, z_2)$, $z_1, z_2 \in \mathcal{D}$: мерой качества приближенного решения z_η относительно точного решения $\bar{z}$ назовем величину $Q(z_\eta, \bar{z})$. При неизвестном $\bar{z}$ качество $Q(z_\eta, \bar{z})$ может быть только оценено (априорно или апостериорно). Нас интересуют *апостериорные оценки качества* приближенных решений рассматриваемого РА (по функционалу качества Q), т. е. оценки для $Q(z_\eta, \bar{z})$, получаемые после решения обратной задачи. Оценки могут быть получены по следующей схеме. Вычислив z_η, найдем величины $\Delta_\eta = C\,\|F_h(z_\eta) - u_\delta\|$, $R_\eta = C\Omega[z_\eta]$, где $C > 1$ — заданная константа. Введем множество $\mathcal{Z}_\eta = \{z \in \mathcal{D} : \|F_h(z) - u_\delta\| \le \Delta_\eta,\, \Omega[z] \le R_\eta\}$ и предположим, что $\bar{z} \in \mathcal{Z}_\eta$. Тогда $Q(z_\eta, \bar{z}) \le \sup\{Q(z_\eta, z) : z \in \mathcal{Z}_\eta\} \stackrel{\Delta}{=} E_Q(\eta)$.

Определение 1. Назовем функцию $E_Q(\eta)$ апостериорной оценкой качества приближенного решения z_η (по функционалу Q).

Определение 2. Регуляризующий алгоритм $z_\eta = P_\eta(F_h, u_\delta, \eta)$ имеет *экстраоптимальное качество* Q, если апостериорная оценка его качества – функция $E_Q(\eta)$ – является оптимальной по порядку на рассматриваемом классе данных.

3. В докладе дается детальный очерк теории РА с оптимальными по порядку и экстраоптимальными качествами. Показывается, что методы регуляризации А. Н. Тихонова и М. М. Лаврентьева с выбором параметра регуляризации по обобщенному принципу невязки имеют экстраоптимальное качество для типичных обратных задач и функционалов Q весьма общего вида. В частности, качеством решения обратной задачи могут служить различные многомерные вариации решения — функции нескольких переменных — или его энтропия. Приводятся примеры численного нахождения оценки $E_Q(\eta)$ экстраоптимального качества.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 17-01-00159 а и № 17-51-53002 ГФЕНа).

НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ

Миренков В. Е.

Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, Новосибирск, Россия;
mirenkov@misd.ru

Рассматриваются некорректные задачи механики деформируемого твердого тела для кусочно-однородных областей со значительным числом управляющих параметров, которые идентифицируются, используя натурные данные о смещениях границы.

Граничные задачи механики являются многопараметрическими и зависимость искомых решений от них может быть сложной. Характер зависимости решения от параметров становится известным после обращения граничной задачи. Исследование поведения решения, как правило, достигается численными методами, при этом встаёт ряд вопросов относительно точности решения, описания влияния параметров на решение при одновременном их изменении. В настоящее время известны численные решения частных обратных задач в зависимости от идентификации одного параметра. Предлагается принципиально новый метод решения обратных многопараметрических задач, основанный на полученных точных уравнениях, связывающих граничные значения компонент напряжений и смещений и исключающих регуляризацию. Использование экспериментальных данных, определенных с погрешностью, дискретизация сплошной среды при численном счёте, априорные предположения на характер деформирования конструкции (идеальное проскальзывание, скачок смещений, нарушение конформности в конечном числе точек и т. п.) вносят погрешность в граничные условия при формулировке задачи и расширяют класс обратных задач. Предложена система сингулярных интегральных уравнений, позволяющая получить аналитические решения для произвольной области компонент смещений и напряжений в квадратурах, что даёт возможность исключить процесс регуляризации и определить на стадии формулировки любой из задач: корректна, если система сводится к уравнениям типа Фредгольма второго рода; некорректна, если — типа Фредгольма первого рода. Для проведения натурных измерений процесса деформирования достаточно замерять смещения на доступных участках границы исследуемой области, дополнительная информация, необходимая для обратных задач. Алгоритм решения представляет собой переборный процесс, с помощью которого восстанавливаются параметры, наилучшим образом удовлетворяющие заданным условиям. Предлагаемый метод основан на решении одной отдельной обратной задачи для каждого из варьируемых параметров. Условие получения решения с достаточной точностью последовательными приближениями приводит к выполнению большого объёма вычислений. Показано, что неединственность решения многопараметрических некорректных задач на первых шагах приближений может быть связана с последовательностью выбранного пути приближения. Вся последовательность в конечном счёте сходится к единственному решению, если не ставить вопрос о количестве итераций, т. е. проблема переходит в разряд трудноросшаемых задач. Любым численным методом такого класса задачи решить нельзя. В качестве примера некорректной проблемы рассмотрен класс решений теории упругости, приводящий к бесконечным напряжениям в угловых точках областей и связанных с объяснением феномена разрушения в механике через коэффициенты интенсивности напряжений.

СПЕЦИАЛЬНЫЙ КЛАСС УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ТИПА СВЕРТКИ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Орлов С. С.[1], **Грюнвальд Л. А.**[2]

Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия;
[1]orlov_sergey@inbox.ru, [2]lfb_o@yahoo.co.uk

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $u = u(t)$, $f = f(t)$ — неизвестная и заданная функции аргумента $t \geq 0$ со значениями в E_1 и E_2 соответственно. Рассмотрим интегральное уравнение

$$Bu(t) - \int_0^t g(t-s)Au(s)ds = f(t). \tag{1}$$

Здесь B и A — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, причем $D(B) \subseteq D(A)$ и $\overline{D(B)} = \overline{D(A)} = E_1$, ядро $g = g(t)$ — числовая функция. Предполагается, что оператор B — фредгольмов, т. е. $\overline{R(B)} = R(B)$ и $\dim N(B) = \dim N(B^*) = n < +\infty$. Данное уравнение является абстрактной формой краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих волновые явления в плазме [1]. В докладе предполагается обсудить результаты, полученные авторами при исследовании проблемы однозначной разрешимости уравнения (1).

В условиях полноты A-жорданова набора оператора B и достаточной степени гладкости функции $g = g(t)$, аналитической в точке $t = 0$, доказан критерий существования и единственности *классического* (сильно непрерывного на луче $[0, +\infty)$) решения уравнения (1). Если он не выполняется, решение представляет собой сингулярное распределение, порядок сингулярности которого зависит от кратности нуля функции $g = g(t)$ в точке $t = 0$ [2]. Подобные результаты в [3] получены в предположении сильной (B, p)-ограниченности оператора A.

В работе [4] рассмотрено слабосингулярное интегральное уравнение (1), а именно: $g(t) = t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$, где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера фиксированного аргумента $0 < \alpha < 1$. Оказалось, что даже при нарушении условий критерия разрешимости, решение уравнения (1), в отличие от случая "хорошего" ядра, может быть сохранено в классе "обычных" функций, непрерывных на интервале $(0, +\infty)$ и имеющих особенность в точке $t = 0$ типа полюса порядка, кратного α.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-31-00291).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
2. *Орлов С. С.* О порядке сингулярности обобщенного интегрального уравнения Вольтерра типа свертки в банаховых пространствах // Изв. ИГУ. Сер. Математика. 2014. Т. 10. С. 76–92.
3. *Орлов С. С.* Вырожденные уравнения Вольтерра типа свертки в банаховых пространствах и их приложения // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Математика. Механика. Физика. 2016. Т. 8, № 3. С. 52–63.
4. *Orlov S. S., Grunwald L. A.* Abel type equations with degeneration in Banach spaces // Proceedings of Sixth International Scientific Conference "Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis VI". Rostov-on-Don: SEF, 2016. P. 117.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В АЛГОРИТМАХ УСВОЕНИЯ ДАННЫХ ХИМИИ АТМОСФЕРЫ

Пененко А. В.[1], **Пененко В. В.**[2], **Цветова Е. А.**[3], **Гришина А. А.**[4]

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; [1]a.penenko@yandex.ru, [2]penenko@sscc.ru, [3]E.Tsvetova@ommgp.sscc.ru, [4]a.a.grishina17@gmail.com

В случае неточного задания параметров модели, алгоритмы усвоения данных позволяют восполнить недостаток информации за счет поступающих во время выполнения алгоритма данных измерений. Задача усвоения данных химии атмосферы ставится как динамическая последовательность связанных обратных задач по поиску источников выбросов на основе поступающих в процессе работы алгоритма измерений значений концентраций для модели адвекции – диффузии – реакции [1], [2].

Усвоение осуществляется вариационными алгоритмами на отдельных стадиях схемы расщепления. На линейной стадии переноса используется прямой (безытерационный) алгоритм усвоения. Для нелинейной стадии трансформации рассматриваются как итерационные, так и прямые алгоритмы решения обратных задач. Эффективность алгоритмов изучается теоретически и численно как на искусственных, так и на реальных данных измерений.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 17-01-00137) и гранта Президента РФ (№ МК-8214.2016.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пененко А. В., Пененко В. В., Цветова Е. А.* Последовательные алгоритмы усвоения данных в моделях мониторинга качества атмосферы на базе вариационного принципа со слабыми ограничениями // Сиб. журн. вычисл. матем. 2016. Т. 19, № 4. С. 401–418.
2. *Пененко В. В., Цветова Е. А., Пененко А. В.* Развитие вариационного подхода для прямых и обратных задач гидротермодинамики и химии атмосферы // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2015. Т. 51, № 3. С. 358–367.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА И ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Прилепко А. И.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; prilepko.ai@yandex.ru

Исследована связь обратной задачи об источнике с задачей оптимального управления для уравнения первого порядка в банаховом пространстве. При определённых условиях установлена эквивалентность и разрешимость этих двух задач.

Пусть даны рефлексивные строго выпуклые банаховы пространства E, E^*, число $T \in (0, +\infty)$, оператор $\mathcal{A}$, являющийся генератором C_0 группы или полугруппы. При каждом $t \in (0, T)$ задан оператор $G(t) : E^* \to E^*$, где E^* — сопряжённое к E, и фиксирован некоторый элемент $e \in E$.

Обратная задача. Найти пару $e^* \in E^*$ и $w(t)$ из условий

$$\dot{w}(t) = \mathcal{A}w(t) + G(t)e^*, \quad 0 < t < T, \qquad w(0) = 0; \tag{1}$$

$$w(T) = e. \tag{2}$$

Пусть дополнительно при каждом $t \in (0, T)$ задан оператор $B(t)$, отображающий пространство $L^p(0, T; E)$ в себя $(1 < p < \infty)$.

Задача управления. Найти пару: управление $u(t) \in L^p(0, T; E)$ и решение $y(t)$ из условий

$$\dot{y}(t) = \mathcal{A}y(t) + B(t)u(t), \quad 0 < t < T, \qquad y(0) = 0; \tag{3}$$

$$y(T) = e. \tag{4}$$

Оптимальным управлением будем называть такой элемент $u^{opt}(t)$ пространства $\mathcal{U} \equiv L^p(0, T; E)$, который имеет минимальную норму среди всех управлений $u(t) \in \mathcal{U}$.

В обратной задаче (1), (2) по заданному элементу $e \in E$, не зависящему от времени, требуется найти элемент $e^* \in E^*$, также не зависящий от времени. В задаче управления (3), (4) по заданному элементу $e \in E$, не зависящему от времени, требуется найти управление $u(t) \in L^p(0, T; E)$, т. е. функцию, зависящую от времени и “пространства”. При ряде условий исследуются обе эти задачи и доказывается, что нахождение оптимального управления $u^0(t)$ эквивалентно решению некоторой специальной обратной задачи вида (1)–(2), в которой оператор $G(t)$ явно выписывается через входные данные из (3)–(4).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcel Dekker, 2000.
2. *Фурсиков А. В.* Оптимальное управление распределёнными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999.
3. *Васильев Ф. П., Куржанский М. А., Потапов М. М., Разгулин А. В.* Приближённое решение двойственных задач управления и наблюдения. М.: МАКС Пресс, 2010.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА В КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ПО ТОЧЕЧНЫМ ДАННЫМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пятков С. Г.[1], **Ротко В. В.**[2]

[1]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
pyatkov@math.nsc.ru
[2]*Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, Россия;*
v_rotko@ugrasu.ru

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ и $Q = G \times (0,T)$. Мы рассматриваем вопрос об определении вместе с решением правой части специального вида (функции источника) в параболической системе

$$u_t - L_0 u + Q(u) = f(x,t) + \sum_{i=1}^{r} q_i(t) f_i(x,t), \quad (t,x) \in Q, \tag{1}$$

где u — вектор длины h, $Q(u)$ — некоторая вектор функция длины h, нелинейным образом зависящая от u,

$$L_0 u = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_i}(a_{ij}(x,t)u_{x_j}) - \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)u_{x_i} - a_0(x,t)u.$$

Здесь a_{ij}, a_j, a_0 — матрицы размера $h \times h$. Уравнение (1) дополняется начальными и граничными условиями

$$u|_{t=0} = u_0, \quad Bu|_S = g(t,x), \quad S = (0,T) \times \Gamma, \tag{2}$$

где $Bu = \sigma\left(\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) n_i u_{x_j} + b(x)u\right) + (1-\sigma)u$, n_i — i-ая координата внешней единичной нормали к Γ, $\sigma(x) \in C(\Gamma)$ — непрерывная функция, принимающая два значения 0, 1. Неизвестными в системе (1), (2) являются решение u и функции $q_i(t)$, входящие в правую часть системы. Условия переопределения записываются в виде

$$u(x_i, t) = \psi_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, s, \tag{3}$$

где $\psi_i(t)$ — данные функции.

Подобные задачи возникают при описании процессов тепломассопереноса, диффузии и ряда других. В частности, вопрос о численном решении задачи (1)–(3) с еще более специальными правыми частями, чем у нас, рассматривается в работе [1]. В данной работе рассмотрен вопрос об условиях на нелинейное слагаемое, гарантирующих глобальную по времени разрешимость задачи.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и правительства Ханты-Мансийского автономного округа — Югры (проект № 15-41-00063).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mamonov A. V., Tsai Y.-H. R.* Point source identification in nonlinear advection–diffusion–reaction systems // Inverse Probl. 2013. V. 29, No 3. Article ID 035009.

ЗАДАЧА ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ПО МОДУЛЮ РАССЕЯННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Романов В. Г.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
romanov@math.nsc.ru

Рассматривается стационарная система уравнений электродинамики, которая соответствует немагнитной непроводящей среде. Для этой системы изучается задача об определении коэффициента диэлектрической проницаемости ε по заданным векторам электрической или магнитной напряжённости электромагнитного поля. Предполагается, что это поле вызывается точечным импульсным диполем, локализованным в некоторой точке y. Предполагается также, что диэлектрическая проницаемость отлична от заданной положительной постоянной ε_0 только внутри некоторой компактной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей S. Для отыскания ε внутри Ω задаётся информация о решении соответствующей прямой задачи для системы уравнений электродинамики на всей границе области Ω для всех частот, начиная с некоторой фиксированной частоты ω_0, и для всех $y \in S$. Изучается асимптотика решения прямой задачи при больших частотах и показывается, что задаваемая информация позволяет свести исходную задачу к хорошо известной обратной кинематической задаче об определении коэффициента рефракции внутри Ω по временам пробега электромагнитной волны между произвольными точками границы области Ω. Это приводит к теореме единственности решения рассматриваемой задачи и открывает путь её конструктивного решения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00120-а).

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

Сабитов К. Б.[1]**, Сидоров С. Н.**[2]

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
Стерлитамакский филиал Института стратегических исследований,
Стерлитамак, Россия; [1]sabitov_fmf@mail.ru, [2]stsid@mail.ru

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$L_{n,m}u = F(x,t), \tag{1}$$

здесь

$$L_{n,m}u = \begin{cases} t^n u_{xx} - u_t - b^2 t^n u, & t > 0, \\ (-t)^m u_{xx} - u_{tt} - b^2(-t)^m u, & t < 0, \end{cases} \qquad F(x,t) = \begin{cases} f_1(x)g_1(t), & t > 0, \\ f_2(x)g_2(t), & t < 0, \end{cases}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t) : 0 < x < l, -\alpha < t < \beta\}$, где $n \geq 0$, $m \geq 0$, $b \geq 0$, $l > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ — заданные действительные числа, и следующие обратные задачи.

Задача 1. Найти функции $u(x,t)$ и $g_1(t)$, удовлетворяющие условиям:

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C_t^1(D) \cap C_x^1(\overline{D}) \cap C_x^2(D_+) \cap C^2(D_-); \tag{2}$$

$$g_1(t) \in C[0,\beta]; \tag{3}$$

$$L_{n,m}u(x,t) \equiv F(x,t), \quad (x,t) \in D_+ \cup D_-; \tag{4}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta; \qquad u(x,-\alpha) = 0, \quad 0 \leq x \leq l; \tag{5}$$

$$u(x_0,t) = h_1(t), \quad 0 < x_0 < l, \quad 0 \leq t \leq \beta, \tag{6}$$

где $f_i(x)$, $i = 1,2$, $g_2(t)$, $h_1(t)$ — заданные функции, x_0 — заданная точка из интервала $(0,l)$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$.

Задача 2. Найти функции $u(x,t)$ и $g_2(t)$, удовлетворяющие условиям (2), (4), (5) и

$$g_2(t) \in C[-\alpha,0]; \qquad u(x_0,t) = h_2(t), \quad 0 < x_0 < l, \quad -\alpha \leq t \leq 0, \tag{7}$$

где $f_i(x)$, $i = 1,2$, $g_1(t)$, $h_2(t)$ — известные функции.

Задача 3. Найти функции $u(x,t)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$, удовлетворяющие условиям (2)–(7), здесь $f_i(x)$, $h_i(t)$, $i = 1,2$, — заданные функции.

Отметим, что исследование задач 1–3 базируется на прямой начально-граничной задаче (2), (4), (5), изученной в работе [1]. Поставленные задачи для уравнения (1) при $n = m = 0$ изучены в [2, с. 228–238].

В данной работе доказаны соответствующие теоремы единственности и существования решений задач 1–3 для уравнения (1) при $n = 0$, $m > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сабитов К. Б., Сидоров С. Н.* Начально-граничная задача для неоднородных вырождающихся уравнений смешанного параболо-гиперболического типа // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2017. Т. 137. С. 26–60.
2. *Сабитов К. Б.* Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа. М.: Наука, 2016.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ КОШИ – РИМАНА В БЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

Сатторов Э. Н., Эрмаматова З. Э.

Самаркандский государственный университет им. А. Навои, Самарканд, Республика Узбекистан; sattorov-e@rambler.ru

В работе рассматривается задача аналитического продолжения решения обобщенной системы Коши – Римана в бесконечной области типа слоя в пространстве $\mathbb{R}^n$ по ее значениям на части границы этой области, т. е. задача Коши. Как известно, важность уравнений Коши – Римана в физических приложениях привела к далеко идущим обобщениям [1]–[3]. Рассматриваемая система — эллиптическая, задача Коши для эллиптических уравнений неустойчива относительно малого изменения данных, т. е. некорректна [4]. В некорректных задачах теорема существования предполагается заданной априори. Более того, предполагается, что решение принадлежит некоторому заданному подмножеству функционального пространства, обычно компактному ([5], с. 4). Единственность решения следует из общей теоремы Холмгрена ([6], с. 58).

После установления единственности в теоретических исследованиях некорректных задач возникают важные вопросы получения оценки условной устойчивости и построения регуляризующих операторов. В 1926 г. Т. Карлеман ([5], с. 41) построил формулу, которая связывает значения аналитической функции комплексного переменного в точках области с ее значениями на куске границы этой области. На основе этой формулы в ([5], с. 34) введено понятие функции Карлемана задачи Коши для уравнения Лапласа и в некоторых случаях указан способ ее построения. Конструкция функции Карлемана дает возможность в этих задачах построить регуляризацию и получить оценку условной устойчивости. На протяжении последних десятилетий не ослабевал интерес к классической некорректной задаче математической физики. Это направление в исследовании свойств решений задачи Коши для уравнения Лапласа начато в 50-х годах и развивалось впоследствии. Из вышесказанного нам удалось построить матрицу Карлемана в явном виде и на её основе — регуляризованное решение задачи Коши.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Brackx F., Delanghe K., Sommen F.* Clifford analysis. Boston, London, Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program, 1982 (Research Notes in Mathematics, V. 76).
2. *Владимиров В. С., Волович И. В.* Суперанализ. I. Дифференциальное исчисление // Теор. и мат. физика. 1984. Т. 59, № 1. С. 3–27.
3. *Владимиров В. С., Волович И. В.* Суперанализ. II. Интегральное исчисление // Теор. и мат. физика. 1984. Т. 60, № 2. С. 169–198.
4. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978.
5. *Лаврентьев М. М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1962.
6. *Берс А., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966.
7. *Лаврентьев М. М.* О задаче Коши для линейных эллиптических уравнений второго порядка // ДАН СССР. 1957. Т. 112, № 2. С. 195–197.

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ С МГНОВЕННЫМ И ШНУРОВЫМ ИСТОЧНИКАМИ

Сатыбаев А. Дж.[1], **Анищенко Ю. В.**[2], **Кокозова А. Ж.**[3], **Алимканов А. А.**[4]

Ошский технологический университет, Ош, Кыргызская Республика;
[1]abdu-satybaev@mail.ru, [2]programm85@mail.ru,
[3]kokozova72@mail.ru, [4]dr.amangeldy78@mail.ru

В данной работе рассмотрена задача волновых процессов с указанными источниками. Задача приведена к задаче с данными характеристиками методами выпрямления характеристик и выделения особенностей.

Многие волновые процессы геофизики, электродинамики, сейсмики и другие характеризуются полями, описываемыми уравнениями математической физики второго порядка:

$$\operatorname{div}\big(\bar\sigma(x,y,z)\,\operatorname{grad}\bar v(x,y,z,t)\big) - \bar a(x,y,z)\bar v(x,y,z,t) - \bar b(x,y,z)\frac{\partial v(x,y,z,t)}{\partial t}$$

$$-\bar c(x,y,z)\frac{\partial \bar v(x,y,t)}{\partial t^2} = -\bar f(x,y,z,t),$$

где $(x,y,z)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}_+$, $t\in\mathbb{R}_+$, $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$ — физические параметры, $\bar f(x,y,z,t)$ — функция интенсивности источников поля, $\bar\sigma(x,y,z)$ — функция, описывающая геофизические свойства среды, $\bar v(x,y,z,t)$ — потенциал поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Романов В. Г.* Устойчивость в обратных задачах. М.: Научный мир, 2005.
2. *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные и задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.
3. *Сатыбаев А. Дж., Кокозова А. Ж.* Доказательство существования решения двумерной прямой задачи телеграфного уравнения с мгновенным и шнуровым источниками // Изв. Кыргызского гос. техн. ун-та им. И. Раззакова. 2017. Т. 41, № 1-1. С. 113–123.
4. *Сатыбаев А. Дж., Алимканов А. А.* Существование решения двумерной прямой задачи сейсмики с мгновенным источником // Наука и новые технологии. Бишкек. 2014. № 7. С. 14–24.
5. *Сатыбаев А. Дж., Алимканов А. А.* Доказательство существования решения двумерной прямой задачи сейсмики с мгновенным источником // Наука и новые технологии. Бишкек. 2014. № 7. С. 3–13.
6. *Сатыбаев А. Дж.* Существование решения прямой задачи волнового уравнения с плоской границей // Математическое моделирование и информационные технологии в образовании и науке. Алматы. 2003. С. 383–389.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГОРМОНАЛЬНОГО ЛЕЧЕНИЯ ОНКОЛОГИЧЕСКИХ ЗАБОЛЕВАНИЙ В УСЛОВИЯХ ГОРМОНОРЕЗИСТЕНТНОСТИ

Серовайский С. Я.[1], **Нурсеитов Д. Б.**[2], **Азимов А. А.**[3]

[1]*Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Республика Казахстан;* serovajskys@mail.ru

[2]*Казахский национальный исследовательский политехнический университет им. К. Сатпаева, Алматы, Республика Казахстан;* ndb80@mail.ru

[3]*Казахский национальный исследовательский политехнический университет им. К. Сатпаева, Алматы, Республика Казахстан;* anvar.aa@mail.ru

Для лечения некоторых форм рака, связанных с действием гормонов, применяется гормональное лечение. Подавляя выработку организмом гормонов, оно позволяет затормозить развитие опухоли. Однако действие гормонального лечения носит временный характер ввиду постепенного привыкания клеток рака к действию гормонов, т. е. явления гормонорезистентности. Это объясняется тем, что опухоль состоит из двух типов клеток — чувствительных и резистентных к действию гормональных препаратов. В условиях гормонального лечения происходит постепенное замещение чувствительных раковых клеток резистентными, что приводит к дальнейшему развитию опухоли. Предлагается математическая модель процесса, базирующаяся на однофазной задаче Стефана.

При выводе модели используются следующие предположения. Опухоль обладает сферической симметрией и состоит из двух типов раковых клеток, одни из которых являются чувствительными к действию гормонов, а другие являются резистентными. В отсутствии лечения наблюдается рост опухоли в соответствии с моделью Ферхюльста. Распространение раковых клеток внутри опухоли имеет диффузионную природу. Гормональное лечение подавляет рост чувствительных к гормонам раковых клеток. Раковые клетки могут приобретать и терять гормонорезистентность. В результате получаем следующие уравнения

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = D_s \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}\Big(\rho^2 \frac{\partial u_s}{\partial \rho}\Big) + \Big[\frac{a_s}{1+f(t)u_s^\theta} - b_s(u_s+u_r)\Big]u_s + c_{rs}u_r,\ \rho_0<\rho<\xi(t),\ t>0,$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = D_r \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}\Big(\rho^2 \frac{\partial u_r}{\partial \rho}\Big) + \big[a_r - b_r(u_s+u_r)\big]u_r + c_{sr}u_s,\ \rho_0<\rho<\xi(t),\ t>0,$$

с определенными начальными условиями, условием Неймана на левой границе и условиями Стефана на правой границе, где u_s — концентрация чувствительных раковых клеток, u_r — концентрация резистентных раковых клеток, $\xi = \xi(t)$ — граница опухоли.

Расчеты показывают, что в отсутствии лечения, что соответствует случаю равенства нулю концентрации $f(t)$ лекарственных препаратов, функция ξ, характеризующая размеры опухоли, растет. С началом лечения наблюдается значительное уменьшение концентрации u_s чувствительных клеток, существенно преобладающих изначально. Вследствие этого происходит сокращение размеров опухоли. Однако постепенно начинается рост концентрации u_r резистентных клеток, на которые лечение не оказывает воздействия. Тем самым сокращение опухоли сменяется ее увеличением, а эффективность лечения постепенно сходит на нет.

Уточнение математической модели осуществляется в процессе решения соответствующих обратных задач, связанных с восстановлением ее параметров по результатам измерения состояния системы.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА СЕПАРАЦИИ ПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ КОМПОНЕНТ В РЕШЕНИИ

Сизиков В. С.[1], **Лавров А. В.**[2]

Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, Санкт-Петербург, Россия;
[1]sizikov2000@mail.ru, [2]lavrov@corp.ifmo.ru

Рассматривается задача сепарации (разделения) перекрывающихся протяженных компонент в решении, например, перекрывающихся линий в непрерывном спектре [1].

Прямая задача формулируется в два этапа. Сначала по n компонентам с распределением интенсивности $z_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, получается (моделируется или измеряется) суммарная интенсивность $z(x) = \sum_{i=1}^{n} z_i(x)$. Затем по $z(x)$ получается интенсивность $\widetilde{u}(x) = \int_a^b K(x,s)\, z(s)\, ds + \delta u$, заглаженная аппаратной функцией $K(x,s)$ и зашумленная шумом δu.

Обратная задача формулируется также в два этапа. Сначала решается интегральное уравнение Фредгольма I рода $\int_a^b K(x,s)\, z(s)\, ds = \widetilde{u}(x)$, $c \le x \le d$, относительно $z(s) = z_\alpha(s)$ методом регуляризации Тихонова. При этом параметр регуляризации α выбирается способом модельных, или обучающих примеров [2], а также обобщенным принципом невязки. Затем решается задача восстановления компонентов $z_i(x)$ по найденной $z_\alpha(x)$. Компоненты моделируются гауссианами (а также лоренцианами), у каждой — по 3 искомых параметра: амплитуда A, координата максимума x_0 и СКО σ. Параметры компонент, объединенные в единый вектор p_j, $j = \overline{1,3n}$, находятся путем минимизации функционала $F1 = \sum_{i=1}^{N} (\widetilde{u}_i - u_i)^2$ с ограничениями $p_{\min j} \le p_j \le p_{\max j}$, $j = \overline{1,3n}$, где $\widetilde{u}$ — измеренные значения, а $u = u(p)$ — рассчитанные значения интенсивностей; N — число дискретных отсчетов по x. Минимизация функционала $F1$ выполняется с помощью модификации метода координатного спуска с использованием способа сужающихся ограничений [3]. В начальном приближении ограничения на p задаются широкие, затем они итеративно сужаются так, чтобы решение p не выходило за ограничения. Для сравнения использовался также функционал с регуляризацией: $F2 = \sum_{i=1}^{N} (\widetilde{u}_i - u_i)^2 + \alpha \sum_{j=1}^{3n} q_j\, p_j^2$, где $q_j = 1/p_{\mathrm{mid}j}^2$ – веса́, причем $p_{\mathrm{mid}j} = (p_{\min j} + p_{\max j})/2$.

Данная методика использована в задаче о перекрывающихся линиях в спектре (ср. [1], [4]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-08-00442).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Yan L., et al.* Semi-blind spectral deconvolution with adaptive Tikhonov regularization // Appl. Spectrosc. 2012. V. 66, No 11. P. 1334–1346.
2. *Сизиков В. С., Кривых А. В.* Восстановление непрерывных спектров методом регуляризации с использованием модельных спектров // Оптика и спектроскопия. 2014. Т. 117, № 6. С. 1040–1048.
3. *Sizikov V., Evseev V.* Bars and spheroids in gravimetry problem // arxiv.org/abs/1604.06927.
4. *Kauppinen J. K., et al.* Fourier self-deconvolution: a method for resolving intrinsically overlapped bands // Appl. Spectrosc. 1981. V. 35, No 3. P. 271–276.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ НЕИЗВЕСТНОГО ПАРАМЕТРА СТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ МАССОПЕРЕНОСА, ОПИСЫВАЕМОЙ НЕЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЕМ КОНВЕКЦИИ – ДИФФУЗИИ – РЕАКЦИИ

Соболева О. В.

Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия;
soboleva22@mail.ru

Целью работы является разработка и исследование алгоритма численного решения коэффициентных обратных экстремальных задач для стационарного нелинейного уравнения конвекции – диффузии – реакции, описывающего процесс массопереноса в ограниченной области Ω в пространстве $\mathbb{R}^d$, $d = 1, 2$, с липшицевой границей Γ. Исходная краевая задача задается соотношениями

$$-\lambda\Delta\varphi + \mathbf{u}\cdot\nabla\varphi + k(\varphi)\varphi = f \;\text{ в }\; \Omega, \quad \varphi = \psi \;\text{ на }\; \Gamma. \tag{1}$$

Здесь φ — концентрация загрязняющего вещества (примеси), $\lambda = \mathrm{const} > 0$ — коэффициент диффузии, $k(\varphi) = \varphi^2$ — величина, характеризующая распад вещества за счет химических реакций, f — плотность объемных источников, ψ — некоторая функция, заданная на границе Γ.

Исследуемая в работе обратная задача заключается в нахождении неизвестного коэффициента $k(\varphi)$, который требуется определить вместе с решением φ по дополнительной информации о состоянии среды в некоторой подобласти $\Omega_0 \subset \Omega$. Указанная задача формулируется как задача минимизации функционала [1]

$$J(\varphi,\psi) \equiv (\mu_0/2)I(\varphi) + (\mu_1/2)\|\psi\|_{1/2,\Gamma} \to \inf$$

на решениях исходной краевой задачи (1).

Исследование разрешимости поставленной коэффициентной обратной задачи, вывод системы оптимальности, получение оценок устойчивости относительно малых возмущений функционала качества и функции ψ, заданной на границе уравнения (1), были проведены в работе [1].

В данной работе разрабатывается и исследуется алгоритм численного решения обратной экстремальной задачи для стационарного нелинейного уравнения конвекции – диффузии – реакции. В основу алгоритма была положена система оптимальности, полученная в [1]. Численное решение прямых и сопряженных задач проводится с помощью метода сеток. Для решения прямой и сопряженной задач и реализации алгоритма численного решения поставленной обратной экстремальной задачи применяется метод Ньютона. Тестирование программного комплекса, реализующего алгоритм численного решения обратной экстремальной задачи, проводится в программе Scilab [2].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00365-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бризицкий Р. В., Сарицкая Ж. Ю.* Устойчивость решений экстремальных задач для нелинейного уравнения конвекции – диффузии – реакции при условии Дирихле // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2016. Т. 56, № 12. С. 2042–2053.
2. Scilab Enterprises. http://www.scilab.org

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Телешева Л. А.

Бурятский государственный университет, Улан-Удэ, Россия;
love_20_09@mail.ru

Рассматривается обратная коэффициентная задача: найти функции $u(x,t)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре $Q = \{(x,t) : x \in \Omega,\ t \in (0,T),\ T < \infty\}$ уравнением

$$u_{tt} - a\Delta u_t + \Delta^2 u + q(t)u = f(x,t),$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ граничных условий

$$u(x,t) = \Delta u(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in S;$$

начальных условий

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) \quad \text{при} \quad x \in \Omega;$$

и условия переопределения

$$\int\limits_{\Omega} N(x)u(x,t)\,dx = \mu(t) \quad \text{при} \quad t \in (0,T).$$

Наряду с поставленной обратной задачей также рассматриваются задачи определения (помимо решения) коэффициента $q(t)$ в уравнениях вида:

$$u_{tt} - a\Delta u_t + \Delta^2 u + q(t)u_t = f(x,t),$$

$$q(t)u_{tt} - a\Delta u_t + \Delta^2 u + u = f(x,t).$$

Для всех изучаемых задач доказывается существование регулярных — имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в уравнение — решений. По постановкам задач и по методам решений, как наиболее близкие можно отметить статьи [1]–[4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кожанов А. И.* Параболические уравнения с неизвестными коэффициентами, зависящими от времени // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2005 Т. 45, № 12. С. 2168—2184.
2. *Кожанов А. И.* О разрешимости обратной задачи нахождения старшего коэффициента в уравнениях составного типа // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Математическое моделирование и программирование. 2008. № 15 (115), вып. 1. С. 27–36.
3. *Телешева Л. А.* О разрешимости обратной задачи для параболического уравнения высокого порядка с неизвестным коэффициентом при производной по времени // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, вып. 2. С. 180–201.
4. *Телешева Л. А.* Обратная задача для параболических уравнений высокого порядка: случай неизвестного коэффициента, зависящего от времени // Вестн. БГУ. Математика и информатика. 2010. № 9. С. 175–182.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ АКУСТИКИ КОМБИНИРОВАННЫМ МЕТОДОМ

Филатова В. М.[1], **Носикова В. В.**[2]

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия;
[1]vifilatova@kantiana.ru, [2]vnosikova@kantiana.ru

В работе рассматривается обратная динамическая задача акустики, возникающая в ультразвуковой медицинской томографии, и имеющая важное практическое значение в диагностике рака молочной железы у женщин. Ранняя диагностика и выявление патологий затрудняется строением молочной железы. Информативность стандартных методов снижается при плотном фоне молочной железы, что не исключает случаев рентгенонегативного рака. В связи с данными трудностями и недостаточной точностью маммографии исследователи из различных областей науки занимаются поиском и разработкой новых методов обнаружения опухолевых новообразований молочной железы. Наибольший интерес вызывают методы ультразвуковой томографии, которые разрабатываются многими исследователями [1]–[3]. В работе численно решается задача ультразвуковой медицинской томографии (с доминирующей частотой в источнике 1,3 МГц). Используется сложная акустическая модель, моделирующая сечение груди.

Для решения задачи предлагается использовать комбинированный подход, основанный на предварительной визуализации неоднородностей и последующего определения скоростей в них. Для визуализации мы используем линеаризованный вариант BC-метода (Boundary control method) [4]. Далее определяем скорость звука во включениях на основе кинематических данных. Приводятся результаты численного моделирования.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 16-11-10027).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sandhu G. Y., Li C., Roy O., Schmidt S., Duric N.* Frequency domain ultrasound waveform tomography: breast imaging using a ring transducer // Physics in Medicine & Biology. 2015. V. 60. P. 5381–5398.
2. *Буров В. А., Гришина И. М., Лапшенкина О. И., Морозов С. А., Румянцева О. Д., Сухов Е. Г.* Восстановление тонкой структуры акустического рассеивателя на фоне искажающего влияния его крупномасштабных составляющих // Акустич. журн. 2003. Т. 49, № 6. С. 738–750.
3. *Ruiter N. V., Zapf M., Hopp T., Dapp R., Gemmeke H.* Phantom image results of an optimized full 3D USCT // Conf. Proc. SPIE Medical Imaging 2012: Ultrasonic Imaging, Tomography, and Therapy. 2012. V. 8320. P. 832005-1–832005-6.
4. *Пестов Л. Н., Филатова В. М.* Численное решение линеаризованной обратной задачи для двухпараметрического уравнения акустики // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2013. № 4. С. 154–159.

ЗАДАЧА КОШИ В ГЕОМЕХАНИКЕ

Чанышев А. И.[1,2], Абдулин И. М.[1], Белоусова О. Е.[1]

[1] *Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[2] *Новосибирский государственный университет экономики и управления, Новосибирск, Россия;* a.i.chanyshev@gmail.com

Исследуются: уравнение Лапласа для круга и полуплоскости, уравнение теплопроводности, одномерное волновое уравнение, уравнения теории упругости для плоской деформации, задача теории пластичности и запредельных деформаций для плоскости с круговым отверстием, динамические задачи теории упругости для полуплоскости и полупространства, в которых на известной границе задаются одновременно и граничное условие Дирихле, и условие Неймана (переопределенная задача — задача Коши). Строятся аналитические и численные решения, восстанавливаются напряженно-деформированные состояния, тепловое и др., определяется внутренняя структура тела, сосредоточенные источники.

Примеры аналитических решений.

1. Уравнение Лапласа для полуплоскости: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Граничные условия: $u\big|_{y=0} = 2g_1(x)$, $\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = 2g_2'(x)$.

Решение $u = f(z) + \overline{f(z)}$, где $f(z) = g_1(z) - ig_2(z)$, $z = x + iy$, g_1, g_2 — заданные граничные функции.

2. Волновое уравнение для полубесконечного стержня: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

Граничные условия $u\big|_{x=0} = 2\beta(t)$, $\frac{\partial u}{\partial x}\big|_{x=0} = 2\frac{\gamma'(t)}{a}$.

Решение $u = [\beta(t - x/a) + \beta(t + x/a)] + [\gamma(t + x/a) - \gamma(t + x/a)]$, где β, γ — заданные граничные функции.

3. Плоская задача теории упругости для полуплоскости.

Граничные условия при $y = 0$:

$\sigma_y = f_1(x)$, $\tau_{xy} = f_2(x)$, $u_x = f_3(x)$, $u_y = f_4(x)$, где f_1, f_2, f_3, f_4 — произвольные функции.

Решение для потенциалов Колосова – Мусхелишвили:

$$\varphi(z) = \frac{\int [f_1(z) - if_2(z)]dz}{1+\aleph} + \frac{2\mu}{1+\aleph}[f_3(z) + if_4(z)] + C_1,$$

$$\psi(z) = \frac{\aleph}{1+\aleph}\int [f_1(z) + if_2(z)]dz - \frac{z}{1+\aleph}[f_1(z) - if_2(z)] - \frac{2\mu}{1+\aleph}[f_3(z) - if_4(z)$$
$$+ z(f_3'(z) + if_4'(z))] + C_2,$$

где f_1, f_2, f_3, f_4 — заданные граничные функции, $\aleph = 3 - 4\nu$, C_1, C_2 — постоянные.

Аналогичные решения имеют другие представленные задачи.

Строятся конечно-разностные алгоритмы численных решений задач Коши. Проводится их верификация с использованием имеющихся аналитических решений. Рассматривается вопрос о выделении особенностей в численных решениях с применением решений для сосредоточенных источников в безграничной среде. Решается вопрос о сглаживании граничных функций (построенных по дискретным значениям этих функций на границе) с применением корреляционного анализа с целью соблюдения корректности решений поставленных задач (устойчивая зависимость от входных данных).

НЕСКОЛЬКО НЕКОРРЕКТНЫХ ПОСТАНОВОК КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Чуешева Н. А.

Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия;
chuesheva@ngs.ru

В работе В. К. Белошапка [1] рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение с частными производными третьего порядка при $u = u(x,t)$

$$Lu \equiv u_x\, u_t\, (u_{xxt}\, u_t - u_{xtt}\, u_x) + u_{xt} \Big((u_x)^2\; u_{tt} - (u_t)^2\; u_{xx} \Big) = 0, \tag{1}$$

решениями которого являются гармонические функции различной сложности.

1) Пусть в полосе $\Pi_1 = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : \, x + t \in (0, y_0)\}$ [2] задано уравнение (1). На границе полосы зададим нулевые граничные условия

$$u|_{x+t=0} = 0, \quad u_x|_{x+t=0} = 0, \quad u_t|_{x+t=0} = 0, \quad u|_{x+t=y_0} = 0. \tag{2}$$

Тогда краевая задача (2) для уравнения (1) имеет ненулевое решение

$$u(x,t) = e^{-(x+t)} + \sqrt{2} \sin\left((x+t) - \pi/4\right).$$

2) Пусть в прямоугольнике $\Pi_2 = \big\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : \, x \in (0,\pi), \, t \in (0,1)\big\}$ задано уравнение (1) с граничными условиями $u(0,t) = u(\pi,t) = u(x,0) = u(x,1) = 0$. Решением этой задачи будет функция

$$u(x,t) = (\sin x)\; t\, \ln t \in C\left(\mathbb{R}^2\right),$$

если доопределить функцию по непрерывности $u(x,0) = 0$. Производная решения $u_t = \sin x\; (1 + \ln t)$ не ограничена в области Π_2, но $u_t \in L_2(\Pi_2)$. Однако решение задачи $u(x,t)$ не будет принадлежать пространству С. Л. Соболева $W_2^2(\Pi_2)$.

3) Пусть в полуполосе $\Pi_3 = \big\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : \, x \in (0,\pi), \, t \in (0,\infty)\big\}$ задано уравнение (1) с условиями на границе

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0, \quad u|_{t=0} = \frac{\sin(nx)}{n^5}, \quad u_t|_{t=0} = \frac{\sin(nx)}{n^4}. \tag{3}$$

Для натурального числа $n \geq 2$ решение $u(x,t) = \left(e^{nt} \sin(nx)\right) / \left(n^5\right)$ задачи (1), (3) будет неустойчивым.

Приведем несколько примеров точных решений уравнения (1).

4) Решением уравнения (1) будет аналитическая на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, без точек $z_k = (\pi/2) + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, функция

$$u(z) = \tan^2(x + it) = \tan^2(z).$$

Точки z_k являются полюсами второго порядка этого решения уравнения (1).

5) Решениями уравнения (1) будут функции

$$u(z) = \tan^2(x - it) = \tan^2(\overline{z}), \quad u(z) = \sin^2(x - it) = \sin^2(\overline{z}),$$

которые на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ не являются $\mathbb{C}$-дифференцируемыми.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белошапка В. К.* Семимерное семейство простых гармонических функций // Мат. заметки. 2015. Т. 98, вып. 6. С. 803–808.
2. *Чуешева Н. А.* Несколько уравнений высокого порядка // Сиб. журн. чист. и прикл. матем. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 103–117.

ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ В ТЕНЗОРНОЙ ТОМОГРАФИИ

Шарафутдинов В. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
sharaf@math.nsc.ru

Рассматривается лучевое преобразование I симметричных тензорных полей на выпуклой ограниченной области евклидова пространства. Основным результатом является оценка устойчивости

$$\|{}^s f\|_{L^2} \leq C\|If\|_{H^{1/2}},$$

где ${}^s f$ — соленоидальная часть тензорного поля f. Доказательство основано на обобщении неравенства Корна на симметричные тензорные поля произвольной валентности. Это — совместная работа с Яном Боманом (Стокгольмский университет).

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ АНАЛОГОВ УРАВНЕНИЙ ГЕЛЬФАНДА – ЛЕВИТАНА – КРЕЙНА

Шишленин М. А.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирский государственный университет,
Новосибирск, Россия;* mshishlenin@ngs.ru

Изложен алгоритм численного решения обратной задачи для систем уравнений гиперболического типа (уравнения акустики, Максвелла, Ламе) в трехмерном пространстве с дополнительной информацией на части полуплоскости (площадная система наблюдений).

Основная идея заключается в применении проекционного метода с последующим сведением обратной задачи к многомерным аналогам уравнений Гельфанда – Левитана – Крейна [1], [2], [3].

Представлены результаты численных расчетов и проведен сравнительный анализ численных алгоритмов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 15-01-09230, 16-29-15120), Министерства образования и науки Российской Федерации и Международного математического центра Новосибирского государственного университета.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kabanikhin S. I., Satybaev A. D., Shishlenin M. A.* Direct methods of solving multidimensional inverse hyperbolic problems. The Netherlands: VSP, 2004.
2. *Kabanikhin S. I., Novikov N. S., Oseledets I. V., Shishlenin M. A.* Fast Toeplitz linear system inversion for solving two-dimensional acoustic inverse problem // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2015. V. 23, No 6. P. 687–700.
3. *Kabanikhin S. I., Sabelfeld K. K., Novikov N. S., Shishlenin M. A.* Numerical solution of an inverse problem of coefficient recovering for a wave equation by a stochastic projection methods // Monte Carlo Methods Appl. 2015. V. 21, No 3. P. 189–203.

ON THE UNIQUE SOLVABILITY OF PERIODIC PROBLEM FOR THE SOBOLEV-TYPE PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

Assanova A. T.

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling MES RK, Almaty, Republic of Kazakhstan; anarasanova@list.ru

Consider the periodic problem for the Sobolev-type differential equation of the third order on the domain $\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = A(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + D(t,x)u + f(t,x), \tag{1}$$

$$\frac{\partial u(0,x)}{\partial x} = \frac{\partial u(T,x)}{\partial x} + \varphi(x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{2}$$

$$u(t,0) = \psi_1(t), \qquad t \in [0,T], \tag{3}$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=\omega} + \psi_2(t), \qquad t \in [0,T], \tag{4}$$

where the $u(t,x)$ is unknown function, the functions $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, $D(t,x)$, and $f(t,x)$ are continuous on Ω, the function $\varphi(x)$ is continuously differentiable on $[0,\omega]$, the functions $\psi_1(t)$ and $\psi_2(t)$ are continuously differentiable on $[0,T]$.

Periodic and nonlocal problems for the Sobolev-type partial differential equations appears in a various physical processes [1].

In present communication, we investigate conditions of an existence and uniqueness of a classical periodic solution to problem (1)–(4). For this goal we use the method of introduction of new functions [2]. Problem (1)–(4) is reduced to equivalent problem consisting to periodic problem for hyperbolic equation with unknown function and integral relation. Periodic problem for hyperbolic equation is studied by method of introduction special functional parameters [3]. This problem reduced to an equivalent problem involving Goursat problem for hyperbolic equation with parameters and periodic problems for ordinary differential equations. Algorithms for finding approximate solutions to equivalent problems are constructed and proved their convergence.

Also we propose the approach for finding of periodic solution to problem (1)–(4) based on thus algorithms. Sufficient conditions of existence unique periodic solution for the Sobolev-type partial differential equations (1)–(4) are established in the terms of coefficients of equation (1) and numbers T, ω.

The author was supported by the Grant of Ministry of Education and Sciences of the Republic of Kazakhstan (project no. 0822/ГФ4).

REFERENCES

1. *Soltanalizadeh V., Roohani Ghehsareh H., Abbasbandy S.*, "A super accurate shifted Tau method for numerical computation of the Sobolev-type differential equation with nonlocal boundary condition," Appl. Math. Comput., **236**, 683–692 (2014).
2. *Asanova A. T., Dzhumabaev D. S.*, "Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations," J. Math. Anal. Appl., **402**, No. 1, 167–178 (2013).
3. *Assanova A. T.*, "Periodic solutions in the plane of systems of second-order hyperbolic equations," Math. Notes, **101**, No. 1, 17–26 (2017).

THE INTEGRAL PROBLEM OF GEOMETRY FOR FAMILY OF PARABOLAS ON THE PLANE

Begmatov Akr. Kh.[1], **Ismoilov A. S.**[2]

Samarkand State University, Samarkand, Republic of Uzbekistan;
[1]akrambegmatov@mail.ru, [2]alisher_8778@mail.ru

The integral geometry problems are an intensively developing direction of modern mathematics, which is one of the largest directions in the theory of ill-posed problems of mathematical physics and analysis. Its tasks are closely related to numerous applications — the tasks of interpreting data from geophysical studies, electrical reconnaissance, acoustics and computed tomography.

One of the central problems of integral geometry is the restore of a function if its integrals over given manifolds are known.

We give the definition of the problem of integral geometry [1].

The uniqueness of a wide class of problems of integral geometry in the strip was established by V. G. Romanov [1]. Problems of a non-Volterra type were studied in the works of M. M. Lavrent'ev [2].

Weakly ill-posed problems of integral geometry of Volterra type with weight functions having a singularity were investigated in [3].

The uniqueness of theorems, stability estimates, and inversion formulas for weakly ill-posed problems of integral geometry with respect to special curves and surfaces with singularities are obtained in [4].

In this work, we consider the problem of reconstructing a function from a family of parabolas in the upper half-plane with a weight function having a singularity.

Let a family of curves smoothly fill $\mathbb{R}^2_+ = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}^1, y \geq 0\}$ and be uniquely parameterized with the help of the coordinates of its vertices (x, y), let $P(x, y)$ be an arbitrary curve of the family defined by the relations:

$$P(x,\ y) = \{(\xi, \eta) :\ (y - \eta) = (x - \xi)^2,\ 0 \leq \eta \leq y\}.$$

Formulation of the problem: Determine the function $u(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$ is in the band $\Omega = \{(x, y) :\ x \in \mathbb{R}^1,\ y \in (0, l),\ l < \infty\}$, the integrals of the function $u(\cdot)$ by the curves $P(x, y)$ are known

$$\int\limits_{x-\sqrt{y}}^{x+\sqrt{y}} g(x, \xi) u(\xi, y - (x - \xi)^2) d\xi = f(x, y), \tag{1}$$

where $g(\cdot) = |x - \xi|$.

The theorem of uniqueness for the solution of equation (1) is proved and the inversion formula is derived.

It is shown that the solution of the problem posed is weakly ill-posed, that is, stability estimates are obtained in spaces of finite smoothness.

REFERENCES

1. *Romanov V. G.*, Some Inverse Problems for Equations of Hyperbolic Type, Nauka, Novosibirsk (1972).
2. *Lavrent'ev M. M., Romanov V. G., Shishatskii S. P.*, Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis, Nauka, Novosibirsk (1984).
3. *Begmatov Akr. Kh.*, "Two classes of weakly ill-posed problems of integral geometry on the plane," Sib. Mat. Zh., **36**, No. 2, 243–247 (1995).
4. *Begmatov Akr. Kh.*, "Problems of integral geometry of special curves and surfaces with features at the vertices," Reports of the RAS, **358**, No. 2, 151–153 (1998).

THE PROBLEM OF INTEGRAL GEOMETRY WITH A WEIGHT FUNCTION OF A SPECIAL TYPE

Begmatov Akr. Kh.[1], **Ochilov Z. Kh.**[2]

Samarkand State University, Samarkand, Republic of Uzbekistan;
[1]akrambegmatov@mail.ru, [2]zarifjonochilov@mail.ru

We study the new problem of reconstruction of a function in a strip from its given integrals with known weight function along polygonal lines. We obtained two simply inversion formulas for a solution to the problem. We prove uniqueness and existence theorems for solutions and obtain stability estimates of the solution to the problem in Sobolev spaces and thus show its weak ill-posedness. Then we consider integral geometry problems with perturbation. The uniqueness theorems are proved and stability estimates of solutions in Sobolev spaces are obtained. The existence theorem is proved.

APPLICATION OF THE MINKOWSKI–FUNK TRANSFORM IN X-RAY TOMOGRAPHY

Kazantsev S. G.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia; kazan@math.nsc.ru

In this paper, we consider some problems of radiation tomography and obtain the formulas in which the Minkowski–Funk transform is used. In particular, we obtain a generalization of the well-known Gangeat's formula [1], which connects the 3D Radon transform with the X-ray transform. With help of the inversion formula for the Radon transform, Grangeat's formula leads immediately to an inversion procedure for the X-ray tomography data.

Let us consider the boundary value problem in the unit ball $\mathbb{B}^3$ with boundary $\mathbb{S}^2$ and let a function $a(x) \in L_2(\mathbb{B}^2)$:

$$\mathrm{div_x}\, \theta\, \mathrm{u}^-(\mathrm{x}, \theta) = \mathrm{a}(\mathrm{x}), \quad (\mathrm{x}, \theta) \in \mathbb{B}^3 \times \mathbb{S}^2, \tag{1}$$

$$u^-(\widehat{x}, \theta) = g(\widehat{x}, \theta) = -\frac{1}{2} \int_0^{-2\widehat{x}\cdot\theta} a(\widehat{x} + t\theta)\mathrm{d}t, \ (\widehat{x},\, \theta) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2. \tag{2}$$

Here the boundary function $g(\widehat{x}, \theta)$ defines the X-ray tomography data. We have the following

Theorem. *The solution of the problem* (1)–(2) *is equal to*

$$u^-(x, \theta) = v(x, \theta) - \frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{S}^2} \frac{\frac{d}{ds}\left[\mathcal{R}a\right](x\cdot\omega, \omega) d\omega}{\theta\cdot\omega}, \tag{3}$$

where

$$v(x, \theta) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \frac{\frac{d}{ds}\left[\mathcal{F}_s(\xi\cdot\theta) g(\xi, \theta)\right]_{s=x\cdot\omega}(\omega) d\omega}{\theta\cdot\omega},$$

$$[F_s f](\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \delta(s - \eta\cdot\theta) f(\theta) \mathrm{d}\theta$$

is the Minkowski–Funk transform of a function f on $\mathbb{S}^2$ and

$$[\mathcal{R}a](s, \eta) = \int_{\mathbb{B}^3} \delta(s - \eta\cdot x) a(x) \mathrm{d}x$$

is the 3D Radon transform. Moreover, the function $v(x, \theta)$ in (3) *satisfies the homogeneous boundary value problem*

$$\mathrm{div_x} \theta \mathrm{v}(\mathrm{x}, \theta) = 0, \quad (\mathrm{x}, \theta) \in \mathbb{B}^3 \times \mathbb{S}^2,$$

$$v(\widehat{x}, \theta) = 0, \quad (\widehat{x}, \theta) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2.$$

Remark. If we take, like Grangeat, $a(x) \in C_0^1(\mathbb{B}^3)$, then the first term in (3) will be identically equal to zero, $v(x, \theta) \equiv 0$, thus we obtain the well-known formulae in [2].

REFERENCES

1. *Grangeat P.,* "Mathematical framework of cone beam 3D reconstruction via the first derivative of Radon transform," in: Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1497, Springer, Berlin, Heidelberg, 1991, pp. 66–97.
2. *Kazantsev S. G.,* "Singular value decomposition for the cone-beam transform in the ball," J. Inverse Ill-Posed Probl., **23**, No. 2, 173–185 (2015).

PHASELESS INVERSE SCATTERING AND GLOBAL CONVERGENCE FOR INVERSE PROBLEMS

Klibanov M. V.

University of North Carolina at Charlotte, Charlotte, USA; mklibanv@uncc.edu

Inverse Scattering Problems without the phase information arise in applications to imaging of nanostructures. In this case the wavelength of the incident wave is of the order of one micron size. On this range of wavelengths only the intensity of the complex valued wave field can be measured. The phase cannot be measured. We will present uniqueness theorems and reconstruction methods (joint with V. G. Romanov) for these problems. In fact, these results address a well known unsolved problem posed in 1977 by French mathematicians K. Shadan and P. Sabatier. No other results on this topic were known prior to our publications in 2015–2016.

The second topic, which is closely connected with the first one, is the topic of globally convergent numerical methods for Coefficient Inverse Problems with single measurement data. Global convergence addresses the following crucial question: “*How to obtain at least one point in a sufficiently small neighborhood of the exact coefficient without any advanced knowledge of this neighborhood?*” In the last several years, the research group of the Speaker has achieved a significant progress in this topic. These results will be presented. In particular, we will present results for experimental data. These data were collected by our group.

REGULARIZATION OF INVERSE AND ILL-POSED PROBLEMS IN BIOLOGY

Krivorotko O. I.[1,2], **Kabanikhin S. I.**[1,2], **Yermolenko D. V.**[1,2], **Kashtanova V. N.**[1,2], **Latyshenko V. A.**[1]

[1]*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;*
[2]*Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia;*
olga.krivorotko@sscc.ru, kabanikhin@sscc.ru, ermolenko.dasha@mail.ru, vikakashtanova@ya.ru, latushenko_varia@mail.ru

Mathematical models of biological processes can be described by systems of nonlinear ordinary differential equations (ODE) and characterized by a set of its coefficients. These parameters describe features of immunity and disease in immunology, specific of regions and probability of individuals moving between fixed groups for epidemiology. It is necessary to find the set of parameters for constructing an optimal treatment plan for each patient and preparing an action plan to identify and treat patients for the prediction of the epidemic spread in a particular region.

An approach of inverse problem theory [1] in which the unknown parameters of mathematical model for systems of ODE should be determined from the available experimental data about given concentrations and number of individual at fixed time-points is used. Practical identifiability for inverse problems based on analyzing of sensitivity matrix is investigated. The optimal measurement time-points for additional data that is necessary for the set of parameter identification is derived. The problem of specifying the parameters of the mathematical model is reduced to the problem of minimizing objective functions describing the deviation of the simulation results from the experimental data with weights. That approach is called GLS method [2] and allows one to determine the noise level in measurements of inverse problems and necessary set of parameters. A genetic algorithm and fast annealing method for solving a least squares minimization problem are implemented and investigated.

The problem of optimal treatment control is solved by minimizing misfit function that characterizes combination of viral load and treatment cost. To find the optimal treatment the Pontryagin maximum principle [3] is applied.

In present talk the inverse problems for mathematical models of immunology (HIV dynamics [4]) and epidemiology (Tuberculosis and HIV co-infections [5]) are investigated and solved. Numerical results are presented and discussed.

This work is supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (4.1.3 The Joint Laboratories of NSU–NSC SB RAS) and President Grant no. MK-1214.2017.1.

REFERENCES

1. *Kabanikhin S. I.*, Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications, de Gruyter, Berlin/Boston (2012).
2. *Banks H. T., Thompson W. C.*, Modeling and Inverse Problems in the Presence of Uncertainty, Chapman Hall/CRC press, New York (2014).
3. *Arruda E. F., Dias C. M., Magalhães C. V., et.al.*, "An optimal control approach to HIV immunology," Appl. Math., **6**, 3–44 (1999).
4. *Adams B. M., Banks H. T., et.al.*, "HIV dynamics: modeling, data analysis, and optimal treatment protocols," J. Comput. Appl. Math., **184**, 10–49 (2005).
5. *Roeger L.-I. W., Feng Z., Castillo-Chavez C.*, "Modeling TB and HIV co-infections," Math. Biosci. Eng., **6**, No. 4, 815–837 (2009).

SOLVING THE INVERSE PROBLEM FOR MATHEMATICAL MODEL OF THE TRANSMISSION TB/HIV CO-INFECTION

Krivorotko O. I.[1], Kashtanova V. N.[2]

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;
[1]krivorotko.olya@mail.ru, [2]vikakashtanova@ya.ru

A lot of physical processes can be described by systems of ordinary differential equations (ODE). In this work we consider the mathematical model for spread of the epidemic of tuberculosis (TB) and human immunodeficiency virus (HIV) co-infection in the population that is described by the system of nonlinear ODE [1]. The coefficients of this system characterize the features of population and disease spread. Consequently, it is necessary to qualitatively evaluate parameters of model (or their combinations) [2] for specification model for specific population.

The purpose of this work is the construction and investigation of the numerical algorithm for solving inverse problem for mathematical model of TB/HIV co-infection transmission processes with treatment [1] using additional information about a given population according to statistical data for the previous few years (namely, the number of healthy, latently infected and infectious diseases individuals). The numerical algorithm is based on using very fast annealing method in generalized least squares (GLS) method [3]. The results of numerical calculations are presented and discussed.

This work is supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (4.1.3 The Joint Laboratories of NSU–NSC SB RAS) and President Grant no. MK-1214.2017.1.

REFERENCES

1. *Sharomi O., Podder C. N., Gumel A. B., Song B.*, "Mathematical analysis of the transmission dynamics of HIV/TB coinfection in the presence of treatment," Math. Biosci. Eng., **5**, No. 1, 145–174 (2008).
2. *Kabanikhin S. I.*, Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications, De Gruyter, Berlin (2012).
3. *Banks H. T., Hu Sh., Thompson W. C.*, Modeling and Inverse Problems in the Presence of Uncertainty, Chapman and Hall/CRC press (2014).

PREDICTION OF THE COASTAL PROFILE EVOLUTION

Lavrentiev M. M.[1,2], Spigler R.[3], Goriounov E. V.[1], Baramiya D. A.[1]

[1] *Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;*
[2] *Institute of Automation and Electrometry, Novosibirsk, Russia;*
mmlavrentiev@gmail.com
[3] *Roma Tre University, Rome, Italy;* spigler@mat.uniroma3.it

A diffusion-type equation to describe depth profile evolution has been derived in [1], applying mass conservation to the so-called 1-line model of coastal profiles. The diffusion coefficient in the governing equation, having the physical dimension of a square length divided by time, corresponds to the time scale of the shoreline change, following a disturbance (a wave action, e.g.). A high amplitude of the along-shore sand transport rate produces a rapid shoreline response, so that a new state of equilibrium with the incident waves is attained. Furthermore, a larger "distance of closure" indicates that a larger part of the beach profile participates in the sand movement, thus leading to a slower shoreline response.

The aforementioned diffusion model, introduced in [1], is based on the following equation:

$$\frac{\partial(\delta X)}{\partial t} = D(z)\frac{\partial^2(\delta X)}{\partial z^2} + \Psi\left(t, z, \delta X, \frac{\partial(\delta X)}{\partial z}\right). \tag{1}$$

Here, $\delta X(z,t)$ represents the change of cross-shore position (namely, the change in the depth at the distance z from the shoreline) of the coastal profile, and $D(z) > 0$ is the diffusion coefficient.

In this paper, we assume $\Psi = B(z)\delta X + f(t)$ in equation (1).

The model's calibration (choice of the space-dependent coefficients in the diffusion type governing equation) is based on the so-called Cost Functional (CF). This characterizes the mean square difference between the measured depth profile and the simulated (computed) one. The latter is obtained as the solution to the considered diffusion equation with the suggested values of model coefficients. In this paper, we investigate different forms of such CF in order to obtain smaller relative errors in the depth profile prediction.

As it was already mentioned in literature, the diffusion type model in equation (1) seems to be able to describe the long-term coastal profile evolution and may even *predict* the depth profile evolution for several years ahead. This is possible due an appropriate model set up by *calibration*, consisting of a suitable choice of **two** space-dependent model coefficients, $D(z)$ and $B(z)$. The "better" coefficients provide smaller value to the *point-wise* and the *integrated* Relative Error.

Numerical tests show that the quality of prediction of the depth profile evolution is rather poor close to the actual shore line. This could be explained by the fact that the diffusion model in equation (1) does not take into account the impact of the wave breaks and, possibly, some other near shore phenomenon. At the same time, in is not necessary to have the measurements up to the distance of closure, the location where any significant net sediment transport processes virtually ends.

REFERENCES

1. *De Vriend H. I., Capobianco M., Chesher T., de Swart T. H. E., Latteux B., Stive M. J. F.,* "Approaches to long-term modelling of coastal morphology: a review," Coastal Engineering, **21**, 225–269 (1993).

A NONCLASSICAL CAUCHY PROBLEM FOR THE GENERALIZED MAXWELL EQUATIONS

Makhmudov K. O.

Samarkand Branch of Tashkent University of Informational Technologies, Samarkand, Republic of Uzbekistan; kmakhmudov@bk.ru

An advertising slogan related to the Cauchy problem for elliptic equations is that, after J. Hadamard, the Cauchy problem for the Laplace equation is ill-posed.

The character of instability, solvability criteria and regularization methods of the Cauchy problem for elliptic equations are studied in [1]. For the complete bibliography, we refer the reader to this work. Much of the theory developed in [1] extends immediately to other ill-posed problems of complex analysis or partial differential equations.

This paper is motivated by a problem posed by M. M. Lavrent'ev in the early 1980s, see for instance [2]. It was found an explicit formula for the temperature inside a plane domain by using partial lateral and initial data.

The paper [3] gives a necessary and sufficient solvability condition for the Cauchy problem for the heat equation with partial lateral and initial conditions. To study this problem, one can apply immediately the constructive techniques elaborated in [1]. Then it remains to apply the inverse Laplace transform. In [4] we consider a Cauchy problem for the heat equation in cylinder over a domain $\partial\mathcal{X}$ in $\mathbb{R}^n$. The Fourier transform is an important method of studying several problems of mathematical physics and differential equations.

Let $\mathcal{X}$ be a bounded domain with smooth boundary in $\mathbb{R}^n$ and S be a nonempty open piece of the boundary surface $\partial\mathcal{X}$. We consider the Cauchy problem for the generalized Maxwell equations in the cylinder $\mathcal{C}_T = \mathcal{X} \times (0,T)$ with data on the strip $S \times (0,T)$ of the lateral surface of the cylinder, where $T > 0$ is a fixed number. More precisely, given functions g on $\mathcal{C}_T$ and u_0, f_0 on $S \times (0,T)$, we find a function u in $\mathcal{C}_T$ which satisfies

$$\begin{array}{rcll} u'_t &=& M(u,f) + g & \text{in} \quad \mathcal{C}_T, \\ t(u) &=& u_0 & \text{at} \quad S \times (0,T), \\ n(f) &=& f_0 & \text{at} \quad S \times (0,T), \end{array}$$

where $t(u)$, $n(f)$ are tangential operators on $\partial\mathcal{X}$ and $M(u,f)$ is the Maxwell operator [5].

REFERENCES

1. *Tarkhanov N.*, The Cauchy Problem for Solutions of Elliptic Equations, Akademie Verlag, Berlin (1995).
2. *Lavrent'ev M. M., Romanov V. G., Shishatskii S. P.*, Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis, Nauka, Moscow (1980).
3. *Puzyrev R., Shlapunov A.*, “On an ill-posed problem for the heat equation,” J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., **5**, No. 3, 337–348 (2012).
4. *Makhmudov K., Makhmudov O., Tarkhanov N.*, “A nonstandard Cauchy problem for the heat equation,” in: Preprints des Instituts f. Mathematik der Univ. Potsdam, 2015, pp. 1–14.
5. *Makhmudov K., Makhmudov O., Tarkhanov N.*, “Equations of Maxwell type,” J. Math. Anal. Appl., **378**, No. 1, 64–75 (2011).

ABOUT MINIMIZATION OF NUMERICAL EFFORTS FOR SOLVING OPERATOR EQUATIONS OF THE FIRST KIND

Myleiko G. L.[1], **Solodky S. G.**[2], **Semenova I. V.**[3]

Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, Ukraine;
[1]anna_mileyko@ukr.net, [2]solodky@imath.kiev.ua, [3]lebedeva@ipnet.kiev.ua

The present research is dedicated to estimates of complexity for severely ill-posed problems. Note that such problems have been intensively studied under the general theory of optimal algorithms. Within the framework of this theory, the information complexity is defined as the least amount of discrete information needed to find an approximate solution with given precision; the algorithmic complexity is considered as the minimal number of arithmetic operations that must be performed to construct such solution. Now we give the statement of the problem. Consider an operator equation of the I kind

$$Ax = f, \tag{1}$$

where $A \in \mathcal{L}(X, X)$, X is the Hilbert space. Assume that $\mathrm{Range}(A)$ is not closed in X and $f \in \mathrm{Range}(A)$. We also assume that instead of the right-hand side of (1) a perturbation $f_\delta \in X : \|f - f_\delta\| \le \delta$, $\delta > 0$ is given. Following [1] as severely ill-posed problems one can understand the equation (1) with exact solution satisfying a logarithmic source condition

$$M_p(A) := \{u : \ u = \ln^{-p}(A^*A)^{-1}v, \ \|v\| \le \rho\}.$$

Here $p, \rho > 0$ are some parameters, A^* is adjoint operator. Note that the exact information about smoothness of desired solution, namely, the value p is usually not available by practical experiment. For this reason, the set

$$M(A) := \bigcup_{p \in (0, p_1]} M_p(A), \tag{2}$$

where $0 < p_1 < \infty$ is an upper bound for possible values p, is considered instead of $M_p(A)$. The aim of our research is to construct an stable approximation to the exact solution $x^\dagger$ (1) which has the minimal norm in X, and belongs to the set $M(A)$ (2). Here the parameter p is supposed to be unknown.

For the operator equation (1) two efficient algorithms are developed. The ordinary Tikhonov method and a modification of the standard Galerkin scheme are applied as a regularizer and discretization scheme, correspondingly. To select a regularization parameter, we employ two different a posteriori rules, namely, discrepancy and balancing principles. Within the framework of the proposed algorithms estimates of information and algorithmic complexity are obtained.

REFERENCES

1. *Schock E., Pereverzev S. V.*, “Morozov’s discrepancy principle for Tikhonov regularization of severely ill-posed problems in finite-dimensional subspaces,” Num. Funct. Anal. Optim., **21**, No. 7–8, 901–916 (2000).

INVERSE SCATTERING PROBLEM FOR THE SCHRÖDINGER EQUATION IN MAGNETIC FIELD AND ACOUSTIC TOMOGRAPHY OF MOVING FLUID

Novikov R. G.

Centre de Mathématiques Appliquées, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France;
novikov@cmap.polytechnique.fr

In this talk, we report on applications of methods originally developed for the inverse scattering problem for the Schrödinger equation in magnetic field to the acoustic tomography of moving fluid. For more information we refer to [1]–[5] and references therein.

REFERENCES

1. *Henkin G. M., Novikov R. G.*, "A multidimensional inverse problem in quantum and acoustic scattering," Inverse Probl., **4**, 103–121 (1988).
2. *Novikov R. G.*, "The inverse scattering problem on a fixed energy level for the two-dimensional Schrödinger operator," J. Funct. Anal., **103**, 409–463 (1992).
3. *Agaltsov A. D., Novikov R. G.*, "Uniqueness and non-uniqueness in acoustic tomography of moving fluid," J. Inverse Ill-Posed Probl., **24**, No. 3, 333–340 (2016).
4. *Agaltsov A. D.*, Reconstruction Methods for Inverse Problems for Helmholtz-Type Equations, PhD thesis, Université Paris-Saclay (2016).
5. *Zotov D. I., Shurup A. S., Rumyantseva O. D.*, "Vector field reconstruction of flows using the Novikov–Agaltsov functional algorithm and the additive correlation method," Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics, **81**, No. 1, 101–105 (2017).

BOUNDARY RIGIDITY OF TWO-DIMENSIONAL MANIFOLDS WITHOUT CONJUGATE POINTS

Pestov L. N.

Immanuel Kant Baltic Federal University, Kalinigrad, Russia;
lpestov@kantiana.ru

Let (M, g) be a smooth compact Riemannian manifold with boundary ∂M and $d_g : \partial M \times \partial M \to \mathbb{R}$ is the boundary distance function. The boundary rigidity problem is the problem of injectivity of the map $g \to d_g$. There are several proven boundary rigid classes of manifolds: simple manifolds with conformal-euclidian metric (Mukhometov, Romanov), surface of non-negative curvature (Croke), two-dimensional simple manifolds (Pestov, Uhlmann), manifolds close to flat ones (Burago, Ivanov), manifolds with strictly convex function (Stefanov, Uhlmann, Vasy). All of these manifolds have strictly convex boundary. In this work the result of Pestov and Uhlmann is generalized up to two-dimensional manifolds without conjugate points (no boundary convexity assumption). The main result is

Theorem. *Let (M, g) be a two-dimensional non-trapping manifold with non-empty boundary and any geodesic has no conjugate points. Then (M, g) is boundary rigid.*

It means that if (M, g_1), (M, g_2) are two-dimensional non-trapping manifolds with the same boundary and (M, g_1) has no conjugate points and $d_{g_1} = d_{g_2}$, than (M, g_2) has no conjugate points too, and there exists an isometry $\varphi : (M, g_1) \to (M, g_2)$ such that $\varphi|_{\partial M}$ is identical map.

This work was supported by the Russian Science Foundation under grant no. 16-11-10027.

REFERENCES

1. *Croke C.*, “Rigidity for surfaces of non-positive curvature,” Comment. Math. Helv., **65**, 150–169 (1990).
2. *Burago D., Ivanov S.*, “Boundary rigidity and filling volume minimality of metrics close to a flat one,” manuscript (2005).
3. *Pestov L., Uhlmann G.*, “Two dimensional simple compact manifolds with boundary are boundary rigid,” Ann. Math., **161**, 1093–1110 (2005).
4. *Stefanov P., Uhlmann G., Vasy A.*, “Boundary rigidity with partial data,” J. Amer. Math. Soc., **29**, 299–332 (2016).

DIRECT AND INVERSE PROBLEMS OF POROELASTICITY

Priimenko V. I.[1], **Vishnevskii M. P.**[1,2]

[1]*North Fluminense State University Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, Brazil;*
slava@lenep.uenf.br, mikhail@uenf.br
[2]*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia*

The classic poroelastic theory of Biot, developed in 1950s, describes the propagation of elastic waves through a porous media containing a fluid [1], [2]. This theory has been extensively used in various fields dealing with porous media: continuum mechanics, oil/gas reservoir characterization, environmental geophysics, earthquake seismology, etc.

We study the propagation of elastic waves in porous media governed by the Biot equations in the low and high frequency ranges. In the low frequency case we prove the existence and uniqueness result both for the direct problem and the inverse one, which consists in identifying the unknown scalar function $f(t)$ in the body density force $f(t)\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ acting on a poroelastic body when some additional measurement is available [3].

In the case of the high frequency range (Biot-JKD approach) we prove the uniqueness and continuous dependence on the data of a weak solution both in unbounded and bounded time intervals and in all space dimensions [4].

Additionally, we discuss implementation of the matrix method to derive explicit formulas for the analysis of propagation of elastic waves through a stratified 3D porous media, where the parameters of the media are characterized by piece-wise constant functions of only one spatial variable, depth [5], [6].

The work has been supported by the UENF/CCT/LENEP/PRH-PB 226 Program, Petrobras, Brazil.

REFERENCES

1. *Biot M. A.*, “Theory of propagation of elastic waves in fluid saturated porous solid. I. Low frequency range”, J. Acoust. Soc. Amer., **28**, No. 2, 168–178 (1956).
2. *Biot M. A.*, “Theory of propagation of elastic waves in fluid saturated porous solid. II. Higher frequency range”, J. Acoust. Soc. Amer., **28**, No. 2, 179–191 (1956).
3. *Priimenko V. I., Vishnevskii M. P.*, “An identification problem related to the Biot system”, J. Inverse Ill-Posed Probl., **23**, No. 3, 219–230 (2015).
4. *Priimenko V. I., Lorenzi A.*, “Direct problems for poroelastic waves with fractional derivatives”, SIAM J. Math. Anal., **46**, No. 3, 1874–1892 (2014).
5. *Azeredo M., Priimenko V.*, “An algorithm for wave propagation analysis in stratified poroelastic media”, Eurasian J. Math. Comput. Appl., **3**, No. 3, 4–15 (2015).
6. *Miranda M. R. S. T., Priimenko V. I.*, “Poroelastic modeling in stratified media: Biot-JKD equations,” Expanded Abstracts, 15th International Congress of the Brazilian Geophysical Society, Rio de Janeiro, Brazil (2017).

NUMERICAL SOLUTION OF TWO-DIMENSIONAL GELFAND–LEVITAN INTEGRAL EQUATION

Temirbekova L. N.

Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Republic of Kazakhstan;
laura-nurlan@mail.ru

We consider numerical method of solving inverse problems for two dimensional coefficient hyperbolic equations. The coefficient inverse problem solved using the method of the two dimensional Gelfand–Levitan integral equation [1]. To numerically solve the two dimensional Gelfand–Levitan integral equation, which is the Fredholm integral equation of the first kind, we use effective parallel algorithms [2].

Consider the following inverse problem of hyperbolic type [3]

$$u_{tt}^{(k)} = u_{xx}^{(k)} + u_{yy}^{(k)} - q(x,y)u^{(k)}, \quad x > 0, \quad y \in (-\pi,\pi), \quad t \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$u^{(k)}|_{t=0} = 0, \;\; u_t^{(k)}|_{t=0} = h(y)\delta(x),$$

$$u^{(k)}|_{y=\pi} = u^{(k)}|_{y=-\pi}.$$

$$u^{(k)}(0,y,t) = f^{(k)}(y,t), \quad y \in (-\pi,\pi), \quad t > 0, \quad k \in \mathbb{Z},$$

where δ — Dirac delta function, k — some fixed number and $h(y) = e^{iky}$; $f^{(k)}(y,0) = 0$ — necessary condition.

The above problem is solved by two dimensional Gelfand–Levitan integral equation of the first kind, which has the form [1]–[3]

$$\frac{1}{2}[f^{(k)}(y,t+x) + f^{(k)}(y,t-x)] + \int\limits_{-x}^{x} \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(t-s)\widetilde{\omega}^{(m)}(x,y,s)ds = 0, \quad x > |t|.$$

The discrete counterpart to the Gelfand–Levitan equation is

$$\sum_{m=1}^{M} \sum_{i=-N}^{N} f_m^{(k)}(t_j - s_i)\widetilde{\omega}(x,y,s_i)\tau = -\frac{1}{2}[f^{(k)}(y,t_j+x) + f^{(k)}(y,t_j-x)].$$

The integral equation is numerically solved by direct and iteration parallel algorithms.

The author was supported by the project “Theory and numerical methods of solving inverse and ill-posed problems of natural science” of the Ministry of Education and Science of Kazakhstan (project no. 1746/GF4).

REFERENCES

1. *Gelfand I. M., Levitan B. M.,* “On the determination of a differential equation from its spectral function,” Izv. Acad. Nauk SSSR. Ser. Mat., **15**, 309–360 (1951).
2. *Kabanikhin S. I.,* Inverse and Ill-Posed Problems [in Russian], Siberian Scientific Publishers, Novosibirsk (2009).
3. *Romanov V. G.* Inverse Problems of Mathematical Physics, Nauka, Moscow (1984).

A PARAMETER IDENTIFICATION PROBLEM FOR MATHEMATICAL MODEL OF HIV DYNAMICS WITH TREATMENT

Yermolenko D. V.[1], Krivorotko O. I.[2], Kabanikhin S. I.[3]

Novosibirsk State University, Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia;
[1]ermolenko.dasha@mail.ru, [2]olga.krivorotko@sscc.ru, [3]kabanikhin@sscc.ru

Mathematical models of biological processes can be described by systems of nonlinear ordinary differential equations and characterized by a set of coefficients. These parameters describe features of immunity and disease. It is necessary to find the set of parameters for constructing an optimal treatment plan.

In this paper the mathematical model of HIV dynamics [1], [2] is investigated. This model is characterized by parameters of immunity and disease. A conditional stability of the direct problem is obtained.

An approach of inverse problem theory [3] in which the unknown parameters of mathematical model of HIV-dynamics are determined from the available experimental data about given concentrations is used. The problem of specifying the parameters of the mathematical model is reduced to the problem of minimizing an objective function describing the deviation of the simulation results from the experimental data. Linearized matrix of inverse problem is obtained by using methods of linearization and discretization. The stability of the inverse problem solution is analyzed using the singular value decomposition for linearized matrix of discrete inverse problem. A genetic algorithm for solving a least squares minimization problem was implemented and investigated. The frequency of measurements of T-lymphocytes, free virus, and immune effectors is analyzed. It has been shown that as the number of measurements increases, the arithmetic mean relative error decreases. The problem of optimal treatment control is solved by minimizing misfit function that characterizes combination of viral load and treatment costs. To find the optimal treatment control, the Pontryagin maximum principle [4] is applied. Numerical results are presented and discussed.

This work is supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (4.1.3 The Joint Laboratories of NSU–NSC SB RAS) and President Grant No. MK-1214.2017.1.

REFERENCES

1. *Adams B. M., Banks H. T., et.al.*, “HIV dynamics: modeling, data analysis, and optimal treatment protocols,” J. Comput. Appl. Math., **184**, 10–49 (2005).
2. *Perelson A. S., Nelson P. W.*, “Mathematical analysis of HIV-1 dynamics in vivo,” SIAM Rev., **41**, No. 1, 3–44 (1999).
3. *Kabanikhin S. I.*, Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications, de Gruyter, Berlin/Boston (2012).
4. *Arruda E. F., Dias C. M., Magalhães C. V., et.al.*, “An optimal control approach to HIV immunology,” Appl. Math., **6**, 3–44 (1999).

СЕКЦИЯ 6

Теория вероятностей и математическая статистика

Тезисы докладов

SECTION 6

Probability Theory and Mathematical Statistics

Abstracts

ВЕРОЯТНОСТНАЯ ОЦЕНКА ЧИСЛА ОБУСЛОВЛЕННОСТИ МАТРИЦЫ

Антюфеев В. С.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; ant@osmf.sscc.ru

Исследуется число ν обусловленности плохо обусловленной матрицы системы алгебраических уравнений $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ со случайными ошибками $\Delta\boldsymbol{b}, \Delta\boldsymbol{x}$ ($A\Delta\boldsymbol{x} = \Delta\boldsymbol{b}$). Выполняется неравенство

$$\frac{|\Delta\boldsymbol{x}|}{|\boldsymbol{x}|} \leq \nu \cdot \frac{|\Delta\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{b}|}, \quad \text{где} \quad \nu = \max_{\Delta\boldsymbol{b}|} \nu(|\Delta\boldsymbol{b}|) \cdot ||A||_2, \quad \nu(|\Delta\boldsymbol{b}|) = \frac{|\Delta\boldsymbol{x}|}{|\Delta\boldsymbol{b}|}.$$

Здесь $\mathbf{L} = \nu(|\Delta\boldsymbol{b}|)$ — случайная величина. Рассматривается ее функция распределения. Для нее доказана

Теорема. *Пусть $\lambda_k \to 0$; $\boldsymbol{s}^n = (s_1^n, \ldots, s_n^n)$ — случайная точка, распределенная равномерно на единичной сфере S^{n-1}; F_n — функция распределения случайной величины $\mathbf{L} = (\lambda_1^2(s_1^n)^2 + \ldots + \lambda_n^2(s_n^n)^2)^{1/2}$. Тогда для всех $t \in \mathbb{R}$*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(t) = \chi(t) \quad (\chi - \text{функция Хевисайда}),$$

причем сходимость $F_n \to \chi$ — равномерная на множестве $\mathbb{R} \setminus (0, \varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$.

Показано, что утверждение теоремы позволяет — при выполнении некоторых естественных условий — значительно уменьшить величину числа ν в практических расчетах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984.
2. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1969.
3. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969.

О ВЕРОЯТНОСТНЫХ СВОЙСТВАХ КЛАСТЕРНЫХ АНСАМБЛЕЙ

Бериков В. Б.[1], **Татарников В. В.**[2]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
[1]`berikov@math.nsc.ru`, [2]`vadim.tatarnikov@gmail.com`

В настоящее время актуальной задачей является вероятностное обоснование методов машинного обучения и анализа данных. В кластерном анализе данных требуется найти разбиение выборки на однородные по некоторому критерию группы. Для решения этой задачи широко используется коллективный (ансамблевый) подход [1], в котором итоговое разбиение строится на основе набора базовых разбиений, полученных алгоритмами кластеризации путем рандомизированного выбора их параметров (или некоторых “условий обучения”, таких, как подмножества переменных, случайные подвыборки, исходные инициализации). В работах [2], [3] предложены модели ансамблевой группировки, рассматривающие задачу кластеризации как задачу классификации с латентными классами. При этом для исследования свойств ансамбля адаптирован подход, основанный на нахождении характеристик *маржинальной функции* (функции отступа, *margin*), предложенный L. Breiman [4] для случайного леса решений.

С использованием указанных моделей найдены зависимости между верхними границами вероятности ошибки при отнесении произвольной пары объектов к одному или различным кластерам и характеристиками базовых решений. Доказано, что при выполнении определенных условий вероятность ошибки стремится к нулю при увеличении числа элементов ансамбля. Найдены оценки числа элементов, позволяющие достичь заданного качества работы. Для случая ансамбля алгоритмов с весами получены выражения для оптимальных весов.

В докладе рассматриваются различные варианты конфигурации ансамбля (однородный или неоднородный ансамбль), приводятся результаты для случая, когда при нахождении ансамблевого решения дополнительно учитываются индексы качества базовых разбиений (cluster validity inices).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ghosh J., Acharya A.* Cluster ensembles // Wiley Interdisciplinary Reviews: Data Mining and Knowledge Discovery. 2011. V. 1, No 4. P. 305–315.
2. *Berikov V.* Weighted ensemble of algorithms for complex data clustering // Pattern Recognit. Lett. 2014. V. 38. P. 99–106.
3. *Berikov V., Pestunov I.* Ensemble clustering based on weighted co-association matrices: error bound and convergence properties // Pattern Recognition. 2017. V. 63. P. 427–436.
4. *Breiman L.* Random forests // Mach. Learn. 2001. V. 45, No 1. P. 5–32.

УНИВЕРСАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ В ЗАДАЧАХ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ РЕГРЕССИИ

Борисов И. С.[1], Линке Ю. Ю.[2], Рузанкин П. С.[3]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
[1]sibam@math.nsc.ru, [2]linke@math.nsc.ru, [3]ruzankin@math.nsc.ru

Рассматривается следующая модель непараметрической регрессии:

$$X_k = \eta(z_k) + \xi_k, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где $\eta(z)$ — неизвестный п.н. непрерывный случайный процесс на $[0,1]$, план эксперимента $\{z_k;\, k = 1, \ldots, n\}$ состоит из наблюдаемых случайных величин с неизвестными распределениями на отрезке $[0,1]$, не зависящих от $\eta(\cdot)$; при этом не предполагается, что $\{z_i\}$ независимы или одинаково распределены. Так что случай детерминированного плана эксперимента также вкладывается в рассматриваемую схему.

Далее, в (1) предполагается, что случайные ошибки $\{\xi_k\}$, которые не обязательно независимы или одинаково распределены, с вероятностью 1 удовлетворяют следующим условиям:

$$\mathbf{E}_{\eta,\{z_i\}}\xi_k = 0, \quad \sup_k \mathbf{E}_{\eta,\{z_i\}}\xi_k^2 \le \sigma^2, \quad \mathbf{E}_{\eta,\{z_i\}}\xi_k\xi_m = 0$$

для всех $k, m \le n$, $k \ne m$, где символ $\mathbf{E}_{\eta,\{z_i\}}$ обозначает условное среднее при фиксированном плане эксперимента $\{z_i;\, i = 1, \ldots, n\}$ и траектории случайного процесса $\eta(\cdot)$, а σ^2 — некоторая положительная неизвестная постоянная.

Рассмотрим вариационный ряд $0 = z_{n:0} \le z_{n:1} \le \ldots \le z_{n:n} \le z_{n:n+1} = 1$, построенный по выборке $\{z_k;\, k = 1, \ldots, n\}$. Введем центральное условие на план эксперимента:

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\le i\le n+1} (z_{n:i} - z_{n:i-1}) = 0 \quad \text{с вероятностью 1.} \tag{2}$$

Понятно, что условие (2) выполнено для обобщенного эквидистантного плана $z_i := g(i/n) + o(1/n)$, где символ $o(1/n)$ равномерен по i и функция g непрерывна. Более того, если случайные величины $\{z_i\}$ одинаково распределены, причем носитель общего распределения совпадает с отрезком $[0,1]$, то при выполнении условия сильного перемешивания $\{z_i\}$ свойство (2) имеет место. При этом нетрудно привести примеры более жесткой формы зависимости случайных величин $\{z_i\}$, для которых условие (2) также будет иметь место.

В докладе обсуждается конструкция ядерной оценки $\eta_n^*(z)$, построенной по выборке $\{(X_i, z_i);\, i = 1, \ldots, n\}$, для которой при выполнении (2) справедливо предельное соотношение

$$\sup_{0\le z\le 1} |\eta_n^*(z) - \eta(z)| \xrightarrow{p} 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

ХАРАКТЕРИЗАЦИОННЫЕ И ОБОБЩЕННЫЕ МОМЕНТНЫЕ ТОЖДЕСТВА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Висков О. В.[1], **Хохлов В. И.**[2]

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия;
[1]`viskov@mi.ras.ru`, [2]`tvp@tvp.ru`

В контексте задач моментной характеризации вероятностных распределений будут представлены и дополнены комментариями:

1) коллекция известных характеризационных моментных тождеств для классических распределений теории вероятностей и математической статистики;

2) новый универсальный способ получения характеризационных моментных тождеств (первого порядка) типа тождеств Стейна – Чена [1];

3) моментные тождества высших порядков, не являющиеся характеризационными (обобщенные моментные тождества), и способы их применения в задачах линеаризации произведений многочленов, ортогональных относительно ряда классических распределений теории вероятностей [2]–[4], или, например, в перечислительных задачах комбинаторики.

В основе упомянутого в п. 2) способа лежит следующая теорема.

Теорема. *Правый аннулятор*

$$\mathcal{W}_\mu(\mathcal{D}) = \mathcal{X} - \frac{\mathcal{P}'_\mu(\mathcal{D})}{\mathcal{P}_\mu(\mathcal{D})}$$

моментного оператора $\mathcal{E}_\mu$ является и характеризатором этого оператора.

Под *моментным оператором* $\mathcal{E}_\mu$ здесь подразумевается функционал, определенный на пространстве многочленов $\{p(x)\}$ вещественного переменного соотношением $\mathcal{E}_\mu\big[p(x)\big] = \int p(x)\,\mu(dx)$ в случае, когда определен *производящий оператор* $\mathcal{P}_\mu$ для распределения μ, под которым, в свою очередь, подразумевается задаваемый соотношением $\mathcal{P}_\mu\left[f(x)\right] = \int f(x+y)\,d\mu(y)$ (вероятностный) оператор $\mathcal{P}_\mu$ на линейном пространстве функций $\{f(x)\}$, для которых определено усреднение по мере μ всех сдвигов $f(x+y)$ при любом вещественном x; $\mathcal{X}$ — оператор умножения функции на независимое переменное, $\mathcal{D}$ — оператор дифференцирования.

Работа выполнена по программе РАН № 0014-2016-0038.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Viskov O. V., Maksimov V. M., Khokhlov V. I.* Annulators, pre-annulators and characterizators of probabilistic measures // Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis. Rostov-on-Don: DSTU Publ. Center. 2015. P. 178–180.
2. *Висков О. В., Прохоров Ю. В., Хохлов В. И.* Обобщенное тождество Стейна и его применение к задаче линеаризации для многочленов Эрмита // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2011. Т. 18, № 6. С. 833–838.
3. *Висков О. В., Прохоров Ю. В., Хохлов В. И.* Многочлены Пуассона – Шарлье и обобщение тождества Чена // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2012. Т. 19, № 1. С. 3–8.
4. *Висков О. В., Хохлов В. И.* Обобщенное моментное тождество для отрицательного биномиального распределения и его применение в задаче линеаризации // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2016. Т. 23, № 5. С. 3–10.

ПОСТРОЕНИЕ ЯВНЫХ ОЦЕНОК В ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ

Линке Ю. Ю.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
linke@math.nsc.ru

Асимптотически оптимальные оценки в задачах нелинейной регрессии, как правило, задаются неявно в виде решений тех или иных уравнений. При этом ситуация, когда у таких уравнений существует несколько корней, весьма типична. Как в этом случае выбрать тот из корней, который приближает параметр? Один из подходов при решении указанной проблемы состоит в использовании так называемых одношаговых процедур. Идея одношагового оценивания, восходящая к работам Р. Фишера, заключается в следующем: в качестве стартовой точки итерационной процедуры ньютоновского типа используется не произвольная точка, а предварительная состоятельная оценка, сходящаяся к параметру с нужной скоростью. Оказывается, в этом случае достаточно лишь одного шага итерационной процедуры, чтобы получить оценку с такой же асимптотической точностью, как и искомая статистика.

В докладе будут приведены некоторые результаты, связанные с асимптотическими свойствами одношаговых M-оценок, построенных по разнораспределенным выборочным данным. Особое внимание будет уделено приемам построения предварительных оценок в задачах нелинейной регрессии. Предлагаемая в докладе методология будет проиллюстрирована результатами компьютерного моделирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Linke Yu. Yu.* Asymptotic normality of one-step M-estimators based on non-identically distributed observations // Stat. Probab. Lett. 2017. V. 129, No 10. P. 216–221.
2. *Линке Ю. Ю.* Асимптотические свойства одношаговых взвешенных M-оценок с приложениями к задачам регрессии // Теория вероятн. и ее примен. 2017. Т. 62, вып. 3. (в печати).
3. *Linke Yu. Yu., Borisov I. S.* Constructing initial estimators in one-step estimation procedures of nonlinear regression // Stat. Probab. Lett. 2017. V. 120, No 1. P. 87–94.
4. *Линке Ю. Ю., Борисов И. С.* Построение явных оценок в задачах нелинейной регрессии // Теория вероятн. и ее примен. (принята к печати).

ПРИНЦИП СВЕРХБОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Логачёв А. В.[1]**, Логачёва О. М.**[2]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;* omboldovskaya@mail.ru

[2] *Сибирский государственный университет геосистем и технологий, Новосибирск, Россия;* omboldovskaya@mail.ru

Получен принцип сверхбольших уклонений для последовательности решений стохастических дифференциальных уравнений Ито, не содержащих снос.

Рассмотрим уравнение Ито

$$\eta_n(t) = x_0 + \frac{1}{\varphi(n)} \int_0^t \sigma(n\eta_n(s))dw(s), \tag{1}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0,1]$, $w(t)$ — винеровский процесс, заданный на стохастическом базисе $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, \mathbf{P})$, $\sigma(x)$ — неслучайная абсолютно дифференцируемая функция, которая удовлетворяет условию: найдется $\lambda > 1$ такое, что

$$\frac{1}{\lambda} < |\sigma(x)| < \lambda,$$

$\varphi(n)$ — положительная функция, стремящаяся к ∞ при $n \to \infty$.

Для уравнений вида (1) возможны три режима для принципа больших уклонений в зависимости от скорости роста функции $\varphi(n)$: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} = 0$ — умеренные уклонения (п.у.б.у.); 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} = k > 0$ — большие уклонения; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} = \infty$ — сверхбольшие уклонения (п.с.б.у.), см., например [1]. Отметим, что в работе [2] получен п.у.б.у. для решений уравнений типа (1), содержащих снос. Будем использовать обозначения: $(\mathbf{C}[0,1], \rho)$ — пространство непрерывных функций с заданной равномерной метрикой, $\mathbf{AC}_{x_0}$ — множество абсолютно непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций, стартующих из точки x_0, $\mathbf{1}(\cdot)$ — индикатор.

Теорема. *Предположим, что выполнены условия*
1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} = \infty$;
2) $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{\sigma(x)}dx = \frac{1}{b_1}$; $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T}^0 \frac{1}{\sigma(x)}dx = \frac{1}{b_2}$.
Тогда последовательность мер $\mathbf{P}_n(A) = \mathbf{P}(\eta_n(\cdot) \in A)$, $A \in \mathfrak{B}(\mathbf{C}[0,1], \rho)$, *удовлетворяет п.с.б.у. в пространстве* $(\mathbf{C}[0,1], \rho)$ *с нормирующей функцией* $\psi(n) = \varphi^2(n)$ *и функционалом уклонений*

$$I(f) := \begin{cases} \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \dot{f}^2(s)\left(\frac{\mathbf{1}(f(s)\geq 0)}{b_1} + \frac{\mathbf{1}(f(s)<0)}{b_2}\right)^2 ds, \ \text{если } f \in \mathbf{AC}_{x_0}, \\ \infty, \ \text{если } f \notin \mathbf{AC}_{x_0}. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Freidlin M. I., Sowers R. B.* A comparison of homogenization and large deviations, with applications to wavefront propagation // Stochastic Processes Appl. 1999. V. 82. P. 23–52.
2. *Logachov A. V.* Large deviations for solutions of one dimensional Itô equations // Theory Probab. Math. Stat. 2015. V. 90. P. 127–137.

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ НЕЧЁТКИХ ВЫБОРОК В ЗАДАЧАХ ПОСТРОЕНИЯ РЕШАЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Неделько В. М.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
nedelko@math.nsc.ru

Идея построения нечётких выборок неформально состоит в следующем. Как известно, выборке можно сопоставить эмпирическую функцию распределения, которая дискретна. Во многих случаях дискретные функции гораздо более сложны и менее удобны для работы, чем непрерывные. Предлагается в роли эмпирических функций распределения использовать непрерывные функции, которые будут интерпретироваться как распределение нечётких объектов (по сути получаем функцию принадлежности). Такая конструкция будет называться нечёткой выборкой. При этом мы не выделяем индивидуальные объекты, а определяем для всей выборки общую функцию принадлежности, в силу чего вся выборка является одним нечётким объектом. Последнее является принципиальным отличием подхода от известных работ, где в качестве выборки рассматриваются совокупности отдельных нечётких объектов.

Основная сложность при использовании нечётких выборок заключается в том, что для них отсутствует естественная конструкция вероятностного пространства, как для обычных выборок. В работе будут рассмотрены вероятностные конструкции для нечётких выборок, позволяющие, в частности, оценивать распределения заданных статистик.

Введение понятия нечёткой выборки позволяет разделить "форму" выборки (конфигурацию точек) и её объём. Это может быть очень удобным при исследовании эффективности метода классификации при различных объёмах выборки. Также становится возможным более точно задавать требуемые конфигурации. Например, понятие равномерной расстановки пяти точек в единичном квадрате неоднозначно, в отличие от равномерного распределения. Кроме того, исследование метода на новом классе сущностей потенциально способно выявить новые его свойства [1].

Понятие нечёткой выборки в литературе достаточно широко используется [2], но используется для представления неточных данных, а не для анализа методов построения решающих функций (как это предлагается здесь). Простейший вариант нечёткой выборки был использован в работе [3], где позволил упростить вывод некоторых свойств бустинга [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Неделько В. М.* Исследование эффективности некоторых линейных методов классификации на модельных распределениях // Машинное обучение и анализ данных. 2016. Т. 2, № 3. С. 305–328.
2. *Vahedian A., Sadoghi Yazdi M., Effati S., Sadoghi Yazdi H.* Fuzzy cost support vector regression on the fuzzy samples // Appl. Intell. 2011. V. 35, No 3. P. 428–435.
3. *Неделько В. М.* К вопросу об эффективности бустинга в задаче классификации // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2015. Т. 15, вып. 2. С. 72–89.
4. *Mease D., Wyner A.* Evidence contrary to the statistical view of boosting // J. Mach. Learn. Res. 2008. V. 9. P. 131–156.

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ АНОСОВА

Подвигин И. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
ipodvigin@math.nsc.ru

Пусть $(\Omega, \mathcal{B}, \mu; T)$ — измеримая динамическая система, т. е. $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ — вероятностное пространство, а $T : \Omega \to \Omega$ — сохраняющее меру μ отображение. Одной из задач статистической теории динамических систем (см., например, [1]) является нахождение функций $f \in L_2(\Omega, \mu)$, генерирующих стационарную последовательность $X_n = f \circ T^n, n \in \mathbb{N}$, для которой выполняется центральная предельная теорема.

В докладе в качестве примера рассматривается диффеоморфизм Аносова T, действующий на C^∞-гладком компактном многообразии с SRB-мерой μ. В этом случае хорошо известно, что класс функций, для которых справедлива ЦПТ, достаточно обширен и содержит все гёльдеровские и даже кусочно-гёльдеровские функции (см., например, [2]). В докладе обсуждается подход Стенлунда [3], позволяющий выводить ЦПТ для функций из некоторого класса через быстрое убывание парных корреляций для всех функций из этого же класса. На основе этого подхода показывается справедливость ЦПТ для всех характеристических функций χ_B, $B \in \mathcal{B}$, с условием, что μ-мера δ-окрестности границы ∂B растет как $\mathcal{O}(\delta^l)$ для некоторого $l > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Denker M.* The central limit theorem for dynamical systems // Banach Cent. Publ. 1989. V. 23, No 1. P. 33-62.
2. *Chernov N. I.* Limit theorems and Markov approximations for chaotic dynamical systems // Probab. Theory Relat. Fields. 1995. V. 101, No 3. P. 321–326.
3. *Stenlund M.* A strong pair correlation bound implies the CLT for Sinai billiards // J. Stat. Phys. 2010. V. 140, No 1. P. 154–169.

АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫЕ ЯВНЫЕ ОЦЕНКИ НЕИЗВЕСТНОГО ПАРАМЕТРА В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СТЕПЕННОЙ РЕГРЕССИИ

Савинкина Е. Н.[1], **Саханенко А. И.**[2]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
savinkinae@gmail.com

[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
aisakh@mail.ru

Предположим, что наблюдаются случайные величины $\{Y_i\}$, представимые в виде

$$Y_i = \sqrt{1+\alpha x_i} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

где $\{\varepsilon_i\}$ — ненаблюдаемые независимые одинаково распределённые погрешности такие, что $\mathbb{E}\varepsilon_1 = 0$, $\mathbb{D}\varepsilon_1 = \sigma^2$, а $\{x_i > 0\}$ — некоторая известная числовая последовательность. Нам требуется оценить неизвестный положительный параметр α.

В работе [1] была получена оценка первого шага α_n^*. Теперь в качестве оценки второго шага предлагается брать следующую оценку:

$$\alpha_n^{**} = \alpha_n^* - \sum_{i\le n}\left(x_i - \frac{Y_i x_i}{\sqrt{1+\alpha_n^* x_i}}\right) \Bigg/ \left(\frac{3}{4}\sum_{i\le n}\frac{x_i^2}{1+\alpha_n^* x_i} - \frac{1}{4}\sum_{i\le n}\frac{x_i^2 Y_i}{(1+\alpha_n^* x_i)^{3/2}}\right).$$

Теорема. *Пусть при* $A_n := \sum_{i\le n}\frac{x_i^2}{1+\alpha x_i}$ *выполнены условия*

$$\max_{i\le n}\frac{x_i^2}{1+\alpha x_i}\Big/ A_n \to 0 \ \text{ и } \ |\alpha_n^* - \alpha|^6 A_n \xrightarrow{p} 0.$$

Тогда статистика α_n^{**} *является асимптотически нормальной оценкой параметра* α*, т. е. имеет место сходимость*

$$\frac{\sqrt{A_n}(\alpha_n^{**} - \alpha)}{2\sigma} \Rightarrow \zeta, \quad \text{где } \ \zeta \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Показано также, что явная оценка α_n^{**} имеет ту же точность, что и оценка, полученная по методу наименьших квадратов, нахождение которой в данной задаче представляет значительную техническую трудность.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-07460).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Савинкина Е. Н., Саханенко А. И.* Явные оценки неизвестного параметра в одной задаче степенной регрессии // Сиб. электрон. мат. изв. 2014. Т. 11. С. 725–733.

УПРАВЛЯЕМЫЙ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СТАТИСТИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗЫ ОБ ОДНОРОДНОСТИ ДВУХ ВЫБОРОК

Салов Г. И.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; sgi@ooi.sscc.ru

Рассматривается управляемый непараметрический статистический критерий (тест) для проверки гипотезы об однородности двух выборок, частный случай которого эквивалентен критерию Вилкоксона.

Пусть $X_1, \ldots, X_m$ и $Y_1, \ldots, Y_{2n}$ — независимые случайные выборки из произвольных непрерывных распределений F_X и F_Y соответственно. Требуется проверить статистическую гипотезу H_1, состоящую в том, что все X_i и Y_j распределены одинаково, против альтернативной гипотезы H_2, согласно которой X_i имеют тенденцию быть стохастически больше, чем Y_j.

Широко применяемый критерий Вилкоксона (Wilcoxon F., 1945) эквивалентен критерию Манна и Уитни (Mann H. B. and Whitney D., 1947), который основан на считающей статистике U и имеет вид

$$U = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{2n} \mathbf{I}\{X_i > Y_j\} > C.$$

Введем статистики $S^0 = mn - S^+ - S^-$,

$$S^+ = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{I}\{X_i > \max(Y_j, Y_{j+n})\}, \quad S^- = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{I}\{X_i < \min(Y_j, Y_{j+n})\},$$

Лемма. *Критерий Вилкоксона – Манна – Уитни* (WMW-*критерий*) *эквивалентен критериям*

$$S^+ > (C - S^0_E)/2 \quad \text{и} \quad S^+ - S^- > C - mn.$$

Доказательство следует из равенств (эквивалентности) событий

$$\{S^+ > (C - S^0)/2\} = \{2S^+ + S^0 > C\} = \{U > C\}.$$

Отсюда представляется естественным перейти к более общему (управляемому) критерию вида

$$S^+ > h(S^0) \quad \text{или} \quad S^+ - S^- > 2h(S^0) + S^0 - mn$$

и пытаться отыскать такую функцию h, чтобы вероятность принять гипотезу H_2, когда она верна, была больше, чем в случае применения WMW-критерия, используя подход, основанный, например, на концепции “близких” гипотез [1].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-07-00066) и Программы I.33П Президиума РАН (проект № 0315-2015-0012).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Салов Г. И.* О мощности одного нового статистического критерия и двухвыборочного критерия Вилкоксона // Автометрия. 2014. Т. 50, № 1. С. 44–59.

ОБ ОДНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ, СВЯЗАННОЙ С ВЕРОЯТНОСТНЫМ ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА

Смородина Н. В.

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия; smorodina@pdmi.ras.ru

Обозначим через P^t группу унитарных операторов $P^t = e^{\frac{it}{2}D}$, где D — оператор, действующий в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ на области определения $W_2^2(\mathbb{R})$ по правилу $Du(x) = u''(x)$. Группа P^t переводит начальную функцию φ в решение $u(t,\cdot)$ уравнения Шрёдингера $-i\,\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (см. [1]).

Пусть $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность н.о.р. неотрицательных случайных величин. Мы предположим, что случайная величина ξ_1 имеет конечный четвертый момент и $\mathbf{E}\xi_1^2 = 1$.

Далее, пусть $\eta(t)$, $t \geqslant 0$ — стандартный ($\mathbf{E}\eta(t) = t$) пуассоновский процесс, не зависящий от последовательности $\{\xi_j\}$. Обозначим $m_1 = \mathbf{E}\xi_1 > 0,\ m_3 = \mathbf{E}\xi_1^3 > 0$.

Для каждого натурального n определим процесс $\zeta_n(t)$, $t \in [0,T]$, полагая

$$\zeta_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\eta(nt)} (\xi_j - m_1).$$

Определим полугруппу операторов P_n^t, полагая для $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$

$$P_n^t\varphi(x) = \mathbf{E}\Big((\varphi_+ * R_n^t)\big(x + e^{\frac{i\pi}{4}}\zeta_n(t)\big) + (\varphi_- * R_n^t)\big(x - e^{\frac{i\pi}{4}}\zeta_n(t)\big) \Big),$$

где функция R_n^t задается своим преобразованием Фурье, именно

$$\widehat{R_n^t}(p) = \exp\left(-\frac{i^3\sigma^3 t|p|^3}{6\sqrt{n}} \right),$$

а функции φ_+, φ_- определяются как

$$\varphi_+(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{-ipx}\widehat{\varphi}(p)dp, \quad \varphi_-(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-ipx}\widehat{\varphi}(p)dp.$$

Функция φ_+ аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость, а φ_-, соответственно, в нижнюю.

Теорема. *Существует $C > 0$ такое, что для любой функции $\varphi \in W_2^4(\mathbb{R})$ и всех $t > 0$ справедливо*

$$\|P_n^t\varphi - P^t\varphi\|_{L_2} \leqslant \frac{C\,t}{n}\|\varphi\|_{W_2^4}.$$

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01136).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 2. М.: Мир, 1978.

ОЦЕНКИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НАЛИЧИЯ ЧАСТИЦ ФИКСИРОВАННОГО ТИПА В МНОГОМЕРНЫХ ПРОЦЕССАХ БЕЛЛМАНА – ХАРРИСА

Топчий В. А.

Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; topchij@ofim.oscsbras.ru

Пусть $\mathbf{Z}^i(t) = \bigl(Z_1^i(t), Z_2^i(t), \cdots, Z_n^i(t)\bigr)$, $t \geq 0$, — многомерный неразложимый непериодический критический процесс Беллмана – Харриса, начинающийся с одной частицы типа $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Компоненты вектора с номером j интерпретируются как численность частиц типа j в момент времени t. Частица i-го типа живет случайное время $\tau_i > 0$ с функцией распределения $G_i(t) =: 1 - \mathfrak{q}_i(t)$ и в момент гибели производит случайные количества потомков разных типов, описываемые вектором $(\xi_{i1}, \xi_{i2}, \ldots, \xi_{in})$, где номер компоненты соответствует количеству потомков этого типа. Пусть $\mathbb{E}\xi_{ij}\xi_{is} < \infty$ при всех i, j, s. Все частицы эволюционируют независимо друг от друга, а стохастические характеристики для частиц одного типа совпадают, но могут различаться для частиц разных типов.

Обозначим $\mu_j := \mathbb{E}\tau_j \leq \infty$, $\mu_j(t) = \int_0^t \mathfrak{q}_j(u)\mathrm{d}u$ и положим, что существует $0 \leq n_0 < n$ такое, что

- если $j \geq n_0 + 1$, то выполнены условия: $\mu_j = \infty$, более того, для некоторых медленно меняющихся на бесконечности функций $\ell_j(t)$ и постоянных $\beta_j \in (0, 1]$ верно представление $\mathfrak{q}_j(t) = 1 - G_j(t) = t^{-\beta_j}\ell_j(t)$ и $\mathfrak{q}_j(t) = O(\mathfrak{q}_n(t))$;
- если $j \leq n_0$, то $\mu_j < \infty$ и в случае $\beta_n = 1$ верна оценка $\mathfrak{q}_j(t) = o\bigl(\mathfrak{q}_n(t)\bigr)$.

Нас интересует асимптотическое поведение $\mathbb{P}\{Z_j^i(t) > 0\}$ — вероятностей наличия частиц j-го типа в момент времени t. Вероятности невырождения процесса в момент времени $t - \mathbb{P}\{\mathbf{Z}^i(t) > 0\}$ и $\mathbb{P}\{Z_j^i(t) > 0\}$ для j таких, что в дополнение к предшествующим условиям $\mathfrak{q}_n(t) = O(\mathfrak{q}_j(t))$, описаны в [1], и, с точностью до задаваемых явно постоянных, эти вероятности эквивалентны $\sqrt{\mathfrak{q}_n(t)}$. Если же $\mathfrak{q}_j(t) = o(\mathfrak{q}_n(t))$, то $\mathbb{P}\{Z_j^i(t) > 0\} = o(\sqrt{\mathfrak{q}_n(t)})$. Явный вид $\mathbb{P}\{Z_j^i(t) > 0\}$ асимптотики $\mathfrak{q}_j(t) = o(\mathfrak{q}_n(t))$ ранее был получен в [2] только при $n = 2$, $n_0 = 1$ и $\beta_n = \beta_2 \in (0, 0.5]$ (т. е. при $j = 1$). В частности, при $\int_0^\infty \mu_2^{-2}(t)\mathrm{d}t < \infty$ вероятности $\mathbb{P}\{Z_1^i(t) > 0\}$ асимптотически пропорциональны $\mu_2^{-1}(t)$.

Последние результаты удалось обобщить на многомерный случай. В частности, при $\int_0^\infty \mu_j^2(t)\mu_n^{-2}(t)\mathrm{d}t < \infty$ вероятности $\mathbb{P}\{Z_j^i(t) > 0\}$ асимптотически пропорциональны $\mu_j(t)\mu_n^{-1}(t)$.

Работа выполнена по программе I.1.3. фундаментальных исследований СО РАН (проект “Развитие стохастических, аналитических и численных методов исследования математических моделей динамики популяций, биомедицинских процессов и механики вязких жидкостей”).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ватутин В. А.* Дискретные предельные распределения числа частиц в ветвящихся процессах Беллмана – Харриса с несколькими типами частиц // Теор. вероятн. и ее примен. 1979. Т. 24, вып. 3. С. 503–514.
2. *Ватутин В. А., Топчий В. А.* Критические ветвящиеся процессы Беллмана – Харриса с долго живущими частицами // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2013. Т. 282. С. 257–287.

LARGE-SCALE JOIN – IDLE – QUEUE SYSTEM WITH GENERAL SERVICE TIMES

Foss S. G.[1], **Stolyar A. L.**[2]

[1] *Heriot-Watt University, Edinburgh, UK;*
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;
s.foss@hw.ac.uk
[2] *University of Illinois, Urbana-Champaign, USA;*
stolyar@illinois.edu

A parallel server system with n identical servers is considered. The arrival process is assumed to be renewal. The service time distribution has a finite mean b, but otherwise is arbitrary. Arriving customers are routed to one of the servers immediately upon arrival. Join – Idle – Queue routing algorithm is studied, under which an arriving customer is sent to an idle server, if such is available, and to a randomly uniformly chosen server, otherwise.

We consider the asymptotic regime, where $n \to \infty$ and the customer input flow rate is λn. Under the condition $\lambda b < 1/2$, we prove that, as $n \to \infty$, the sequence of (appropriately scaled) stationary distributions concentrates at the natural equilibrium point, with the fraction of occupied servers being constant equal λb. In particular, this implies that the steady-state probability of an arriving customer waiting for service vanishes.

The case of exponential service times was considered earlier in [1].

REFERENCES

1. *Stolyar A. L.*, "Pull-based load distribution in large-scale heterogeneous service systems," Queueing Syst., **80**, No. 4, 341–361 (2015).
2. *Foss S. G., Stolyar A. L.*, "Large-scale Join–Idle–Queue system with general service times," J. Appl. Probab. (to appear).

OPTIMAL MEAN-VARIANCE INVESTMENT AND REINSURANCE PROBLEM WITH STOCHASTIC VOLATILITY: A BSDE APPROACH

Guo J.

School of Mathematical Sciences, Nankai University, Tianjin, People's Republic of China; jyguo@nankai.edu.cn

In this paper, we apply the backward stochastic differential equation (BSDE) approach to investigate an optimal investment and reinsurance problem of an insurer under the mean-variance criterion. A diffusion approximation to a risk process is considered and the stochastic volatility of the stock is described by a Cox – Ingersoll – Ross (CIR) process. We first consider a backward stochastic differential equation, then associate the closed-form expressions of the efficient frontiers and efficient strategies with the solution of the BSDE. Finally, economic behavior of the efficient frontiers is analyzed numerically.

LIMIT THEOREM FOR BACKWARD STOCHASTIC EQUATIONS

Kachanova I. A.

Kuban State University, Krasnodar, Russia; egishora.22.81@mail.ru

Consider a weak convergence in Meyer–Zheng topology of solutions of backward stochastic equations in form

$$Y^{\varepsilon}(t) = E\left[g^{\varepsilon}\Big(X^{\varepsilon}(T)\Big) + \int\limits_{t}^{T} f^{\varepsilon}\Big(s, X^{\varepsilon}(s), Y^{\varepsilon}(s)\Big)\, ds \,\Big|\, \mathcal{F}_t^{X^{\varepsilon}}\right]$$

as $\varepsilon \to 0$ for the random processes $X^{\varepsilon}(t)$ which are the weak solutions of one-dimensional stochastic equations with local time, namely

$$X^{\varepsilon}(t) \;=\; x + \;\beta_{\varepsilon}\; L^{X^{\varepsilon}}(t,0) \;+\; \int\limits_{0}^{t} (b_1^{\varepsilon}(X^{\varepsilon}(s)) + b_2^{\varepsilon}(X^{\varepsilon}(s)))\, ds \;+\; \int\limits_{0}^{t} \sigma^{\varepsilon}(X_s^{\varepsilon})\, dw(s)\,,$$

where $|\beta_{\varepsilon}| < 1$, $w(s)$ is a Wiener process. Note that the coefficients of processes $X^{\varepsilon}(t)$ can have an irregular dependence on the parameter ε.

The equations for limit process are obtained under certain assumptions on the coefficients of processes $Y^{\varepsilon}(t)$ and $X^{\varepsilon}(t)$.

REFERENCES

1. *Makhno S. Ya.*, Stochastic Equations. Limit Theorems, Naukova Dumka, Kyiv (2012).
2. *Pardoux S., Peng S.*, “Adapted solution of backward stochastic differential equation,” Syst. Control Lett., **14**, 55–61 (1990).
3. *Buckhadan R., Engelbert H. J., Rascanu A.*, “On weak solutions of backward stochastic differential equations,” Theory Probab. Appl., **49**, 70–107 (2004).
4. *Meyer P., Zheng W. A.*, “Tightness criteria for laws of semimartingales,” Annales In.H.P., **20**, No. 2, 353–372 (1984).
5. *Makhno S. Ya., Yerisova I. A.*, “Limit theorems for backward stochastic equations,” Theory Stoch. Process., **14**, No. 2, 93–107 (2004).
6. *Krykun I. G.*, “Limit theorem for solutions of stochastic equations with local time,” Proceedings of Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, **10**, 120–130 (2005).

INEQUALITIES FOR RUIN PROBABILITY

Lotov V. I.[1], **Lvov A. P.**[2]

[1]*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;* lotov@math.nsc.ru
[2]*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*

Let $X_1, X_2, \ldots$ be i.i.d. random variables, and $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Given arbitrary $a > 0$ and $b > 0$, we introduce the random variable

$$N = N_{a,b} = \inf\{n \geq 1 : \ S_n \notin (-a, b)\},$$

equal to the first exit time from the interval $(-a, b)$ for the random walk, and let $\beta(a, b) = P(S_N \geq b)$. This quantity is usually called the ruin probability due to the known application. The study of $\beta(a, b)$ and $\mathbf{E}N$ is also very important for many problems of sequential analysis.

The exact calculation of $\beta(a, b)$ is available only in some particular situations. This is why the accent in the study shifted to finding approximating formulas and, in particular, to the study of the asymptotics of the ruin probability in the cases when asymptotic analysis is possible (e.g., in a triangular array scheme with reducing jumps of a walk or if $a + b \to \infty$). Obtaining estimates in the form of inequalities is a natural complement to asymptotic studies of the ruin probability.

The aim of the talk is to present some upper and lower bounds for $\beta(a, b)$ under various conditions on the distribution of X_1.

The authors were supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00049).

INTEGRO-LOCAL LIMIT THEOREMS FOR MULTIDIMENSIONAL COMPOUND RENEWAL PROCESSES

Mogulskii A. A.[1], **Prokopenko E. I.**[2]

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia; [1]mogul@math.nsc.ru, [2]evgenii.prokopenko@gmail.com

Let $(\tau, \boldsymbol{\zeta})$, $(\tau_1, \boldsymbol{\zeta}_1)$, $(\tau_2, \boldsymbol{\zeta}_2)$, $\cdots$ be a sequence of i.i.d. random vectors in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, $\tau > 0$,

$$T_0 := 0, \quad T_n := \sum_{j=1}^{n} \tau_j, \quad Z_0 := \mathbf{0}, \quad \mathbf{Z}_n := \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{\zeta}_j;$$

$$\eta(t) := \max\{k \geq 0 : \ T_k < t\}, \quad \nu(t) := \min\{k \geq 0 : \ T_k \geq t\}.$$

The compound renewal processes $\mathbf{Z}(t)$, $\mathbf{Y}(t)$ for the sequence $(\tau_j, \boldsymbol{\zeta}_j)$, $j \geq 1$, are defined as

$$\mathbf{Z}(t) := \mathbf{Z}_{\eta(t)}, \quad \mathbf{Y}(t) := \mathbf{Z}_{\nu(t)}, \quad t \geq 0.$$

Let the Cramér moment condition for $(\tau, \boldsymbol{\zeta})$ hold. For a vector $\boldsymbol{x} = (x_{(1)}, \cdots, x_{(d)}) \in \mathbb{R}^d$ put

$$\Delta[\boldsymbol{x}) := [x_{(1)}, x_{(1)} + \Delta) \times [x_{(2)}, x_{(2)} + \Delta) \times \cdots \times [x_{(d)}, x_{(d)} + \Delta), \quad \Delta > 0.$$

We establish the exact asymptotics for the probabilities

$$\mathbf{P}(\mathbf{Z}(t) \in \Delta[\boldsymbol{x})), \quad \mathbf{P}(\mathbf{Y}(t) \in \Delta[\boldsymbol{x})), \quad \text{as} \quad t \to \infty$$

in the range of normal and large deviations.

The second author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 17-11-01173).

INTEGRO-LOCAL ESTIMATES FOR THE TIME OF ATTAINING THE MAXIMUM BY THE POISSON PROCESS WITH LINEAR DRIFT

Mosyagin V. E.[1], **Shvemler N. A.**[2]

Tyumen State University, Tyumen, Russia;
[1]vmosyagin@mail.ru, [2]shvemler.natalya@mail.ru

Let $\nu_-(t)$, $\nu_+(t)$ be independent standard Poisson processes for $t \geqslant 0$ and extended by zero for $t < 0$.

Define stochastic process:

$$Y(t) = at - \nu_+(pt) + \nu_-(-qt), \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{1}$$

where the fixed parameters $p > a > q > 0$ provide for the process (1) negative middle drift and the existence of the random variable $t^* = t^*(p, a, q) = \operatorname{argmax} Y(t)$, which distribution function was found in [1].

Denote the positive function $\Lambda(z) = z - 1 - \ln z$, $z > 0$.

Theorem. *If* $0 \leqslant \delta \leqslant 1/a$, *then for all* $x \in (-\infty, \infty)$

$$\mathbf{P}\left(x \leqslant t^* \leqslant x + \delta\right) \leqslant \delta \cdot d \cdot \exp\left\{-c|x|\right\},$$

where $c = a \cdot \min\left\{\Lambda(p/a), \Lambda(q/a)\right\}$, *and the constant* $d = d(p, a, q) > 0$ *doesn't depend on* x.

The authors were supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 15-01-07460A).

REFERENCES

1. *Mosyagin V. E., Shvemler N. A.*, “Distribution of the time of attaining the maximum for the difference of the two Poisson's processes with negative linear drift,” Sib. Electron. Math. Reports, **13**, 1229–1248 (2016).

THE BERRY – ESSEEN BOUND FOR GENERAL MARKOV CHAINS

Nagaev S. V.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;
nagaev@math.nsc.ru

The subject of this communication is the proximity of the normal approximation for the distribution of sums of random variables defined on the Markov chain. More exactly, our aim is to extend the Berry – Esseen bound to non-uniformly ergodic Markov chains. As for uniformly ergodic Markov chains, in this case the Berry – Esseen type bound was obtained in our paper [1]. Bolthausen [2] obtained the bound $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ in CLT for countable Markov chains. In the sequel he extended this bound to the chains with the general state space [3] by using Nummelin's [4] splitting technique. Strictly speaking, it is not the Berry – Esseen bound in full measure since it does not depend explicitly on ergodic properties of the Markov chain and does not contain an absolute constant. In brief Bolthausen's bound takes into account only the dependence of n. By contrast, our bound includes some parameters related to ergodic properties of the Markov chain, along with an absolute constant. We assume that the Markov chain under consideration satisfies the conditions that are used in [5] (these conditions in slightly different form were first introduced in [6]). Remark that our bound acts for any initial distribution, whereas Bolthausen confines himself to the case of a stationary Markov chain. It should be noted that we do not use the splitting technique. Our approach is quite a different.

REFERENCES

1. *Nagaev S. V.*, "More exact statements of limit theorems for homogeneous Markov chains," Theory Probab. Appl., **6**, No. 1, 62–81 (1961).
2. *Bolthausen E.*, "The Berry–Esseen theorem for functionals of discrete Markov chains," Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb., **54**, No. 1, 59–73 (1980).
3. *Bolthausen E.*, "The Berry–Esseen theorem for strongly mixing Harris recurrent Markov chains," Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb., **60**, No. 3, 283–289 (1982).
4. *Nummelin E.*, "A splitting technique for Harris recurrent Markov chains," Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb., **43**, No. 4, 309–318 (1978).
5. *Athreya K. B.*, *Ney P.*, "A new approach to the limit theory of recurrent Markov chains," Trans. Am. Math. Soc., **245**, 493–501 (1978).
6. *Nagaev S. V.*, "Ergodic theorems for discrete-time Markov processes" [in Russian], Sib. Mat. Zh., **6**, No. 2, 413–432 (1965).

ON LARGE DEVIATION PROBABILITIES FOR THE BINOMIAL DISTRIBUTION IN CASE OF THE POISSON APPROXIMATION

Nagaev S. V.[1], **Chebotarev V. I.**[2]

[1] *Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;*
nagaev@math.nsc.ru
[2] *Computing Centre FEB RAS, Khabarovsk, Russia;*
chebotarev@as.khb.ru

In the present work tail probabilities for the binomial distribution are studied. In 1963 W. Hoeffding [1] obtained the inequality for the tail probabilities in the general case of sums of bounded independent random variables from which the inequality for the binomial case follows. M. Talagrand [2] sharpened the Hoeffding inequality, finding a bound of the so-called missing factor. However, his bound contains some indefinite constant. In our previous paper submitted to “Journal of Mathematical Sciences” we got a bound for this factor with explicit values for constants, considering the problem in the case of Bernoulli trials, when the Gaussian approximation holds.

In this work we obtain a bound of the missing factor in the case of the Poisson approximation for the binomial distribution. Note that in both cases Cramer’s approach [3] is used, based on the application of Esscher’s transformation. As a consequence of this bound we get a result close to that found by V. A. Statulyavichus and A. K. Aleshkyavechene in more general case in [4]. The consideration of the special case have allowed us to obtain estimates in explicit form and, therefore, more accurate.

Note that in 2004 V. Bentkus [5] showed that tail probabilities for the binomial distribution, up to a constant factor, majorize tail probabilities in the general case. Thus, his result allows to reduce the general case to the particular one which we consider in this work.

REFERENCES

1. *Hoeffding W.*, “Probability inequalities for sums of bounded random variables,” J. Am. Stat. Assoc., **58**, No. 301, 13–30 (1963).
2. *Talagrand M.*, “The missing factor in Hoeffding inequalities,” Ann. Inst. Henri Poincaré, Probab. Stat., **31**, No. 4, 689–702 (1995).
3. *Cramér H.*, “On a new limit theorem of probability theory,” Russ. Math. Surv., **10**, 166–178 (1944) [Russian translation from French by B. V. Gnedenko]. Original Text: *Cramér H.*, “Sur un nouveau théorème-limite de la théorie des probabilités,” Actual. Sci. Ind. (1938).
4. *Statulyavichus V. A., Aleshkyavechene A. K.*, “On large deviations in the Poisson approximation” [in Russian], Teor. Veroyatn. Primen., **38**, No. 2, 460–469 (1993).
5. *Bentkus V.*, “On Hoeffding’s inequalities,” Ann. Probab., **32**, No. 2, 1650–1673 (2004).

ON FIRST-PASSAGE TIMES FOR MARTINGALES

Sakhanenko A. I.

Novosibirsk State University, Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia; aisakh@mail.ru

We consider martingales in the domain of attraction of the Brownian motion. Under appropriate additional assumptions we investigate the asymptotic behaviour of the distributions of first-passage times over moving boundaries. Using a new approach, we find exact asymptotics and show that they are different from the corresponding asymptotics for the Brownian motion even in the case of a constant boundary.

Remark. This is a joint work with D. Denisov and V. Wachtel. The partial case of independent increments was considered earlier in [1].

The author was supported by the Russian Science Foundation (project no. 17-11-01173).

REFERENCES

1. *Denisov D., Sakhanenko A., Wachtel V.*, "First-passage times for random walks with non-identically distributed increments," arxiv.org/abs/1611.00493.

ON JOINT DISTRIBUTION OF GRUBBS' STATISTICS IN CASE OF NORMAL SAMPLE WITH OUTLIER

Shiryaeva L. K.

Samara State University of Economics, Samara, Russia; Shiryeva_LK@mail.ru

Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be a random sample of n observations; $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \ldots \le X_{(n-1)} \le X_{(n)}$ be a series of ordered observations constructed by the sample. We consider the case, when certain $(n-1)$ of n observations have the identical normal distribution $N(a, \sigma^2)$, and one of them (its number is unknown) has the normal distribution $N(a + \alpha\sigma, \nu\sigma^2)$. Therefore, an outlier X_{out} differs from the other observations by parameters α and $\nu > 0$, the number of outlier in the sample is unknown.

We consider one-sided Grubbs' statistics

$$T_{n,(1)} = (\overline{X} - X_{(1)})/S, \qquad T_n^{(1)} = (X_{(n)} - \overline{X})/S,$$

where $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ и $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$.

We denote $G_{n,(1)}(t;\alpha,\nu) = P(T_{n,(1)} < t)$, $G_n^{(1)}(t;\alpha,\nu) = P(T_n^{(1)} < t)$,

$$\Upsilon_n(t_1, t_2; \alpha, \nu) = P(T_{n,(1)} < t_1, T_n^{(1)} < t_2).$$

If the sample is homogeneous, then $\alpha = 0$ and $\nu = 1$. In this case the following equality is true $G_n^{(1)}(t;0,1) = G_{n,(1)}(t;0,1)$. In paper [1] the recursive formulas for the marginal distribution function $G_n^{(1)}(t;0,1)$ were obtained. In paper [2] the recursive formulas for the joint distribution function $\Upsilon_n(t_1,t_2;0,1)$ were obtained. In paper [3] the following theorems were proved.

Theorem 1. *For $n > 2$ $\forall\alpha \in \mathbb{R}$ and $\nu > 0$ equalities are true*

$$G_{n,(1)}(t;\alpha,\nu) = G_n^{(1)}(t;-\alpha,\nu) \ \ \forall t \in \mathbb{R},$$

$$G_n^{(1)}(t;\alpha,\nu) = \begin{cases} 0 \ \ (t \le 1/\sqrt{n})\,; \qquad\qquad 1 \ \ (t \ge (n-1)/\sqrt{n})\,; \\ \int\limits_{-\frac{n-1}{\sqrt{n}}}^{t} G_{n-1}^{(1)}\left(\rho_n(t,x);0,1\right) f_{\widetilde{T}_n}(x;\alpha,\nu)dx \ \ (1/\sqrt{n} < t < (n-1)/\sqrt{n})\,, \end{cases}$$

where $\rho_n(t,z) = \sqrt{(n-2)/(n-1)}\,((n-1)t + z)\Big/\sqrt{(n-1)^2 - nz^2}$, $|z| < (n-1)/\sqrt{n}$; $f_{\widetilde{T}_n}(t;\alpha,\nu)$ *is the density of random variable* $\widetilde{T}_n = (X_{out} - \overline{X})/S$, *which were found in* [4].

Theorem 2. *For $n > 2$ $\forall\alpha \in \mathbb{R}$ and $\nu > 0$ equality is true*

$$\Upsilon_n(t_1,t_2;\alpha,\nu) = \begin{cases} G_n^{(1)}(t_2;\alpha,\nu),\ t_1 \ge (n-1)/\sqrt{n};\ G_{n,(1)}(t_1;\alpha,\nu),\ t_2 \ge (n-1)/\sqrt{n}; \\ \int_{-t_1}^{t_2} \Upsilon_{n-1}\left(\rho_n(t_1,-x), \rho_n(t_2,x);0,1\right) f_{\widetilde{T}_n}(x;\alpha,\nu)dx,\ (t_1,t_2) \in \Delta_n; \\ 0,\ t_1 < 1/\sqrt{n} \ \ or \ \ t_2 < 1/\sqrt{n}, \end{cases}$$

where $\Delta_n = [1/\sqrt{n} \le t_1 \le (n-1)/\sqrt{n}; 1/\sqrt{n} \le t_2 \le (n-1)/\sqrt{n}]$.

REFERENCES

1. *Zhang J., Keming Y.*, "The null distribution of the likelihood-ratio test for one or two outliers in a normal sample," Test, **15**, No. 1, 141–150 (2006).
2. *Shiryaeva L. K.*, "On null and alternative distribution of statistic of two-side discordancy test for an extreme outlier," Russ. Math., **58**, No. 10, 52–66 (2014).
3. *Shiryaeva L. K.*, "On distribution of Grubbs' statistics in case of normal sample with outlier," Russ. Math., **61**, No. 4, 72–88 (2017).
4. *Shiryaeva L. K.*, "Calculation of measures of power of the Grubbs criterion for an outlier" [in Russian], Sib. Zh. Ind. Mat., **13**, No. 4, 141–154 (2010).

ON THE ASYMPTOTICS OF THE MOMENTS OF SOJOURN TIME OF A RANDOM WALK ON A SEMI-AXIS

Tarasenko A. S.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia; dkanus@gmail.com

Let $\xi_1, \xi_2, \ldots$ be a sequence of independent and identically distributed random variables and let $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, then

$$T_n(b) = \sum_{i=1}^{n} I_{\{S_i \geqslant b\}}$$

is a sojourn time of random walk $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ above boundary b. We study the moments of $T_n(b)$ and present a set of results concerning their asymptotic behaviour.

The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00049).

СЕКЦИЯ 7

Вычислительная математика

Тезисы докладов

SECTION 7

Computational Mathematics

Abstracts

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ: АЛГОРИТМЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Аверина Т. А.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия; ata@osmf.sscc.ru

Будут рассмотрены численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) с пуассоновской составляющей и их применение для решения двух типов задач: 1) моделирование и исследование процесса нуклеации с учетом заряда капли и 2) прогнозирование для нелинейных стохастических систем с пуассоновской составляющей.

Стохастические дифференциальные уравнения являются очень удобным аппаратом для исследования физических и инженерных задач. **Первая задача.** Начальная флуктуационная стадия фазового перехода первого рода представлена моделью процесса конденсации, описанной СДУ с винеровской и пуассоновской составляющими. Кластеризация зародышей жидкой фазы в форме капель происходит с учетом релеевской неустойчивости заряженных капель [1]. **Вторая задача.** Модель динамической системы описывается стохастическим дифференциальным уравнением в смысле Ито, содержащем общий пуассоновский процесс [2]. Для этой динамической системы ставится задача прогнозирования, состоящая в оценивании вектора состояния по результатам измерений. В основе статистического алгоритма лежит моделирование траекторий вспомогательного процесса с обрывами и ветвлениями с последующим усреднением для получения оптимальной оценки по критерию минимума среднеквадратического отклонения ошибки оценивания. Устойчивые алгоритмы решения СДУ для непрерывной компоненты процесса [3] дополнены алгоритмами моделирования неоднородной пуассоновской меры [4]–[5].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-05052).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Averina T. A., Zmievskaya G. I.* Numerical modeling of the initial fluctuation condensation stage with charge drops // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2016. V. 158, No 1. P. 1–8.
2. *Аверина Т. А., Рыбаков К. А.* Приближенное решение задачи прогнозирования для стохастических систем диффузионно-скачкообразного типа // Сиб. журн. вычисл. математики. 2017. Т. 20, № 1. С. 1–14.
3. *Аверина Т. А., Алифиренко А. А.* Анализ устойчивости линейного осциллятора с мультипликативным шумом // Сиб. журн. вычисл. математики. 2007. Т. 10, № 2. С. 127–145.
4. *Аверина Т. А.* Использование модификаций метода максимального сечения для моделирования систем со случайной структурой с распределенными переходами // Сиб. журн. вычисл. математики. 2016. Т. 19, № 3. С. 235–247.
5. *Аверина Т. А., Рыбаков К. А.* Два метода анализа стохастических систем с пуассоновской составляющей // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2013. № 3. С. 85–116.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭРОЗИИ МАТЕРИАЛА СТЕНКИ ТЕРМОЯДЕРНОГО РЕАКТОРА ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ НА НЕГО МОЩНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ ПОТОКОВ ПЛАЗМЫ

Аракчеев А. С.[1,3], Лазарева Г. Г.[2,3], Максимова А. Г.[3]

[1] *Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[2] *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[3] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
asarakcheev@gmail.com, lazareva@ssd.sscc.ru, maksimova@sscc.ru

Конструирование первой стенки и диверторных пластин является одной из проблем в международном проекте ИТЭР (International Thermonuclear Experimental Reactor). Использующиеся материалы должны хорошо отводить тепло, мало распыляться частицами из плазмы, мало накапливать водород, не разрушаться механически, не плавиться и не разбрызгиваться при ожидаемых в токамаке импульсных воздействиях мощных потоков частиц и энергии. Такая стойкость материалов к воздействию мощных плазменных потоков необходима и для термоядерных реакторов на основе другой геометрии магнитного поля. В ИЯФ СО РАН проводится экспериментальное и теоретическое моделирование условий, вызывающих интенсивную эрозию вольфрама. При помощи мощного электронного пучка моделируется соответствующая импульсная тепловая нагрузка в режимах с механическим разрушением, плавлением и разбрызгиванием материала. Лабораторные эксперименты сопровождаются вычислительными. Вычислительный эксперимент позволяет объяснить механизм совпадения областей перегрева с сетью трещин на поверхности, характерный размер которых много меньше размера области облучения. Перегрев вблизи трещин был обнаружен экспериментально. Зарегистрировано вращение расплавленного слоя вольфрама на поверхности мишени. Направление вращения совпадает с направлением силы JxB. Анализ экспериментальных данных привел к необходимости учета процессов плавления. На поверхности расплава были обнаружены мелкоструктурные возмущения светимости. Есть несколько гипотез образования таких коротковолновых возмущений на поверхности расплава, для проверки которых в математическую модель введен учет плавления и движения расплава.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы РАН № 10.

ОБ ОЦЕНКАХ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИИ В СЛУЧАЕ ИНТЕРПОЛЯЦИИ НА СИМПЛЕКСАХ

Байдакова Н. В.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия; baidakova@imm.uran.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — некоторый многогранник в $\mathbb{R}^3$ с заданной триангуляцией; $W^{n+1}M$ — множество функций, непрерывных на Ω вместе со всеми своими частными производными до порядка $n+1$ включительно, у которых все производные порядка $n+1$ ограничены по модулю константой M.

Пусть Δ — невырожденный тетраэдр с вершинами a_1, a_2, a_3, a_4 из триангуляции множества $\Omega \in \mathbb{R}^3$; $f \in W^{n+1}M$; P_n — многочлен степени n по совокупности переменных, интерполирующий значения функции f в равномерных узлах тетраэдра Δ. Обозначения: T_i — грани Δ напротив вершин a_i; τ_{ij} — единичные векторы, направленные от a_i к a_j; H — диаметр тетраэдра. Пусть ϑ_{ij} — угол между τ_{ij} и T_i; ϑ_i и ϑ — такие углы, что

$$\sin\vartheta_i = \max_{\substack{1\le j\le 4\\ j\ne i}} \sin\vartheta_{ij}\ ,$$

$$\sin\vartheta = \min_{1\le i\le 4} \sin\vartheta_i\ .$$

Теорема. *Для любого $s = 0,\dots,n$ и любых единичных векторов $\xi_1,\dots,\xi_s$ имеет место оценка*

$$\left\| \frac{\partial^s (f-P_n)}{\partial\xi_1\dots\partial\xi_s} \right\|_{C(\Delta)} \le K(n)M\frac{H^{n+1-s}}{(\sin\vartheta)^s}\ ,$$

где $K(n)$ — некоторая положительная величина, зависящая только от n.

Аналогичная теорема справедлива для невырожденного симплекса в $\mathbb{R}^4$.

Полученные оценки сравниваются с оценками из [1].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-11-00702П).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Jamet P.* Estimation d'erreur pour des éléments finis droits presque dégénérés // RAIRO Anal. Numer. 1976. V. 10, No 1. P. 43–60.

НЕНАСЫЩАЕМЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ НА ОТРЕЗКЕ (К ПРОБЛЕМЕ К. И. БАБЕНКО)

Белых В. Н.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
belykh@math.nsc.ru

В 1975 году в *Докладах АН СССР* (Т. 221, № 1) появилось сообщение К. И. Бабенко об открытии принципиально новых — *ненасыщаемых* — численных методов (и алгоритмов). Интересный факт: Л. Фейер [1] в своё время устранил суммы Фурье из способа приближения периодических функций с целью расширения возможностей на любую непрерывную функцию, сделав понятие насыщение, как ему казалось, более приемлемым для практики; К. И. Бабенко [2] устраняет это понятие из вычислительной практики, преследуя ту же цель, но абсолютно противоположным способом.

На основе фундаментальных идей К. И. Бабенко построены принципиально новые — *ненасыщаемые* — квадратурные формулы для приближённого вычисления интегралов по конечному отрезку [3], [4]. Отличительная черта последних — отсутствие главного члена погрешности, и как результат — способность автоматически подстраиваться к любым экстраординарным запасам гладкости подынтегральных функций. Конструкция квадратур, вопреки сложившимся в вычислительной практике традициям, изначально такова, что способна вместить, образно говоря, бесконечное множество квадратурных методов, сосредоточенных, так сказать, в ней одной. В частности, в случае C^∞-гладких функций формулы реализуют абсолютно неулучшаемую экспоненциальную оценку погрешности. Неулучшаемость оценки обусловлена асимптотикой александровского n-поперечника компакта C^∞-гладких функций. Она также имеет вид (с ростом числа узлов n) убывающей к нулю экспоненты.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fejer L.* Untersuchungenüber Fourersche Reihen // Math. Ann. 1904. V. 58. P. 51–69.
2. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.
3. *Белых В. Н.* Ненасыщаемые квадратурные формулы на отрезке (к проблеме К. И. Бабенко) // ДАН. 2016. Т. 467, № 5. С. 509–513.
4. *Белых В. Н.* К проблеме конструирования ненасыщаемых квадратурных формул на конечном отрезке // Мат. сб. 2017 (в печати).

РАЗВИТИЕ МЕТОДА ДИХОТОМИИ МАТРИЧНОГО СПЕКТРА

Бибердорф Э. А.[1,2], **Блинова М. А.**[1], **Попова Н. И.**[3]

[1] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
blin_mary@mail.ru
[2] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
biberdorf@ngs.ru
[3] *Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера СО РАН, Новосибирск, Россия;*
N.I.Popova@inp.nsk.su

Традиционно при численном исследовании устойчивости сначала проводится дискретизация соответствующего дифференциального оператора, затем возникающая алгебраическая задача решается одним из стандартных методов линейной алгебры с рассмотрением полной спектральной задачи. Так как при этом приходится исследовать спектр больших несимметричных матриц, то ошибки округления могут менять результат до неузнаваемости. Поэтому лучше иметь дело с критериями, которые отвечают за отсутствие точек в определенных частях плоскости. Метод дихотомии матричного спектра является перспективной альтернативой традиционным подходам и позволяет эффективно решать задачу о расположении спектра несимметричной матрицы относительно таких кривых как окружность, эллипс, прямая (см., например, [1]).

Следует отметить, что матрицы, получающиеся при дискретизации дифференциальных операторов, обладают рядом специфических особенностей, например, большой размер, большая норма и т.д. Кроме того, дискретизация спектральной задачи для таких течений как пограничный слой Блазиуса [2] приводит к нелинейной зависимости итоговой матрицы от собственных значений исходного дифференциального оператора. Модификации существующих алгоритмов и разработка методов дихотомии относительно парабол и гипербол позволяют преодолеть эти проблемы.

Во-первых, в алгоритм дихотомии мнимой осью внесена поправка, позволяющая применять его к матрицам с большой нормой. Во-вторых, предложен метод, позволяющий свести задачу о дихотомии гиперболой к дихотомии мнимой осью.

Эти подходы демонстрируются на примерах плоскопараллельного течения Пуазейля и пограничного слоя Блазиуса.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00791_а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Годунов С. К.* Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 1997.
2. *Бойко А. В., Грек Г. Р., Довгаль А. В., Козлов В. В.* Физические механизмы перехода к турбулентности в открытых течениях. Москва-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2006.

О КОМОНОТОННОЙ И КОВЫПУКЛОЙ АППРОКСИМАЦИИ СПЛАЙНАМИ ПЕРЕМЕННОЙ СТЕПЕНИ

Богданов В. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
bogdanov@math.nsc.ru

Классические кубические интерполяционные сплайны допускают обобщения, которые делают их более гибкими с точки зрения наследования знаковых схем данных. Среди известных таких обобщений особое место занимают сплайны переменной степени, которые на отрезке $[a, b]$ могут быть определены следующим образом. На каждом интервале $[x_i, x_{i+1}]$ произвольной сетки

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

с заданными на ней значениями $f_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots n$, интерполируемой функции $f(x)$ обобщённый сплайн имеет вид:

$$S(x) \;=\; f_i(1-t) + f_{i+1}t + \phi(q_i, 1-t)\, h_i^2 M_i + \phi(p_{i+1}, t)\, h_i^2 M_{i+1},$$

где $M_i = S''(x_i)$ — параметры сплайна, $t = (x - x_i)/(x_{i+1} - x_i)$, а функция

$$\phi(p, t) = \frac{t^{3+p} - t}{p^2 + 5p + 6}$$

является полиномом степени $3 + p$. Все возможные p_i, q_i играют роль свободных параметров для управления поведением сплайна и в случае, когда все p_i, q_i равны нулю, реализуется структура классического кубического сплайна класса C^2.

Наряду с тем, что эта конструкция сохраняет кусочно полиномиальный вид с числом членов в каждом полиномиальном куске не более четырёх, система, определяющая параметры сплайна, удовлетворяет условиям, позволяющим применять к ней технику приведения её матрицы, как и для её классического прототипа — кубического сплайна класса C^2 [1] — к матрице монотонного вида. Управляющие параметры, роль которых играют целочисленные показатели степени в нелинейной части кусочных полиномов, могут быть выбраны в соответствии с алгоритмом, аналогичным описанному в работе [2] и гарантирующим выполнение условий наследования производными сплайна переменной степени знаков соответствующих разделённых разностей. Таким образом, существенно улучшаются геометрические свойства интерполяции, которая во всей области обеспечивает наследование графиком сплайна кусочной монотонности или кусочной выпуклости данных.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-07-07530).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Богданов В. В.* Достаточные условия комонотонной интерполяции кубическими сплайнами класса C^2 // Мат. труды. 2011. Т. 14, № 2. С. 3–13.
2. *Богданов В. В., Волков Ю. С.* Выбор параметров обобщенных кубических сплайнов при выпуклой интерполяции // Сиб. журн. вычисл. математики. 2006. Т. 9, № 1. С. 5–22.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ БЛОЧНЫМИ МЕТОДАМИ

Ботороева М. Н.[1], **Булатов М. В.**[2]

[1] *Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия;* masha888888@mail.ru
[2] *Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия;* mvbul@icc.ru

В докладе рассмотрена система интегральных уравнений

$$A(t)x(t) + \int\limits_0^t K(t,s)x(s)\,ds = f(t), \quad 0 \le s \le t \le 1, \tag{1}$$

где $A(t)$ и $K(t,s)$ — $n \times n$ матрицы, $f(t)$ и $x(t)$ — n-мерные известная и искомая вектор-функции. Предполагается, что элементы $A(t)$, $K(t,s)$, $f(t)$ обладают необходимой степенью гладкости. Под решением исходной задачи (1) понимаем любую непрерывную вектор-функцию $x(t)$, обращающую (1) в тождество.

Предполагается, что

$$\det A(t) \equiv 0. \tag{2}$$

Задачи (1) с условием (2) принято называть интегро-алгебраическими уравнениями.

В первой статье [1], посвященной ИАУ, были сформулированы достаточные условия существования единственного непрерывного решения рассматриваемого класса задач.

В докладе приведены результаты численных расчетов интегро-алгебраических уравнений интерполяционными блочными методами.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 16-51-540002-Вьет-а, № 15-01-03228-а, № 16-31-00219-мол-а.)

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чистяков В. Ф.* О сингулярных системах обыкновенных дифференциальных уравнений и их интегральных аналогах // Функции Ляпунова и их применения. Новосибирск: Наука, 1987. С. 231–239.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕЯВНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Будникова О. С.[1], **Булатов М. В.**[2]

[1] *Иркутский государственный университет, Педагогический институт, Иркутск, Россия;* osbud@amail.ru

[2] *Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия;* mvbul@icc.ru

В докладе рассматриваются системы взаимосвязанных интегральных уравнений Вольтерра I и II рода с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью:

$$A(t)x(t) + \int\limits_0^t K(t,s)x(s)ds = f(t), \quad 0 \le s \le t \le 1,$$

$$\det A(t) \equiv 0,$$

где $A(t)$ и $K(t,s)$ — заданные матрицы размерности $n\times n$, $f(t)$ и $x(t)$ — $n-$мерные известная и искомая вектор-функции.

Такие задачи принято называть интегро-алгебраическими уравнениями. В первой работе по этой тематике [1] приведены достаточные условия существования единственного непрерывного решения, а также предложен численный метод решения.

Для численного решения выделенного класса уравнений предлагается строить неявные k-шаговые s-стадийные методы:

$$\begin{cases} A_{i+1}x_{i+1} + h\sum\limits_{l=0}^{i+s} a_l^1 K_{i+s,l}x_l = f_{i+1}, \\ A_{i+2}x_{i+2} + h\sum\limits_{l=0}^{i+s} a_l^2 K_{i+s,l}x_l = f_{i+2}, \\ \qquad \ldots, \\ A_{i+s}x_{i+s} + h\sum\limits_{l=0}^{i+s} a_l^s K_{i+s,l}x_l = f_{i+s}. \end{cases}$$

Подробно рассмотрен случай построения одно- и двухстадийных методов, приведены условия на весовые коэффициенты, при которых предлагаемые методы устойчивы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 16-51-540002-Вьет-а, № 15-01-03228-а, № 16-31-00219-мол-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чистяков В. Ф.* О сингулярных системах обыкновенных дифференциальных уравнений и их интегральных аналогах // Функции Ляпунова и их применения. Новосибирск: Наука, 1987. С. 231–239.

О БЛОЧНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Булатов М. В.[1], **Соловарова Л. С.**[2]

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск, Россия; [1]`mvbul@icc.ru`, [2]`soleilu@mail.ru`

В докладе рассмотрена задача

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) = f(t),\ x(0) = x_0,\ t \in [0,1],$$

где $A(t)$, $B(t)$ — $(n \times n)$-матрицы, $f(t)$ и $x(t)$ — заданная и искомая n-мерные вектор-функции.

Если $\det A \equiv 0$, то рассматриваемые задачи принято называть дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ). Характеристикой сложности данных уравнений является понятие индекса — минимального числа дифференцирований и конечных преобразований, необходимых для того, чтобы исходное ДАУ можно редуцировать к обыкновенному дифференциальному уравнению, разрешенному относительно производной [1].

Для исходной системы, записанной в виде

$$(A(t)x(t))' + C(t)x(t) = f(t),\ t \in [0,1],$$

где $C(t) = B(t) - A'(t)$, предлагаются блочные разностные схемы:

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{k+s-1} \rho_j^s A_{i+s-j} x_{i+s-j} + hC_{i+s} x_{i+s} = hf_{i+s}, \\ \qquad\qquad\vdots \\ \sum_{j=0}^{k+s-1} \rho_j^2 A_{i+s-j} x_{i+s-j} + hC_{i+2} x_{i+2} = hf_{i+2}, \\ \sum_{j=0}^{k+s-1} \rho_j^1 A_{i+s-j} x_{i+s-j} + hC_{i+1} x_{i+1} = hf_{i+1}. \end{cases}$$

Предполагается, что стартовые значения $x_j \approx x(t_j)$, $t_j = jh$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$, заранее заданы или вычислены.

Приведены частные случаи предлагаемых методов и результаты численных расчетов известных модельных примеров.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 16-31-00219-мол-а, № 15-01-03228-а, № 16-51-540002-Вьет-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999.

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ

Васкевич В. Л.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
vask@math.nsc.ru

В общей теории действие и свойства одной и той же кубатурной формулы изучаются не на одном каком-то фиксированном функциональном классе со свойством вложения в пространство непрерывных функций, а на бесконечной серии такого рода пространств. Элементы этой бесконечной серии функциональных классов обычно упорядочены по возрастанию соответствующей им гладкости. При таком подходе кубатурную формулу естественно рассматривать как некоторый стандарт приближения обобщенной функции, действие которой на непрерывную функцию означает взятие среднего значения по ограниченной области интегрирования. В качестве типичных средств для такого стандартного приближения используются линейные комбинации сдвигов хорошо известной дельта-функция Дирака $\delta(x)$, т. е. кубатурные суммы. В этой связи основной теоретической характеристикой заданной кубатурной формулы служит ее функционал погрешности. Этот функционал линеен и представляет собой финитную обобщенную функцию.

В рамках теории кубатурных формул традиционно рассматривается следующий набор задач: задавшись банаховым пространством X, найти асимптотически точное разложение нормы функционала погрешности в сопряженном пространстве X^* по числу узлов N соответствующей кубатурной формулы. Вывести эффективные оценки для упомянутой нормы как сверху, так и снизу в виде явных функций от N. Исследовать последовательность норм на сходимость к нулю при неограниченном увеличении числа узлов.

Решение проблемы об асимптотических разложениях нормы $\|l_N \mid X^*\|$ по параметру N тесно связано с получением для этой нормы удобных аналитических представлений (например, в виде квадратичных форм от вектора весов формулы). Отыскать такого типа представления удается с помощью решения краевых задач для ассоциированного с пространством X дифференциального (псевдодифференциального) уравнения, правая часть которого — обобщенная функция, совпадающая с исследуемым функционалом погрешности. Как правило, ассоциированное уравнение имеет эллиптический тип. В выборе пробных банаховых пространств X имеется очень большая свобода, что явно свидетельствует о необходимости доказательства для кубатурных формул утверждений общего характера (теорем о сходимости, об оптимальных формулах, об асимптотически оптимальных формулах и т. п.), верных одновременно для всех рассматриваемых классов, либо по крайней мере для большинства из них.

Рассмотрение теории кубатурных формул в качестве неотъемлемой части общей теории обобщенных функций с необходимостью приводит к до сих пор нерешенной проблеме распространения классических результатов метода кубатурных формул на случай аппроксимации произвольной финитной обобщенной функции конечными линейными комбинациями сдвигов дельта-функции Дирака. Приемлемое решение этой проблемы будет означать по существу превращение финитной обобщенной функции в стандартный объект вычислительной математики.

ВЫЧИСЛИМЫЕ МОДЕЛИРУЕМЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ

Войтишек А. В.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; vav@osmf.sscc.ru

В данной работе введено понятие *вычислимого моделируемого преобразования декартовых координат для случайного вектора*. Такие преобразования расширяют возможности построения эффективных (экономичных) алгоритмов численного моделирования многомерных случайных величин (см., например, [1]).

Сформулирована проблема поиска конструктивных, полезных для практических применений вычислимых моделируемых преобразований декартовых координат.

В качестве содержательных примеров таких преобразований рассмотрены переходы к полярным и сферическим координатам (при моделировании случайных точек, равномерно распределенных в круге и шаре соответственно; см., например, [1]), к цилиндрическим координатам (при моделировании случайных точек, равномерно распределенных в прямом круговом цилиндре), к параболическим координатам (при моделировании случайных точек, распределенных в двумерных областях с "параболическими" границами).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михайлов Г. А., Войтишек А. В.* Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. М.: Изд. центр "Академия", 2006.

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ СПЛАЙНАМИ

Волков Ю. С.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
volkov@math.nsc.ru

Сплайны в настоящее время являются основным инструментом вычислительной математики и приложений в задачах, связанных с аппроксимацией функций. Несмотря на то, что сплайны появились в 1946 году в работе Шёнберга, интерес к их изучению и практическому использованию начался лишь в начале 1960-х годов после открытия Холлидеем свойства минимума кривизны кубических сплайнов в задаче интерполяции. Данное обстоятельство послужило предпосылкой возможного практического использования сплайнов для математического описания кривых и поверхностей.

Примерно в это же время начала появляться вычислительная техника и оборудование с программным управлением. Возникла необходимость использования их в промышленности и автоматизации производства.

Первые исследования по сплайнам в Советском Союзе начались в нашем Институте в связи с задачей автоматизации авиационного производства и проектирования на заводе им. В. П. Чкалова благодаря Ю. С. Завьялову, который правильно оценил их возможности.

В первую очередь в соответствии с практическими нуждами началось исследование аппроксимативных свойств сплайнов. Именно в это время и по тем же причинам изучение сплайнов и их аппроксимативных свойств началось во всём мире. В 1963 году на конференции в Обервольфахе основателем сплайнов Шёнбергом был поставлен вопрос исследования сходимости процесса интерполяции.

Уже в одной из своих первых работ по сплайнам Ю. С. Завьялов [1] получил результаты о сходимости процессов интерполяции кубических сплайнов, которые на Западе были повторены через 3 года.

В докладе рассматривается вклад коллектива Института в изучение интерполяционных сплайнов. Внимание будет уделено таким аспектам: сходимость процесса интерполяции как для самих сплайнов, так и для производных; точность приближения; алгоритмы построения и изогеометрические свойства.

Часть результатов в этом направлении систематизирована в монографии [2], которая и сегодня является одной из наиболее цитируемых монографиий по сплайнам в нашей стране. Обзор результатов по сходимости интерполяции приведён в [3].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-07-07530).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Завьялов Ю. С.* Интерполирование кубическими многозвенниками // Вычислительные системы. Вып. 38. Новосибирск: Изд-во ИМ СО АН СССР, 1970. С. 23–73.
2. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
3. *Волков Ю. С., Субботин Ю. Н.* 50 лет задаче Шёнберга о сходимости сплайн-интерполяции // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 52–67.

МОДЕЛИРОВАНИЕ УНИВЕРСАЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГИДРОТУРБИНЫ

Волков Ю. С.[1], Мирошниченко В. Л.[1], Роженко А. И.[2]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;* volkov@math.nsc.ru, miroshn@math.nsc.ru

[2] *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;* rozhenko@oapmg.sscc.ru

Рассматривается задача построения универсальной характеристики натурной гидротурбины по результатам энергетических испытаний модельной гидротурбины. Универсальная характеристика является основным документом для выбора параметров натурной гидротурбины, обеспечивающих ее наиболее эффективную работу во всех режимах эксплуатации и ее расчет на основе результатов моделирования имеет важное практическое значение.

Результаты испытаний модельной гидротурбины представлены набором значений на семействе многомерных нерегулярных сеток, полученными при разных значениях входных параметров. Особенность таких испытаний — сильная нерегулярность сеток, сетки для разных значений основного моделирующего параметра сильно различаются по положению в пространстве остальных входных параметров (сильно "плывут"), результаты испытаний могут содержать ошибки. Наибольший интерес при построении универсальной характеристики представляют области с ее высоким значением (близким к 100 %), в которых требуется получить более точное приближение, чем в областях с меньшим значением.

В работе применяются алгоритмы аппроксимации функций многих переменных с помощью РБФ-сплайнов (сплайнов с базисом из специальных радиальных функций). Для построения требуемой универсальной характеристики используются методы весового сглаживания с автоматическим выбором точности аппроксимации, методы сплайн-регрессии с выбором подсетки узлов привязки сплайна, поиск и отбраковка узлов с выбросами в данных на основе статистических критериев, эксперименты с выбором различных радиальных базисов, с выбором оптимального масштабирования сетки по разным переменным, с внесением в тренд сплайна дополнительных функций внешнего дрейфа.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-07-07530).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Волков Ю. С., Мирошниченко В. Л.* Построение математической модели универсальной характеристики радиально-осевой гидротурбины // Сиб. журн. индустр. математики. 1998. Т. 1, № 1. С. 77–88.
2. *Волков Ю. С., Мирошниченко В. Л., Салиенко А. Е.* Математическое моделирование универсальной характеристики поворотно-лопастной гидротурбины // Машинное обучение и анализ данных. 2014. Т. 1, № 10. С. 1439–1450.
3. *Rozhenko A. I.* On new families of radial basis functions // Constructive Theory of Functions. Sofia: Marin Drinov Academic Publishing House, 2014. P. 217–233.

РАЗРАБОТКА ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ ЛЕЧЕНИЯ ВИЧ-ИНФЕКЦИИ С ПОМОЩЬЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

Гайнова И. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
gajnova@math.nsc.ru

Со времени появления в 1996–1997 гг. для лечения ВИЧ-инфекции высокоактивной антиретровирусной терапии (ВААРТ) — учеными, врачами-исследователями и практикующими врачами всего мира изучаются вопросы о времени начала лечения, выбора оптимальной стратегии лечения, применения различных комбинаций антиретровирусных препаратов и лечебных вакцин, исследуется влияние ВААРТ на снижение вирусной нагрузки на организм. Для математического моделирования ВИЧ-инфекции применяются различные методы [1]. Нелинейные динамические модели используются для моделирования кинетики вируса и динамики иммунного ответа при развитии и терапии ВИЧ-инфекции, для прогноза влияния лекарственных препаратов на течение инфекционного процесса и его перехода в стадию СПИДа (синдром приобретенного иммунодефицита). Стохастические и детерминированные модели применяются для оценки стоимости лечения в развитых странах и странах с ограниченными ресурсами и для выработки рекомендаций относительно политики предотвращения пандемии ВИЧ-инфекции, проводимой правительствами этих стран. Для решения указанных проблем используются методы Монте-Карло, методы математической статистики и теории вероятности. При разработке оптимальных стратегий ВААРТ показали свою эффективность методы теории управления, методы оптимизации многомерных задач и методы поиска глобального минимума, а также методы теории обратных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черешнев В. А., Бочаров Г. А., Ким А. В., Бажан С. И., Гайнова И. А., Красовский А. Н., Шмагель Н. Г., Иванов А. В., Сафронов М. А., Третьякова Р. М.* Введение в задачи моделирования и управления динамикой ВИЧ инфекции. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2016.

ЧИСЛЕННЫЕ ВАРИАНТЫ BALAYAGE-МЕТОДА А. ПУАНКАРЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОТЕНЦИАЛА И МАССЫ

Гласко Ю. В.

Научно-исследовательский вычислительный центр
Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова,
Москва, Россия; glaskoyv@mail.ru

Предложенный А. Пуанкаре balayage-метод [1] имеет целью поиск потенциала гравитационного поля, удовлетворяющего задаче Дирихле. Вместо гравитационного поля можно рассмотреть электрическое или магнитное.

Сам метод относительно потенциала использует систему шаров, заполняющих исследуемую область, и итерационный цикл построения систем эквивалентных по внешнему потенциалу распределений плотностей масс. Итерационный цикл заканчивается, когда создается простой слой, расположенный на границе охватывающей всю указанную область с тем же потенциалом, что и внешний потенциал на каждой итерации процесса (в том числе на первой). Метод Пуанкаре доказательно предполагает в качестве границы поверхности Ляпунова.

Таким образом, рассматривается специфический численный метод [2] решения задачи Дирихле, который на сетке, задающей изучаемую область, может быть реализован итерационным циклом относительно системы 7 точечных схем типа “крест” (сеточных аналогов указанных шаров). В центре каждого “креста” расположена выметаемая масса. В случае если форма искомого объекта является границей для простого слоя, то каждая из указанных масс делится на 6 и переносится в вершины соответствующего “креста”, а масса в центре кладется равной нулю. Процесс с одинаковым на каждой итерации соответствующим внешним потенциалом заканчивается на соответствующем сеточном аналоге границы для простого слоя с заданным потенциалом (совпадающим с соответствующими внешними на предыдущих итерациях). Если ищется объект, имеющий непрерывную заданную плотность не только на слое, то мы оставляем ее в центре “креста”, а в 6 точек переносим $1/6$ оставшейся массы. В остальном итерации аналогичны.

Модель выметания может быть представлена на основе параболического уравнения относительно потенциала с подвижной границей и заданием условия разделения внешних и внутренних потенциалов по Н. М. Гюнтеру. Возможны аналогичные модели относительно плотности [3].

Во всех перечисленных случаях выметание осуществляется описанным выше численным методом.

Работа выполнена в рамках НИР “Создание и развитие информационных систем МГУ” (договор № 14).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. 3. М.: Наука, 1974.
2. *Зидаров Д.* О некоторых обратных задачах потенциальных полей и его применение к вопросам геофизики. София: Болгарская АН, 1968.
3. *Страхов В. Н.* О выметании масс по Пуанкаре и его использовании при решении прямых и обратных задач гравиметрии // ДАН СССР. 1977. Т. 236, № 1. С. 54–57.

ПОЛУЛАГРАНЖЕВЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА ДЛЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Дементьева Е. В.[1], **Карепова Е. Д.**[2], **Шайдуров В. В.**[3]

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия;
[1]e.v.dementyeva@icm.krasn.ru, [2]e.d.karepova@icm.krasn.ru,
[3]shidurov@icm.krasn.ru

В работе обсуждается численное моделирование двумерного течения вязкой несжимаемой жидкости в канале с жесткими стенками на основе начально-краевой задачи для уравнений Навье – Стокса с граничным условием типа "do nothing" на границе вытекания.

Для построения дискретного аналога используется метод конечных элементов совместно с полулагранжевой аппроксимацией транспортных производных. Для дискретизации оператора Стокса используются конечные элементы Тейлора – Худа, удовлетворяющие условию Ладыженской – Бабушки – Брецци, гарантирующему устойчивость по давлению.

Для дискретизации нелинейного оператора транспортных производных используется полулагранжева аппроксимация вдоль траектории назад по времени. В этом случае нелинейность присутствует только в диагональных членах, что существенно уменьшает количество итераций по нелинейности и позволяет обойтись без специальных приемов линеаризации.

Для обеспечения законов сохранения предлагается использовать консервативную версию полулагранжевой аппроксимации, основанной на локальных балансовых соотношениях между соседними слоями по времени. Предлагаемый подход обеспечивает сходимость численного решения в среднеквадратичной норме.

СЛАУ дискретной задачи относится к задачам с седловой точкой с симметричной плохо обусловленной матрицей. Для ее решения разработана вычислительная технология, которая: 1) не требует сборки и хранения блоков глобальной матрицы системы (большого объема данных), сборка невязки и произведения матрицы на вектор проводится поэлементно с использованием только локальных матриц жесткости; 2) не требует прямого обращения глобальной матрицы жесткости и использует только итерационные методы; 3) эффективно решает седловую задачу, в частности, использует метод Узавы — сопряженных градиентов для вычисления оператора Шура и его образа.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00270-а).

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ДЛЯ ЛОКАЛЬНОГО РАЗРЫВНОГО МЕТОДА ГАЛЕРКИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДИФФУЗИОННОГО ТИПА НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ

Жалнин Р. В.[1], **Масягин В. Ф.**[2]

Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва, Саранск, Россия;
[1]`zhrv@mrsu.ru`, [2]`vmasyagin@gmail.com`

В работе исследуется предложенная авторами новая проекционная сеточная схема [1] на основе метода Галеркина с разрывными базисными функциями [2], [3], в котором аппроксимация решения в пределах ячейки сетки находится в виде полиномов с зависящими от времени коэффициентами (LDG) на неструктурированных разнесенных сетках. Суть схемы заключается в том, что искомая функция аппроксимируется на основной (треугольной или тетраэдральной) сетке, а аппроксимация потоковой переменной осуществляется на двойственной сетке, состоящей из ячеек, составленных из контрольных объемов около вершин ячеек основной сетки. Для нахождения потоков через грани ячеек используются стабилизирующие добавки [4]. Исследованию метода LDG посвящено множество работ [4]–[8].

В данной работе получены априорные оценки ошибок метода LDG для уравнений диффузионного типа на разнесенных неструктурированных сетках. Методика получения априорных оценок аналогична вышеназванным работам.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России, базовая часть госзадания 1.6958.2017/БЧ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жалнин Р. В., Ладонкина М. Е., Масягин В. Ф., Тишкин В. Ф.* Решение задач о нестационарной фильтрации вещества с помощью разрывного метода Галеркина на неструктурированных сетках // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2016. Т. 56, № 6. С. 989–998.
2. *Cockburn B.* Introduction to the discontinuous Galerkin method for convection-dominated problems advanced numerical approximation of nonlinear hyperbolic equations // Lect. Notes Math. 1998. V. 1697. P. 151–268.
3. *Bassi F., Rebay S.* A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier – Stokes equations // J. Comput. Phys. 1997. V. 131, No 2. P. 267–279.
4. *Arnold D. N., Brezzi B., Cockburn L. D.* Marini unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems // SIAM J. Numer. Anal. 2002. V. 39, No 5. P. 1749–1779.
5. *Babuska I., Zlamal M.* Nonconforming elements in the finite element method with penalty // SIAM J. Numer. Anal. 1973. V. 10, No 5. P. 863–875.
6. *Douglas J., Dupont T.* Interior penalty procedures for elliptic and parabolic Galerkin methods // Computing Methods in Applied Sciences. Lect. Notes Phys. V. 58. Berlin, Heidelberg: Springer, 1976.
7. *Rusten T., Vassilevski P. S., Winther R.* Interior penalty preconditioners for mixed finite element approximations of elliptic problems // Math. Comput. 1996. V. 65, No 214. P. 447–466.
8. *Becker R., Hansbo P.* A finite element method for domain decomposition with non-matching grids // RR-3613, INRIA, 1999.

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ФУНКЦИЙ С БОЛЬШИМИ ГРАДИЕНТАМИ

Задорин А. И.

Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омск, Россия; zadorin@ofim.oscsbras.ru

Исследуется вопрос построения квадратурных формул для функций с большими градиентами. Проблема в том, что если интегрируемая функция содержит погранслойную составляющую с большими градиентами, то погрешность составных формул Ньютона – Котеса может быть порядка $O(h)$ независимо от числа узлов формулы, h — шаг сетки. Ставится задача построения квадратурных формул, погрешность которых не зависит от градиентов функции в пограничном слое. Рассматривается два новых подхода к построению квадратурных формул: построение квадратурной формулы, точной на погранслойной составляющей интегрируемой функции и применение классических формул на сетке Шишкина, сгущающейся в пограничном слое.

При первом подходе предполагается, что интегрируемая функция представима в виде $u(x) = p(x) + \gamma\Phi(x)$, где регулярная составляющая $p(x)$ имеет ограниченные производные до некоторого порядка, погранслойная составляющая $\Phi(x)$ известна и имеет большие градиенты, постоянная γ не задана. Известно, что такое представление имеет решение сингулярно возмущенной краевой задачи. Построен аналог формул Ньютона – Котеса с n узлами на основе того, чтобы формулы стали точными на составляющей $\Phi(x)$. Доказано, что если производная $\Phi^{(n-1)}(x)$ не обращается в нуль, то построенная составная квадратурная формула имеет погрешность порядка $O(h^{n-1})$ равномерно по $\Phi(x)$ и ее производным.

При втором подходе предполагается, что функция $u(x)$ представима в виде: $u(x) = p(x) + \Phi(x)$, где обе составляющие не заданы, но $p(x)$ имеет равномерно ограниченные производные, для $\Phi(x)$ известны оценки производных, соответствующие экспоненциальному пограничному слою. Исследовано применение квадратурных формул на сетке Шишкина. Доказано, что составные квадратурные формулы Ньютона – Котеса с n узлами имеют погрешность порядка $O((\ln(N)/N)^n)$ равномерно по малому параметру ε. На кусочно-равномерных сетках обоснованы квадратурные формулы Эйлера и Гаусса.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 15-01-06584, № 16-01-00727).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Задорин А. И., Задорин Н. А.* Аналог формул Ньютона – Котеса для численного интегрирования функций с погранслойной составляющей // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2016. Т. 56, № 3. С. 368–376.
2. *Задорин А. И.* Квадратурная формула Гаусса на кусочно-равномерной сетке для функций с большими градиентами в пограничном слое // Сиб. электрон. мат. изв. 2016. Т. 13. С. 101–110.
3. *Задорин А. И.* Интерполяция Лагранжа и формулы Ньютона – Котеса для функций с погранслойной составляющей на кусочно-равномерных сетках // Сиб. журн. вычисл. математики. 2015. Т. 18, № 3. С. 289–303.

НЕОКЛАССИЧЕСКИЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ПОДПРОСТРАНСТВАХ КРЫЛОВА

Ильин В. П.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия; ilin@sscc.ru

Рассматриваются современные итерационные методы в подпространствах Крылова для решения сверхбольших (с порядками до десятков миллиардов) систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с разреженными матрицами, возникающими при сеточных аппроксимациях многомерных краевых задач на неструктурированных сетках, включая вещественные и комплексные, эрмитовые и неэрмитовые, симметричные и несимметричные, положительно определенные и знаконеопределенные. Алгоритмы основываются на блочных методах Якоби – Шварца, аддитивной декомпозиции областей с параметризованными пересечениями подобластей и разными интерфейсными условиями на внутренних границах. Ускорение итераций базируется на подходах с грубосеточной коррекцией, малоранговой аппроксимацией исходной матрицы, а также на аддитивных методах переменных направлений и неявных алгоритмах наименьших квадратов в подпространствах Крылова. Особое внимание уделяется масштабируемому распараллеливанию на многопроцессорных вычислительных системах с распределенной и иерархической общей памятью. Эффективность алгоритмов демонстрируется на представительной серии методических СЛАУ.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЁННОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ДВУХЖИДКОСТНОЙ СРЕДЕ С РАВНОВЕСИЕМ ФАЗ ПО ДАВЛЕНИЮ

Имомназаров Х. Х.[1], **Урев М. В.**[1,2]

[1] *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;* imom@omzg.sscc.ru
[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;* mih.urev2010@yandex.ru

Рассматривается стационарная система двухскоростной гидродинамики с одним давлением и неоднородными дивергентными и краевыми условиями для двух скоростей. Рассматриваемая система дифференциальных уравнений является переопределенной. В докладе показано, что решение системы дифференциальных уравнений сводится к последовательному решению двух краевых задач: задачи Стокса для одной скорости и давления и переопределенной системы для другой скорости. Приведены обобщенные постановки этих задач и их дискретные аппроксимации по методу конечных элементов. Для решения переопределённой задачи применяется вариант метода регуляризации.

ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМОВ РАСЩЕПЛЕНИЯ В МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ОБЪЁМОВ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА

Ковеня В. М.

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия;
kovenya@ict.nsc.ru

Для численного решения уравнений Навье – Стокса сжимаемого газа, записанных в интегральной форме, предложен класс конечно-объемных схем типа предиктор-корректор. Введение различных форм расщепления на этапе предиктора позволяет: получить разные классы схем, реализация которых сводится к решению отдельных уравнений; обеспечить запас устойчивости алгоритма в целом; аппроксимировать исходные уравнения в консервативной форме. Среди рассмотренных форм расщепления по аналогии с конечно-разностными схемами [1] выбраны те из них, которые обеспечивают максимальную устойчивость схем при минимальном влиянии расщепления на ее свойства. Этот подход позволяет построить экономичные алгоритмы, реализуемые за минимальное число операций на отдельную ячейку, сведя их реализацию к скалярным прогонкам или схемам бегущего счета. Получаемые схемы консервативны, что позволяет использовать их при решении стационарных и нестационарных задач, обладают вторым (или более высоким) порядком аппроксимации. Для устранения немонотонности решений, присущих схемам второго порядка аппроксимации, вводится сглаживающий оператор. В целях повышения устойчивости порядок аппроксимации алгоритмов на этапе предиктора и корректора может быть различным. Приведены примеры расчетов различных задач: задачи о распаде произвольного разрыва, регулярном и нерегулярном отражении скачков в рамках уравнений Эйлера и пространственном обтекании затупленного конуса.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00064 а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ковеня В. М.* Алгоритмы расщепления при решении многомерных задач аэрогазодинамики. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2014.

МОНОТОННАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА СКВОЗНОГО СЧЕТА, СОХРАНЯЮЩАЯ ПОВЫШЕННУЮ ТОЧНОСТЬ В ОБЛАСТЯХ ВЛИЯНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УДАРНЫХ ВОЛН

Ковыркина О. А.[1], **Остапенко В. В.**[1,2]

[1] *Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия;* olyana@ngs.ru
[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;* Ostapenko_VV@ngs.ru

В настоящее время не существует разностных схем сквозного счета, которые с повышенной точностью (без заметных схемных осцилляций) локализуют фронты ударных волн и одновременно сохраняют повышенный порядок сходимости в областях их влияния [1], [2]. В данной работе излагается методика построения принципиально нового класса разностных схем сквозного счета — комбинированных разностных схем, которые одновременно обладают обоими этими свойствами. При построении этих схем используется базисная схема повышенного порядка интегральной сходимости в областях, содержащих ударные волны, что позволяет с повышенной точностью передавать условия Гюгонио через размазанные фронты этих волн, а также внутренняя монотонная схема в некоторой окрестности сильных разрывов. В качестве базисной схемы выбрана компактная разностная схема повышенного порядка слабой аппроксимации [3], а в качестве внутренней схемы — монотонная модификация схемы КАБАРЕ [4], граничные условия для которой в окрестности фронта ударной волны формируются разностным решением, полученным по компактной схеме. Тестовые расчеты показали, что новая комбинированная схема, в отличие от схем типа TVD, не только обеспечивает монотонность профиля локализованной ударной волны, но также сохраняет повышенную точность в области ее влияния.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-10033).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ковыркина О. А., Остапенко В. В.* О сходимости разностных схем сквозного счёта // ДАН. 2010. Т. 433, № 5. С. 599–603.
2. *Ковыркина О. А., Остапенко В. В.* О реальной точности разностных схем сквозного счета // Матем. моделирование. 2013. Т. 25, № 9. С. 63–74.
3. *Остапенко В. В.* О построении разностных схем повышенной точности для сквозного расчета нестационарных ударных волн // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2000. Т. 40, № 12. С. 1857–1874.
4. *Головизнин В. М., Зайцев М. А., Карабасов С. А., Короткин И. А.* Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. М.: Изд-во МГУ, 2013.

ОПТИМАЛЬНЫЕ ЯВНО РАЗРЕШИМЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Коновалов А. Н.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; kan@sscc.ru

Для динамических задач линейной теории упругости и температуропроводности построены и обоснованы оптимальные явно разрешимые дискретные (сеточные) модели с контролируемым дисбалансом полной энергии и максимально возможной степенью параллелизма.

ПОТОКОВЫЕ СХЕМЫ ПРЕДИКТОР-КОРРЕКТОР ДЛЯ 3D ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

Лаевский Ю. М., Воронин К. В.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; laev@labchem.sscc.ru

В докладе описан способ получения и проиллюстрирована работоспособность одной экономичной схемы для вычисления потока при применении смешанного метода конечных элементов к 3D задачам нестационарной диффузии, представленных в виде системы уравнений первого порядка. Основной идеей этого подхода является восстановление схемы для векторного потока по заданной экономичной схеме (схеме-прообразу) для сеточной дивергенции потока. Связь между схемами для потока и схемами для дивергенции потока можно использовать для получения априорных оценок устойчивости потоковых схем. Эти оценки имеют место при некоторых ограничениях на начальные данные для сеточного потока, и в этом смысле являются оценками устойчивости по начальным данным в подпространстве. Был обнаружен ряд тестовых примеров, для которых предложенные ранее потоковые схемы демонстрировали только условную сходимость. Как оказалось, отсутствие безусловной сходимости связано с наличием ненулевой компоненты в ядре оператора сеточной дивергенции погрешности начального потока и носит общий характер, в том числе и для задач с гладкими решениями. В качестве возможного решения проблемы было предложено перейти к использованию потоковых схем со схемами-прообразами типа предиктор-корректор, в которых корректор служит для ликвидации компоненты погрешности начального потока в ядре сеточной дивергенции. Для 2D случая соответствующие схемы были предложены в работах [1], [2].

В данном докладе предлагается схема, основанная на схеме-прообразе типа предиктор-корректор для 3D случая. Указан способ её получения и приведены результаты расчетов для трех тестовых примеров с решениями различной гладкости. Показан второй порядок сходимости для всех примеров в отличие от потоковой схемы, основанной на схеме-прообразе Дугласа – Ганна [3], и которая на негладких решениях, вообще, не сходится.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 15-11-10024).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Arbogast T., Huang C.-S., Yang S.-M.* Improved accuracy for alternating-direction methods for parabolic equations based on regular and mixed finite elements // Math. Models Methods Appl. Sci. 2007. V. 17, No 8. P. 1279–1305.
2. *Voronin K. V., Laevsky Yu. M.* On splitting schemes of predictor-corrector type in mixed finite element method // Sib. Electron. Math. Reports. 2015. V. 12. P. 752–765.
3. *Douglas J. (Jr.), Gunn J. E.* A general formulation of alternating direction methods // Numer. Math. 1964. V. 6, No 1. P. 428–453.

АЛГОРИТМ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СПЕКТРА АЭРОЗОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ

Левыкин А. И.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; lai@osmf.sscc.ru

Во многих задачах физики аэрозолей необходимо восстанавливать спектр размеров нано и суб-микронных частиц. Наиболее используемым инструментом для диапазона размеров $0.001 - 1\mu m$ является диффузионная батарея [1]–[3]. Математически задачу восстановления функции распределения размеров $f(x)$ можно записать как поиск решения интегрального уравнения

$$g_i = \int\limits_a^b k_i(x) f(x)\, dx + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

где g_i — данные измерений, ядро $k_i(x)$ — приборная функция, ε_i — ошибки измерений [2]–[3].

В работе представлен метод нелинейной оптимизации решения данной некорректной и плохо обусловленной задачи, основанный на специальном выборе регуляризующего пространства функций решения. Приведены данные расчетов и их сравнение с экспериментальными результатами.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-00977).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bashurova V. S., Koutzenogii K. P., Puser A. Y., Shokhirev N. V.* Determination of atmospheric aerosol size disribution functions from screen diffusion battery data: mathematical aspects // J. Aerosol Sci. 1991. V. 22, No 3. P. 373–388.
2. *Cheng Y. S., Yen H. C.* Theory of a screen-type diffusion battery // J. Aerosol Sci. 1980. V. 11, No 3. P. 313–320.
3. *Knutson E. O.* History of diffusion batteries in aerosol measurements // Aerosol Sci. Technol. 1999. V. 31, No 2–3. P. 83–128.

ЗАДАЧИ ОБ УПАКОВКЕ И ПОКРЫТИИ В НЕЕВКЛИДОВОЙ МЕТРИКЕ И УРАВНЕНИЕ ЭЙКОНАЛА

Лемперт А. А.[1], **Казаков А. Л.**[2]

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия;
[1]`lempert@icc.ru`, [2]`kazakov@icc.ru`

В работе рассматриваются две взаимосвязанные задачи вычислительной геометрии: об отыскании набора непересекающихся равных кругов максимально возможного радиуса в компактном множестве M и о построении набора равных кругов минимального радиуса таких, что M принадлежит их объединению.

В случае, когда пространство является евклидовым, эти задачи достаточно хорошо изучены [1], [2], однако существует ряд постановок, которые требуют введения специальных метрик, например, при размещении узлов связи необходимо учитывать особенности распространения излучения в различных слоях атмосферы.

Определим расстояние между точками множества M следующим образом:

$$\rho(a,b) = \min_{G\in G(a,b)} \int\limits_G \frac{dG}{v(x,y)}.$$

Здесь $0 < \alpha \le v(x,y) \le \beta$ — непрерывная функция, задающая скорость движения в каждой точке множества M, $G(a,b)$ — множество непрерывных кривых, лежащих в M и соединяющих a и b. Таким образом, кратчайшим путем между точками будет кривая, на преодоление которой затрачивается наименьшее время.

Если в качестве источников возмущений выбрать центры упаковываемых или покрывающих кругов, то их форму в момент времени t можно определить из уравнения $f(x,y) = t$, где $f(x,y)$ — решение двумерного уравнения эйконала

$$f_x^2 + f_y^2 = \frac{1}{v^2(x,y)}. \tag{1}$$

Точные решения уравнения (1) известны только для функций v определенных типов (константы, линейной, степенной и т. п.) [3], нахождение фронта в общем случае, как правило, осуществляется численными методами.

Для поставленных задач авторами предложены вычислительные алгоритмы, основанные на оптико-геометрическом подходе [4] к отысканию решения уравнения эйконала и построении обобщенных диаграмм Вороного, представлены результаты численного эксперимента.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-31-00356).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Szabo P. G., Markot M. C., Csendes T., Specht E., Casado L. G., Garcia I.* New approaches to circle packing in a square. New York: Springer, 2007.
2. *Stoyan Y. G., Patsuk V. M.* Covering a compact polygonal set by identical circles // Comput. Optim. Appl. 2010. V. 46, No 1. P. 75–92.
3. *Боровских А. В.* Двумерное уравнение эйконала // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 5. С. 993–1018.
4. *Казаков А. Л., Лемперт А. А.* Об одном подходе к решению задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике // Автоматика и телемеханика. 2011. Вып. 7. С. 50–57.

ПРОБЛЕМЫ ПОСТРОЕНИЯ АДАПТИВНЫХ РАЗНОСТНЫХ СЕТОК

Лисейкин В. Д.

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия;
liseikin.v@gmail.com

В докладе рассматриваются проблемы создания технологий и глобальных компьютерных программ построения качественных адаптивных разностных сеток для численного моделирования прикладных задач на таких сетках. Для построения адаптивных сеток предлагаются передовые методы, базирующиеся на численном решении систем обращенных уравнений Бельтрами и диффузии относительно управляющей метрики, а также алгебраические методы с управляющими функциями вида погранслойных и слойных, приспособленными для адаптации сеток [1].

Приводятся алгоритмы построения адаптивных сеток как в явном виде, так и с помощью итераций для решения сингулярно-возмущенных задач с разнообразными экспоненциальными, степенными, логарифмическими и комбинированными слоями [2].

Представлены иллюстрации адаптивных сеток для трехмерных областей со сложной границей и численные расчеты сингулярно-возмущённых и прикладных задач.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00455).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Liseikin V. D.* Grid generation methods. Berlin: Springer, 2017 (third edition).
2. *Liseikin V. D.* Layer resolving grids and transformations for singular perturbation problems. Utrecht: VSP, 2001.

КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ НА КОСЫХ ШАБЛОНАХ

Паасонен В. И.

Институт вычислительных технологий СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
paas@ict.nsc.ru

Работа посвящена конечно-разностным схемам, использующим различные пространственные сетки на разных временны́х слоях. Такие схемы естественно называть схемами на косых шаблонах или просто косыми схемами. Очевидно, косые схемы являются непосредственным обобщением классических схем на случай изменяющихся во времени сеток, поэтому исследование их свойств и сравнение со свойствами традиционных схем представляет определенный интерес. В практике вычислений косые схемы могут быть востребованы при решении краевых задач с подвижными границами, при реализации адаптивных методов (с целью исключения из цепочки вычислений интерполяции решения с сетки на сетку), а также при использовании регулярных сеток различной структуры, в частности, сотовых или треугольных, в том числе и равномерных.

В работе исследованы условия устойчивости и другие свойства косых схем различных порядков аппроксимации и различных конфигураций для гиперболических уравнений, а также проведены параллели с известными классическими схемами, обобщениями которых на случай подвижной сетки они являются. В частности, для уравнения переноса рассмотрены явные и неявные схемы на шаблонах "косой уголок", косые аналоги схемы Лакса – Вендроффа, бегущего счета, схемы предиктор-корректор, а также схемы повышенного порядка точности. Для ряда схем на косых шаблонах приведены также их обобщения на случай квазилинейных уравнений и исследованы их аппроксимационные свойства.

В качестве аппарата исследования используется дисперсионный анализ, анализ первого дифференциального приближения схем, а также анализ знаков коэффициентов и принцип максимума. Показано, что условия устойчивости, монотонности, параболичности первого дифференциального приближения и другие свойства схем на косых шаблонах плавно переходят в соответствующие свойства известных их аналогов на прямых шаблонах при сближении сеток верхнего и нижнего временно̀го слоя в не зависящую от времени сетку. В частности, геометрическая интерпретация корректности схем, связанная с расположением характеристик дифференциального уравнения, на традиционных прямоугольных сетках и на косых шаблонах оказалась совершенно аналогичной.

Для двухслойных аппроксимаций уравнения переноса с произвольным числом узлов на верхнем и на нижнем слое показано, что максимально возможный порядок точности на две единицы меньше, чем суммарное число узлов, и не зависит от того, является шаблон прямым или косым, равномерна или не равномерна сетка. Исследовались также аппроксимационные свойства косых схем для уравнения колебаний. Проведено сравнение с классическими аналогами на прямых шаблонах различных конфигураций по порядкам аппроксимации, максимально достижимым при заданном числе узлов. Показано, что, в отличие от уравнения переноса, в случае схем для уравнения колебаний перекос шаблона понижает порядок аппроксимации.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-21-00110).

КОНЦЕПЦИЯ СОПРЯЖЕННЫХ ИНТЕГРИРУЮЩИХ МНОЖИТЕЛЕЙ В ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДАХ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Пененко В. В.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; penenko@sscc.ru

Обсуждаются применения вариационных принципов численного анализа для исследования процессов, эволюция которых отображается данными наблюдений и описана математическими моделями. Вариационные принципы — универсальный инструмент для объединения целевых функционалов, моделей процессов, данных измерений и других объектов в единую систему. На их основе строятся согласованные численные схемы и алгоритмы решения прямых, сопряженных и обратных задач; оценок неопределенностей в моделях и расчета функций чувствительности целевых функционалов к вариациям входных данных.

Представлена вариационная методика построения дискретно-аналитических численных схем для задач математической физики, использующая фундаментальную концепцию сопряженных интегрирующих множителей. Эти аппроксимации точны в классе задач с разрывными кусочно-постоянными коэффициентами. Основные этапы их построения продемонстрированы на примере стационарных и нестационарных задач конвекции-диффузии-реакции. Используется аппарат сопряженных задач, построенных в рамках методов декомпозиции и расщепления расширенного функционала вариационного принципа для исходной задачи на совокупность локально-одномерных задач. Полученные дискретно-аналитические схемы обладают свойствами монотонности, транспортивности и устойчивости. К преимуществам этих схем относится точный учет краевых условий первого, второго и третьего рода, а также условий периодичности. Кроме самого решения, алгоритм обеспечивает точное вычисление его производных на границах интервалов декомпозированной области. Дискретно-аналитические монотонные и устойчивые численные схемы бегущего счета построены и для задач конвекции в отсутствии диффузии.

Для практических применений концепция интегрирующих множителей объединяется с техникой конечных элементов/объемов. При этом, в отличие от традиционных вариационных и проекционно-сеточных методов, наши методы не требуют построения базисных подпространств.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00137) и Программ фундаментальных исследований Президиума РАН I.33П и II.2П.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Penenko V., Tsvetova E.* Discrete-analytical methods for the implementation of variational principles in environmental applications // J. Comput. Appl. Math. 2009. V. 226, No 2. P. 319–330.
2. *Penenko V. V., Tsvetova E. A., Penenko A. V.* Variational approach and Euler's integrating factors for environmental studies // Comput. Math. Appl. 2014. V. 67, No 12. P. 2240–2256.

КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СФЕРЫ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ ВРАЩЕНИЙ ИКОСАЭДРА С ИНВЕРСИЕЙ

Попов А. С.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; popov@labchem.sscc.ru

С момента создания С. Л. Соболевым общей теории кубатурных формул на сфере, инвариантных относительно преобразований конечных групп вращений, прошло уже более полувека (см. [1]). За это время наибольшее распространение получили кубатурные формулы, инвариантные относительно групп симметрии правильных многогранников (см. [2] и имеющуюся там литературу). Среди этих кубатурных формул особый интерес представляют кубатуры, имеющие положительные веса и содержащие при этом минимальное число узлов (кубатуры гауссова типа). В случае наличия для данного порядка точности нескольких кубатур с положительными весами и одинаковым числом узлов в [3] был предложен новый критерий оптимальности, согласно которому наилучшей среди этих кубатур считается та, которая имеет наименьший главный член погрешности. В дальнейшем этот критерий был использован для поиска наилучших кубатур для группы вращений тетраэдра, группы вращений тетраэдра с инверсией, группы вращений октаэдра, группы вращений октаэдра с инверсией и группы вращений икосаэдра.

В данной работе будет предложен алгоритм поиска наилучших кубатур, инвариантных относительно высшей группы пространственной симметрии — группы вращений икосаэдра с инверсией. Будут проведены расчёты по этому алгоритму с целью определить параметры всех наилучших кубатур данной группы симметрии до 79-го порядка точности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* О формулах механических кубатур на поверхности сферы // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 5. С. 769–796.
2. *Мысовских И. П.* Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука, 1981.
3. *Попов А. С.* Поиск наилучших кубатурных формул для сферы, инвариантных относительно группы вращений октаэдра // Сиб. журн. вычисл. математики. 2002. Т. 5, № 4. С. 367–372.

НЕНАСЫЩАЕМЫЙ АЛГОРИТМ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНОЙ РЕШЕТЧАТОЙ КУБАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ

Рамазанов М. Д.

Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН, Уфа, Россия; RamazanovMD@yandex.ru

Постановка проблемы восходит к исследованиям С. Л. Соболева [1], [2], в которых он предложил для приближенных вычислений интегралов по ограниченным n-мерным областям, $\int_\Omega f(x)dx$, применять решетчатые кубатурные формулы $K_N f \equiv |\det H_N| \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k f(H_N k)$ — с коэффициентами $\{c_k\}$ и решетками узлов $\{H_N k \mid k \in \mathbb{Z}^n$, H_N — $n \times n$ матрица с $N = \Omega/|\det H_N|\}$, сгущающиеся при $N \to \infty$, $\|H_N\| \to 0$. Качество аппроксимации измеряется скоростью стремления к нулю нормы функционала погрешности $l_N^\Omega : f \to \int_\Omega f(x)dx - K_N f$ в пространстве, сопряженном к заданному пространству интегрантов, $\{f\} \equiv B$, $\|l_N^\Omega \mid B^*\| \to 0$ при $N \to \infty$.

Следуя идеям К. И. Бабенко [3], из множества вычислительных алгоритмов выделяются ненасыщаемые — алгоритмы, не зависящие от порядков гладкости функций к которым применяются.

Мы ограничиваемся кубической решеткой узлов, $H_N = h \cdot I$, $h = N^{-1/n} \to 0$, ограниченными областями с бесконечно дифференцируемыми границами, $\Omega \equiv \{x \mid \Phi(x) > 0, \Phi \in C^\infty, |\Phi(x)| + |D\Phi(x)| \neq 0\}$, и изотропными пространствами Соболева – Слободецкого $W_2^m(\mathbb{R}^n)$ или $W_2^m(\Omega)$.

Зададим числа α и β с ограничением $0 < \alpha < 1/2 < \beta < 1$ и определим функцию коэффициентов $C(x,h)$ условием $c_k(h) \equiv C(hk,h)$.

Теорема. *Коэффициенты искомой ненасыщаемой асимптотически оптимальной решетчатой кубатурной формулы $\{c_k^{as}(h)\}$ могут быть заданы так:*

$$c_k^{as}(h) \equiv C^{as}(hk,h),$$

$$C^{as}(x,h) = \begin{cases} 0, & \text{если } \operatorname{dist}(x,\Omega) \geq h^\alpha, \\ 1, & \text{если } \operatorname{dist}(x,\mathbb{R}\backslash\Omega) \geq h^\alpha, \\ \int\limits_{|\xi|\leq h^{\beta-1}} d\xi\, \widetilde{\chi}_\Omega(\xi)\exp(2\pi i x\xi), & \text{если } \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) \leq h^\alpha, \end{cases}$$

где $\widetilde{\chi}_\Omega$ есть преобразование Фурье характеристической функции χ_Ω области Ω.

Результат распространяется на ограниченные области, не обладающие бесконечно дифференцируемыми границами. К сожалению, при $n > 2$ строгое определение областей с кусочно-гладкими границами неизвестно. Поэтому мы предлагаем своё определение таких областей (для которых получены ненасыщаемые асимптотически оптимальные алгоритмы решетчатых кубатурных формул).

Работа поддержана РФФИ (грант № 14-01-00307-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
2. *Соболев С. Л., Васкевич В. Л.* Кубатурные формулы. Новосибирск: Издательство ИМ СО РАН, 1996.
3. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. Москва, Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2002.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ДЕКОМПОЗИЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ВНЕШНИХ ТРЕХМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Савченко А. О.[1], **Свешников В. М.**[2]

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;
[1]savch@ommfao1.sscc.ru, [2]victor@lapasrv.sscc.ru

Предлагается и исследуется новый подход к решению внешних трехмерных краевых задач для уравнения Лапласа, основанный на методе декомпозиции расчетной области на подобласти, сопрягаемые без наложения. При этом внешняя расчетная область разделяется сферой на две подобласти, а исходная внешняя задача сводится к решению двух подзадач: внутренней, ограниченной сферой, и внешней на сфере. Сшивка решений в подобластях осуществляется путем прямой конечно-разностной аппроксимации операторного уравнения на интерфейсе, содержащего обратные операторы Пуанкаре – Стеклова. Исследованы свойства конечно-разностного оператора. Доказана сходимость приближенного решения к точному, и установлен порядок сходимости. Решение системы сеточных уравнений на интерфейсе проводится итерационными методами в подпространствах Крылова, которые в нашем случае допускают экономичную реализацию. Исследованы свойства системы сеточных уравнений и доказаны утверждения о существовании и единственности их решения. Теоретические положения подтверждаются решением модельной задачи.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00168).

НОВЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО НА СУПЕРКОМПЬЮТЕРЕ

Смирнов Д. Д.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; smirnovdd@mail.ru

В данной работе проводится численный анализ стохастического уравнения теплопроводности [1] методом Монте-Карло на суперкомпьютере. Динамическая система, заданная уравнением теплопроводности, находится под воздействием случайных шумов, которые могут быть, как внешние (аддитивные), так и внутренние (мультипликативные) шумы, к тому же случайными могут быть коэффициент температуропроводности, начальные данные и граничные условия. Такие динамические системы описываются системами стохастических дифференциальных уравнений (СДУ). Такой подход отражает особенность современной научной парадигмы, предполагающей статистическое описание свойств реального мира. С помощью такого подхода, моделируя независимые между собой траектории случайного процесса, являющегося решением системы СДУ, можно описывать различные модели, задаваемые системами СДУ, находить вероятностные и статистические характеристики от численного решения этих систем СДУ: оценку математического ожидания, оценку дисперсии, плотность распределения выделенной компоненты решения для заданного узла сетки, частотный фазовый портрет (ЧФП), частотную интегральную кривую (ЧИК) и частотное временное сечение (ЧВС) [2]. Рассчитываемые характеристики для решения системы СДУ показывают реакцию динамической системы на случайные возмущения, общие закономерности в поведении численного решения и максимально возможные уклонения моделируемых траекторий решения системы СДУ, что позволяет предсказывать важные режимы динамики этих систем. Новые статистические характеристики являются наиболее информативными для описания динамики систем, так как в них собирается вся статистика по всему ансамблю моделируемых траекторий.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00698 А).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1999.
2. *Артемьев С. С., Иванов А. А., Смирнов Д. Д.* Новые частотные характеристики численного решения стохастических дифференциальных уравнений // Сиб. журн. вычисл. математики. 2015. Т. 18, № 1. С. 15–26. [New frequency characteristics of the numerical solution of stochastic differential equations // Numer. Analysis Appl. 2015. V. 8, No 1. P. 13–22.]

ИССЛЕДОВАНИЕ МНОГОСЕТОЧНОГО МЕТОДА ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ НА СЕТКЕ ШИШКИНА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Тиховская С. В.

Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омск, Россия; s.tihovskaya@yandex.ru

Исследуется многосеточный метод каскадного типа для эллиптического уравнения с пограничными слоями. Известно, что применение классических разностных схем для сингулярно возмущенных задач приводит к большим ошибкам. Обеспечить равномерную сходимость разностной схемы для таких задач можно либо используя схему, точную на погранслойных составляющих [1], либо использовать сетку, сгущающуюся в областях пограничного слоя [2], [3]. Рассматривается разностная схема на сетке Шишкина, обладающая свойством равномерной сходимости по малому параметру ε. Для повышения ε-равномерной точности разностной схемы в многосеточном методе может быть применена экстраполяция Ричардсона [4] с использованием численных решений на вспомогательных сетках [5]. Для улучшения начального приближения исследуется идея экстраполяции численных решений, полученных на вспомогательных сетках [6]. Проведено сравнение различных итерационных методов. Приведены результаты численных экспериментов.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 15-01-06584, № 16-01-00727).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильин А. М.* Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Мат. заметки. 1969. Т. 6, № 2. С. 237–248.
2. *Бахвалов Н. С.* К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя //Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1969. Т. 9, № 4. С. 841–859.
3. *Шишкин Г. И.* Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: РИО УрО РАН, 1992.
4. *Shishkin G. I., Shishkina L. P.* Difference methods for singular perturbation problems. Volume 140 of Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2009.
5. *Tikhovskaya S. V.* Solving a singularly perturbed elliptic problem by a multigrid algorithm with Richardson extrapolation // Numerical Analysis and Its Applications. Lect. Notes Comput. Sci. 2017. V. 10187. P. 674–681.
6. *Li M., Li C. L., Cui X., Zhao J.* Cascadic multigrid methods combined with sixth order compact scheme for Poisson equation // Numer. Algorithms. 2016. V. 71, No 4. P. 715–727.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РАНДОМИЗИРОВАННОГО ПРОЕКЦИОННОГО МЕТОДА В ЗАДАЧАХ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

Трачева Н. В.[1], **Ухинов С. А.**[2]

Новосибирский государственный университет, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;
[1]`tnv@osmf.sscc.ru`, [2]`sau@osmf.sscc.ru`

В данной работе представлен оригинальный подход к построению оценок метода Монте-Карло в приложении к задачам атмосферной оптики. Оценки метода Монте-Карло строятся на основе двумерного проекционного разложения искомого распределения по ортонормированным с некоторым весом базисным функциям, что является обобщением идеи разложения, представленной в работе [1]. Коэффициенты данного разложения — суть математические ожидания случайных величин с заданным распределением и могут быть оценены с помощью метода Монте-Карло. Построенный метод применяется для численного изучения двумерных угловых характеристик поляризованного излучения, проходящего и отраженного оптически толстым слоем рассеивающего и поглощающего вещества, и позволяет рассчитывать вектор Стокса, компоненты которого описывают в совокупности все характеристики поляризованной волны, а тем самым исследовать двумерные угловые распределения интенсивности и степени поляризации излучения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 15-01-00894 а, № 16-31-00123 мол_а, № 17-01-00823 а) и Президиума РАН (программа I.33П).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tracheva N. V., Ukhinov S. A.* Numerical statistical study of the angular distribution of the polarized radiation scattered by medium // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2017. V. 32, No. 2. P. 135–146.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МИКРОЦИРКУЛЯТОРНЫХ ПРОЦЕССОВ С УЧЕТОМ ЛИМФАТИЧЕСКОГО ДРЕНАЖА

Шваб И. В.

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия;
shva@ict.nsc.ru

Обменные процессы в организме состоят в постоянном перераспределении веществ между кровеносным капилляром, окружающей тканью и лимфатическими капиллярами. Для адекватного их описания актуально строить комплексные модели, учитывающие взаимосвязь процессов, происходящих во всех частях микроциркуляторного русла. В работе представлена математическая модель обменных процессов, происходящих на микроциркуляционном уровне и включающих в себя следующие взаимосвязанные процессы: течение крови в капиллярах, транскапиллярный обмен, движение жидкости в интерстиции, обмен веществ между интерстициальной жидкостью и клетками ткани, дренаж в лимфатические капилляры.

Рассматривается течение неньютоновской жидкости по кровеносному капилляру и процессы, происходящие в окружающей капилляр ткани, которая моделируется как пороупругая среда. Эти две задачи связаны с помощью граничных условий, основанных на гипотезе трансваскулярного обмена Старлинга.

В моделях микроциркуляции обычно предполагается, что все капилляры в органе одинаковы по размеру, характеристикам течения жидкости и т. д. Поэтому можно рассматривать один представительный капилляр [1]. В работе [2] при моделировании фильтрации и реабсорбции жидкости через стенку кровеносного капилляра не учитывается изменение концентрации веществ, содержащихся в различных частях системы, т. е. онкотическое давление в капилляре и ткани считается постоянным. Такое предположение является достаточно сильным упрощением реально происходящих процессов, поскольку диффузия играет значительную роль при обмене веществ. Учет диффузионных процессов, рассмотренных в данной работе, значительно усложняет модель и представляет большой практический интерес.

Учет лимфатического дренажа в данной работе основывается на морфологических и экспериментальных данных, описанных в [3]. Данный метод состоит в непосредственном задании лимфатического дренажа и объемного потока жидкости, поступающего в лимфатическую систему, в виде функции от координат и времени. Тем самым учитывается реальное расположение лимфатических капилляров в микроциркуляторном русле (около артериолы, т. е. вблизи артериального конца кровеносного капилляра). При этом важно, что объемный поток лимфы в начальном лимфатическом русле экспериментально определить проще, чем давление в лимфатическом капилляре.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Krogh A. E., Landis E. M., Turner A. H.* The movement of fluid through the human capillary wall in relation to venous pressure and to the colloid osmotic pressure of the blood // J. Clin. Invest. 1932. V. 11, No 1. P. 63–95.
2. *Nyashin Y. I., Nyashin M. Y., Shabrykina N. S.* Models of microcirculation and extravascular fluid exchange // Russian Journal of Biomechanics. 2002. V. 6, No 2. P. 62–77.
3. *Hargens A., Schmid-Schonbein G.* Mechanics of tissue and lymph transport // Biomechanics: Principles and Applications. London, New York, Washington: CRT Press, 2002. P. 247–260.

О РАЗРЕШИМОСТИ И СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Шишкин Г. И.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия; shishkin@imm.uran.ru

Сеточные методы решения регулярной задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений разрабатывались в работах Г. И. Марчука, А. А. Самарского, Н. Н. Калиткина. В настоящей работе рассматривается задача Коши для системы двух сингулярно возмущенных уравнений с возмущающим параметром ε при производных; параметр ε принимает произвольные значения из полуинтервала $(0,1]$:

$$\mathbf{L}\,\mathbf{u}(x)=\mathbf{f}(x),\quad x\in D,\quad \mathbf{u}(x)=\boldsymbol{\varphi},\quad x\in\Gamma. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{u}(x)=\{u_1(x),u_2(x)\}^T$, $\mathbf{L}\,\mathbf{u}(x)=\{L_1\,\mathbf{u}(x),L_2\,\mathbf{u}(x)\}^T$,

$$L_1\,\mathbf{u}(x)\equiv\varepsilon\,a_1(x)\,d/dx\,u_1(x)+b_1(x)\,u_1(x)+c_1(x)\,u_2(x),$$

$$L_2\,\mathbf{u}(x)\equiv\varepsilon\,a_2(x)\,d/dx\,u_2(x)+b_2(x)\,u_2(x)+c_2(x)\,u_1(x).$$

Вырожденная задача — задача (1) при $\varepsilon=0$, вообще говоря, не является разрешимой. Решение такой задачи существует и единственно лишь при неулучшаемом условии (условии разрешимости)

$$\mu\le m,\quad m<1, \tag{2}$$

где $\mu=\mu_{(2)}=\max_{\overline{D}}\{|c_1(x)|\,b_1^{-1}(x)\}\,\max_{\overline{D}}\{|c_2(x)|\,b_2^{-1}(x)\}$; при $\mu_{(2)}\to 1$ решение задачи Коши, вообще говоря, неограниченно растет.

Задачу Коши (1), для которой выполняется условие разрешимости (2), назовем согласованной задачей Коши для системы; обозначим ее $\{(1);(2)\}$.

Для задачи Коши $\{(1);(2)\}$ строится “стандартная” разностная схема на равномерной сетке. При $N\to\infty$ такая схема сходится в равномерной норме при неулучшаемом условии $N\gg\varepsilon^{-1}$, где $N+1$ — число сеточных узлов.

На кусочно-равномерной сетке, известной как сетка Шишкина [1] в случае сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений (см., например, [2], [3]), разностная схема сходится ε-равномерно со скоростью $\mathcal{O}(N^{-1}\,\ln N)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00727).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Roos H.-G., Stynes M., Tobiska L.* Numerical methods for singularly perturbed differential equations. Convection-diffusion and flow problems. Berlin: Springer-Verlag, 1996.
2. *Шишкин Г. И.* Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: РИО УрО РАН, 1992.
3. *Shishkin G. I., Shishkina L. P.* Difference methods for singular perturbation problems. Vol. 140 of Chapman and Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Boca Raton: CRC Press, 2009.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЬНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ КОШИ

Шишкина Л. П.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия; Lida@convex.ru

Для широких классов сингулярно возмущенных краевых задач для эллиптических и обыкновенных дифференциальных уравнений, а также начально-краевых задач для параболических уравнений разработаны специальные численные методы на основе стандартных разностных схем на сетках, сгущающихся в пограничных слоях, решения которых сходятся ε-равномерно (ε — возмущающий параметр, $\varepsilon \in (0, 1]$) в равномерной норме (см., например, [1], [2] и библиографию там же). В этих специальных численных методах сеточные уравнения решаются на простейших кусочно-равномерных сетках, известных в литературе по численным методам для сингулярно возмущенных задач как сетки Шишкина (см., например, [3]), шаг которых выбирается малым в окрестности пограничного слоя.

В недавних исследованиях Г. И. Шишкин теоретически показал возможность использования кусочно-равномерных сеток Шишкина для решения задач нового класса, а именно, сингулярно возмущенных задач Коши. В настоящем докладе приводятся и обсуждаются результаты численных экспериментов для модельных сингулярно возмущенных задач Коши. Показано, что для модельной задачи Коши для сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения решение стандартной разностной схемы на равномерной сетке не сходится ε-равномерно в равномерной норме в то время как решение специальной разностной схемы на кусочно-равномерной сетке Шишкина сходится ε-равномерно в равномерной норме со скоростью $\mathcal{O}(N^{-1} \ln N)$ при $N \to \infty$, где N — число сеточных интервалов по x. Результаты численных экспериментов согласуются с теоретическими результатами.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00727).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Roos H.-G., Stynes M., Tobiska L.* Numerical methods for singularly perturbed differential equations. Convection-diffusion and flow problems. Berlin: Springer-Verlag, 1996.
2. *Шишкин Г. И.* Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: РИО УрО РАН, 1992.
3. *Shishkin G. I., Shishkina L. P.* Difference methods for singular perturbation problems. Vol. 140 of Chapman and Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Boca Raton: CRC Press, 2009.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ УЗЛОВ ВЕСОВОЙ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ ТРАПЕЦИЙ

Юмова Ц. Ж.

Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, Улан-Удэ, Россия; syum@mail.ru

Отметим, что обзор наиболее важных результатов, полученных по экстремальным задачам отыскания оптимальных квадратурных формул до конца восьмидесятых годов прошлого века, приведен Н. П. Корнейчуком в дополнении к монографии С. М. Никольского [1]. В представленной работе уточняется результат работы [2] и исследуется весовая квадратурная формула трапеций с асимптотически оптимальным распределением узлов в пространстве Соболева.

Приводится алгоритм построения наилучших весовых квадратурных и кубатурных формул для интегралов с фиксированными особенностями на отрезке интегрирования для некоторых гладких и негладких весовых функций. Последние задачи естественным образом возникают при оптимизации приближенного интегрирования сингулярных интегралов и сингулярных интегральных уравнений. Приводятся примеры. Так, для серии интегралов

$$\int\limits_0^1 \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{b}\right) f(x)dx,$$

где $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$ — параметры серии, асимптотически оптимальное расположение узлов будет иметь вид

$$x_\gamma = a + \sqrt{3b}\,\mathrm{erf}^{-1}\left(\mathrm{erf}\left(\frac{1-a}{\sqrt{3b}}\right)\frac{\gamma}{N} + \left(\frac{\gamma}{N}-1\right)\mathrm{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{3b}}\right)\right),\ \gamma = \overline{0,N}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы. М.: Наука, 1988 (4-е изд., доп. с добавлением Н. П. Корнейчука).
2. *Шойнжуров Ц. Б., Арсаланов А. А., Намсараева Г. В.* Оптимизация распределения узлов квадратурной формулы в пространстве Соболева // Вестн. ВСГТУ. 2009. № 1. С. 5–8.

NOTE ON THE KACZMARZ ALGORITHM AS A SADDLE POINT PROBLEM

Ivanov A. A.[1], **Zhdanov A. I.**[2]

Samara State Technical University, Samara, Russia;
[1]ssauivanov@gmail.com, [2]zhdanovaleksan@yandex.ru

Let us consider a consistent system of linear algebraic equations $Au = f$, where $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $u \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathbb{R}^m$, $m \geq n$. Let S be a positive-definite matrix, whose Cholesky decomposition $S = LL^T$, where $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Using L as a right preconditioner, we can write $Au = f$ as $ALL^{-1}u = f$. For $\tilde{u} = L^{-1}u$, $\tilde{u} \in \mathbb{R}^n$ we consider the following iteration procedure:

$$\begin{pmatrix} I_n & L^T A^T_{j(k)} \\ A_{j(k)}L & \left(1-\alpha_k^{-1}\right) A_{j(k)} S A^T_{j(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_k \\ f_{j(k)} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

where $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_p \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix}$, $A_i = \begin{pmatrix} a^T_{(i-1)\cdot l+1} \\ \vdots \\ a^T_{(i-1)\cdot l+l} \end{pmatrix}$, $f_i = \begin{pmatrix} f_{(i-1)\cdot l+1} \\ \vdots \\ f_{(i-1)\cdot l+l} \end{pmatrix}$,
and $A_i \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $f_i \in \mathbb{R}^l$, p is the number of blocks, l is the number of rows in the block A_i, $j(k) : \mathbb{N}_0 \to \{1, 2, \dots p\}$ is surjection, $m = l \cdot p$, $i = 1, 2, \dots, p$.

Theorem. *The iterations* (1) *are equivalent to iterations of block Kaczmarz algorithm with a relaxation parameter* α_k *and can be written as:*

$$\begin{aligned} l < n: &\quad \tilde{u}_{k+1} = \tilde{u}_k - \alpha_k L^+_{j(k)} \left(L_{j(k)} \tilde{u}^k - f_{j(k)}\right), \\ l \geq n: &\quad u_{k+1} = u_k - \alpha_k A^+_{j(k)} \left(A_{j(k)} u^k - f_{j(k)}\right), \end{aligned}$$

where $L_{j(k)} = A_{j(k)}L$ *and* $\alpha_k \in (0, 2)$, *the* $[\cdot]^+$ *denotes the Moore–Penrose pseudo-inverse, and* $k = 0, 1, \dots, \infty$.

Proof. Consider the two block equations from (1)

$$\tilde{u}_{k+1} + L^T_{j(k)} y_{k+1} = \tilde{u}_k, \tag{2}$$

$$L_{j(k)}\tilde{u}_{k+1} + \left(1-\alpha_k^{-1}\right) L_{j(k)} L^T_{j(k)} y_{k+1} = f_{j(k)}. \tag{3}$$

Substituting $\tilde{u}_{k+1}$ from (2) into (3) and multiplying the result by $L^+_{j(k)}$, we obtain

$$-\alpha_k^{-1} L^+_{j(k)} L_{j(k)} L^T_{j(k)} y_{k+1} = L^+_{j(k)} \left(f_{j(k)} - L_{j(k)}\tilde{u}_k\right). \tag{4}$$

It is evident from the Moore–Penrose conditions that $L^T_{j(k)} = L^+_{j(k)} L_{j(k)} L^T_{j(k)}$. Thus, we can simplify (4) to $L^T_{j(k)} y_{k+1} = \alpha_k L^+_{j(k)} \left(L_{j(k)}\tilde{u}_k - f_{j(k)}\right)$ and then substitute it into (2). The final step is to notice that for $l \geq n$ [1]

$$LL^+_{j(k)} = L\left(A_{j(k)}L\right)^+ = LL^+\left(A_{j(k)}LL^+\right)^+ = A^+_{j(k)}$$

such that $u_{k+1} = u_k - \alpha_k LL^+_{j(k)}\left(A_{j(k)}u^k - f_{j(k)}\right) = u_k - \alpha_k A^+_{j(k)}\left(A_{j(k)}u^k - f_{j(k)}\right)$.□

It is worth noting that the proposed matrix equation (1) has some interesting properties and can be solved using the well-known algorithms [2], some of which can be effective enough.

REFERENCES

1. *Cline R. E.*, "Note on the generalized inverse of the product of matrices," SIAM Rev., **6**, No. 1 (1964).
2. *Benzi M, Golub G. H., Liesen J.*, "Numerical solution of saddle point problems," Acta numer., **14**, 1–37 (2005).

GRID FREE STOCHASTIC SIMULATION METHODS FOR SOLVING TRANSIENT DRIFT-DIFFUSION-RECOMBINATION PROBLEMS IN SEMICONDUCTORS

Sabelfeld K. K.

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia, karl@osmf.sscc.ru

In this talk we present a new grid free random walk based method for simulation of transient drift-diffusion-recombination processes governed by linear and non-linear drift-diffusion-reaction boundary value problems with general boundary flux conditions. Application of the developed methods for solving transport problems for excitons and recombination of electrons and holes in semiconductors are presented in details. One of the main difficulties is a broad spectrum of scales involved, e.g., from 1 nm (the radius of a dislocation) to thousands of nanometers where the drift field is changed.

The basic idea of the method is a probabilistic description of the motion of particles in vicinity of drift, diffusion and recombination on boundaries. We reformulate the original PDE in an integral form and prove a spherical integral relation of the solution. All processes are simulated in continuous phase space, both in time and space. Instead of finding the whole solution field, the method is able to calculate directly the desired functionals like a flux of particles to specific parts of the boundary. For example, we present a method for calculation of the intensity of cathodoluminescence (CL) and the electron beam induced current (EBIC) in imaging the dislocations in semiconductors. More details can be found in our recent studies [1]–[4].

Remarkably, the developed method can be applied to problems where a quadratic nonlinearity is present in the drift-diffusion equation. As an example, we apply it to solve the problem of electron hole recombination in semiconductors in vicinity of bimolecular interactions and tunneling. The same approach can be used to solve diffusion convection problems with high Péclet numbers. Finally we note some features of the method: it is automatically adapted to the geometry of the boundary and the gradients of the drift velocity, the algorithm is scaled and easily parallelized by tracking many independent trajectories.

Support of the Russian Science Foundation under Grant no. 14-11-00083 is kindly acknowledged.

REFERENCES

1. *Sabelfeld K. K.*, "Random walk on spheres method for solving drift-diffusion problems," Monte Carlo Methods Appl., **22**, No. 4, 265–281 (2016).
2. *Sabelfeld K. K.*, "Random walk on spheres algorithm for solving transient drift-diffusion-reaction problems," submitted to: J. Comput. Phys.
3. *Sabelfeld K. K.*, "A mesh free floating random walk method for solving diffusion imaging problems," Stat. Probab. Lett., **121**, 6–11 (2017).
4. *Sabelfeld K. K.*, *Kireeva A. E.*, "Stochastic simulation of spatially separate electrons and holes recombination in 2D and 3D disordered semiconductors," Journal of Computational Electronics, **16**, No. 2, 325–339 (2017).

METHOD FOR SEARCHING DUALITY GAP IN OPTIMIZATION PROBLEMS USING THE ORDER OF SMALLNESS OF THE OPTIMAL VALUE FUNCTION OF PERTURBED PROBLEM

Trofimov S. P., Ivanov A. V., Fettser Yu. V.

Ural Federal University, Ekaterinburg, Russia; tsp61@mail.ru

We consider the problem of finding a set of vectors $DG = \{c \in \mathbb{R}^n\}$ for which the duality gap exists in the problem of convex optimization:

$$P : v = \inf\{(c, x) : g(x) \leqslant 0\}.$$

A theoretical approach to problem solving was presented in the previous work [1]. In this approach, a convex set is constructed for an arbitrary point x from the feasible set of problem P

$$T_1(x) = \lim_{n\to\infty} \partial_1(n \cdot g(x)).$$

Then

$$DG = \{c : \gamma(c| - T_1(x)) - \gamma(c| - \operatorname{cl} T_1(x)) > 0\},$$

where $\gamma(c|T) = \inf\{\mu > 0 \mid \mu^{-1} \cdot c \in T\}$ is caliber of set T.

Applying the described approach in practice is difficult because the procedure for finding the set T_1 is nontrivial.

In this work, we propose a new method for finding set DG, based on an infinitesimal analysis of the optimal value function of ε-perturbed problem

$$P_\varepsilon : v(\varepsilon) = \inf\{(c, x) : g(x) \leqslant \varepsilon\}.$$

The method presupposes finding the order of smallness of an infinitely small quantity (ISQ)

$$\psi(\varepsilon) = |v(\varepsilon) - v|.$$

The main ISQ characteristics are the order of smallness and the proportionality coefficient. Numerical estimation of these characteristics is an important computation problem. We present an algorithm for computing the above ISQ characteristics. The algorithm is based on the procedure of identifying the asymptote coefficients of the ISQ logarithmic characteristic. The algorithm uses processing of points of the logarithmic characteristic with a sliding window and subsequent clustering.

It is shown that the difference of the order of smallness of $\psi(\varepsilon)$ for different target vectors c is directly related to the duality gap and the quality of the compact feasible set. Thus, analysis of the duality gap extends from the case of an unbounded feasible set to the case of a bounded feasible set.

Numerical results are presented for the problem

$$v = \inf\{(c, x) : g(x_1, x_2) = -x_1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leqslant 0, x_1 \leqslant 5, x_2 \leqslant 5\}.$$

REFERENCES

1. *Trofimov S. P.*, “On an explicit representation of optimal values of pairs of dual problems of convex programming” [in Russian], in: Metody Vypukl. Programmirovanija i Nekotor. Pril.: Sb. Nauch. Tr., UrO AN SSSR, Sverdlovsk, 1992, pp. 96–103.
2. *Trofimov S. P., Ivanov A. V.*, “The duality discontinuity in semi-infinite linear programming and quality analysis of the limitations of geometric objects” [in Russian], Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta: Upravlenie, Vychislitel’naja Tehnika, Informatika, No. 38, 37–46 (2017).

DEVELOPMENT OF A RELIABLE NUMERICAL METHOD FOR A SINGULARLY PERTURBED ELLIPTIC REACTION-DIFFUSION PROBLEM IN A BICONNECTED DOMAIN

Tselishcheva I. V.[1], **Shishkin G. I.**[2]

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Ekaterinburg, Russia;
[1]`tsi@imm.uran.ru`, [2]`shishkin@imm.uran.ru`

In a biconnected domain $\overline{D}$ consisting of a rectangle $\overline{D}_1$ with a removed circle D_2, we consider Dirichlet's problem for a singularly perturbed elliptic reaction-diffusion equation. The highest order derivatives in the equation are multiplied by a small (perturbation) parameter ε^2, $\varepsilon \in (0, 1]$. As $\varepsilon \to 0$, boundary layers of different types appear in neighborhoods of smooth parts of the boundary. In a neighborhood of the outer boundary Γ_1, i.e., the boundary of the rectangle, but outside regions near its corner points, the boundary layer is regular; in a neighborhood of the corner points, the layer is angular. In a neighborhood of the inner boundary Γ_2 (the boundary of the circle), there appears a circular boundary layer that is regular. The boundary layer decreases exponentially with distance from the outer and inner boundaries, which makes it difficult to construct special *"connected"* meshes condensing along the normal to the boundary.

For the boundary value problem under consideration, the techniques from [1]–[3] are employed to construct an iterative Schwarz method on overlapping subdomains that contain either the boundary of the rectangle or the boundary of the circle. It is shown theoretically that this method converges ε-uniformly in the maximum norm as the number of iterations (and the number of mesh points in the case of a difference scheme) grows. We use the Shishkin meshes condensing in the boundary layers that are piecewise uniform with respect to the normal to the smooth parts of the boundaries of the subdomains. When we construct the meshes in the neighborhood of the boundary Γ_1, it is reasonable to use the Cartesian coordinate system, while a polar coordinate system is naturally applied in a biconnected annular region near the inner boundary Γ_2, which motivates the necessity of using special *composite* grids consistent with these boundaries and the application of the domain decomposition method for interfacing between the grid subdomains.

The authors were supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00727).

REFERENCES

1. *Shishkin G. I.,* Grid Approximations of Singularly Perturbed Elliptic and Parabolic Equations [in Russian], RIO UrO RAN, Ekaterinburg (1992).
2. *Shishkin G. I., Shishkina L. P.,* Difference Methods for Singular Perturbation Problems, CRC, Boca Raton (2009).
3. *Shishkin G. I., Tselishcheva I. V.,* "Parallel methods for solving singularly perturbed boundary value problems for elliptic equations," Mat. Model., **8**, No. 3, 111–127 (1996).

СЕКЦИЯ 8

Дискретная математика, информатика и математическая кибернетика

Тезисы докладов

SECTION 8

Discrete Mathematics, Informatics, and Mathematical Cybernetics

Abstracts

ЦИКЛЫ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ЦИРКУЛЯНТНОГО ТИПА

Батуева Ц. Ч.-Д.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
batueva@math.nsc.ru

Дискретная динамическая система задается отображением $A : \mathbb{Z}_q^n \to \mathbb{Z}_q^n$. Состояние системы — это циклическое слово из $\mathbb{Z}_q^n$. Система, начиная работу с некоторого состояния, на каждом шаге вычисляет новое состояние по отображению A. Функциональным графом называется ориентированный граф $G = \langle V, D\rangle$, где V — множество состояний и из состояния u идет дуга в состояние v, если $A(u) = v$. Так как множество состояний конечно, то система, начиная работу с любого состояния, попадает в некоторый контур. Следовательно, каждая компонента связности функционального графа состоит из ориентированных к корню деревьев, а их корни замыкаются в единственный контур [1]. Будем называть циклом функционирования системы контур в ее функциональном графе.

Нами рассматривается случай системы, когда каждая переменная одинаково зависит от своих предыдущих переменных, то есть состояние $u_0 \dots u_{n-1} = A(v_0 \dots v_{n-1})$, если
$$u_i = f(v_{i-1}, \dots, v_{i-k}),$$
где функция $f : \mathbb{Z}_q^k \to \mathbb{Z}_q$ одинакова для всех $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Обозначим отображение такой системы A_f.

Введем операцию циклического сдвига состояния u на s позиций вправо
$$\delta_s(u_0 \dots u_{n-1}) = u_{n-s} \dots u_{n-1} u_0 \dots u_{n-s-1}$$
и обозначение состояния $1^r 0^z = 1^{r_1} 0^{z_1} 1^{r_2} 0^{z_2} \dots 1^{r_m} 0^{z_m}$, где $r = r_1 r_2 \dots r_m$ и $z = z_1 z_2 \dots z_m$.

В работе [2] был предложен способ нахождения всех неподвижных точек отображения A_f. В работе [3] для любой функции f описаны циклы функционирования, образованные только циклическим сдвигом. Нашей целью было описать свойства функции f для которой отображение A_f имеет циклы функционирования вида: любое состояние u из цикла за два такта работы системы переходит в свой циклический сдвиг. Нам удалось описать свойства некоторых булевых функций f для которых отображение A_f имеет такие циклы функционирования.

Теорема. *Описаны свойства функции $f : \mathbb{Z}_2^k \to \mathbb{Z}_2$ при которых отображение A_f имеет циклы функционирования вида: любое состояние $u = \delta_s(1^r 0^z)$ из цикла переходит в состояние $A(u) = \delta_{s+d}(0^{r-t} 1^{z-t})$ для некоторого натурального d.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Harrary F.* The number of functional digraphs // Math. Ann. 1959. V. 138, No 3. P. 203–210.
2. *Батуева Ц. Ч.-Д.* Дискретные динамические системы циркулянтного типа с пороговыми функциями в вершинах // Дискретн. анализ и исслед. опер. 2014. Т. 21, № 4. С. 25–32.
3. *Батуева Ц. Ч.-Д.* Дискретные динамические системы циркулянтного типа с пороговыми функциями от не более чем трех переменных // Дискретн. анализ и исслед. опер. 2016. Т. 23, № 1. С. 17–34.

КОНСТРУКЦИИ РАВНОМЕРНЫХ КОДОВ ГРЕЯ

Быков И. С.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
patrick.no10@gmail.com

Код Грея размерности n — это циклическая последовательность всех 2^n бинарных слов длины n такая, что два соседних слова (включая первое и последнее) отличаются ровно в одном символе. Любому коду Грея можно сопоставить его *переходную последовательность* — слово $T = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$ над алфавитом $\{1, 2, \ldots, n\}$ такое, что τ_i — номер позиции, в которой отличаются i-е и $(i+1)$-е слово в коде Грея.

Интересной задачей представляется изучение свойств кодов Грея, обладающих заданными свойствами. Одним из таких свойств является *равномерность* переходной последовательности.

Рассматривается два вида равномерности:

- пусть $l_1(C)$ — такое максимальное число, что в каждом подслове длины $l_1(C)$ переходной последовательности кода C все буквы различны. Наибольшее значение, которое параметр $l_1(C)$ принимает на множестве всех n-мерных кодов Грея, обозначим через $l_1(n)$. Справедлива следующая нижняя оценка [1]:
$$n - \lceil 2.001 \log n \rceil \leq l_1(n);$$
- пусть $l_2(C)$ — такое минимальное число, что в каждом подслове длины $l_2(C)$ переходной последовательности кода C встречаются все буквы из алфавита $\{1, 2, \ldots, n\}$. Наименьшее значение, которое параметр $l_2(C)$ принимает на множестве всех n-мерных кодов Грея, обозначим через $l_2(n)$. Справедлива следующая верхняя оценка [2]:
$$l_2(n) \leq n + 3\lfloor \log n \rfloor.$$

Лучшие известные на данный момент верхняя оценка для $l_1(n)$ и нижняя для $l_2(n)$ тривиальны:
$$l_1(n) \leq n - 1,$$
$$n + 1 \leq l_2(n).$$
В связи с этим возникает конструктивная задача построения циклов наибольшей длины, достигающих наилучших параметров равномерности. Так, в [3] показано, что
$$c_1(n) \geq (n-1)2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor},$$
где $c_1(n)$ — максимальная длина цикла со свойством $l_1(C) = n - 1$.

В работе рассматривается аналогичная задача для величины $c_2(n)$, максимальной длины цикла со свойством $l_2(C) = n + 1$.

Теорема. $c_2(n) \geq (n+1)2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Goddyn L., Gvozdjak P.* Binary Gray codes with long bit runs // Electron. J. Comb. 2003. V. 10. P. 27.
2. *Быков И. С.* О локально равномерных кодах Грея // Дискретн. анализ и исслед. опер. 2016. Т. 23, № 1. С. 51–64.
3. *Пережогин А. Л.* О циклических $\langle m, n\rangle$-нумерациях // Дискретн. анализ и исслед. опер., сер. 1. 1998. Т. 5, № 4. С. 61–70.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПЕРАЦИОННОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ПРИ ПРИНЯТИИ ЛОГИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Валеева А. Ф.[1], **Гончарова Ю. А.**[2], **Валеев Р. С.**[3]

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия;
[1]aida_val2004@mail.ru, [2]yuliagonch@mail.ru, [3]ruslan__valeev@inbox.ru

Рассматривается задача доставки однородного продукта в различные регионы России автомобильными транспортными средствами различной грузоподъемности (Problem homogeneous product delivery with Extended vehicle routing problem, PHPD-EVRP), запасы которого хранятся на складе. При этом продукт доставляется в определенный временной период в течение нескольких дней, по пути доставки продукта транспортному средству разрешается остановка в некоторые интервалы времени. Кроме того, каждый клиент может быть посещен более чем одним транспортным средством и иметь спрос, больший грузоподъемности транспортного средства, то есть быть включенным в несколько маршрутов. Требуется определить эффективную стратегию управления запасами, позволяющую минимизировать затраты на содержание, выполнение заказа на продукт, учитывающую издержки, связанные с отложенными поставками (задача управления запасами); рациональные маршруты доставки однородного продукта автомобильными транспортными средствами различным клиентам с возможностью выдачи карты наилучшего размещения заказа в них.

Приведенная задача решается в два этапа: на первом этапе находится эффективная стратегия управления запасами, на втором этапе решается задача поиска рациональных маршрутов [1], [2]. Для поиска эффективной стратегии управления запасами в зависимости от спроса на продукт применяются детерминированные, вероятностные и имитационные модели. Для поиска рациональных маршрутов разработан алгоритм муравьиной колонии, основанный на популяции (P-ACO-EVRP).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Langevin A., Riopel D.* Logistics systems: design and optimization. New York: Springer, 2005.
2. *Валеева А. Ф., Гончарова Ю. А., Валеев Р. С.* Об одном подходе к решению задач операционного планирования по доставке однородной продукции различным клиентам. Часть 1 // Информационные технологии. 2016. Т. 22, № 10. С. 741–746.

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ТЕОРИИ ГРАФОВ, СВЯЗАННЫХ С ЗАДАЧАМИ МАРШРУТИЗАЦИИ

Гимади Э. Х.[1], **Глебов А. Н.**[2]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
[1]gimadi@math.nsc.ru, [2]anglemob1973@mail.ru

За последние 15–20 лет в работах различных авторов, включая группу исследователей из Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, стала активно изучаться задача об m коммивояжерах (m-Peripatetic Salesman Problem или m-PSP), которая является естественным обобщением классической задачи коммивояжера. В задаче m-PSP требуется найти m реберно непересекающихся гамильтоновых циклов минимального или максимального суммарного веса в полном взвешенном графе. Задача исследуется в симметричном и несимметричном случаях, для одной и нескольких весовых функций, которые могут быть произвольными, метрическими или принимать значения из заданного множества.

Де Корт (1992) доказал, что задача о существовании двух реберно непересекающихся гамильтоновых циклов в графе NP-полна. С учетом этого, одним из основных направлений исследования является разработка полиномиальных приближенных алгоритмов с гарантированными оценками точности для различных версий задачи m-PSP. Целый ряд таких алгоритмов был предложен А. А. Агеевым, А. Е. Бабуриным, Э. Х. Гимади, А. Н. Глебовым, А. В. Гордеевой, Д. Ж. Замбалаевой, Н. М. Коркишко, А. В. Пяткиным, О. Ю. Цидулко и др.

Характерным подходом при разработке подобных алгоритмов, является построение гамильтоновых циклов из частичных туров (наборов вершинно непересекающихся цепей, покрывающих все вершины графа). Для нахождения частичных туров в полном графе отыскиваются один или несколько эффективно вычислимых подграфов, реберный вес которых известным образом оценивается через вес оптимального решения. Затем внутри построенных вспомогательных подграфов находятся частичные туры и дополняются до реберно непересекающихся гамильтоновых циклов. Наиболее часто в качестве вспомогательных подграфов выступают паросочетания, цикловые покрытия, регулярные подграфы и деревья.

Следует отметить, что в большинстве алгоритмов указанного типа реализуются сходные процедуры и решаются родственные задачи, характерные для чистой теории графов, а не для дискретной оптимизации. К числу таких задач относятся разбиение ребер данного (регулярного) подграфа на наименьшее число частичных туров, дополнение данного набора частичных туров до реберно непересекающиеся гамильтоновых циклов а также покрытие ребер данного подграфа наименьшим числом реберно непересекающихся гамильтоновых циклов.

Настоящая работа имеет своей целью проанализировать ранее полученные результаты, обозначить новые актуальные направления исследований и привести развернутые формулировки тех вопросов теории графов, от решения которых зависит дальнейший прогресс в построении приближенных алгоритмов для задачи m-PSP и других родственных задач маршрутизации.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 15-01-00976 и № 15-01-05867).

ПРИБЛИЖЕННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧИ О СВЯЗНОМ k-ФАКТОРЕ НА МАКСИМУМ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Гимади Э. Х.[1], **Рыков И. А.**[2], **Цидулко О. Ю.**[3]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
[1]gimadi@math.nsc.ru, [2]rykovweb@gmail.com, [3]tsidulko.ox@gmail.com

В задаче о связном k-факторе даны неориентированный n-вершинный полный граф $G = (V, E)$, весовая функция ребер $w : E \to \mathbb{R}_+$, натуральное число $k \geq 2$, и требуется найти связный остовный k-регулярный подграф (иначе говоря, связный k-фактор) в G минимального или максимального общего веса. Эта задача тесно связана с проектированием сетей, где естественны требования связности и k-регулярности сети. Известно, что задача о k-факторе полиномиально разрешима, если не требуется, чтобы искомый подграф был связным [1], и NP-трудна в противном случае. Отметим, что задача о связном 2-факторе является классической задачей коммивояжера, и в целом, задачу о связном k-факторе можно рассматривать как обобщение задачи коммивояжера.

Для метрической задачи о связном k-факторе на минимум известен полиномиальный ρ-приближенный алгоритм, где ρ — константа [2].

Для общей задачи о связном k-факторе на максимум в [3] построен приближенный алгоритм с относительной погрешностью $\varepsilon = O\left(1/k^2\right)$ и временем работы $O(kn^3)$. При более аккуратных вычислениях относительная погрешность может быть улучшена до $\varepsilon = O\left(1/k^3\right)$. Очевидно, что для больших значений k, стремящихся к бесконечности с ростом n, такой алгоритм асимптотически точен.

В данной работе рассматривается задача на максимум в евклидовом пространстве, где вес ребра равен евклидову расстоянию между его концевыми вершинами. Здесь для малых (возможно, постоянных) значений $k = o(n)$ предлагается приближенный асимптотически точный алгоритм с временем работы $O(n^3)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 16-31-00389 и № 15-01-00976).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gabow H. N.* An efficient reduction technique for degree-constrained subgraph and bidirected network flow problems // 15th annual ACM symposium on theory of computing. New York: ACM, 1983. P. 448–456.
2. *Cornelissen K., Hoeksma R., Manthey B., Narayanaswamy N. S., Rahul C. S., Waanders M.* Approximation algorithms for connected graph factors of minimum weight // Theory Comput. Syst. 2016. P. 1–24.
3. *Бабурин А. Е., Гимади Э. Х.* Об одном обобщении задачи коммивояжера на максимум // Дискретн. анализ и исслед. опер., сер. 1. 2006. Т. 13, № 3. С. 3–12.

О СВОЙСТВАХ АССОЦИИРОВАННЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ КВАДРАТИЧНЫХ APN-ФУНКЦИЙ

Городилова А. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
gorodilova@math.nsc.ru

Работа посвящена изучению свойств ассоциированных булевых функций квадратичных почти совершенно нелинейных функций.

В [1] для векторной булевой функции $F : \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2^n$ определена *ассоциированная булева функция* γ_F от $2n$ переменных по правилу: $\gamma_F(a,b) = 1$, если $a \neq \mathbf{0}$ и уравнение $F(x \oplus a) \oplus F(x) = b$ имеет решение, где $a, b \in \mathbb{F}_2^n$. Данная функция введена в связи с исследованием *почти совершенно нелинейных* (APN) функций — векторных булевых функций, для которых максимальное число решений уравнения выше по всем возможным векторам a, b, где $a \neq \mathbf{0}$, минимально и равно 2. Легко видеть, что F — APN-функция тогда и только тогда, когда $\mathrm{wt}(\gamma_F) = 2^{2n-1} - 2^{n-1}$, где wt — вес Хэмминга булевой функции. Степенью $\deg(F)$ векторной булевой функции называется степень ее полинома Жегалкина.

Для произвольной квадратичной (т. е. степени 2) APN-функции F от n переменных множество $B_a(F) = \{F(x \oplus a) \oplus F(x) \mid x \in \mathbb{F}_2^n\}$ является аффинным подпространством размерности $n-1$ для любого $a \neq \mathbf{0}$. Множества $B_a(F)$ можно представить с помощью функций $\Phi_F : \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2^n$, $\varphi_F : \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2$ в виде $B_a(F) = \{y \in \mathbb{F}_2^n \mid \langle \Phi_F(a), y \rangle = \varphi_F(a)\}$, где $\Phi_F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\varphi_F(\mathbf{0}) = 1$ и $\langle x, y \rangle = x_1y_1 \oplus \ldots \oplus x_ny_n$ для произвольных $x, y \in \mathbb{F}_2^n$. В обозначениях выше функция γ_F имеет вид: $\gamma_F(a,b) = \langle \Phi_F(a), b \rangle \oplus \varphi_F(a) \oplus 1$.

С квадратичными APN-функциями связан любопытный открытый вопрос: верно ли, что все функции, множества $B_a(F)$ которых являются аффинными подпространствами размерности $n-1$ для любого $a \neq \mathbf{0}$, квадратичны? Такие функции впервые рассматривались в работе [1] и названы *скрюченными*. Представляется интересным исследовать свойства ассоциированной булевой функции квадратичной APN-функции. Известно, что при нечетном числе переменных n для квадратичной APN-функции F функция Φ_F взаимно однозначна (1-в-1 функция) [2], а при четном — 3-в-1 функция [3]. Получена верхняя оценка степени Φ_F.

Утверждение 1. *Пусть F — квадратичная APN-функция от n переменных. Тогда $\deg(\Phi_F) \leqslant n-2$.*

Утверждение 2. *Для всех известных квадратичных APN-функций F от n переменных, $n = 3, \ldots, 8$, верно, что $\deg(\langle v, \Phi_F \rangle) = n-2$, где $v \in \mathbb{F}_2^n$, $v \neq 0$.*

Утверждение 3. *Для всех известных квадратичных APN-функций F и G от n переменных, $n = 3, \ldots, 8$, верно, что, если $\gamma_F = \gamma_G$, то $\deg(F \oplus G) \leqslant 1$.*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-41-543364).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bending T. D., Fon-der-Flaass D.* Crooked functions, bent functions, and distance regular graphs // Electron. J. Comb. 1998. V. 5. P. 34.
2. *Carlet C., Charpin P., Zinoviev V.* Codes, bent functions and permutations suitable for DES-like cryptosystems // Des. Codes Cryptography. 1998. V. 15, No 2. P. 125–156.
3. *Городилова А. А.* Линейный спектр квадратичных APN-функций // ПДМ. 2016. № 4(34). С. 5–16.

УСТОЙЧИВОСТЬ СВОЙСТВА ПОЛНОТЫ МНОЖЕСТВА СЛОВ-ЗАПРЕТОВ

Евдокимов А. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
evdok@math.nsc.ru

Мы продолжаем исследование инвариантности свойства полноты и избегаемости множества слов-запретов при определенных преобразованиях множества: расширении или сужении множества запретов, возможных "ошибках" в его элементах и др. [1]–[3]. Множество S слов (запретов) в алфавите A называется полным (или блокирующим), если любая бесконечная последовательность букв из A содержит в качестве своего подслова хотя бы одно слово из S [1], [2]. Подслово — это отрезок подряд следующих букв. Полное множество S называется неприводимым, если любое подмножество, образованное удалением из S любого слова, неполное. Полное множество S назовем сильно неустойчивым, если замена любой буквы в любом его слове приводит к неполному множеству. Пусть $A = \{0, 1\}$, и тогда заменами букв будут $0 \to 1$ и $1 \to 0$.

Теорема 1. *Для любого $n > 1$ существует полное неприводимое множество $S \subseteq A^n$, которое является сильно неустойчивым.*

Существенность взаимосвязей задач о полноте систем слов с геометрией контуров в графах перекрытия слов или графах де Брейна подробно описана в [2]. Мы дополняем ее следующей теоремой.

Теорема 2. *Наибольшая длина $C(n, k)$ простого контура без ориентированных хорд длины k в графе де Брейна порядка n равна $C(n, k) = |A|^{n-k}$.*

Интересно заметить, что при $k = 1$ условие отсутствия k-перехода в контуре (как ориентированном цикле) означает, что без учета ориентации ребер мы имеем цикл без хорд, поскольку, ориентируя хорду в любом из двух направлений, мы получим контур меньшей длины. Поэтому вопрос о наибольшей длине такого контура аналогичен известной задаче о максимальной длине цикла в булевом n-мерном кубе (проблема "Змея в ящике"). Для графов де Брейна мы имеем точное решение задачи — теорема 2.

В заключение приводим задачу из [2], поставленную автором еще в 1979 году, решение которой важно для исследования полноты. Насколько быстро может расти отношение $f(m, n) = \max |S_1|/|S_2|$, например, как функция от n при фиксированном m, где $m = |A|$, а максимум берется по всем парам $\{S_1, S_2\}$ полных неприводимых множеств $S_1, S_2 \subseteq A^n$.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта РАН № 0314-2015-0011.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Евдокимов А. А.* Алгоритм распознавания полноты множества слов и динамика запретов // ПДМ. Приложение. 2016. № 9. С. 10–12.
2. *Евдокимов А. А.* Исследование полноты множеств слов и языков с запретами // Вестник ТГУ. Приложение. 2004. № 9. С. 8–12.
3. *Evdokimov A. A., Kitaev S. V.* Crucial words and the complexity of some extremal problems for sets of prohibited words // J. Comb. Theory. Ser. A. 2004. V. 105. P. 273–289.
4. *Berstel J., Karhumaki J.* Combinatorics on words — a tutorial // Bull. EATCS. 2003. V. 79. P. 178–229.

ПОСТРОЕНИЕ РАСПИСАНИЯ БЕСКОНФЛИКТНОЙ АГРЕГАЦИИ ДАННЫХ В КВАДРАТНОЙ РЕШЁТКЕ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ ПРЕПЯТСТВИЯМИ

Ерзин А. И.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
adilerzin@math.nsc.ru

В беспроводных сетях данные, собранные элементами, должны быть переданы в центр принятия решений — базовую станцию (БС). Время агрегации — период, в течение которого данные от всех элементов сети поступят в БС — является важным критерием качества сетей быстрого реагирования. В задаче агрегации данных количество передаваемой информации, как правило, не учитывается. Каждый пакет данных передаётся по любому ребру коммуникационного графа (КГ) за один временной раунд.

В большинстве беспроводных сетей элемент (вершина) не может передавать и получать пакеты в одно и то же время (полудуплексные системы), и вершина не может получать более одного пакета одновременно. Более того, с целью экономии энергии каждая вершина передаёт пакет один раз в течение сеанса агрегации. Это значит, что пакеты передаются по дугам искомого агрегационного дерева (АД) с корнем в БС, и вершина в АТ должна сначала получить пакеты от всех своих потомков (в дереве) и только после этого может послать агрегированный пакет вершине-родителю.

В большинстве беспроводных сетей передатчики используют одну радиочастоту. Следовательно, если в зоне приёма получателя работает более одного передатчика, то в силу интерференции радиоволн получатель не может получить предназначенный ему пакет данных. Такая ситуация называется *конфликтом*.

В задаче бесконфликтной агрегации данных необходимо найти АД и бесконфликтное расписание минимальной длины [1]. В англоязычной литературе эта задача известна как Convergecast Scheduling Problem, и она NP-трудна даже в случае заданного АД [2]. В [3] рассмотрен КГ в форме единичной квадратной решётки, в каждом узле которой находится передатчик, дальность передачи которого равна 1. Предложен простой полиномиальный алгоритм построения *оптимального* решения.

В данной работе рассматривается аналогичный КГ, но с прямоугольными препятствиями, непроницаемыми для радиоволн. Предлагается полиномиальный алгоритм построения бесконфликтного расписания агрегации данных.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-07-00552).

ЛИТЕРАТУРА

1. *De Souza J., Nikolaidis I.* An exploration of aggregation convergecast scheduling // Ad Hoc Networks. 2013. V. 11, No 8. P. 2391–2407.
3. *Erzin A., Pyatkin A.* Convergecast Scheduling Problem in Case of Given Aggregation Tree. The complexity status and some special cases // 10th Int. Symp. on Communication Systems, Networks and Digital Signal Processing. Prague, 2016. P. 1–6.
3. *Gagnon J., Narayanan L.* Minimum latency aggregation scheduling in wireless sensor networks // 11th Int. Symp. on Algorithms and Experiments for Sensor Systems, Wireless Networks and Distributed Robotics. Wroclaw, 2014. P. 152–168.

ПОЛИНОМИАЛЬНО РАЗРЕШИМЫЕ В СРЕДНЕМ КЛАССЫ ЗАДАЧ БУЛЕВА ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Заозерская Л. А.

Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омск, Россия; zaozer@ofim.oscsbras.ru

Доклад посвящен обзору результатов исследования в среднем структуры множеств допустимых решений некоторых задач булева программирования (БП). Ранее были известны классы задач об упаковке множества и многомерной задачи о рюкзаке с булевыми переменными, которые полиномиально разрешимы в среднем алгоритмом динамического программирования и имеющие среднее число допустимых решений $O(n)$. В [1] на основе метода регулярных разбиений показано, что классы задач БП, обладающие полиномиальной длиной L-комплексов релаксационных многогранников и полиномиальным средним числом допустимых решений, также полиномиально разрешимы в среднем алгоритмом ветвей и границ типа Лэнд и Дойг, первым алгоритмом Гомори, алгоритмом перебора L-классов.

При естественном распределении исходных данных для классической и обобщенной задач об упаковке множества установлено свойство монотонности отношения математических ожиданий числа допустимых решений задач на соседних слоях булева куба [2], [3]. При фиксированных целом параметре $k \geq 1$ и вероятности p появления ненулевых элементов в матрице коэффициентов системы ограничений задач это свойство позволяет строить оценки для числа переменных и числа ограничений, при которых средняя мощность множества допустимых решений не превосходит $O(n^{k+1})$. Отсюда вытекает полиномиальная разрешимость в среднем выделенных классов задач. Используя тот же подход, выделены полиномиально разрешимые в среднем классы для задачи о покрытии множества, а также для некоторых частных случаев обобщения этой задачи и многомерной задачи о рюкзаке. Следует отметить, что нами построены примеры задач об упаковке множества, которые показывают, что установленное свойство монотонности имеет место только для отношения средних величин.

Полученные результаты позволяют предложить новую методику проведения вычислительного эксперимента для рассмотренных задач БП.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00740).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Заозерская Л. А., Колоколов А. А.* Оценки среднего числа итераций для некоторых алгоритмов решения задачи об упаковке множества // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2010. Т. 50, № 2. С. 242–248.
2. *Заозерская Л. А., Гофман Н. Г.* Исследование в среднем некоторых алгоритмов решения задач об упаковке множества // Информационный бюллетень Ассоциации математического программирования, № 12. Научное издание. Екатеринбург: УрО РАН, 2011. С. 177.
3. *Заозерская Л. А., Яклюшин А. В.* Исследование среднего числа допустимых решений обобщенной задачи об упаковке множества // Проблемы оптимизации и экономические приложения: материалы VI Международной конференции. Омск: Изд-во Омского гос. ун-та, 2015. С. 111.

ОБ АЛГОРИТМЕ ПОСТРОЕНИЯ 2-В-1 APN-ФУНКЦИЙ

Идрисова В. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
vvitkup@yandex.ru

Работа посвящена проблеме существования APN-перестановок и их связи с множеством 2-в-1 APN-функций. Описан алгоритм построения 2-в-1 APN-функций.

В современных блочных шифрах в качестве основных нелинейных преобразований используются S-блоки. Математически S-блок можно определить как векторную булеву функцию, то есть произвольное отображение $F:\mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2^m$. Понятие APN-функций, как функций, наиболее стойких к дифференциальной атаке, было предложено в 1992 К. Ньюберг [1], однако известно [2], что данные функции изучались в СССР В. А. Башевым и Б. А. Егоровым, начиная с 1968 года. Векторная функция называется *APN-функцией*, если уравнение $F(x\oplus a)\oplus F(x) = b$ имеет не более двух решений для любых $a \in \mathbb{F}_2^n \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{F}_2^n$. Важное место в исследовании криптографических функций занимает проблема существования APN-перестановок при четных n. В работе [3] была найдена первая APN-перестановка при $n = 6$, однако, для больших размерностей вопрос по-прежнему открыт. В работе рассматриваются APN-функции специального вида, которые эквивалентны подмножеству APN-перестановок в силу своей комбинаторной структуры.

Утверждение. *При $n = 3$ каждая 2-в-1 APN-функция аффинно эквивалентна некоторой APN-перестановке.*

Рассматривается вопрос построения множества 2-в-1 APN-функций для произвольного n. Определение APN-функции накладывает ограничения на структуру вектора ее значений, в частности, для любого ненулевого $a \in \mathbb{F}_2^n$ и любых $x_1, x_2 \in \mathbb{F}_2^n$ верно $F(x_1 \oplus a) \oplus F(x_1) \neq F(x_2 \oplus a) \oplus F(x_2)$, где $x_1 \neq x_2$ и $x_1 \oplus a \neq x_2$. На этом основывается полученный алгоритм генерации 2-в-1 APN-функций.

На первом этапе алгоритма строятся всевозможные допустимые символьные последовательности, представляющие собой структуру вектора значений 2-в-1 функции и удовлетворяющие описанным ограничениям. Например, для $n = 3$ одной из допустимых символьных последовательностей является $(\alpha\ \beta\ \beta\ \theta\ \epsilon\ \theta\ \epsilon\ \alpha)$. На втором этапе символам в полученных последовательностях необходимо сопоставить двоичные векторы, так чтобы выбранные значения также удовлетворяли заданным ограничениям. В случае $n = 3$ справедливо следующее:

Лемма. *Любая полученная при помощи алгоритма допустимая последовательность со значениями c_1, c_2, c_3, c_4 из $\mathbb{F}_2^3$ является 2-в-1 APN-функцией тогда и только тогда, когда для данных векторов выполнено $c_1 \oplus c_2 \oplus c_3 \oplus c_4 \neq \mathbf{0}$.*

Описанный алгоритм позволяет строить 2-в-1 APN-функции и с их помощью проверять возможность существования эквивалентных APN-перестановок. Найдены 2-в-1 APN-функции, эквивалентные APN-перестановкам от 6 переменных.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 17-41-543364).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nyberg K.* Differentially uniform mappings for cryptography. On almost perfect nonlinear permutations // Lect. Notes Comput. Sci. 1994. V. 765. P. 55–64.
2. *Глухов М. М.* О приближении дискретных функций линейными функциями // Матем. вопр. криптогр. 2016. Т. 7, № 4. С. 29–50.
3. *Browning K. A., Dillon J. F., McQuistan M. T., Wolfe A. J.* An APN permutation in dimension six // Contemp. Math. 2010. V. 518. P. 33–42.

ЗАДАЧИ КЛАСТЕРИЗАЦИИ ГРАФОВ

Ильев В. П.[1,2], **Ильева С. Д.**[2]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[2] *Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского, Омск, Россия;*
iljev@mail.ru, iljeva@mail.ru

В задачах кластеризации требуется разбить данное множество объектов на несколько подмножеств (кластеров) только на основе сходства объектов друг с другом. Мера сходства оценивается по-разному в разных задачах.

Одной из наиболее наглядных формализаций задач кластеризации является *задача кластеризации графа*. В этой задаче отношение сходства объектов задается посредством неориентированного графа, вершины которого взаимно однозначно соответствуют объектам, а ребра соединяют похожие объекты, обладающие достаточным количеством одинаковых признаков. Требуется разбить множество вершин графа на попарно непересекающиеся кластеры так, чтобы минимизировать число ребер между кластерами и число недостающих ребер внутри кластеров.

В литературе изучались варианты задачи кластеризации графов, в которых количество кластеров заранее не определено, ограничено сверху или равно наперед заданному числу. Рассматривались также постановки, в которых заданы ограничения на размеры кластеров.

В теории распознавания образов и в машинном обучении задачи кластеризации относят к разделу обучения без учителя. Наряду с этим рассматриваются также *задачи кластеризации с частичным обучением*, в которых часть объектов (как правило, небольшая) изначально распределена по кластерам.

Авторами предложена новая постановка задачи кластеризации графа, которую можно рассматривать как одну из формализаций задачи кластеризации с частичным обучением. В этой задаче дано множество, состоящее из n объектов, которые необходимо распределить по k кластерам, $k < n$. Среди заданных объектов выделены k объектов, никакие два из которых не должны принадлежать одному и тому же кластеру.

Доклад содержит краткий обзор результатов по задачам кластеризации графов, полученных авторами в последнее время и не вошедших в предыдущий обзор [1]. Среди них результаты по вычислительной сложности задач с ограничениями на размеры кластеров и задач с частичным обучением, а также гарантированные оценки точности алгоритмов приближенного решения этих задач.

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 15-11-10009).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Il'ev V., Il'eva S., Kononov A.* Short survey on graph correlation clustering with minimization criteria // Proc. 9th Int. Conf. “Discrete Optimization and Operations Research” (Lecture Notes in Computer Sciences, V. 9869). Heidelberg: Springer, 2016. P. 25–36.

АППРОКСИМАЦИОННАЯ СХЕМА ДЛЯ ЗАДАЧИ ВЗВЕШЕННОЙ 2-КЛАСТЕРИЗАЦИИ

Кельманов А. В.[1,2], **Моткова А. В.**[1,2], **Шенмайер В. В.**[1]

[1]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[2]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
kelm@math.nsc.ru, anitamo@mail.ru, shenmaier@mail.ru

В работе рассматривается следующая

Задача *(Weighted variance-based 2-clustering with given center). Дано:* множество $\mathcal{Y} = \{y_1, \dots, y_N\}$ точек из $\mathbb{R}^q$, натуральное число $M \le N$ и два вещественных числа $w_1 > 0$ и $w_2 \ge 0$. *Найти:* разбиение множества $\mathcal{Y}$ на два непустых кластера $\mathcal{C}$ и $\mathcal{Y} \setminus \mathcal{C}$ такое, что

$$w_1 \sum_{y \in \mathcal{C}} \|y - \overline{y}(\mathcal{C})\|^2 + w_2 \sum_{y \in \mathcal{Y} \setminus \mathcal{C}} \|y\|^2 \to \min,$$

где $\overline{y}(\mathcal{C}) = \frac{1}{|\mathcal{C}|} \sum_{y \in \mathcal{C}} y$ — центроид кластера $\mathcal{C}$, при ограничении $|\mathcal{C}| = M$.

Ранее в [1]–[3] для NP-трудных в сильном смысле случаев задачи: (1) $w_1 = 1$ и $w_2 = 0$, (2) $w_1 = w_2 = 1$ и (3) $w_1 = |\mathcal{C}|$ и $w_2 = N - |\mathcal{C}|$, были предложены аппроксимационные схемы с трудоемкостью $\mathcal{O}\Big(qN^2\big(\sqrt{\frac{2q}{\varepsilon}} + 2\big)^q\Big)$.

В настоящей работе предложен ускоренный алгоритм, который для заданной относительной погрешности ε позволяет находить $(1+\varepsilon)$−приближенное решение задачи за время

$$\mathcal{O}\Big(\sqrt{q}N^2\big(\frac{\pi e}{2}\big)^{q/2}\big(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + 2\big)^q\Big).$$

В случае, когда размерность q пространства фиксирована, алгоритм реализует схему FPTAS. Когда размерность пространства есть величина $\mathcal{O}(\log N)$, алгоритм остается полиномиальным и реализует схему PTAS.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-10041).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kel'manov A. V., Romanchenko S. M.* An FPTAS for a vector subset search problem // J. Appl. Ind. Math. 2014. V. 8, No 3. P. 329–336.
2. *Kel'manov A. V., Khandeev V. I.* Fully polynomial-time approximation scheme for a special case of a quadratic Euclidean 2-clustering problem // Comput. Math. Math. Phys. 2016. V. 56, No 2. P. 334–341.
3. *Kel'manov A. V., Motkova A. V.* A fully polynomial-time approximation scheme for a special case of a balanced 2-clustering problem // Lect. Notes Comput. Sci. 2016. V. 9869. P. 182–192.

РАНДОМИЗИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧИ ДВУХКЛАСТЕРНОГО РАЗБИЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Кельманов А. В.[1,2], **Хамидуллин С. А.**[1], **Хандеев В. И.**[1,2]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
kelm@math.nsc.ru, kham@math.nsc.ru, khandeev@math.nsc.ru

Рассматривается NP-трудная [1] в сильном смысле

Задача (*Minimum Sum-of-Squares 2-Clustering problem on sequence with given center of one cluster and cluster cardinalities*).

Дано: последовательность $\mathcal{Y} = (y_1, \dots, y_N)$ точек из $\mathbb{R}^q$, натуральные числа $T_{\min}$, $T_{\max}$ и $M > 1$.

Найти: подмножество $\mathcal{M} = \{n_1, \dots, n_M\} \subseteq \mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$ номеров элементов последовательности $\mathcal{Y}$ такое, что

$$\sum_{j \in \mathcal{M}} \|y_j - \overline{y}(\mathcal{M})\|^2 + \sum_{i \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{M}} \|y_i\|^2 \to \min,$$

где $\overline{y}(\mathcal{M}) = \frac{1}{|\mathcal{M}|} \sum_{i \in \mathcal{M}} y_i$ — центроид (геометрический центр) элементов множества $\{y_j \mid j \in \mathcal{M}\}$, при ограничениях

$$T_{\min} \le n_m - n_{m-1} \le T_{\max} \le N, \quad m = 2, \dots, M,$$

на элементы набора $(n_1, \dots, n_M)$.

В работе предложен рандомизированный алгоритм для приведенной задачи. В случае $M \ge \beta N$, где $\beta \in (0,1)$, для произвольных $\varepsilon > 0$ и $\gamma \in (0,1)$ алгоритм позволяет находить $(1+\varepsilon)$-приближенное решение задачи с вероятностью не менее $1-\gamma$ за время $\mathcal{O}(qMN^2)$. Найдены условия, при которых алгоритм находит $(1+\varepsilon_N)$-приближенное решение задачи с вероятностью не менее $1-\gamma_N$, где $\varepsilon_N \to 0$ и $\gamma_N \to 0$ при $N \to \infty$, за время $\mathcal{O}(qMN^3)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 15-01-00462, № 16-31-00186 и № 16-07-00168).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kel'manov A. V., Pyatkin A. V.* On complexity of some problems of cluster analysis of vector sequences // J. Appl. Ind. Math. 2013. V. 7, No 3. P. 363–369.

О НЕМОНОТОННОЙ СЛОЖНОСТИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Кочергин В. В.[1], **Михайлович А. В.**[2]

[1]*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия;* vvkoch@yandex.ru

[2]*Высшая школа экономики, Москва, Россия;* anna@mikhaylovich.com

Исследуется задача о сложности реализации булевых функций схемами из функциональных элементов в базисах, содержащих какое-либо порождающее множество класса M монотонных функций (например, само множество M), все представители которого имеют нулевой вес (стоимость использования), и конечное число немонотонных функций единичного веса.

Пусть базис B имеет вид $B = M \cup \{\omega_1, \ldots, \omega_p\}$, где $\omega_i \in P_2 \setminus M$, $i = 1, \ldots, p$.

Определим *немонотонную сложность $I_B(S)$ схемы S над базисом B* как число немонотонных элементов схемы S, т. е. элементов, которым приписаны немонотонные функции базиса.

Немонотонную сложность $I_B(f)$ булевой функции f над базисом B определим как минимальную немонотонную сложность схем, вычисляющих над базисом B функцию f.

Для произвольной булевой функции f определим величину $d(f)$ как максимальное (максимум берется по всем возрастающим цепям наборов значений переменных) число изменений значений функции f с 1 на 0.

Для случая, когда единственным немонотонным элементом базиса является отрицание, точное значение немонотонной сложности (называемой в этом случае инверсионной сложностью) произвольной булевой функции f установлено А. А. Марковым [1]:

$$I_{B_0}(f) = \lceil \log_2(d(f) + 1) \rceil,$$

где $B_0 = M \cup \{\overline{x}\}$.

В данной работе для задачи о немонотонной сложности булевых функций получен в некотором смысле окончательный результат — установлено точное значение немонотонной сложности над произвольным базисом описанного вида для любой булевой функции.

Теорема. *Пусть базис B имеет указанный выше вид. Тогда для любой булевой функции f справедливо равенство*

$$I_B(f) = \left\lceil \log_2 \left(\frac{d(f)}{D(B)} + 1 \right) \right\rceil,$$

где $D(B) = \max\{d(\omega_1), \ldots, d(\omega_p)\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Марков А. А.* Об инверсионной сложности систем функций // ДАН СССР. 1957. Т. 116, № 6. С. 917–919.

О СВОЙСТВАХ ИЗОМЕТРИЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ МНОЖЕСТВА БЕНТ-ФУНКЦИЙ

Куценко А. В.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
alexandrkutsenko@bk.ru

В настоящей работе рассматриваются некоторые известные отображения булевых функций, переводящие множество бент-функций в себя и сохраняющие расстояние Хэмминга: отображение, которое каждой бент-функции ставит в соответствие дуальную к ней функцию; аффинная замена аргумента и сдвиг на аффинную функцию. Доказано, что не существует изометричного отображения множества всех булевых функций в себя, которое каждой бент-функции ставило бы в соответствие дуальную к ней. Для бент-функций от малого числа переменных получено утверждение, характеризующее аффинную эквивалентность бент-функции и дуальной к ней.

Булевой функцией от n переменных называется произвольное отображение вида $f : \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2$. Преобразование Уолша-Адамара булевой функции f от n переменных — это целочисленная функция $W_f : \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{Z}$:

$$W_f(y) = \sum_{x \in \mathbb{F}_2^n} (-1)^{f(x) \oplus \langle x,y \rangle}, \quad y \in \mathbb{F}_2^n.$$

Булева функция f от $2k$ переменных называется бент-функцией [1], если $W_f(y) = (-1)^{\tilde{f}(y)} 2^k$ для каждого $y \in \mathbb{F}_2^{2k}$. Булева функция $\tilde{f}$ называется дуальной к бент-функции f. Дуальная функция является бент-функцией и определяется однозначно.

Отображение φ множества всех булевых функций от n переменных в себя называется изометричным, если оно сохраняет расстояние Хэмминга между булевыми функциями, т. е. $\mathrm{dist}(\varphi(f), \varphi(g)) = \mathrm{dist}(f, g)$, где f, g — две произвольные булевы функции от n переменных.

Утверждение 1. *Отображение, определенное на множестве бент-функций от $2k$ переменных и действующее по правилу $f(x) \longrightarrow \tilde{f}(x)$, не может быть расширено до изометричного отображения множества всех булевых функций от $2k$ переменных.*

Булевы функции называются аффинно эквивалентными, если они равны с точностью до аффинной замены аргумента и сдвига на аффинную функцию.

Утверждение 2. *Каждая бент-функция от $2k$ переменных, где $k \leqslant 3$, аффинно эквивалентна своей дуальной бент-функции.*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-41-543364).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rothaus O.* On bent functions // J. Combin. Theory. Ser. A. 1976. V. 20, No 3. P. 300–305.

КАЛЕНДАРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ С НЕЗАВИСИМЫМИ РАБОТАМИ

Малах С. А.[1], **Сервах В. В.**[2]

[1] *Организация дополнительного образования "Перспектива", Омск, Россия;* malahsveta@mail.ru

[2] *Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омск, Россия;* svv_usa@rambler.ru

Задача календарного планирования проектов заключается в определении сроков выполнения совокупности технологически взаимосвязанных работ с учетом ограничений на ресурсы. Как правило, такие задачи являются NP-трудными в сильном смысле и их высокая вычислительная сложность, в первую очередь, связана со структурой частичного порядка. Редким исключением является задача календарного планирования с ресурсами складируемого типа и критерием общего времени завершения работ, которая является полиномиально разрешимой [1]. Если работы проекта независимы, то сильная NP-трудность сохраняется в случае ограничений на возобновимые ресурсы. В данной работе исследуется вычислительная сложность задачи со складируемыми, в том числе финансовыми, ресурсами. Основное внимание уделяется инвестиционным проектам с критерием максимизации чистой приведенной прибыли при наличии возможности использования кредитов и с учетом реинвестирования получаемого от выполнения работ дохода [2].

В теории сложности особую роль играют так называемые пограничные задачи. Их частные случаи являются полиномиальными, а любые обобщения — NP-трудными. В качестве такой пограничной задачи рассматривается следующая постановка. Имеется N технологически независимых работ единичной длительности, k_j — капиталовложения, необходимые для выполнения работы j, где $j = 1, 2, \dots, N$. Предполагается, что деньги вкладываются только в момент начала выполнения работы. По ее завершению получаем доход в размере c_j. Инвестор обладает начальным капиталом в размере K_0. Свободные средства вкладываем под r_0 — ставка альтернативного безрискового ликвидного вложения. Требуется составить расписание выполнения работ, при котором чистая приведенная прибыль всего проекта будет максимальной.

Удалось показать, что в оптимальном решении кредит необходимо брать только в начальный момент времени, а далее работы выполняются за счет реинвестирования получаемого дохода. Важной особенностью является изменения порядка выполнения работ в оптимальном расписании в зависимости от начального и текущего капитала, что не позволяет использовать жадные алгоритмы для поиска ее точного решения. На основе полученных свойств предложен алгоритм решения задачи.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-00976).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гимади Э. Х., Залюбовский В. В., Севастьянов С. В.* Полиномиальная разрешимость задач календарного планирования со складируемыми ресурсами и директивными сроками // Дискретн. анализ и исслед. опер., сер. 2. 2000. Т. 7, № 1. С. 9–34
2. *Казаковцева Е. А., Сервах В. В.* Сложность задачи календарного планирования с кредитами // Дискретн. анализ и исслед. опер. 2015. Т. 22, № 4. С. 35–49.

О НЕСИСТЕМАТИЧЕСКИХ СОВЕРШЕННЫХ КОДАХ БЕСКОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Малюгин С. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
mal@math.nsc.ru

Бесконечномерный финитный куб $\{0,1\}_0^{\mathbb{N}}$ состоит из всевозможных последовательностей $u=(u_1,u_2,\dots)$, где $u_i\in\{0,1\}$ и все $u_i=0$ кроме конечного множества индексов $i\in\mathbb{N}$. Относительно побитовой операции сложения куб $\{0,1\}_0^{\mathbb{N}}$ является бесконечномерным векторным пространством над полем Галуа $GF(2)$. Число ненулевых координат вектора u называется его *весом*.

Подмножество C в $\{0,1\}_0^{\mathbb{N}}$ называется *совершенным двоичным кодом с расстоянием* 3, если все шары единичного радиуса (в метрике Хэмминга) с центрами из C попарно не пересекаются и их объединение покрывает куб $\{0,1\}_0^{\mathbb{N}}$.

Для конечных n код Хэмминга H^n длины $n=2^k-1$ $(k>1)$ определяется стандартным образом. Добавляя справа к векторам $u\in H^n$ бесконечное число нулевых координат, можно вложить код H^n в куб $\{0,1\}_0^{\mathbb{N}}$. Это вложение будем обозначать символом $\widetilde{H}^n$. Тогда, так как $\widetilde{H}^n\subset\widetilde{H}^{2n+1}$, то можно положить $H^\infty=\bigcup_{k=2}^\infty\widetilde{H}^{2^k-1}$. Этот код по традиции называем *кодом Хэмминга бесконечной длины*, см. [1].

Совершенный код $C\subset\{0,1\}_0^{\mathbb{N}}$ называется *систематическим*, если множество $\mathbb{N}$ можно разбить на два подмножества N_1 и N_2 со следующими свойствами. Для любого вектора $v\in\{0,1\}_0^{N_1}$ существует единственный вектор $w\in\{0,1\}_0^{N_2}$, для которого вектор u с координатами $u_i=v_i$ при $i\in N_1$ и $u_i=w_i$ при $i\in N_2$ принадлежит коду C. В противном случае код C называется *несистематическим*.

В коде Хэмминга H^∞ рассмотрим подпространство R_i, порожденное всеми векторами веса 3 с i-й координатой, равной единице. Всевозможные смежные классы вида $R_i^u=R_i+u$ $(u\in H^\infty)$ называются *i-компонентами* кода H^∞, $i\in\mathbb{N}$. Рассмотрим некоторое семейство $\mathcal{B}=\{R_1^{u_1},R_2^{u_2},\dots\}$, состоящее из бесконечного числа непересекающихся i-компонент, где $\mathbf{u}_i\in H^\infty$, $1\le i<\infty$. Одна из основных конструкций нелинейных совершенных кодов состоит в том, что в коде H^∞ сдвигаются на базисные векторы e_i все компоненты $R_i^{u_i}$ из семейства $\mathcal{B}$, [2–4]. Полученный этим способом код обозначается символом $H^\infty(\mathcal{B})$.

Семейство непересекающихся компонент $\mathcal{B}=\{R_1^{u_1},R_2^{u_2},\dots\}$ называем *разреженным*, если начиная с некоторого номера k выполняется условие $R_i^{u_i}\cap\widetilde{H}^{2^k-1}=\emptyset$ для всех $i>2^{k+1}-1$. Говорим, что совершенный код $C\subset\{0,1\}_0^{\mathbb{N}}$ имеет *полную систему троек*, если для любого вектора $u\in\{0,1\}_0^{\mathbb{N}}$ веса 3 существуют два кодовых вектора $v,w\in C$ такие, что $u=v+w$.

Теорема. *Если семейство компонент $\mathcal{B}$ является разреженным, то код $C=H^\infty(\mathcal{B})$ имеет полную систему троек и, как следствие, он несистематический.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малюгин С. А.* Совершенные двоичные коды бесконечной длины // ПДМ. Приложение. 2015. № 8. С. 117–120.
2. *Августинович С. В., Соловьева Ф. И.* О несистематических совершенных двоичных кодах // Пробл. передачи информ. 1996. Т. 32, № 3. С. 47–50.
3. *Phelps K. T., LeVan M. J.* Kernels of nonlinear Hamming codes // Des. Codes Cryptography. 1995. V. 6, No 3. P. 247–257.
4. *Phelps K. T., LeVan M. J.* Nonsystematic perfect codes // SIAM J. Discrete Math. 1999. V. 12, No 1. P. 27–34.

ГАМИЛЬТОНОВЫ ЦИКЛЫ В ГРАФАХ ДВУХ СРЕДНИХ СЛОЕВ ГИПЕРКУБА МАЛОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Мерекин Ю. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
merekin@math.nsc.ru

В 2016 г. швейцарским математиком T. Mutze [1] было доказано существование гамильтонова цикла в графе двух средних слоев булева n-мерного гиперкуба произвольной нечетной размерности и приведена конструкция, дающая $2^{2^{\Omega(n)}}$ различных гамильтоновых циклов. Тем самым была решена давняя и популярная комбинаторная проблема, связанная с задачами построения кодов типа Грея с различными дополнительными свойствами, в частности, гамильтоновых циклов в подграфах регулярной структуры в графе n-мерного куба.

В задачах этого типа удобно кодировать циклы круговыми словами в n-буквенном алфавите, записывая прохождение ребер цикла буквами, поставленными в соответствие n ортам гиперкуба, сводя задачу к словам с запретами [2], [3]. Найдены два слова длины 70, кодирующие гамильтоновы циклы в графе двух средних слоев куба размерности 7, которые не переводятся друг в друга автоморфизмами гиперкуба. Для меньшей размерности, т. е. $n = 5$, неизоморфных циклов не существует. Это показано с помощью несложного по трудоемкости алгоритма типа структурированного перебора вариантов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00507).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mutze T.* Proof of the middle levels conjecture // Proc. London Math. Soc. 2016. V. 112, No 4. P. 677–713.
2. *Evdokimov A. A., Perezhogin A. L.* Minimal enumerations of subsets of a finite set and the middle level problem // Discrete Appl. Math. 2001. V. 114, No 1–3. P. 109–114.
3. *Евдокимов А. А.* Кодирование структурированной информации и вложения дискретных пространств // Дискретн. анализ и исслед. опер., сер. 1. 2000. Т. 7, № 4. С. 48–58.

О ВЗАИМНО ОДНОЗНАЧНЫХ ВЕКТОРНЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЯХ В ПОЛИНОМИАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Милосердов А. В.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
amiloserdov6@gmail.com

Известно, что многие криптографические булевы функции находятся с помощью алгебраического представления — в виде полиномов над конечными полями характеристики 2. Например, APN-функции, бент-функции и другие, которые используются в узлах замены современных шифров. При этом свойства таких функций существенно зависят от конкретного числа переменных n. В то же время для работы с криптографическими булевыми функциями часто требуется их комбинаторное представление — в виде алгебраической нормальной формы (или полинома Жегалкина), позволяющее напрямую оперировать с такими характеристиками булевой функции, как ее степень, вес, зависимость от переменных.

В работе исследуются взаимосвязи между комбинаторным и алгебраическим представлениями взаимно однозначных векторных булевых функций [1]. Исследуются взаимно однозначные функции$f : \mathbb{F}_{2^n} \to \mathbb{F}_{2^n}$ вида $f(x) = \alpha^k x^i + x^j$, где α — примитивный элемент поля, $0 \leq k \leq 2^n - 1$ и $1 \neq j < i \leq 2^n - 1, i \neq j$ [2]. Исследуется их существование при конкретных значениях n. В работе найдены все взаимно однозначные функции данного вида для всех $n \leq 10$ и проверены их некоторые криптографические свойства.

Теорема 1. *Пусть $1 \leq j < i \leq 2^n - 1$, $1 \leq k \leq 2^n - 1$, α — примитивный элемент поля $\mathbb{F}_{2^n}$. Если $2^n - 1$ — простое, то взаимно однозначных функций $f : \mathbb{F}_{2^n} \to \mathbb{F}_{2^n}$ вида $f(x) = \alpha^k x^i + x^j$ не существует.*

Теорема 2. *Пусть $1 \leq j < i \leq 2^n - 1$, $1 \leq k \leq 2^n - 1$, α — примитивный элемент поля $\mathbb{F}_{2^n}$. Если n — составное число, то существует взаимно однозначная функция $f : \mathbb{F}_{2^n} \to \mathbb{F}_{2^n}$ вида $f(x) = \alpha^k x^i + x^j$.*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-41-543364).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Shallue C. J.* Permutation polynomials of finite fields // Honours project, Monash University, 2012.
2. *Masuda A. M., Zieve M. E.* Permutation binomials over finite field // Trans. Am. Math. Soc. 2009. V. 361, No 8. P. 4169–4180.

МАКСИМАЛЬНЫЕ МЕТРИЧЕСКИ РЕГУЛЯРНЫЕ МНОЖЕСТВА В БУЛЕВОМ КУБЕ

Облаухов А. К.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
oblaukhov@gmail.com

В работе изучаются метрически регулярные подмножества булева куба.

Определение. *Метрическим дополнением* [1] множества A называется множество векторов булева куба, максимально удаленных от него в метрике Хэмминга.

Определение. Множество A называется *метрически регулярным*, если метрическое дополнение его метрического дополнения совпадает с самим A.

Задача исследования максимальных (по мощности) метрически регулярных множеств тесно связана с исследованиями *бент-функций*, множество которых является метрически регулярным [2]. Бент-функции часто используются в криптографии, однако многие связанные с ними задачи остаются открытыми. В частности, задача о количестве бент-функций.

В работе задача поиска максимального метрически регулярного множества сведена к одной известной задаче теории кодирования и получены нижние оценки на мощность метрически регулярных множеств с фиксированным расстоянием.

Теорема. *Пусть A, B — пара метрически регулярных множеств, являющихся метрическими дополнениями друг друга. Тогда существует пара метрически регулярных множеств A_1, B_1 таких, что A содержится в A_1, B содержится в B_1, а A_1 и B_1 являются метрическими дополнениями друг друга и расстояние между ними равно единице.*

Следствие. *Максимальное по мощности нетривиальное метрически регулярное множество удалено от своего метрического дополнения на расстояние 1 и совпадает с метрическим дополнением минимального по мощности покрывающего кода радиуса 1.*

Таким образом, общая задача поиска максимального метрически регулярного множества эквивалентна задаче поиска минимального покрывающего кода радиуса 1, которая является известной открытой проблемой. Однако при фиксации расстояния между множествами задача поиска максимальных и минимальных метрически регулярных множеств остается неисследованной.

Утверждение. *Пусть A, B — пара метрически регулярных множеств в булевом кубе, являющихся метрическими дополнениями друг друга и отстоящих друг от друга на расстояние d, а M, N — мощности этих множеств соответственно. Тогда*

$$M + N \geqslant \frac{2^{n+1}(n-2)}{n(n-1)^{d-1} + n - 4},$$

где n — размерность булева куба.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-41-543364).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Облаухов А. К.* О метрическом дополнении подпространств булева куба // Дискретн. анализ и исслед. опер. 2016. Т. 23, № 3. С. 93–106.
2. *Tokareva N.* Duality between bent functions and affine functions // Discrete Math. 2012. V. 312, No 3. P. 666–670.

ОПТИМАЛЬНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ КОДЫ ДЛЯ ТЕХНОЛОГИИ СОТОВОЙ СВЯЗИ CDMA

Одиноких Н. С.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
nikita.odinokih@gmail.com

Code Division Multiple Access (CDMA) — это технология мобильной связи, основанная на кодовом разделении канала. Для оценки качества сигнала в CDMA вводится понятие коэффициента отношения пиковой и средней мощностей сигнала (Peak-to-Average Power Ratio). Многие задачи, связанные с CDMA, направлены на снижение коэффициента PAPR, так как высокие значения коэффициента ведут к необходимости использования дорогих усилителей. Векторами, на которых достигается минимальное значение PAPR, являются вектора значений бент-функций. Бент-функция — это булева функция от четного числа переменных, находящаяся на наибольшем расстоянии от аффинных функций. Бент-функции имеют множество применений в криптографии. Код длины 2^n называется кодом постоянной амплитуды, если все элементы этого кода являются векторами значений бент-функций. Линейный код длины 2^n называется кодом, сохраняющим свойство бент (SPB-кодом) для функции f, если сдвиг на любое кодовое слово оставляет функцию f в классе бент-функций. Стоит отметить, что линейные коды довольно просты в реализации, что позволяет быстро строить различные коды постоянной амплитуды.

В работе исследуются свойства бент-функций, лежащих в классе Мэйорана – МакФарланда. Предложена конструкция кода постоянной амплитуды для бент-функции $x_1x_{n+1} \oplus \ldots \oplus x_nx_{2n}$.

Теорема. *Для бент-функции $x_1x_{n+1} \oplus \ldots \oplus x_nx_{2n}$ существует SPB-код размерности $2^{n+1} - 1$. Более того, по этому коду можно построить SPB-код такой же размерности для произвольной бент-функции из класса Мэйорана – МакФарланда.*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-41-543364).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tokareva N.* Bent functions: results and applications to cryptography. Boston: Academic Press, 2015.
2. *Павлов А. В.* Бент-функции и линейные коды в CDMA // ПДМ. Приложение. 2010. № 3. С. 95–97.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ГРАФ ДИСКРЕТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ ДОМИНИРУЮЩИМИ ВЕРШИНАМИ

Парфиненко А. С.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
anastasia.s.parfinenko@gmail.com

Линейная дискретная динамическая система — это пара (X, f), где X — это конечномерное векторное пространство над конечным полем, а $f : X \to X$ — линейное отображение. Такие системы можно успешно изучать с помощью инструментов линейной алгебры, основываясь на естественном разложении любого линейного отображения на нильпотентную и биективную составляющие [1], [2].

Пусть $G_n = (V, D)$ — ориентированный граф с множеством вершин $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. Рассмотрим следующую линейную дискретную динамическую систему с графом-носителем G_n. В каждый момент времени вершины графа G_n помечены элементами $v_1, v_2, \ldots, v_n$ поля вычетов $\mathbb{Z}_2$ по модулю 2. Кортеж $\tilde{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{Z}_2^n$ называется состоянием системы. В следующий момент времени (такт работы системы) состояние системы меняется, а динамика его изменения определяется отображением $A : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2^n$, где A — матрица смежности графа-носителя G_n; каждая вершина получает новую метку, равную сумме старых меток всех вершин, из которых выходят дуги в рассматриваемую вершину.

Функциональный граф, согласно [3], рассматриваемой дискретной динамической системы представляет из себя ориентированный граф H_{G_n}, вершины которого являются элементами множества $\mathbb{Z}_2^n$ и дуга из вершины $\tilde{v}$ идет в вершину $\tilde{w}$ тогда и только тогда, когда $A\tilde{v} = \tilde{w}$.

Определение. *Доминирующей вершиной* в ориентированном графе $G_n = (V, D)$ будем называть вершину $v \in V$ такую, что $(v, x), (x, v) \in D$ для любого $x \in V, x \neq v$.

В работе описано изменение функционального графа линейной дискретной динамической системы при изменении ее графа-носителя G_n, а именно при добавлении к нему двух доминирующих вершин.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hernández Toledo R. A.* Linear finite dynamical systems // Commun. Algebra. 2005. V. 33, No 9. P. 2977–2989.
2. *Гарбер А. И.* Графы линейных операторов // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2008. Т. 263. С. 64–71.
3. *Harary F.* The number of functional digraphs // Math. Ann. 1959. V. 139. P. 203–210.

АВТОМОРФИЗМЫ ЦИКЛОВ В ГИПЕРКУБЕ

Пережогин А. Л.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
pereal@math.nsc.ru

Автоморфизмом простого цикла C в графе G назовем автоморфизм G, оставляющий C на месте. Таким образом, $Aut\, C = \{\varphi \in Aut\, G \,|\, \varphi(C) = C\}$. Группы автоморфизмов циклов используются как при классификации циклов [1], так и для построения новых с фиксированными свойствами [2], [3].

Очевидно, что $Aut\, C$ является либо циклической группой порядка m, либо группой диэдра порядка $2m$. Обозначим через $Aut_+ C$ в первом случае саму группу $Aut\, C$, во втором циклическую подгруппу порядка m.

Пусть φ — порождающий элемент группы $Aut_+ C$. Вершины графа G под действием φ разбиваются на орбиты. Назовем графом орбит $O_\varphi(G)$ под действием φ простой граф, получающийся из G отождествлением вершин внутри каждой орбиты. Число вершин в орбите назовем весом соответствующей вершины графа орбит.

Пусть $\varphi \in Aut_+ C$ является порождающим циклической группы порядка k.

Утверждение 1. *Если в G существует такой цикл C длины t, что $Aut_+ C = \langle\varphi\rangle$, то в $O_\varphi(G)$ существует цикл длины t/k по вершинам веса k.*

Утверждение 2. *Если в $O_\varphi(G)$ существует цикл длины t/k по вершинам веса k, порожденный цепью $v_0, v_1, \ldots, v_{t/k}$ в исходном графе G, и справедливо $\varphi(v_0) = v_{t/k}$, то существует цикл C длины t, для которого $Aut_+ C = \langle\varphi\rangle$.*

Таким образом, вопросы существования циклов с нетривиальной группой автоморфизмов сводятся к задаче нахождения гамильтоновых циклов в графах орбит.

В данной работе дан обзор результатов автора по группам автоморфизмов простых и гамильтоновых циклов в булевом n-кубе [3]–[5] и приводятся некоторые обобщения этих результатов на случай q-ичного n-куба. В частности, получены верхние оценки на порядок группы автоморфизмов гамильтоновых и простых циклов, построены простые циклы в кубах малых размерностей с большой группой автоморфизмов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dejter I. J., Delgado A. A.* Classes of Hamilton cycles in the 5-cube // J. Comb. Math. Comb. Comput. 2007. No 61. P. 81–95.
2. *Savage C. D., Shields I.* A Hamilton path heuristic with applications to the middle two levels problem // Congr. Numerantium. 1999. No 140. P. 161–178.
3. *Пережогин А. Л.* Об автоморфизмах циклов в n-мерном булевом кубе // Дискретн. анализ и исслед. опер., сер. 1. 2007. Т. 14, № 3. С. 67–79.
4. *Пережогин А. Л.* О прямых автоморфизмах гамильтоновых циклов в n-мерном булевом кубе // Дискретн. анализ и исслед. опер. 2010. Т. 17, № 4. С. 32–42.
5. *Пережогин А. Л.* Простые циклы в n-кубе с большой группой автоморфизмов // Дискретн. анализ и исслед. опер. 2013. Т. 20, № 4. С. 88–97.

ГЕНЕТИЧЕСКИЙ ЛОКАЛЬНЫЙ ПОИСК ДЛЯ ЗАДАЧИ МНОГОКАНАЛЬНОЙ АГРЕГАЦИИ ДАННЫХ В БЕСПРОВОДНЫХ СЕТЯХ

Плотников Р. В.[1], **Ерзин А. И.**[2]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
[1]prv@math.nsc.ru, [2]adilerzin@math.nsc.ru

Рассматривается задача построения расписания минимальной длины бесконфликтной агрегации данных в *беспроводных сенсорных сетях* (БСС). При этом считается, что количество каналов передачи данных достаточно велико, и конфликты, возникающие при одновременной передаче разным адресатам, не учитываются. Считается, что время работы БСС может быть разбито на *временные раунды* — интервалы одинаковой длины, достаточной для приема или передачи одного пакета данных. Кроме того, предполагается, что в процессе агрегации объем данных не увеличивается (такое возможно, например, при поиске минимального, максимального или среднего значения) и каждый элемент сети передает ровно один пакет.

Пусть БСС представлена в виде связного неориентированного графа $G = (V, E)$, в котором каждая вершина $i \in V$ соответствует некоторому элементу сети, а ребро $(i, j) \in E$ отражает допустимую линию связи. Пусть задана базовая станция $s \in V$. Требуется построить агрегационное дерево $T = (s, V, E'), E' \subset E$ с корнем в s и для каждой вершины $v \in V \setminus \{s\}$ определить временной раунд $t_v \in \{1, \ldots, |V| - 1\}$ передачи данных родительской вершине в дереве T таким образом, что длина расписания $L = \max(t_v, v \in V \setminus \{s\})$ минимальна и выполнены следующие условия:

- время передачи данных вершиной превосходит время приема данных от любой из ее дочерних вершин в дереве T;
- вершина не может принимать данные от разных вершин во время одного временного раунда.

Данная задача эквивалентна известной NP-трудной задаче телефонного распространения данных (telephone broadcasting [1]). В данной работе предлагается новый эвристический алгоритм, основанный на методе генетического локального поиска. Проведенный численный эксперимент показал, что предлагаемый алгоритм позволяет найти более точные решения задачи, чем наилучшие из известных алгоритмов [2], [3] на многих распространенных моделях топологии сети.

Работа А. И. Ерзина частично поддержана грантом РФФИ (проект № 16-07-00552). Работа Р. В. Плотникова частично поддержана грантом РФФИ (проект № 16-37-60006).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Slater P. J., Cockayne E. J., Hedetniemi S. T.* Information dissemination in trees // SIAM J. Comput. 1981. V. 10, No 4. P. 692–701.
2. *Beier R., Sibeyn J. F.* A powerful heuristic for telephone gossiping // The Seventh International Colloquium on Structural Information & Communication Complexity. L'Aquila (Italy), 2000. P. 17–36.
3. *Harutyunyan H., Shao B.* An efficient heuristic for broadcasting in networks // J. Parallel Distrib. Comput. 2006. V. 66, No 1. P. 68–76.

О СВЯЗИ ДИЛЕММЫ ЗАКЛЮЧЕННОГО С ЗАДАЧАМИ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ И РАЗМЕЩЕНИЯ ХАБОВ

Плясунов А. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
apljas@math.nsc.ru

В задачах размещения хабы обычно служат в качестве пунктов, в которых накапливаются и перераспределяются потоки (например, пассажиров, грузов, почты, данных). Эффект от введения хабов обусловлен с одной стороны сокращением связей (спиц), по которым происходит передача потока, а с другой стороны от экономии на масштабах [1].

В работе рассматривается новая двухуровневая нелинейная частично–целочисленная модель размещения хабов, связанных с ними радиальных сетей и выбора цен за обслуживание клиентов. Лидер первым выбирает свои хабы, конструирует топологию своих радиальных сетей и устанавливает цены. Затем свой выбор делает последователь. Для каждой пары (пункт-генерации, пункт-назначения) и в сети лидера, и в сети последователя найдется свой маршрут передачи потока. Распределение потоков между маршрутами описывается специальной моделью (logit model) [1].

Ранее было показано [1], что в данной модели существует равновесие Штакельберга для любого типа взаимодействия игроков: как кооперативного, так и некооперативного. Установлено, что если хабы и сети игроками уже выбраны и игроки участвуют в ценовой войне по типу игры Бертрана, то существует единственное и конечное равновесие Нэша для любого типа взаимодействия игроков.

В данной работе эти результаты анализируются в контексте, связанном с дилеммой заключенного [2]. В исследуемой модели у последователя существует следующая стратегия выбора решения. Он может копировать сеть лидера и выбрать такие же цены. При такой стратегии последователя оба игрока получат одинаковый доход. Если допустить, что лидер знает об этой стратегии последователя, то игроки могут получить произвольно большой доход. Таким образом, как и в дилемме заключенного, возникает парадокс — неоптимальная стратегия оказывается более выгодной, чем оптимальная.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-07-00319).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Čvokić D. D., Kochetov Yu. A., Plyasunov A. V.* The existence of equilibria in the leader-follower hub location and pricing problem // Operations Research Proceedings. Cham: Springer, 2017. P. 539–544.
2. *Ролз Дж. О.* Теория справедливости. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1995.

МАКСИМАЛЬНАЯ КОМПОНЕНТНАЯ ИММУННОСТЬ

Покрасенко Д. П.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
pokrasenko.d.p@gmail.com

Одним из важным криптографическим свойств булевых функций является алгебраическая иммунность, она была введена в работе [1]. *Алгебраической иммунностью* $AI(f)$ булевой функции $f : \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2$ называется минимальное число d такое, что существует булева функция g степени d, не тождественно равная нулю, для которой $fg = 0$ или $(f \oplus 1)g = 0$.

Данное понятие различными способами было обобщено на векторный случай. Одним из наиболее естественных обобщений является понятие компонентной алгебраической иммунности, введённое в [2]. *Компонентной алгебраической иммунностью* $AI_{comp}(F)$ векторной булевой функции $F : \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2^m$ называется минимальная алгебраическая иммунность компонентных функций $b \cdot F$, где $b \in \mathbb{F}_2^m$ и $b \neq 0$, т. е. $AI_{comp}(F) = \min\{AI(b \cdot F) \mid b \in \mathbb{F}_2^m, b \neq 0\}$, где $b \cdot F = b_1 f_1 \oplus \ldots \oplus b_m f_m$.

Для булевых функций от n переменных известно [3], что алгебраическая иммунность не превосходит $\lceil \frac{n}{2} \rceil$, более того существуют функции, имеющие $AI(f) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. В случае компонентной алгебраической иммунности векторных булевых функций также было получено [2], что $AI_{comp}(F) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Данная работа просвещена изучению условий существования векторных булевых функций с максимальной компонентной алгебраической иммунностью, равной $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. Были доказаны следующие необходимые условия на значения n, m.

Теорема 1. *Если векторная булева функция $F : \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2^m$ имеет максимальную компонентную алгебраическую иммунность $AI_{comp}(F) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, то*

$$m \leq 2^{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil} - 1.$$

Теорема 2. *Если векторная булева функция $F : \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{F}_2^m$ имеет максимальную компонентную алгебраическую иммунность $AI_{comp}(F) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ и n нечетно, то $m \leq n$.*

Стоит отметить, что в случае четного n, в отличие от нечетного случая, ограничение $m \leq n$ в общем случае не является верным и существуют функции с максимальной компонентной алгебраической иммунностью, имеющие $m > n$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-41-543364).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Meier W., Pasalic E., Carlet C.* Algebraic attacks and decomposition of Boolean functions // Lect. Notes Comput. Sci. 2004. V. 3027. P. 474–491.
2. *Carlet C.* On the algebraic immunities and higher order nonlinearities of vectorial Boolean functions // NATO Sci. Peace Secur. Ser. D, Inf. Commun. Secur. 2009. V. 23. P. 104–116.
3. *Courtois N., Meier W* Algebraic attacks on stream ciphers with linear feedback // Lect. Notes Comput. Sci. 2003. V. 2656. P. 345–359.

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАДАННЫМИ УПРАВЛЯЮЩИМИ ФУНКЦИЯМИ

Прытков Н. В.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
nikolass@ngs.ru

Дискретные динамические системы являются мощным инструментом моделирования различных сложных структур. В частности, они играют важную роль в описании строения и поведения генных сетей, в теории управляющих систем, в задачах обработки и анализа информации и во многих других сферах.

Под дискретной динамической системой понимается связный ориентированный граф $G_n(V, D)$ с множеством вершин $V = \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$. Каждой вершине v_i приписано значение x_i из $\mathbb{Z}_p$, параметр p называется значностью системы. Набор значений всех вершин определяет состояние s динамической системы, а значения координат нового состояния вычисляются следующим образом:

$$x'_i = \begin{cases} x_i - 1, & \text{если } f_i(\overline{x}) = 0 \text{ и } x_i > 0, \\ x_i + 1, & \text{если } f_i(\overline{x}) = 1 \text{ и } x_i < p - 1, \\ x_i, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где f_i — управляющая функция для вершины v_i дискретной динамической системы. Графом состояний называется ориентированный граф, вершинами которого являются состояния системы, а дуга из s_1 в s_2 существует тогда и только тогда, когда система из состояния s_1 переходит в состояние s_2.

Системы с аддитивными и мультипликативными функциями в качестве управляющих изучались в работах [1], [2], в работах [3], [4] рассматривался случай пороговых управляющих функций.

В данной работе анализируются свойства дискретных динамических систем с произвольными управляющими функциями. В частности, для любой размерности и значности доказывается существование системы, граф состояний которой имеет одну компоненту связности в виде ориентированного цикла, а также приводится нижняя оценка на количество таких систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Евдокимов А. А., Лихошвай В. А., Комаров А. В.* О восстановлении структуры дискретных моделей функционирования генных сетей // Вестн. Томск. гос. ун-та. Прил. 2005. № 14. С. 213–217.
2. *Евдокимов А. А., Комаров А. В., Лихошвай В. А.* О восстановимости дискретных моделей генных сетей // Вестн. Томск. гос. ун-та. 2006. № 18. С. 66–77.
3. *Быков И. С.* Функционирование дискретной динамической системы циркулянтного типа с пороговыми функциями в вершинах // ПДМ. 2014. № 4. С. 84–95.
4. *Прытков Н. В., Пережогин А. Л.* Алгоритмы восстановления дискретных динамических систем с пороговыми функциями // Тр. СПИИРАН. 2016. № 49. С. 66–79.

О НИЖНИХ ОЦЕНКАХ ФОРМУЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ ЛИНЕЙНОЙ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

Рычков К. Л.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
rychkov@math.nsc.ru

Приведены доказательства нижних оценок сложности реализации линейной булевой функции $x_1 + \ldots + x_n = 1 \pmod 2$ формулами в базисе $\{\vee, \wedge, ^{-}\}$. Доказано, что при $n = 6$ эта сложность не меньше 40. Дано упрощенное доказательство полученного ранее результата: для чётного $n \neq 2^k$ вышеуказанная сложность не меньше $n^2 + 2$, для нечётного $n \geq 5$ — не меньше $n^2 + 3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рычков К. Л.* О нижних оценках формульной сложности линейной булевой функции // Сиб. электрон. матем. изв. 2014. Т. 11. С. 165–184.

ЧИСЛО СУММ И РАЗНОСТЕЙ В АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ

Саргсян В. Г.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; vahe_sargsyan@ymail.com

Получены верхние и нижние оценки числа подмножеств, представимых в виде суммы и разности подмножеств, в абелевых группах.

Пусть G — абелева группа порядка n, а $k \geq 0$ и $l \geq 0$ — целые числа, удовлетворяющие условию $k + l \geq 2$, и $A \subseteq G$. Обозначим $-A = \{-x \mid x \in A\}$, $A + A = \{x_1 + x_2 \mid x_1, x_2 \in A\}$, $A - A = \{x_1 - x_2 \mid x_1, x_2 \in A\}$. Подмножество $A \subseteq G$ называется (k, l)-суммой, если существует подмножество $B \subseteq G$ такое, что $A = \underbrace{B + \ldots + B}_{k} - \underbrace{B - \ldots - B}_{l}$. В частности, $(1, 1)$-сумма называется разностью, а $(2, 0)$-сумма — просто суммой. Семейство (k, l)-сумм в G обозначим через $SS_{k,l}(G)$, а через Z_n — группу по модулю n.

В 2004 г. Б. Грином (B. Green) и И. Ружей (I. Ruzsa) была доказана следующая

Теорема 1 [1]. *Пусть p — простое число. Тогда справедливы соотношения*

$$p^2 2^{p/3} \ll |SS_{2,0}(Z_p)| \leq 2^{p/3+\kappa(p)},$$

где $\kappa(p)/p \to 0$ при $p \to \infty$, причем $\kappa(p) \ll p(\log\log p)^{2/3}(\log p)^{-1/9}$.

В работе [2] автором была получена асимптотика логарифма числа подмножеств A, представимых в виде $A = B - B$.

Теорема 2 [2]. *Пусть p — простое число. Тогда справедливы соотношения*

$$p^2 2^{p/3} \ll |SS_{1,1}(Z_p)| \leq 2^{p/3+\kappa(p)},$$

где $\kappa(p)/p \to 0$ при $p \to \infty$, причем $\kappa(p) \ll p(\log\log p)^{2/3}(\log p)^{-1/9}$.

Пусть $D(G)$ — размер наибольшей собственной подгруппы группы G, а $\varphi(n)$ — функция Эйлера. В работе доказывается следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть G — абелева группа порядка n и экспоненты ν, а k, l — неотрицательные целые числа такие, что $k + l = 2$. Тогда справедливы оценки*

$$\nu\varphi(\nu)2^{\nu/3} \ll |SS_{k,l}(G)| \leq 2^{n/3+D(G)/3+\bar{o}(n)},$$

при $n, \nu \to \infty$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16-01-00593А).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Green B., Ruzsa I.* Counting sumsets and sum-free sets modulo a prime // Stud. Sci. Math. Hung. 2004. V. 41, No 3. P. 285–293.
2. *Саргсян В. Г.* Число разностей в группах простого порядка // Дискрет. матем. 2013. Т. 25, № 1. С. 152–158.

ЭФФЕКТИВНОЕ ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ВСЕХ D-ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДВУХМАШИННОЙ ЗАДАЧИ ДЖОНСОНА

Севастьянов С. В.[1], **Лин Б. М. Т.**[2]

[1]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
`seva@math.nsc.ru`

[2]*Institute of Information Management, Department of Information and Finance Management, National Chiao Tung University, Hsinchu, Taiwan;*
`bmtlin@mail.nctu.edu.tw`

Мы рассматриваем ситуацию, когда целью "решения" оптимизационной задачи является выдача полного множества её допустимых решений, удовлетворяющих каким-то дополнительным требованиям. Например, требуется выдать на печать все решения, оптимальные по заданному критерию, либо — все решения со значениями целевой функции, не превосходящими заданной величины, либо — все решения, относительная погрешность которых (для заданного критерия) не превосходит заданной величины D. Требования, предъявляемые к последовательности выводимых на печать решений, таковы:

A. ПОЛНОТА. Должны быть выданы **все решения**, удовлетворяющие заданным свойствам.

B. НЕПОВТОРЯЕМОСТЬ. Недопустим **многократный вывод** одного и того же решения.

C. ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ВРЕМЕННАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ алгоритма. Наличие полинома $P(x)$, ограничивающего время отыскания каждого выдаваемого на печать решения. Иначе говоря, для любого заданного на входе примера I исходной задачи промежуток времени, проходящий между моментами (окончания) выдачи любых двух последовательных решений, не должен превосходить $P(|I|)$, где $|I|$ — длина записи входа I. Этой же величиной ограничивается время поиска первого решения, а также — время, проходящее после выдачи последнего решения до момента остановки программы. Совокупность этих требований называется "полиномиальной задержкой" (*polynomial delay*).

D. ПОЛИНОМИАЛЬНО ОГРАНИЧЕННАЯ ПАМЯТЬ программы. Наличие такого полинома $Q(x)$, что в каждый момент работы программы объём занимаемой ею оперативной памяти компьютера не превосходит $Q(|I|)$. Сие требование называется "полиномиальным пространством" (*polynomial space*). Наличие данного ограничения особенно актуально в случае, когда искомое множество может иметь экспоненциальную мощность.

Данный вид исследований демонстрируется нами на примере классической задачи теории расписаний — задачи Джонсона (формально — задачи *flow shop* с двумя машинами и n работами на минимум длины расписания), где в качестве искомого множества решений выступает либо множество оптимальных расписаний, минимизирующих длину интервала выполнения всех работ, либо (в более общем случае) — D-оптимальных расписаний для заданной погрешности D.

Как известно, именно с теоретического решения данной задачи, опубликованного Сэлмором Джонсоном в 1953 году в отчёте компании RAND Corporation, началась история появления на свет науки, известной ныне как "Теория расписаний". Полученный нами результат обобщает результат Джонсона, эффективно перечисляя все оптимальные решения данной задачи.

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-07-00513).

О НЕЛИНЕЙНЫХ ДВОИЧНЫХ КОДАХ, БЛИЗКИХ ПО СВОЙСТВАМ К ЛИНЕЙНЫМ

Соловьева Ф. И.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
sol@math.nasc.ru

В настоящей работе приводится обзор результатов, посвященных нелинейным двоичным кодам со свойствами, близкими к линейным. Основные определения см. в [1]. Код называется *транзитивным*, если его группа автоморфизмов содержит подгруппу, действующую транзитивно на кодовых словах. Если, более того, эта подгруппа является *регулярной* (то есть ее порядок совпадает с мощностью кода), то код называется *пропелинейным кодом*, а подгруппа называется *пропелинейной структурой* кода. На пропелинейном коде может существовать большое количество пропелинейных структур, в том числе неизоморфных как группы. Все линейные коды пропелинейны, причем один и тот же линейный код (и необязательно линейный) может допускать неэквивалентные пропелинейные структуры. Очевидно, что всякий пропелинейный код транзитивен. Все Z_2Z_4 и Z_4-линейные коды являются пропелинейными, среди них отметим коды Препарата, Кердока, Геталса. Найдено 3057 классов сопряженности и не менее 2284 классов изоморфизма пропелинейных структур на расширенном совершенном коде Хэмминга H_{16}, продолжающих пропелинейные структуры на коде Нордстрома – Робинсона (Могильных И. Ю., 2015).

Для построения широких классов транзитивных и пропелинейных совершенных кодов и исследования их свойств были применены конструкции Васильева, Плоткина, Моллара, Фелпса, см. [1]. В 2012 г. Боргесом К. и др. исследованы структурные свойства пропелинейных кодов. Доказано, что транзитивные расширенные совершенные коды Потапова, обнаруженные им в 2006 г., пропелинейны [1], а также пропелинейны совершенные коды Васильева, построенные с помощью квадратичных функций (Кротов Д. С., Потапов В. Н., 2013 г.). Первый класс кодов оказался экспоненциальным по мощности, второй — дважды экспоненциальным.

Для кодового слова y совершенного кода C определим систему троек Штейнера S_y следующим образом: $\{y+u \mid u \in C, w(y+u) = 3\}$, здесь $w(y)$ — вес кодового слова y. Совершенный код C называется *гомогенным*, если для любых y и z из C системы троек Штейнера S_y и S_z изоморфны. В 2010 г. Остергардом П. Р. Ж. и др. перечислены все неэквивалентные гомогенные и транзитивные совершенные двоичные коды длины 15. Гомогенных кодов оказалось 437, в то время как транзитивных всего 201. В 2015 г. Могильных И. Ю. и Соловьева Ф. И. установили, что для всякой длины $n = 2^r - 1$, $r \geq 4$ существуют гомогенный нетранзитивный и транзитивный непропелинейный совершенные коды.

Доклад базируется на серии работ с соавторами Боргесом К., Могильных И. Ю. и Рифой Ж.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00499).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соловьева Ф. И.* Обзор по совершенным кодам // Математические вопросы кибернетики. Вып. 18: Сборник статей. М.: Физматлит, 2013. С. 5–34.

О ТРАНСВЕРСАЛЯХ В КЛЕТЧАТЫХ ЛАТИНСКИХ КВАДРАТАХ И ГИПЕРКУБАХ

Тараненко А. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
taattg@mail.ru

d-Мерный латинский гиперкуб Q порядка n — это d-мерный массив порядка n, заполненный n различными символами таким образом, что в любой линии этого массива все элементы различны. Двумерные латинские гиперкубы более известны как латинские квадраты [1].

Трансверсалью латинского гиперкуба Q называется такой набор из n его элементов, что в любой гиперграни гиперкуба лежит ровно один элемент из этого набора и что в этих элементах содержатся все n различных символов. Пусть $T(Q)$ есть число трансверсалей в гиперкубе Q.

d-Мерный латинский гиперкуб Q порядка $2n$ назовем клетчатым, если Q состоит из n^d блоков, где каждый из блоков представляет собой d-мерный латинский гиперкуб порядка 2.

Теорема 1. *Число трансверсалей в d-мерном клетчатом латинском гиперкубе порядка $2n$ делится на $2^{(d-1)n}$.*

Обозначим через Z_m^d d-мерный латинский гиперкуб порядка 2^m, который является таблицей Кэли итерированной группы $\mathbb{Z}_2^m$ от d переменных. Несложно видеть, что гиперкуб Z_m^d есть клетчатый латинский гиперкуб.

Теорема 2. *Для любого $d \geq 2$ и $m \geq 1$ существует $c = c(d) > 0$ такое, что $T(Z_m^d) \geq cn^{\frac{(d-1)}{4}n}$ при четном d и $T(Z_m^d) \geq cn^{\frac{(d-1)}{2}n}$ при нечетном d, где $n = 2^m$ есть порядок латинского гиперкуба Z_m^d. В частности, число трансверсалей в латинском квадрате, который является таблицей Кэли группы $\mathbb{Z}_2^m$, не меньше чем $cn^{n/4}$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wanless I. M.* Transversals in latin squares: a survey // Surveys in Combinatorics 2011. London Mathematical Society Lecture, Note Series 392. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. P. 403–437.

ВЕКТОР РАЗНООБРАЗИЯ ШАРОВ ТИПИЧНОГО ГРАФА ЗАДАННОГО ДИАМЕТРА

Федоряева Т. И.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
fti@math.nsc.ru

Для помеченных n-вершинных графов фиксированного диаметра $d \geq 1$ изучаются векторы разнообразия шаров (i-я компонента вектора равна числу различных шаров радиуса i) в асимптотике. В связи с проблемой описания таких векторов мы обращаемся к исследованию асимптотического поведения числа n-вершинных графов со специальным разнообразием шаров и к изучению вектора разнообразия шаров типичного графа (см. [1], где изложен подход к определению класса типичных комбинаторных объектов и абстрактного типичного комбинаторного объекта для заданного класса объектов, допускающих понятие размерности. В работе под размерностью графа понимается число его вершин, разумеется, возможны другие определения размерности графа).

Для произвольных $d \geq 1$ и $n \in \mathbb{N}$ явно определяется набор целочисленных векторов $\Lambda_{n,d}$ длины $d+1$, состоящий из $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ различных векторов при $d \geq 5$ и единственного вектора при $d < 5$.

Теорема. *Вектор разнообразия шаров типичного n-вершинного графа фиксированного диаметра d принадлежит $\Lambda_{n,d}$.*

При доказательстве теоремы используется критерий совпадения шаров [2] и развивается подход из [3] для получения оценок числа графов фиксированного диаметра с требуемыми свойствами. Полученный результат означает, что почти все помеченные n-вершинные графы диаметра d имеют вектор разнообразия шаров из $\Lambda_{n,d}$. Более того, в работе устанавливается, что при удалении любого вектора из набора $\Lambda_{n,d}$ это свойство не выполняется, и в этом смысле теорема не улучшаема.

Таким образом, получено решение проблемы описания векторов разнообразия шаров для почти всех графов заданного диаметра. Кроме того, при исследовании графов фиксированного диаметра с большим числом вершин выяснено расположение центров всех различных шаров заданного радиуса в типичном графе и, в частности, доказаны следующие свойства.

Следствие 1. *Типичный граф диаметра $d = 1, 2$ обладает полным разнообразием шаров.*

Следствие 2. *Пусть $d \geq 3$. Тогда типичный граф диаметра d не обладает локальным 2-разнообразием шаров и, в частности, не является графом полного разнообразия шаров, при этом обладает локальным 1-разнообразием шаров.*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00949).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Федоряева Т. И.* Вектор разнообразия шаров типичного графа малого диаметра // Дискретн. анализ и исслед. опер. 2015. Т. 22, № 6. С. 43–54.
2. *Федоряева Т. И.* Вычисление вектора разнообразия шаров заданного графа // Сиб. электрон. мат. изв. 2016. Т. 13. С. 122–129.
3. *Федоряева Т. И.* Асимптотическое приближение числа n-вершинных графов заданного диаметра // Дискретн. анализ и исслед. опер. 2017. Т. 24, № 2. С. 68–86.

О СПЕКТРЕ STAR ГРАФА

Хомякова Е. Н.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
ekhomnsu@gmail.com

Star графом S_n, $n \geqslant 2$, называется граф Кэли на симметрической группе Sym_n, порождающее множество которого состоит из транспозиций первого и i-го элементов, где $2 \leqslant i \leqslant n$. Под спектром графа понимается набор собственных значений графа. Они же являются собственными значениями матрицы смежности графа. Спектр называется целочисленным, если все собственные значения матрицы смежности являются целыми.

В 2009 г. была высказана гипотеза о том, что Star граф S_n для любых $n \geqslant 4$ имеет целочисленный спектр. В 2012 г. эта гипотеза была доказана в работе Б. Мохара и Р. Краковски [1]. Ими также были получены нижние оценки на кратности собственных значений. Открытым оставался вопрос о возможности вычисления точных значений кратностей собственных значений.

В 2015 г. были получены первые точные значения кратностей для графа S_n при $n \leqslant 10$ [2]. На основе комбинаторного подхода Ж. Чапоя и В. Феррея [3], использующего теорию представлений симметрической группы, был разработан метод вычисления кратностей собственных значений Star графа. В 2016 г. в [4] получены аналитические формулы для вычисления кратностей больших собственных значений. Кроме того, для кратностей собственных значений в окрестности нуля была доказана новая улучшенная асимптотическая оценка.

В настоящей работе доказана теорема об общем виде аналитической формулы для кратности произвольного собственного значения Star графа.

Теорема. *Пусть* $n \geqslant 2$ *и* $1 \leqslant t \leqslant \frac{n}{2}$, *тогда кратность* $mul(n-t)$ *собственного значения* $(n-t)$ *выражается формулой*

$$mul(n-t) = \frac{n^{2(t-1)}}{(t-1)!} + P(n),$$

где $P(n)$ *— некоторый полином степени, не превышающей* $2(t-1)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 15-01-05867 и № 16-01-00499 а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Krakovski R., Mohar B.* Spectrum of Cayley graphs on the symmetric group generated by transposition // Linear Algebra Appl. 2012. V. 437. P. 1033–1039.
2. *Khomyakova E. N., Konstantinova E. V.* Note on exact values of multiplicities of eigenvalues of the Star graph // Sib. Elektron. Mat. Izv. 2015. V. 12. P. 92–100.
3. *Chapuy G., Feray V.* A note on a Cayley graph of Sym_n // arXiv:1202.4976v2.
4. *Avgustinovich S. V., Khomyakova E. N., Konstantinova E. V.* Multiplicities of eigenvalues of the Star graph // Sib. Elektron. Mat. Izv. 2016. V. 13. P. 1258–1270.

ОБ ОТКРЫТЫХ ПРОБЛЕМАХ В ЗАДАЧЕ OPEN SHOP С МАРШРУТИЗАЦИЕЙ

Черных И. Д.[1,2], Льготина Е. В.[2]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
idchern@math.nsc.ru, e.lgotina@g.nsu.ru

Задача open shop с маршрутизацией машин была впервые описана в 2005 г. [1]. В этой задаче задано множество мобильных машин, каждая из которых должна выполнить по одной операции у каждой из неподвижных работ, расположенных в вершинах транспортной сети. Различные операции работ не могут выполняться одновременно. Машины изначально находятся в выделенной вершине (базе) и должны добраться до соответствующей вершины для выполнения операции расположенной в ней работы. Требуется составить кратчайшее допустимое расписание выполнения всех операций и возвращения машин на базу. Предполагается, что в каждой вершине расположена хотя бы одна работа, расстояния между вершинами заданы и удовлетворяют неравенству треугольника. Задача является обобщением как метрической задачи коммивояжера, так и классической задачи open shop теории расписаний.

Задача является NP-трудной уже в простейшем невырожденном случае с двумя машинами на двухвершинной сети [2]. Для этого случая в [1] показано, что оптимум отличается от стандартной нижней оценки не более чем в $\frac{6}{5}$ раза. Недавно этот результат был обобщен на случай трехвершинной сети [3]. Точная же верхняя оценка оптимума для произвольного двухмашинного случая до сих пор неизвестна.

Пожалуй, наиболее интригующим открытым вопросом, связанным с этой задачей, является существование алгоритма приближенного решения с константной оценкой точности для произвольного числа машин и произвольной транспортной сети. Наилучший из известных таких алгоритмов имеет оценку точности $O(\log m)$, где m — число машин [4]. Несмотря на то, что обе классические подзадачи рассматриваемой модели — метрическая задача коммивояжера и задача open shop — имеют алгоритмы с константной оценкой точности, их естественная комбинация пока успешно сопротивляется построению такого алгоритма.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 17-01-00170 и № 17-07-00513).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Averbakh I., Berman O., Chernykh I.* A 6/5-approximation algorithm for the two-machine routing open shop problem on a 2-node network // Eur. J. Oper. Res. 2005. V. 166, No 1. P. 3–24.
2. *Averbakh I., Berman O., Chernykh I.* The routing open-shop problem on a network: complexity and approximation // Eur. J. Oper. Res. 2006. V. 173, No 2. P. 521–539.
3. *Chernykh I., Lgotina E.* The 2-machine routing open shop on a triangular transportation network // Lect. Notes Comput. Sci. 2016. V. 9869. P. 284–297.
4. *Kononov A.* $O(\log m)$-approximation for the routing open shop problem // RAIRO, Oper. Res. 2015. V. 49, No 2. P. 383–391.

APPROXIMATION-PRESERVING REDUCTION OF k-MEANS CLUSTERING WITH A GIVEN CENTER TO k-MEANS CLUSTERING

Ageev A. A.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;
ageev@math.nsc.ru

We consider the following clustering problem introduced by A. Kelmanov and studied in a series of papers by him and his coauthors (see [1] for the references).

Problem k-Means+Fixed Center.

Instance: A set X consisting of n points $\mathbb{R}^d$ and a positive integer k.

Goal: Find a family of mutually disjoint subsets $C_1, \dots C_k \subseteq X$ minimizing the function

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{x \in C_i} \|x - z(C_i)\|^2 + \sum_{x \in X \setminus (\bigcup_i C_i)} \|x\|^2$$

where $z(C_i)$ stands for the centroid of C_i.

Problem k-Means+Fixed Center is a natural modification of the classical k-Means problem.

Problem k-Means.

Instance: A set X consisting of n points $\mathbb{R}^d$ and a positive integer k.

Goal: Find a partition $C_1, \dots C_k$ of X minimizing the function

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{x \in C_i} \|x - z(C_i)\|^2$$

where $z(C_i)$ is the centroid of C_i. Our main result is the following

Theorem. *Let $\mathcal{A}$ be an algorithm solving k-means with approximation ratio $1+\delta$ and time complexity $T(d, n, k, 1/\delta)$. Then problem k-means+fixed center can be solved with approximation ratio $(1+\varepsilon)(1+\delta)$ in time $T(d, n(1+1/\varepsilon), k+1, 1/\delta)$.*
This theorem allows to carry known algorithmic results from k-Means problem to k-Means+Fixed Center problem.

REFERENCES

1. *Kel'manov A. V., Khandeev V. I.*, “A randomized algorithm for two-cluster partition of a set of vectors,” Comput. Math. Math. Phys., **55**, No. 2, 330–339 (2015).

ON A CERTAIN GENERALIZATION OF THE ASSIGNMENT PROBLEM

Duginov O. I.[1], **Mankevich M. A.**[2]

Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus;
[1]oduginov@gmail.com, [2]mankewi4.masha@yandex.by

Different generalizations of the classical assignment problem are widely-studied in literature (see, for example, [1], [2]). We consider the following generalization of the assignment problem proposed in the paper [3]. Given a complete bipartite graph $G = (U \cup W, E)$ with weighted edges and a partition $U = U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_m$, the Min-Max Weighted Matching problem asks for an inclusion-wise maximal matching of G such that the value $\max(w_1, w_2, \ldots, w_m)$ is minimum, where w_i is the sum of weights of matching edges incident to vertices of U_i. If $m = 1$ then this problem is exactly the assignment problem.

The Min-Max Weighted Matching problem arises while container processing in railway yards and it is relatively little-studied. Barketau et al. in [3] showed that for each $\varepsilon \in (0, 1]$ finding an approximate solution to Min-Max Weighted Matching within a factor of $(2-\varepsilon)$ is strongly NP-hard and proposed heuristics for this problem.

As the Min-Max Weighted Matching problem is strongly NP-hard, the following question arises naturally [3]: Does the Min-Max Weighted Matching problem remain NP-hard in the strong sense for fixed $m \geq 2$? We answer this question.

Theorem 1. *For each fixed $m \geq 2$,* Min-Max Weighted Matching *is strongly* NP-*hard.*

The NP-hardness in the strong sense is proved by a reduction from the Minimum Maximal Matching problem restricted to cubic graphs, which is known to be NP-hard [4]. Theorem 1 can be strengthened for the case $m \geq 3$ as follows.

Theorem 2. *For each fixed $m \geq 3$,* Min-Max Weighted Matching *restricted to complete bipartite graphs $G = (U \cup W, E)$ such that for each vertex $w \in W$ weights of all edges incident to w are equal remains* NP-*hard in the strong sense.*

A proof of this theorem is based on a reduction from the 3-Partition problem, which is known to be NP-hard in the strong sense [5].

Finally, we present results on the computational complexity of special cases of the Min-Max Weighted Matching problem. Besides, we give exact algorithms and heuristics for the considered problem.

REFERENCES

1. *Burkard R., Dell'Amico M., Martello S.,* Assignment Problems, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia (2009).
2. *Pentico D.,* "Assignment problems: A golden anniversary survey," Eur. J. Oper. Res., **176**, No. 2, 774–793 (2007).
3. *Barketau M., Pesch E., Shafransky Y.,* "Minimizing maximum weight of subsets of a maximum matching in a bipartite graph," Discrete Appl. Math., **196**, 4–19 (2015).
4. *Demange M., Ekim T., Tanasescu C.,* "Hardness and approximation of minimum maximal matchings," Int. J. Comput. Math., **91**, No. 8, 1635–1654 (2014).
5. *Garey M., Johnson D.,* Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness, W. H. Freeman and Co, New York (1979).

ON OPTIMIZATION TIME OF EVOLUTIONARY ALGORITHMS WITH TOURNAMENT SELECTION

Eremeev A. V.

Omsk Branch of the Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Omsk, Russia;
eremeev@ofim.oscsbras.ru

This study is based on the fitness-level model [1] of non-elitist evolutionary algorithms with tournament selection. This algorithm is denoted by EA in what follows. The model from [1] provides upper and lower bounds for the expected proportion of the individuals with fitness above given thresholds in the EA population.

On the positive side, we show that the EA with uniform selection and mutation, which always flips a single bit, applied to satisfiable 2-SAT instances, has the probability at most $1/2$ of not visiting a satisfying assignment during $\Omega(n^2)$ iterations. We also obtain an upper bound for the probability of not visiting an optimum in t iterations of Randomized Local Search, applied to the unimodal Boolean functions. This bound is exponentially vanishing in t.

On the negative side, we show that even for the simple objective function $\mathrm{OneMax}(x) := \sum_{i=1}^{n} x_i$ on the search space $\{0,1\}^n$, the EA with tournament of size 2 and mutation operator, which flips each bit independently with probability $1/n$, there exists a constant $c > 0$ such that for all $t < en\ln(n) - cn - ren$, given any $r \in [0, \ln(n) - c]$, the expected proportion of optimal individuals in population number t is upper bounded by $0.74e^{-r/2} + O(1/n)$. This result uses a tail-bound for the (1+1) EA from [2].

A detailed description of the obtained results and their proofs may be found in [3].

The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00740).

REFERENCES

1. *Eremeev A. V.*, “Modeling and analysis of genetic algorithm with tournament selection,” in: Proc. of Artificial Evolution Conference (AE’99), Springer Berlin Heidelberg, Berlin, 2000, pp. 84–95.
2. *Lehre P. K., Witt C.*, “Concentrated hitting times of randomized search heuristics with variable drift,” in: Proc. of Algorithms and Computation: 25th International Symposium (ISAAC 2014), Springer International Publishing, 2014, pp. 686–697.
3. *Eremeev A. V.*, “On proportions of fit individuals in population of mutation-based evolutionary algorithm with tournament selection,” accepted to Evolutionary Computation (2017), arXiv:1507.08007 [cs.NE].

A FASTER ALGORITHM FOR TRAVELLING SALESMAN PROBLEM WITH VERTEX REQUISITIONS

Eremeev A. V.[1], Kovalenko Yu. V.[2]

[1] *Omsk Branch of the Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Omsk, Russia;*
eremeev@ofim.oscsbras.ru

[2] *Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;*
julia.kovalenko.ya@yandex.ru

The Travelling Salesman Problem with Vertex Requisitions (TSPVR) is formulated as follows. Let $G = (X, U)$ be an arc-weighted digraph, where $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ is the set of vertices, U is the set of arcs with non-negative arc weights $\rho(x, y)$, $(x, y) \in U$. Besides that, a system of vertex subsets (requisitions) $X^i \subseteq X$, $i = 1, \ldots, n$, is given, such that $1 \leq |X^i| \leq 2$ for all $i = 1, \ldots, n$.

Let F denote the set of bijections from $X_n := \{1, \ldots, n\}$ to X, such that $f(i) \in X^i$, $i = 1, \ldots, n$, for all $f \in F$. The problem consists in finding such a mapping $f^* \in F$ that $\rho(f^*) = \min\limits_{f \in F} \rho(f)$, where $\rho(f) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \rho(f(i), f(i+1)) + \rho(f(n), f(1))$ for all $f \in F$.

The TSPVR is strongly NP-hard [1], and this problem does not admit a fully polynomial time approximation scheme, provided that P≠NP.

A. I. Serdyukov showed that almost all feasible instances of TSPVR have not more than n feasible solutions and may be solved in quadratic time [1]. He proposed an exact algorithm based on enumeration of all perfect matchings in bipartite graph $\bar{G} = (X_n, X, \bar{U})$. Here the two subsets of vertices of bipartition X_n, X have equal sizes, and the set of edges is $\bar{U} = \{\{i, x\} : i \in X_n,\ x \in X^i\}$. Now there is a one-to-one correspondence between the set of perfect matchings in the graph $\bar{G}$ and the set F of feasible solutions to TSPVR. An edge $\{i, x\} \in \bar{U}$ is called *special* if $\{i, x\}$ belongs to all perfect matchings in the graph $\bar{G}$. For a feasible instance of TSPVR, every perfect matching in $\bar{G}$ is uniquely defined by a combination of maximal matchings chosen in each even cycle of $\bar{G}$ and the set of all special edges.

Using the approach from [2], we propose a modification of algorithm [1] for TSPVR with time complexity $O(n)$ for almost all feasible problem instances. A *contact between cycle j and cycle $j' \neq j$ (or between cycle j and a special edge)* in graph $\bar{G}$ is called a pair of vertices $(i, i+1)$ in the left-hand part of the graph, such that one of the vertices belongs to the cycle j and the other one belongs to the cycle j' (or the special edge). A *contact inside a cycle* means a pair of vertices in the left-hand part of a cycle, if their indices differ exactly by one. Given an instance of TSPVR, our algorithm carries out some preliminary computations for cycle contacts in $\bar{G}$, and iteratively evaluates objective function values of the feasible solutions faster than in [1].

The connection with perfect matchings in the bipartite graph $\bar{G}$ and the pre-processing for objective function also allows us to construct a MIP model with $O(n)$ binary variables and a new efficiently searchable neighborhood for the considered problem.

The authors were supported by the Russian Science Foundation Grant (project no. 15-11-10009).

REFERENCES

1. *Serdyukov A. I.*, "On travelling salesman problem with prohibitions," Upravlaemye systemi, **17**, 80–86 (1978).
2. *Eremeev A. V., Kovalenko J. V.*, "Optimal recombination in genetic algorithms for combinatorial optimization problems: Part II," Yugosl. J. Oper. Res., **24**, No. 2, 165–186 (2014).

ON THE ROMAN k-DOMINATION NUMBER IN GRAPHS

Golmohammadi H. R.

Ale-Taha Institute of Higher Education, Tehran, Iran;
hgolmohammadi26@gmail.com

Let $k \geq 1$ be an integer. A Roman k-dominating function on a graph G with vertex set V is a function $f : V \to \{0, 1, 2\}$ such that every vertex $v \in V$ with $f(v) = 0$ has at least k neighbors $u_1, u_2, \cdots, u_k$ with $f(u_i) = 2$ for $i = 1, 2, \cdots, k$. The weight of a Roman k-dominating function is the value $f(V) = \sum_{v \in V} f(v)$. The minimum weight of Roman k-dominating functions on a graph G is called the Roman k-domination number, denoted by $\gamma_{kR}(G)$. In this note, we present several new bounds on the Roman k-domination number and by using these bounds we improve some results of this topic.

REFERENCES

1. *Haynes T. W., Hedetniemi S. T., Slater P. J.,* Domination in Graphs: Advanced Topics, Marcel Dekker, New York (1998).
2. *Haynes T. W., Hedetniemi S. T. Slater P. J.,* Fundamentals of Domination in Graphs, Marcel Dekker, New York (1998).
3. *West D. B.,* Introduction to Graph Theory (2nd Edition), Prentice Hall, USA (2000).

A BRANCH-AND-BOUND PROCEDURE FOR THE RESOURCE CONSTRAINED PROJECT SCHEDULING PROBLEM

Goncharov E. N.[1], **Mishin D. V.**[2]

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;
[1]gon@math.nsc.ru, [2]mishindmv@gmail.com

We consider the resource constrained project scheduling problem (RCPSP) with precedence and resource constraints. The RCPSP can be defined as a combinatorial optimization problem, i.e. in terms of decision variables, constraints and objective functions, as follows. A set of activities and a set of resources of known characteristics (activity durations, activity resource demands, resource availabilities, precedence restrictions) are given. The decision variables are the activity start times defined on integer time periods. The objective function which has to be minimized is the makespan, i.e. the largest activity completion time, assuming the project starts at time 0. There are two types of constraints. The precedence constraints prevent each activity from starting before the completion of its predecessors. The resource constraints ensure that, at each time period and for each resource, the total activity demand does not exceed the resource availability. Once started, an activity cannot be interrupted.

The RCPSP belongs to the class of NP-hard optimization problems and is actually one of the most intractable classical problems in practice.

In this paper, for a problem with limited renewable resources, we propose a branch-and-bound method with a new branching scheme based on the presentation of a schedule in the form of an activity list. An important role in this method is played by constructing an effective lower and upper bound for non-truncated solutions, and first of all for a lower bound. We will use two variants of constructing such bounds. For the first evaluation, the resource renewability condition is weakened to their storability. We solve the resulting relaxed problem by means of a polynomial algorithm for finding its exact solution [1]. As a second variant we will use the relaxation of the original problem, in which all activities are replaced by a chain of activities of unit duration each, and the number of activities in such a chain is equal to the duration of this activity (all activities have integer duration). Resources remain renewable. To solve this relaxed problem, we apply the algorithm [2].

The proposed algorithm was tested on examples from the library PCPLIB. In numerical experiments, both methods of calculating the lower estimate are compared, and also on a series of examples of J60 with sixty examples, classes of examples are revealed on which the proposed algorithm shows its strengths.

The authors were supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-07-00829).

REFERENCES

1. *Gimadi E. Kh., Zalyubovskii V. V., Sevast'yanov S. V.,* "Polynomial solvability of scheduling problems with storable resources and directive deadlines," Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2, **7**, No. 1, 9–34 (2000).
2. *Servakh V. V.,* "An efficiently solvable case of the scheduling problem with renewable resources," Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2, **7**, No. 1, 75–82 (2000).

CRYPTOGRAPHIC BOOLEAN FUNCTIONS AT SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS

Gorodilova A. A.[1], **Kolomeec N. A.**[2], **Tokareva N. N.**[3]

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;
[1]gorodilova@math.nsc.ru, [2]kolomeec@math.nsc.ru, [3]tokareva@math.nsc.ru

The word “cryptography” is not so secret as several years before. At least it is possible to speak about cryptography and to make public several results in this area. But not always you can put this word into the title of your paper. For example, there are not too many dissertations defended in Russia containing this word.

Cryptographic research at Sobolev Institute of Mathematics has a several decades history. Here we speak only about results related to cryptographic Boolean functions.

The monograph [1] of N. Tokareva is devoted to Boolean bent functions. These functions have the remarkable property: each of them is on the maximal possible Hamming distance from the class of all affine Boolean functions. This extremal property distinguishes bent functions as the special mysterious class and leads to numerous applications of bent functions in combinatorics, coding theory and especially in cryptography. In our institute the automorphism group of bent functions was obtained (2010), new lower bounds on the number of them were discussed (2011) together with new generalizations of bent functions (2007). N. Kolomeec in his PhD (2014) obtained an exact upper bound on the number of bent functions that are at the minimal possible distance 2^k from the given bent function in $2k$ variables; he continues the study in terms of graphs (2016). Generalization of these results to the p-ary case was proposed by V. Potapov (2015). He obtained some values of a spectra of Hamming distances between bent functions, results on correlation immunity functions (2012). Algebraic immunity together with nonlinearity of Boolean functions were studied by S. Filyuzin (2014) and D. Pokrasenko (2016). Constructions, metrical properties, duality and applications to mobile networks of bent functions were investigated by A. Frolova and E. Korsakova (2013), A. Oblaukhov (2016), A. Kutsenko (2017), N. Odinokikh (2017).

Another direction of study in our institute is vectorial Boolean functions with optimal differential characteristics that are called almost perfect nonlinear (APN). APN functions are of great interest for using in block ciphers as S-boxes but one of the longstanding problems is the existence of APN permutations in even number of variables. In [2] T. D. Bending, D. Fon-Der-Flaass introduced the notion of a crooked function and studied them in connection to distance regular graphs. In particular, each crooked function is APN. A. Gorodilova’s PhD thesis (2016) is devoted to the study of combinatorial characteristics of APN functions, where the notion of the differential equivalence was introduced and the first infinite family of APN functions that have non trivial differential equivalence classes was presented. But the question how to describe differential equivalence class of a given APN function remains open and connected with a search of new APN functions. V. Idrisova (2015) considered the symmetric properties of APN functions as well as the structure and properties of the range of an arbitrary APN function.

The authors were supported by the RFBR (projects no. 15-07-01328 and 17-41-543364).

REFERENCES

1. *Tokareva N.*, Bent Functions: Results and Applications to Cryptography, Elsevier (2015).
2. *Bending T. D., Fon-Der-Flaass D.*, “Crooked functions, bent functions, and distance regular graphs,” Electron. J. Comb., **5**, No. 1, R34 (1998).

ONE APPROACH TO CONSTRUCTING HAMILTONIAN CYCLES IN THE STAR GRAPHS

Gostevsky D. A.[1], **Konstantinova E. V.**[2]

[1]*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;*
dimaga92@gmail.com
[2]*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;*
e_konsta@math.nsc.ru

The Star graph $S_n = Cay(\mathrm{Sym}_n, t)$, $n \geqslant 2$, is the Cayley graph on the symmetric group Sym_n of permutations $\pi = [\pi_1\pi_2\ldots\pi_n]$ with the generating set $t = \{(1\ i) \in \mathrm{Sym}_n : 2 \leqslant i \leqslant n\}$ of all transpositions $t_i = (1\ i)$ swapping the 1st and ith elements of a permutation π. It is a connected bipartite $(n-1)$–regular graph of order $n!$. Since the graph is bipartite, it does not contain odd cycles but it does contain l–cycles for all even l, where $6 \leqslant l \leqslant n!$ (with the sole exception when $l = 4$) [1]. The *hamiltonicity* of this graph also follows from [2].

There is a connection between hamiltonicity of graphs and combinatorial Gray codes [3], where combinatorial Gray codes has been introduced as a method of generating combinatorial objects so that successive objects differ in some pre–specified small way. Thus, by setting the Star graph with the vertex set of permutations and by describing Hamiltonian cycles in this graph we refer to Gray codes implicitly.

In 2013, it was suggested to use greedy sequences to construct greedy Hamiltonian cycles in the Pancake graphs [4]. In general, a *greedy sequence* is defined as the ordered set of generating elements of a Cayley graph. The *greedy Hamiltonian cycle* is a Hamiltonian cycle formed by consecutive application of the leftmost suitable element of a greedy sequence. A greedy sequence is called a *greedy subsequence* if it forms a non-hamiltonian cycle.

In this work we apply greedy approach to the Star graph.

Theorem. *In the Star graph S_n, $n \geqslant 4$, any ordered sequence of mutually different $n-1$ elements from the generating set t is a greedy subsequence which forms a cycle of length $2 \cdot 3^{n-2}$.*

The proof of Theorem is constructive. It gives us an algorithm for constructing Hamiltonian cycles in the Star graphs. This algorithm also uses cycles of small lengths in the graph [5], [6].

The second author is supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 17-51-560008).

REFERENCES

1. *Jwo J. S., Lakshmivarahan S., Dhall S. K.*, "Embedding of cycles and grids in star graphs," J. Circuits Syst. Comput., **1**, 43–47 (1991).
2. *Kompel'makher V. L., Liskovets V. A.*, "Successive generation of permutations by means of a transposition basis," Kibertetika, **3**, 17–21 (1975).
3. *Savage C.*, "A survey of combinatorial Gray codes," SIAM Rev., **39**, No. 4, 605–629 (1996).
4. *Williams A., Sawada J.*, "Greedy Pancake Flipping," Electron. Notes Discrete Math., **44**, 357–362 (2013).
5. *Konstantinova E. V., Medvedev A. N.*, "Small cycles in the Star graph," Sib. Elektron. Mat. Izv., **11**, 906–914 (2014).
6. *Konstantinova E. V., Medvedev A. N.*, "Independent even cycles in the Pancake graph and greedy Prefix-reversal Gray codes," Graphs Comb., **32**, No. 5, 1965–1978 (2016).

ON BENT FUNCTIONS THAT ARE CONSTANT ON SEVERAL COSETS OF SOME SUBSPACE

Kolomeec N. A.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia; kolomeec@math.nsc.ru

Bent functions are Boolean functions that have maximal possible nonlinearity, one of the most important cryptographic properties of Boolean functions. In other words, bent functions are at the maximal possible Hamming distance from the set of all affine functions. They were proposed by O. Rothaus [1].

In this work bent functions that are constant on several cosets of some linear subspace are considered. Let us give a representation of a bent function by cosets of some subspace.

Theorem 1. *For any bent function f in $2k$ variables there exists a t-dimensional linear subspace L, where $1 \leq t \leq k$, such that f is constant on each of some 2^{2k-2t} distinct cosets of L and balanced on each other its cosets.*

Remark 1. For the given representation of a bent function f it is natural to consider the maximal possible t.

Remark 2. If $t = k$, the bent function f is called *normal*. Hence this representation is a generalization of the large class of normal bent functions proposed by H. Dobbertin [2]. Some properties of bent functions with $t = k$ can be found in [3].

Remark 3. To construct bent functions in this way there are many other restrictions on values of $f|_{a\oplus L}$, $a \in \mathbb{F}_2^{2k}$.

Let us describe a secondary construction of bent functions in this representation. It is similar to constructing bent functions at the minimal distance [3], moreover, if $t = k$, it exactly gives a bent function at the minimal possible distance from f.

Theorem 2. *Let a bent function f in $2k$ variables be constant on each of distinct $a_1 \oplus L, \ldots, a_{2^{2k-2t}} \oplus L$, where L is a t-dimensional linear subspace and $a_1, \ldots, a_{2^{2k-2t}} \in \mathbb{F}_2^{2k}$. Then $f \oplus \chi_{(a_1\oplus L)\cup\ldots\cup(a_{2^{2k-2t}}\oplus L)}$ is a bent function too.*

The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 15-07-01328).

REFERENCES

1. *Rothaus O.*, "On bent functions," J. Combin. Theory Ser. A, **20**, No. 3, 300–305 (1976).
2. *Dobbertin H.*, "Construction of bent functions and balanced Boolean functions with high nonlinearity," LNCS, **1008**, 61–74 (1995).
3. *Kolomeec N.*, "The graph of minimal distances of bent functions and its properties," Des. Codes Cryptogr., DOI: 10.1007/s10623-016-0306-4 (2016).

A HYBRID VNS MATHEURISTIC FOR A BIN PACKING PROBLEM WITH A COLOR CONSTRAINT

Kondakov A. A.[1], **Kochetov Yu. A.**[2]

[1]*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;*
tyxtyxyc@gmail.com
[2]*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;*
jkochet@math.nsc.ru

We consider a new version of the colored bin packing problem which is a special case of the co-printing problem [1]. Each item has not the weight but has some colors. The bin capacity limits the total number of colors for its items. The goal is to pack all items into the minimal number of identical bins such that the total number of colors of items in each bin does not exceed the bin capacity. It is NP-hard problem in the strong sense and it can be reformulated as a biclique vertex covering problem.

We apply the column generation method for the model with exponential number of variables. It produces a lower bound. The VNS matheuristic with large neighborhoods is designed for solving the pricing problem and accelerating the method [2]. The column generation method provides a core subset of the most promising bin patterns. This core is used to get upper bounds. We apply three heuristics and exact method to this core. It is interesting to note that exact method is very efficient in this case and dominates the heuristics. We need a lot of running time for column generation method and a few time for getting upper bound by exact method. In our computational experiments, we observe that exact method provides good results even for a subcore when we terminate the column generation at an intermediate step. We illustrate this useful idea in computational experiments for the large scale instances with number of items up to 500. We study the efficiency of our hybrid approach on randomly generated test instances. For that case, this hybrid method has found optimal solutions.

REFERENCES

1. *Peeters M., Degraeve Z.,* “The co-printing problem: A packing problem with a color constraint,” Oper. Res., **52**, No. 4, 623–638 (2004).
2. *Kochetov Yu., Kondakov A.,* “VNS matheuristic for a bin packing problem with a color constraint,” Electron. Notes Discrete Math., **58**, 39–46 (2017).

AN APPROXIMATION ALGORITHM FOR THE ROUTING OPEN SHOP PROBLEM ON m MACHINES

Kononov A. V.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;
alvenko@math.nsc.ru

We consider the routing open shop problem which is a generalization of the open shop and the metric travelling salesman problems. The jobs are located at the nodes of a transportation network G. The machines have to travel between the jobs. Thus not only the processing times of the operations, but also the travel times between jobs have to be taken into account. It is assumed that all machines are initially located at the same node (depot). They have to process the operations of all jobs and return to the depot after the completion of all jobs. Any number of machines can travel through the same edge or node simultaneously in any direction. We assume that the machines use the shortest paths while travelling between the nodes. We suppose that the speed of the machine is fixed but may differ from that of other machines. Thus, the travel time of each machine from one vertex to another is proportional to the shortest distance between the vertices. The makespan of a feasible schedule is the interval between the date when the machines start working or moving and the date at which the last machine returns to the depot after finishing all its operations. It is required to minimize the makespan.

The routing open shop problem is introduced by Averbakh et al. in [1], [2]. Examples of applications where machines have to travel between the jobs include situations where parts are too big or heavy to be moved between machines (e.g., engine casings of ships), or scheduling of robots that perform daily maintenance operations on immovable machines located in different places of a workshop [3]. Another interesting application is related to the routing and scheduling of museum visitors traveling as homogeneous groups [4]. The model is embedded in a prototype wireless context-aware museum tour guide system developed for the National Palace Museum of Taiwan; one of the top five museums in the world.

The routing open shop problem is strongly NP-hard even for the single machine case as it contains the metric TSP as a special case. Moreover, the routing open shop problem is NP-hard even on a 2-node network with only two machines [2].

In this note we present a new approximation polynomial-time algorithm with worst-case performance guarantee $O(\log m)$, where m is a number of machines. The algorithm has asymptotically better approximation ratio than all known algorithms.

The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 17-07-00513).

REFERENCES

1. *Averbakh I., Berman O., Chernykh I.,* "A 6/5-approximation algorithm for the two-machine routing open shop problem on a 2-node network," Eur. J. Oper. Res., **166**, No. 1, 3–24 (2005).
2. *Averbakh I., Berman O., Chernykh I.,* "The routing open-shop problem on a network: complexity and approximation," Eur. J. Oper. Res., **173**, No. 2, 521–539 (2006).
3. *Averbakh I., Berman O.,* "A simple heuristic for m-machine flow-shop and its applications in routing-scheduling problems," Oper. Res., **47**, No. 1, 165–170 (1999).
4. *Yu V. F., Lin S.-W., Chou S.-Y.,* "The museum visitor routing problem," Appl. Math. Comput., **216**, No. 3, 719–729 (2010).

MINIMUM SUM-OF-SQUARES CLUSTERING ON NETWORKS

Nikolaev A. I.[1], Mladenović N.[2], Todosijević R.[3]

[1] *Higher School of Economics, Nizhny Novgorod, Russia;*
aleksey.nikolaev.nn@gmail.com
[2] *Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, Valenciennes, France;*
nenad.mladenovic@univ-valenciennes.fr
[3] *Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts, Belgrade, Serbia;* racatodosijevic@gmail.com

In this talk we have considered VNS-based heuristic for solving the Edge Minimum Sum-of-Squares Clustering (E-MSSC). For a given graph G E-MSSC consists of finding p prototypes by minimizing the sum of their squared distances from a set of vertices to their nearest prototype, where a prototype can be either a vertex or an inner point of an edge. We consider three different local search procedures like K-means [1], J-means [2] and a new I-means heuristic [3]. Experimental results indicate that the implemented VNS-based heuristic produces the best known results in the literature.

REFERENCES

1. *Hartigan J.A.,* Clustering Algorithms, John Wiley & Sons Inc., New York (1975).
2. *Hansen P., Mladenović N.,* “J-Means: a new local search heuristic for minimum sum of squares clustering,” Pattern Recognition, **34**, No. 2, 405–413 (2001).
3. *Nikolaev A., Mladenović N., Todosijević R.,* “J-means and I-means for minimum sum-of-squares clustering on networks,” Optim. Lett., **11**, No. 2, 359–376 (2017).

AN EXACT ALGORITHM FOR THE THREE-LEVEL PRICING MODEL

Panin A. A.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia; aapanin1988@gmail.com

In this paper we consider the three-level model of competitive pricing. The model is formulated as a Stackelberg leader–follower–clients game, where two companies (the leader and the follower) assign prices in own facilities successively to service the clients. Each facility produces a homogeneous product. Each client has a budget and a single demand. He selects the facility with minimal total payment (price and transportation cost) and purchase the product if his payment does not exceed his budget.

We assume two spatial pricing strategies: uniform pricing and discriminatory pricing. Under uniform pricing each facility charges identical price. In contrast, under discriminatory pricing each client may be charged a different price. We present exact polynomial-time algorithms to solve the problem with the following pricing cases:
1) the leader and the follower use uniform or discriminatory pricing strategy simultaneously;
2) the leader applies uniform pricing, in contrast, the follower applies discriminatory pricing.
In addition, we discuss some open problems.

The author was supported by the Russian Science Foundation (project no. 17-11-01021).

ON NON-FULL-RANK PERFECT CODES OVER FINITE FIELDS

Romanov A. M.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;
rom@math.nsc.ru

The paper deals with the perfect 1-error correcting codes over a finite field with q elements (briefly q-ary 1-perfect codes). We show that the orthogonal code to the q-ary non-full-rank 1-perfect code of length $n = (q^m - 1)/(q - 1)$ is a q-ary constant-weight code with Hamming weight equals to q^{m-1} where m is any natural number not less than two. We derive necessary and sufficient conditions for q-ary 1-perfect codes of non-full rank. We suggest a generalization of the concatenation construction to the q-ary case and construct the ternary 1-perfect codes of length 13 and rank 12.

Let $\mathbb{F}_q^n$ be a vector space of dimension n over the finite field $\mathbb{F}_q$, where $q = p^r$, p is a prime number, r is a positive integer. The *rank* of code C is the maximum number of linearly independent codewords of C. A code of length n that has rank n is said to have *full rank*; otherwise, the code is *non-full rank*. We denote by $M_{q,n}$ the q-ary trivial MDS code with parameters $[n, n-1, 2]_q$. Consider a code C of length $n = (q^m - 1)/(q - 1)$ over the field $\mathbb{F}_q$. Let $\mathbf{w} \in C^\perp$. Without loss of generality assume that the zero entries of $\mathbf{w}$ are in the first $n - q^{m-1}$ positions. Let a vector $(\mathbf{u}|\mathbf{v}) \in C$. We assume that $\mathbf{u}$ has length equal to $n - q^{m-1}$. For each vector $\mathbf{v} \in M_{q,q^{m-1}}$, we define a q-ary code $C'(\mathbf{v})$ of length $n - q^{m-1}$. Let $C'(\mathbf{v}) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{F}_q^{n-q^{m-1}} \mid (\mathbf{u}|\mathbf{v}) \in C\}$. For each vector $\mathbf{u} \in \mathbb{F}_q^{n-q^{m-1}}$, we define a q-ary code $C''(\mathbf{u})$ of length q^{m-1}. Let $C''(\mathbf{u}) = \{\mathbf{v} \in M_{q,q^{m-1}} \mid (\mathbf{u}|\mathbf{v}) \in C\}$. The symbol $(\cdot|\cdot)$ denotes concatenation.

Theorem. *For $q \neq 2$, the code C of length $n = (q^m - 1)/(q - 1)$ over the field $\mathbb{F}_q$ is a q-ary 1-perfect code of non-full rank if and only if, when the code $C'(\mathbf{v})$ is a q-ary 1-perfect code of length $n - q^{m-1}$ for any $\mathbf{v} \in M_{q,q^{m-1}}$ and the code $C''(\mathbf{u}) \subset M_{q,q^{m-1}}$ is a q-ary code with parameters $(q^{m-1}, q^{q^{m-1}-m}, 3)_q$ for any $\mathbf{u} \in \mathbb{F}_q^{n-q^{m-1}}$.*

From Theorem 2.1 of the paper [1] it follows, in particular, that for any q-ary 1-perfect code C of non-full rank and length $n = (q^m - 1)/(q - 1)$ there exists a monomial transformation ψ of the space $\mathbb{F}_q^n$ such that

$$\psi(C) = \{(\mathbf{u}|\mathbf{v}) \mid \mathbf{u} \in C'(\mathbf{v}), \mathbf{v} \in M_{q,q^{m-1}}\}, \tag{1}$$

where $C'(\mathbf{v})$ is a q-ary 1-perfect code of length $n - q^{m-1}$. From the theorem it follows that any vector $\mathbf{w} \in C^\perp$ forms a representation of the code C in the form (1).

For $m = 3$ and for $q = p^r$, $r > 1$, the existence of q-ary 1-perfect codes of length $n = (q^3 - 1)/(q - 1)$ and rank $n - 3 + s$, $s \in \{1, 2, 3\}$ is proved in [2]. For $m = 3$, $q \geq 3$, and for q, which is a prime number, the existence of q-ary 1-perfect codes of length $n = (q^3 - 1)/(q - 1)$ and rank $n - s$, $s \in \{1, 0\}$ still remains open [2]. Using the q-ary concatenation construction proposed in this paper, we construct the ternary 1-perfect codes of length 13 and rank 12, see [3].

The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 17-01-00949).

REFERENCES

1. *Heden O., Krotov D. S.*, “On the structure of non-full-rank perfect q-ary codes,” Adv. Math. Commun., **5**, No. 2, 149–156 (2011).
2. *Phelps K. T., Rifà J., Villanueva M.*, “Kernels and p-kernels of p^r-ary 1-perfect codes,” Des. Codes Cryptography, **37**, No. 2, 243–261 (2005).
3. *Romanov A. M.*, “On non-full-rank perfect codes over finite fields,” arXiv:1704.02627v1.

THE MIN-POWER SYMMETRIC CONNECTIVITY PROBLEM WITH FEW OBLIGATORY NETWORK COMPONENTS

van Bevern R.

Novosibirsk State University, Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia; rvb@nsu.ru

We present ongoing work on the parameterized complexity of the following NP-hard problem of synthesizing energy-efficient wireless communication networks.

Problem (Min-Power Symmetric Connectivity (MPSC))
Input: A graph $G = (V, E)$ with n vertices and edge weights $w\colon E \to \mathbb{N}$.
Goal: Compute a connected spanning subgraph $T = (V, F)$ of G that minimizes

$$\sum_{v \in V} \max_{\{u,v\} \in F} w(\{u, v\}).$$

Several approximation results and recent heuristics for the problem are known [1], [2].

Assume that we know lower bounds $\ell\colon V \to \mathbb{N}$ such that, for each vertex $v \in V$, one has $\ell(v) \le \max_{\{v,u\} \in F} w(\{v, u\})$ in any feasible solution $T = (V, F)$. For example, a trivial lower bound $\ell(v)$ is given by the weight of the lightest edge incident to v. Then, we know a subgraph G_ℓ of G that we can assume to be part of any solution:

Definition. The *obligatory subgraph* G_ℓ of G induced by lower bounds $\ell\colon V \to \mathbb{N}$ has all vertices of G and all *obligatory edges* $\{u, v\}$ such that $\min\{\ell(u), \ell(v)\} \ge w(\{u, v\})$.

Obviously, better lower bounds $\ell\colon V \to \mathbb{N}$ potentially give more obligatory edges, which in turn reduces the number c of connected components of G_ℓ. It is easy to show that MPSC is solvable in $O(n^c)$ time, that is, in polynomial time for constant c. We show polynomial-time solvability even for $c \in O(\log n)$:

Theorem. *MPSC is solvable in* $O\bigl(\frac{(6e)^{2c}}{\sqrt{2\pi}^c} \cdot \ln 1/\varepsilon \cdot n^4\bigr)$ *time with error probability at most* ε, *where* $0 < \varepsilon \le 1$ *and* c *is the number of connected components of* G_ℓ. *The algorithm can be derandomized with running time* $c^{O(c \log c)} \cdot n^{O(1)}$.

There are applications where c is small, for example, if sensors are arranged into a small number of grids, possibly each with a distinct structure, sensor density, or defects due to sensor failures. When monitoring areas, placing sensors in a grid indeed minimizes the energy wasted for monitoring areas multiple times [3].

The number of connected components induced by a set obligatory edges has recently also has been discovered to have a major influence on the approximation complexity of routing problems for servicing links in transportation networks [4].

REFERENCES

1. *Althaus E., Călinescu G., Mandoiu I. I., Prasad S. K., Tchervenski N., Zelikovsky A.,* “Power efficient range assignment for symmetric connectivity in static ad hoc wireless networks,” Wirel. Netw., **12**, No. 3, 287–299 (2006).
2. *Erzin A. I., Plotnikov R. V., Shamardin Y. V.,* “Some polynomially solvable cases and approximation algorithms for optimal communication tree construction problem,” Diskretn. Anal. Issled. Oper., **20**, No. 1, 12–27 (2013).
3. *Zalyubovskiy V. V., Erzin A. I., Astrakov S. N., Choo H.,* “Energy-efficient area coverage by sensors with adjustable ranges,” Sensors, **9**, No. 4, 2446–2460 (2009).
4. *van Bevern R., Komusiewicz C., Sorge M.,* “A parameterized approximation algorithm for the mixed and windy capacitated arc routing problem: theory and experiments,” Networks, DOI:10.1002/net.21742 (in press).

СЕКЦИЯ 9

Математическое моделирование и методы прикладной математики

Тезисы докладов

SECTION 9

Mathematical Modeling and Methods of Applied Mathematics

Abstracts

О МОДЕЛИРОВАНИИ РАЗВИТИЯ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ РОССИИ

Апарцин А. С.[1], Маркова Е. В.[2], Сидлер И. В.[3], Труфанов В. В.[4]

Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, Иркутск, Россия; [1]`apartsyn@isem.irk.ru`, [2]`markova@isem.irk.ru`, [3]`krlv@isem.irk.ru`, [4]`truf@isem.irk.ru`

Модели развивающихся систем, основанные на использовании предложенных В. М. Глушковым макроэкономических моделей [1], описываются с помощью интегральных уравнений вольтерровского типа с переменными верхними и нижними пределами интегрирования, позволяющими моделировать технический прогресс системы с учетом старения ее производственных мощностей. В [2] для исследования долгосрочных стратегий технического перевооружения электроэнергетики использовалась интегральная модель на основе односекторного варианта моделей развивающихся систем типа Глушкова. В [3] разработана новая интегральная модель развивающейся системы, в которой станции разделены на три возрастные группы. Каждая из групп характеризуется некоторым коэффициентом эффективности. Эта модель описывается интегральным уравнением Вольтерра I рода

$$\beta_1 \int\limits_{t-T_1}^{t} x(s)ds + \beta_2 \int\limits_{t-T_2}^{t-T_1} x(s)ds + \beta_3 \int\limits_{t-T_3}^{t-T_2} x(s)ds = p(t), \quad t \in [t_0, T], \tag{1}$$

где $x(t)$ — искомый ввод электрических мощностей в момент t; β_i — коэффициенты эффективности функционирования i-ой возрастной группы, T_i — верхняя возрастная граница i-ой группы, $p(t)$ — заданная динамика требуемой располагаемой мощности.

В работе рассматривается векторная интегральная модель развивающейся системы, в которой оборудование делится на три типа (ТЭС, АЭС, ГЭС). Модель включает балансовое уравнение (1), обеспечивающее требуемый уровень электропотребления, а также функциональные уравнения, которые описывают структуру потребления электроэнергии, вырабатываемой на разных типах электростанций, и замыкают систему интегрально-функциональных уравнений. Кроме того, в модель входят ограничения-неравенства на ежегодный суммарный прирост установленной мощности.

На базе предложенной модели исследованы стратегии вводов мощностей электроэнергетической системы России, а также рассмотрена задача оптимизации параметров, управляющих моментами вывода оборудования из эксплуатации для ТЭС и АЭС. Приводятся результаты расчетов для ЕЭС России для различных вариантов экономических показателей, входящих в целевой функционал.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-01425).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Глушков В. М., Иванов В. В., Яненко В. М.* Моделирование развивающихся систем. М.: Наука, 1983.
2. *Маркова Е. В., Сидлер И. В., Труфанов В. В.* О моделях развивающихся систем типа Глушкова и их приложениях в электроэнергетике // Автоматика и телемеханика. 2011. Вып. 7. С. 20–28.
3. *Апарцин А. С., Сидлер И. В.* Применение неклассических уравнений Вольтерра I рода для моделирования развивающихся систем // Автоматика и телемеханика. 2013. Вып. 6. С. 3–16.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕНЕРАЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА С НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМОЙ

Берендеев Е. А.[1], **Ефимова А. А.**[2]

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;
[1]evgeny.berendeev@gmail.com, [2]anna.an.efimova@gmail.com

В работе рассматривается сравнение результатов численного моделирования с теоретическими оценками в линейном приближении для задачи генерации электромагнитного излучения при взаимодействии электронного пучка с плазмой. Численная модель построена на основе метода частиц в ячейках. Задача рассматривается в двумерной постановке. В области, имеющей форму прямоугольника, находится плазма, удерживаемая однородным продольным магнитным полем. В поперечном направлении плазма окружена вакуумом. Пучок непрерывно входит в плазму вдоль направления магнитного поля через левую границу области и затем покидает расчётную область через правую границу (обеспечиваются открытые граничные условия). В [1] приведены теоретические оценки мощности генерируемого при этом электромагнитного излучения в случае модулированной по плотности плазмы. Поскольку приводимые в [1] оценки получены в линейной теории, необходимо найти границы применимости этого подхода, а также установить максимально возможную мощность излучения при полном кинетическом описании взаимодействия пучка с плазмой. Для этого проводится численное моделирование. Вычислительные эксперименты показали, что при больших модуляциях плотности плазмы ключевую роль играют нелинейные эффекты, в то время как при малых модуляциях плотности результаты численного моделирования с высокой точностью совпадают с теоретическими оценками.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-31-00304), численное моделирование проводилось при поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-10028).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Annenkov V. V., Timofeev I. V., Volchok E. P.* Simulations of electromagnetic emissions produced in a thin plasma by a continuously injected electron beam // Phys. Plasmas. 2016. V. 23, No 5. Article ID 053101.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ГИДРОТУРБИН

Богданов В. В.[1], **Волков Ю. С.**[1,2], **Мирошниченко В. Л.**[1,2], **Салиенко А. Е.**[3]

[1]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;* bogdanov@math.nsc.ru, volkov@math.nsc.ru, miroshn@math.nsc.ru

[2]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*

[3]*ОАО "Тяжмаш", Сызрань, Россия;* sa_cae@yahoo.com

Основным документом для выбора параметров натурной гидравлической турбины (диаметр рабочего колеса, частота вращения и др.) является универсальная характеристика (зависимость КПД турбины от приведенных оборотов и расхода воды для радиально-осевой (РО) турбины и дополнительно от третьей переменной — угла поворота лопастей для поворотно-лопастной (ПЛ) турбины), которая строится по результатам дорогостоящих энергетических испытаний модельной гидротурбины на лабораторном стенде.

В результате испытаний модельной РО-турбины формируется таблица чисел, состоящая из величин открытия направляющего аппарата a_0, приведённой частоты вращения турбины n', приведённого расхода воды q' и КПД турбины η. Кроме того, дополнительно могут содержаться значения кавитационного коэффициента и других функций. Характерными особенностями этих экспериментальных данных являются сильная нерегулярность расположения точек с данными в плоскости переменных q', n' и значительные различия в погрешности измерений для разных точек. Задача состоит в построении функциональных зависимостей $\eta(q', n')$ и $a_0(q', n')$ по исходным дискретным хаотическим данным. Кроме того, необходимо разработать средства для решения типовых задач, связанных с использованием универсальной характеристики (построения изолиний КПД и мощности турбины, линий открытия $a_0 = \mathrm{const}$, линии ограничения мощности, нахождения точек максимума КПД и др.).

Построение универсальных характеристик для ПЛ-турбин осложняется, во-первых, трехмерным характером зависимости $\eta(q', n', \varphi)$, усилением неравномерности расположения точек с исходными данными и, во-вторых, необходимостью построения комбинаторной универсальной характеристики в виде огибающей семейства поверхностей $\eta(q', n', \varphi)$ по параметру φ.

В докладе излагается математический аппарат, используемый при моделировании универсальных характеристик РО [1] и ПЛ гидротурбин [2]. Приводятся примеры построения универсальных характеристик.

Созданные в ИМ СО РАН программные комплексы YX и YXПЛ, предназначенные для моделирования универсальных характеристик гидротурбин, используются на предприятии "Ленинградский металлический завод" (г. С.-Петербург).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-07-07530).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Волков Ю. С., Мирошниченко В. Л.* Построение математической модели универсальной характеристики радиально-осевой гидротурбины // Сиб. журн. индустр. математики. 1998. Т. 1, № 1. С. 77–88.
2. *Волков Ю. С., Мирошниченко В. Л., Салиенко А. Е.* Математическое моделирование универсальной характеристики поворотно-лопастной гидротурбины // Машинное обучение и анализ данных. 2014. Т. 1, № 10. С. 1439–1450.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СФОКУСИРОВАННЫХ ВСТРЕЧНЫХ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИХ ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ПРИ ДВИЖЕНИИ ПОД УГЛОМ

Боронина М. А.[1], Вшивков В. А.[2], Генрих Е. А.[3]

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;
[1]boronina@ssd.sscc.ru, [2]vsh@ssd.sscc.ru, [3]mesyats@gmail.com

В работе рассматривается ультрарелятивистская динамика заряженных частиц в самосогласованных электромагнитных полях. На основе численного моделирования исследуется взаимодействие встречных пучков противоположных зарядов при ненулевом угле встречи.

Для описания рассматриваемых процессов используются кинетическое уравнение Власова, уравнения Максвелла. Задача решается методом частиц-в-ячейках с использованием схемы Лэнгдона – Лазински для уравнений Максвелла. Применяемые алгоритмы и схемы позволяют автоматически учесть угол встречи. Для задания начальных и граничных условий на электрическое поле пучков потребовалось реализация нового алгоритма. По точке, в которой необходимо вычислить поле, вычисляются необходимые для суммирования вкладов в поле узлы плотности в перпендикулярной оси движения плоскости. Так как поле в продольном направлении быстро убывает за счет высоких значений релятивистского фактора γ, то трудоемкость суммирования вкладов в поле не очень существенно возрастает с возрастанием угла.

В качестве теста использовано аналитическое решение для цилиндрических пучков с гауссовым распределением плотности заряда в поперечном направлении и с равномерной плотностью заряда по продольной координате. В этом случае можно использовать теорему Гаусса и получить поле в поперечной плоскости пучка. Рассмотрена динамика сфокусированных пучков и поведение светимости в зависимости от параметров фокусировки пучков и угла встречи.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 16-31-00301, № 16-01-00209).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Raimondi P., Shatilov D., Zobov M.* Beam-beam issues for colliding schemes with large Piwinski angle and crabbed waist // arxiv.org/abs/physics/0702033.
2. *Herr W., Muratori B.* Concept of luminosity // CAS–CERN Accelerator School: Intermediate Course on Accelerator Physics. 2006. P. 361–378.
3. *Boronina M. A., Vshivkov V. A.* Parallel 3-D particle-in-cell modelling of charged ultrarelativistic beam dynamics // J. Plasma Physics. 2015. V. 81, No 6. Article ID 495810605.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ НА ДВУХ МАСШТАБНЫХ УРОВНЯХ В ГЕТЕРОГЕННЫХ КАТАЛИТИЧЕСКИХ РЕАКТОРАХ

Верниковская Н. В.

Институт катализа им. Г. К. Борескова СО РАН, Новосибирск, Россия;
vernik@catalysis.ru

Математические модели гетерогенных каталитических реакторов имеют пространственно-временное иерархическое строение. Пространственный масштаб таких систем изменяется в интервале от 10^{-8} до 10 м, сопряженный с ним временной масштаб изменяется от 10^{-15} до 10^{8} с [1]. Такое соотношение масштабов является основной проблемой при необходимости моделирования процессов на нескольких масштабных уровнях.

В работе обсуждается подход к численному моделированию процессов на двух масштабных уровнях, а именно, процессов тепло- и массопереноса в реакторе трубчатого типа с учетом процессов массопереноса и каталитических реакций в отдельных частицах катализатора.

Для описания стационарных процессов массопереноса в частице катализатора используется модель запыленного газа с некоторыми упрощениями. Для численного решения системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) используется метод установления. Для построения дискретного аналога используются интегро-интерполяционный метод и метод прямых. Для решения получающейся в результате системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) по времени используется L-устойчивый метод типа Розенброка 2-го порядка точности [2]. В результате решения находим степень использования частицы катализатора. Уравнения тепло- и массопереноса в реакторе представляют собой стационарные двумерные ДУЧП с первой производной по длине реактора, в которых учитывается степень использования частицы катализатора. Для построения дискретного аналога используются интегро-интерполяционный метод и метод прямых. Для решения системы ОДУ по длине используется L-устойчивый метод типа Розенброка 2-го порядка точности [2].

Алгоритм применялся при моделировании ряда каталитических процессов в трубчатых реакторах [3], [4]. Получено хорошее совпадение между расчетными и экспериментальными данными.

Работа выполнена в рамках государственного задания ФГБУН ИК СО РАН (проект № 0303-2016-0002).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Слинько М. Г.* История развития математического моделирования каталитических процессов и реакторов // Теоретические основы химической технологии. 2007. Т. 41, № 1. С. 16–34.
2. *Новиков Е. А.* Численные методы решения дифференциальных уравнений химической кинетики // Математические методы в химической кинетике. Новосибирск: Наука, 1990. С. 53–68.
3. *Kagyrmanova A. P., Zolotarskii I. A., Smirnov E. I., et al.* Optimum dimensions of shaped steam reforming catalysts // Chem. Eng. J. 2007. V. 134. P. 228–234.
4. *Zolotarskii I. A., Andrushkevich T. V., Popova G. Ya., et. al.* Modeling, design and operation of pilot plant for two-stage oxidation of methanol into formic acid // Chem. Eng. J. 2014. V. 238. P. 111–119.

ПОГЛОЩАЮЩИЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ FDTD-СХЕМЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Вшивков В. А.[1], **Генрих Е. А.**[2]

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;
[1]`vsh@ssd.sscc.ru`, [2]`mesyats@gmail.com`

В численных методах часто приходится сталкиваться с реализацией граничных условий. Для того чтобы избежать большого количества вычислений, при решении численными методами дифференциальных уравнений в частных производных часто вводят искусственные границы. Граничные условия должны быть подобраны так, чтобы поставленная задача была корректна, а ее решение максимально приближено к решению исходной задачи. В случае, когда точное решение на границе неизвестно, требуется численными методами искусственно задавать на границе поглощающие (неотражающие) граничные условия (ПГУ).

В настоящий момент нами в рамках работ по гранту РНФ разрабатывается программный пакет для моделирования взаимодействия электронного пучка с плазмой, основанный на методе частиц в ячейках и ориентированный на исследование устойчивости и нагрева плазмы электронным пучком. В связи с этим стоит вопрос выбора эффективных поглощающих граничных условий для схемы FDTD на сетке Yee [1], [2] при решении системы уравнений Максвелла.

Методы задания ПГУ для системы уравнений Максвелла делят на два типа:

1) дифференциальные или аналитические ПГУ. Сюда относятся схемы Мура, Ляо, Трефесена – Халперна и др.;

2) ПГУ, основанные на свойствах среды (PML — perfectly matched layer); в этом случае средствами численной схемы искусственно задается приграничная область, в которой происходит постепенное затухание полей.

Реализовано несколько разных аналитических ПГУ [2], [3]. Проведено их тестирование и сравнение на задаче распространения монохроматической волны и на задаче прохождения лазерного импульса. Для дальнейшего использования выбран оптимальный с вычислительной точки зрения и с точки зрения качества получаемого результата алгоритм.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (проект № 16-11-10028).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Yee K. S.* Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell’s equations in isotropic media // IEEE Trans. Antennas Propag. 1966. V. 14, No 3. P. 302–307.
2. *Taflove A., Hagness S. C.* Computational electrodynamics. The Finite-Difference-Time-Domain method. Third edition. Artech house, INC, 2005.
3. *Ильгамов М. А., Гильманов А. Н.* Неотражающие граничные условия на границах расчетной области. Физматлит, 2003.

ДВИЖЕНИЕ ОТРАЖАЮЩИХ СТЕНОК И ВОЛНОВОЕ ПОЛЕ В ИЗМЕРИТЕЛЬНОМ УЗЛЕ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННОГО РЕОМЕТРА

Галкин В. М.[1], Богословский А. В.[2], Волков Ю. С.[3]

[1] *Томский политехнический университет, Томск, Россия;* vlg@tpu.ru
[2] *Институт химии нефти СО РАН, Томск, Россия;* bav@ipc.tsc.ru
[3] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;* volkov@math.nsc.ru

Для интерференционного реометра в рамках модели Кельвина – Фойхта предложен способ определения точки гелеобразования, проанализировано влияние несимметричного положения зонда, показана возможность повышения чувствительности с использованием активных стенок.

В [1] для измерения характеристик вязкоупругого гелеобразующего состава предложена модификация вибрационного вискозиметра путем уменьшения длины волнового хода, чтобы возникала интерференция отраженных от стенок сосуда и излучаемых колеблющимся зондом сдвиговых волн. При определенных значениях модуля упругости длина сдвиговой полуволны укладывается целое число раз между зондом и стенкой, тогда возникает резонанс. При малой вязкости этому соответствует появление локальных максимумов на зависимости удельного механического сопротивления движению зонда от времени, тогда амплитуда значительно увеличивается и малым отклонениям измеряемой величины соответствует большое отклонение регистрируемого сигнала.

В [2] предложено определять точку начала гелеобразования по расхождению огибающих механического сопротивления, полученных в двух сосудах с разной длиной волнового хода. В отличие от этого подхода, предлагается использовать одинаковые размеры, но разные частоты, что позволяет повысить точность определения начала гелеобразования.

Показано, что при расположении зонда несимметрично стенкам сосуда регистрируются биения с амплитудой максимумов меньшей, чем при симметричной конфигурации. Однако, если использовать в нерезонансной области метод, предложенный в [3], то на результаты это не влияет.

Предлагается внутри сосуда с образцом разместить симметрично и параллельно зонду пластины, выполняющие роль активных стенок. Пластины колеблются в фазе или в противофазе относительно колебаний зонда с амплитудой и частотой, как у зонда. Геометрические размеры пластин должны быть несколько больше размеров зонда. Так как при этом увеличиваются максимальные значения в резонансной части удельного механического сопротивления, то в результате увеличивается и чувствительность интерференционного реометра.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Богословский А. В., Журавлева Т. Б., Стрелец Л. А.* Интерференционные резонансы при вискозиметрических измерениях // Теоретические и прикладные основы физико-химического регулирования свойств нефтяных дисперсных систем. Томск: Изд-во ТГУ, 2001. С. 105–109.
2. *Богословский А. В., Галкин В. М., Кожевников И. С.* Определение момента гелеобразования с использованием измерительных сосудов разной величины // Газовая промышленность. 2013. № 11. С. 98–100.
3. *Галкин В. М., Богословский А. В., Волков Ю. С.* Вибрационная вискозиметрия и численный метод определения динамики гелеобразования // Сиб. журн. индустр. математики. 2016. Т. 19, № 4. С. 22–30.

УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ ГЕМОДИНАМИКИ

Давыдова С. Г.[1], **Бибердорф Э. А.**[1,2]

[1] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
svetamira_davydova@mail.ru
[2] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
biberdorf@ngs.ru

При исследовании причин заболеваний сердечно-сосудистой системы, разработке новых лекарств и методов диагностики все шире применяется математическое моделирование. При этом для глобального моделирования артериальной системы наиболее популярной является одномерная модель гемодинамики, т. к. она требует значительно меньше вычислений по сравнению с трехмерными моделями и при этом, как было показано на большом объеме клинических данных, дает хорошие результаты по предсказанию ряда параметров [1].

Одной из актуальных задач является адекватное моделирование пульсовой волны. Форма и скорость пульсовой волны могут использоваться для диагностики целого ряда проблем сосудов при том, что эти данные могут быть получены неинвазивным путем.

Усовершенствование одномерной модели гемодинамики касается двух аспектов. Во-первых, в дифференциальных уравнениях модели учитывается сужение сосудов. Во-вторых, пересматривается уравнение, связывающее напряжение в стенках сосуда и давление внутри него. Обычно, в качестве такого соотношения используют следствие закона Гука [2]. Однако такой подход не отражает реальной структуры стенки сосуда, состоящей из волокон эластина, коллагена и мышц. Эта проблема может быть решена, если учесть, что данные волокна имеют разные модули Юнга, или если использовать результаты измерений in vivo [3].

Результаты численных экспериментов подтверждают, что данные модификации позволяют более адекватно моделировать распространение пульсовой волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Киселев И. Н., Бибердорф Э. А., Баранов В. И., Комлягина Т. Г., Мельников В. Н., Суворова И. Ю., Кривощеков С. Г., Колпаков Ф. А.* Персонализация параметров и валидация модели сердечно-сосудистой системы человека // Математическая биология и биоинформатика. 2015. Т. 10, вып. 2. С. 526–547.
2. *Владимиров Ю. А., Рощупкин Д. И., Потапенко А. Я., Деев А. И.* Биофизика. М.: Медицина, 1983.
3. *Bank A. J., Wang H., Holte J. E., Mullen K., Shammas R., Kubo S. H.* Contribution of collagen, elastin, and smooth muscle to in vivo human brachial artery wall stress and elastic modulus // Circulation. 1996. V. 94, No 12. P. 3263–3270.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СВЕРХСЛАБЫХ ДИФРАКТОРОВ В СЛОЖНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ СРЕДАХ МЕТОДОМ CSP-RTD

Данилин А. Н.

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия; adanilin@kantiana.ru

Актуальной задачей в геофизике является обнаружение слабых рассеивающих объектов (дифракторов), связанных с трещинно-кавернозными коллекторами углеводородов. Одним из эффективных методов является метод CSP (Common Scattering Point) [1], который эффективен в средах с пологим залеганием отражающих границ. В случае сильно-неоднородных сред, данный метод можно дополнить предварительным продолжением волнового поля на определенную глубину. В работе для продолжения волнового поля используется процедура Reverse Time Datuming (RTD) [2], основанная на решении акустического уравнения в обратном времени. Особенностью алгоритма является то, что вместо уравнения акустики используется эквивалентная система линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Также данная процедура не зависит от геометрии исходной системы наблюдения. В работе приводятся результаты численного исследования метода CSP-RTD, построенного на основе методов CSP и RTD для сложных акустических моделей. Приводится сравнение работы метода CSP-RTD и миграционного метода RTM.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-10027).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kremlev A. N., Erokhin G. N., Starikov L. E., Zverev M. A.* Forecast of crack and cavernous reservoirs in carbonate, clay and magmatic rocks based on scattered seismic waves // 3rd EAGE St. Petersburg International Conference and Exhibition on Geosciences – Geosciences: From New Ideas to New Discoveries. 2008.
2. *Данилин А. Н., Пестов Л. Н., Седайкина В. А.* Алгоритм пересчета волнового поля на новый уровень // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2013. Вып. 10. С. 127–130.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ В РЕФРАКЦИОННОЙ ТЕНЗОРНОЙ ТОМОГРАФИИ

Деревцов Е. Ю.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
dert@math.nsc.ru

В последние годы значительный интерес исследователей вызывают новые более сложные задачи томографии. Акценты смещаются от классической проблемы восстановления функции по ее известному преобразованию Радона к задачам рефракционной, векторной и тензорной томографии, поставленных в сильно неоднородных анизотропных средах, в частности, в рефрагирующих поглощающих средах с внутренними источниками. Термин “рефракционная томография” означает, что в математической модели учитывается эффект искривления луча, математически описываемый инструментами римановой геометрии. Коэффициент поглощения ответственен за ослабление интенсивности физического поля по мере его взаимодействия со средой, внутренние же источники могут описываться не только функциями, но и тензорными полями. Таким образом, можно говорить об исследованиях в рамках постановок “рефракционной томографии с внутренними источниками” (РТВИ), основная задача которой состоит в восстановлении симметричного тензорного поля w по его известным экспоненциальным лучевым преобразованиям: продольным, поперечным, смешанным.

Одним из широко известных способов решения традиционной задачи томографии определения функции по ее преобразованию Радона является использование формул обращения, включающих в себя, в частности, операторы обратной проекции, потенциал Рисса, преобразования Фурье и Гильберта. В рамках модели рефракционной томографии с внутренними источниками аналогичных формул обращения не существует, даже если считать известными риманову метрику и коэффициент поглощения среды. Поэтому исследование применяющихся в томографии численных методов и алгоритмов с целью возможности их модификации, развития и обобщения для использования в современных моделях томографии — важная задача. Универсальный подход к исследованиям такого рода состоит в использовании в качестве основного инструмента метода вычислительного экспериментирования. Указанная методика, пока отсутствуют продвижения в теоретических исследованиях задач РТВИ, остается единственным перспективным подходом к разработке численных методов и алгоритмов их решения.

При исследовании задач рефракционной тензорной томографии методы вычислительного эксперимента были успешно применены при исследовании таких задач, как обращение операторов лучевых преобразований [1]; восстановление сингулярного носителя тензорных полей, заданных в рефрагирующей среде, по томографическим данным [2], [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Деревцов Е. Ю., Мальцева С. В., Светов И. Е.* Приближенное обращение оператора лучевого преобразования в рефракционной томографии // Сиб. электрон. мат. изв. 2014. Т. 11. С. 833–856.
2. *Derevtsov E. Yu., Maltseva S. V., Svetov I. E.* Mathematical models and algorithms for reconstruction of singular support of functions and vector fields by tomographic data // Eurasian J. Math. Comp. Appl. 2015. V. 3, No 4. P. 4–44.
3. *Деревцов Е. Ю., Мальцева С. В.* Восстановление сингулярного носителя тензорного поля, заданного в рефрагирующей среде, по его лучевому преобразованию // Сиб. журн. индустр. математики. 2015. Т. 18, № 3. С. 11–25.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ХИМИЧЕСКИ РЕАГИРУЮЩИХ ПОТОКОВ НА ПРИМЕРЕ ПИРОЛИЗА ЭТАНА

Жалнин Р. В.[1], Пескова Е. Е.[1], Стадниченко О. А.[2], Тишкин В. Ф.[3]

[1] *Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва, Саранск, Россия;* zhalnin@gmail.com

[2] *Институт катализа им. Г. К. Борескова СО РАН, Новосибирск, Россия;* zasypoa@catalysis.ru

[3] *Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия;* v.f.tishkin@mail.ru

Настоящая работа посвящена построению вычислительной модели для исследования динамики многокомпонентного реагирующего газа на примере пиролиза этана в проточном реакторе, описанном в работах [1], [2]. В исследуемых процессах скорость движения смеси в реакторе много меньше скорости звука в газовой смеси, что обуславливает использование модификации уравнений Навье – Стокса в приближении малых чисел Маха [3], [4]. Идея метода решения таких уравнений заключается в интегрировании законов сохранения с использованием начального поля давления, в результате которого находятся значения концентраций, плотности, температуры и предварительное поле скорости. Затем рассчитывается поле поправок к давлению из решения уравнения Пуассона и корректируются поле давления и поле скорости. Аппроксимация конвективных членов системы уравнений Навье – Стокса проводится с использованием WENO схемы повышенного порядка точности [5]. Используется процедура расщепления по физическим процессам, т. е. расчет уравнений химических реакций выделяется в отдельный шаг. Приведены результаты вычислительного эксперимента пиролиза этана в проточном реакторе с внешним обогревом реакционной зоны.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Минобрнауки России, базовая часть госзадания 1.6958.2017/БЧ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стадниченко О. А., Снытников В. Н., Снытников Вл. Н.* Математическое моделирование потоков многокомпонентного газа с энергоемкими химическими процессами на примере пиролиза этана // Вычислительные методы и программирование. 2014. Т. 15. С. 658–668.
2. *Snytnikov V. N., Mishchenko T. I., Snytnikov Vl. N., Malykhin S. E., Avdeev V. I., Parmon V. N.* Autocatalytic gas-phase dehydrogenation of ethane // Research on Chemical Intermediates. 2012. V. 38, No 3. P. 1133–1147.
3. *Almgren A. S., Bell J. B., Colella P., Howell L. H., Welcome M. L.* A conservative adaptive projection method for the variable density incompressible Navier–Stokes equations // Journal of Computational Physics. 1998. No 142. P. 1–46.
4. *Day M. S., Bell J. B.* Numerical simulation of laminar reacting flows with complex chemistry // Combustion Theory and Modelling. 2000. V. 4, No 4. P. 535–556.
5. *Жалнин Р. В., Змитренко Н. В., Ладонкина М. Е., Тишкин В. Ф.* Численное моделирование развития неустойчивости Рихтмайера – Мешкова с использованием схем высокого порядка точности // Математическое моделирование. 2007. Т. 19, № 10. С. 61–66.

АНАЛИЗ ЧАНДЛЕРОВСКОГО КОЛЕБАНИЯ ПОЛЮСА

Зотов Л. В.[1,2], Бизуар К.[3]

[1]*Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия;*
[2]*Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Московский институт электроники и математики им. А. Н. Тихонова, Москва, Россия;* wolftempus@gmail.com
[3]*Observatoire de Paris, SYRTE, Paris, France*

В работе исследуется чандлеровское движение полюса (ЧДП) Земли. Представлены такие методы его выделения, как сингулярный спектральный анализ, фильтрация Пантелеева и средняя квадратическая коллокация. Метод скользящего фильтра наименьших квадратов [1] показал, что ЧДП имеет средний период 433 суток и скачок фазы на π в 1930-е годы. Амплитуда ЧДП непостоянна и существенно уменьшалась в 1930-е и в 2010-е гг., модель огибающей содержит 83- и 42-летнюю квазипериодичности. На основе уравнений Эйлера – Лиувилля решена обратная задача восстановления входного возбуждения для ЧДП [2]. Возбуждение имеет 20-летнюю огибающую.

Анализ модулированного сигнала с 433-суточной несущей в скользящем окне демонстрирует специфический эффект, названный нами “эффектом эскарго”. Суть его состоит в следующем: при рассмотрении ЧДП на промежутке в 150 лет колебание имеет чисто прямой (prograde) характер, в спектре при этом наблюдается расщепление, в том числе ответственное за 40-летнюю модуляцию. При анализе же в скользящем окне на мгновенной чандлеровской частоте проявляется ретроградная квази-компонента с 20-летней огибающей, которая отражает изменение параметров эллиптичности. Показано сходство поведения чандлеровского возбуждения и ретроградной мгновенной квази-составляющей ЧДП, извлеченной скользящим окном. Этому найдено объяснение при рассмотрении уравнения Эйлера – Лиувилля.

Моделирование поведения чандлеровского колебания не только важно для объяснения причин этого колебания, но и для прогнозирования движения полюса и ответа на вопрос: имеется ли взаимосвязь между изменениями климата на планете и параметрами ее вращения [3].

Работа выполнена при поддержке Парижской обсерватории, Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-05-00753), программы кадрового резерва НИУ ВШЭ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Губанов В. С.* Динамика земного ядра по данным РСДБ-наблюдений // Письма в Астрономический журнал. 2009. Т. 35, № 4. С. 304–311.
2. *Zotov L., Bizouard C.* On modulations of the Chandler wobble excitation // J. Geodynamics. 2012. V. 62. P. 30–34.
3. *Zotov L., Bizouard C., Shum C. K.* A possible interrelation between Earth rotation and climatic variability at decadal time-scale // Geodesy and Geodynamics. 2016. V. 7, No 3. P. 216–222.

ПРИМЕНЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ТИПА PML ДЛЯ УРАВНЕНИЯ УПРУГОСТИ В ОСЕСИММЕТРИЧНОМ СЛУЧАЕ

Иванов А. М.[1], **Хохлов Н. И.**[2]

[1]*Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия;* ip-e@mail.ru

[2]*Научно-исследовательский институт системных исследований РАН, Москва, Россия;* k_h@inbox.ru

Рассматривается применение поглощающих граничных условий PML при моделировании распространения волн в линейно-упругих средах FDTD методом. На основе симметричных конечно-разностных аппроксимаций производных была разработана программная реализация этого метода на сдвинутой сетке со вторым порядком точности по времени и до 8-го по пространству.

Приводится классификация существующих PML: split [1] и unsplit формулировки. В свою очередь unsplit формулировка может основываться на следующих подходах: ADE-PML (PML с дополнительным дифференциальным уравнением) и C-PML (сверточный PML) [2], которые в случае второго порядка по времени отличаются лишь способом вывода.

Задание PML в цилиндрических координатах, которые возникают естественным образом в случае осевой симметрии, требует корректной замены радиальной составляющей координаты r. Существует подход Q-PML (квази PML) [3], в котором эта составляющая заменяется только в производных. Мы использовали корректную формулировку, в которой учитываются все операции с r.

Описывается операторный подход, позволяющий упростить реализацию граничных условий в случае осевой симметрии среды. Подход заключается в рассмотрении операций с координатой r, как к операторам, воздействующим на промежуточные значения в ходе численного расчета и корректирующим их значения согласно с поглощающими свойствами PML.

В цилиндрических координатах возникают операторы $\partial/\partial r$, r и r^{-1}, воздействующие на некоторые значения. Для каждого из них возможно найти замену, позволяющую задать граничные условия PML. В уравнении имеются члены, в которых одновременно присутствуют сразу несколько из указанных операторов. Тогда используемый подход позволяет применять замены в программной реализации последовательно независимо друг от друга.

В результате получен эффективный по памяти и простой в реализации способ задания корректного PML, который может применяться при записи уравнений в цилиндрических, сферических координатах или при наличии вторых производных в рассматриваемых уравнениях.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-07-01931 а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Berenger J. P.* A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves // J. Comput. Phys. 1994. V. 114, No 2. P. 185–200.
2. *Roden J. A., Gedney S. D.* Convolution PML (CPML): An efficient FDTD implementation of the CFS-PML for arbitrary media // Microwave and Optical Technology Letters. 2000. V. 27, No 5. P. 334–339.
3. *He J. Q., Liu Q. H.* A nonuniform cylindrical FDTD algorithm with improved PML and quasi-PML absorbing boundary conditions // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. 1999. V. 37, No 2. P. 1066–1072.

МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЖИДАНИЙ В СТОХАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА

Каргин Б. А.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия; bkargin@osmf.sscc.ru

На основе метода математических ожиданий разработаны новые весовые алгоритмы, позволяющие оптимизировать численное моделирование полей оптического электромагнитного излучения в случайно неоднородных средах. В этих алгоритмах моделирование траекторий фотонов осуществляется для подходящим образом подобранной детерминированной среды, а стохастическая структура среды учитывается с помощью специальных весовых множителей. В большом числе практически важных задач оптики стохастических сред данные алгоритмы допускают простое численное интегрирование соответствующих случайных оценок, необходимых для эффективного вычисления средних характеристик полей излучения. Для численного моделирования трехмерных стохастических полей рассеивающих и поглощающих сред использованы алгоритмы, основанные на так называемых потоковых и спектральных моделях случайных полей, настраиваемых по экспериментальным данным. Указанные выше алгоритмы были апробированы и реализованы при решении ряда прикладных задач оптики атмосферы и океана. На основе этих алгоритмов были численно исследованы потоки солнечной радиации в аэрозольной облачной и безоблачной атмосферах Земли. Выполнено численное моделирование переноса солнечной радиации для двумерных и трехмерных стохастических полей слоистообразной, слоисто-кучевой и кучевой разорванной облачности с учетом горизонтальных корреляций. Выполнена серия численных экспериментов, направленных на исследование эффективности применения лазерных локаторов наземного, самолетного и космического базирования для оперативной диагностики атмосферных аэрозолей и облачности. Численно исследован вопрос об оценке и контроле погрешностей расчетов, связанный со специфическим поведением дисперсий случайных "локальных" оценок, применяемых при решении нестационарных задач лазерного зондирования. В приближении лучевой оптики описана статистическая модель процесса переноса оптического излучения в виде интегрального уравнения для плотности столкновений в системе океан-атмосфера для полной и упрощенной "фацетной" моделей случайной взволнованной поверхности океана. Работа выполнена в связи с обоснованием аналоговых и весовых алгоритмов статистического моделирования прямых задач пассивного и активного аэрокосмического зондирования океана. Наряду с методом Монте-Карло рассмотренные модели могут быть полезны для анализа поля оптического излучения также и другими численными или аналитическими методами, имеющими дело с интегральным уравнением переноса.

Работа выполняется при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 43 и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-00894).

ЭМПИРИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ХАОСА В УРАВНЕНИЯХ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Когай В. В.[1], **Фадеев С. И.**[2], **Хлебодарова Т. М.**[3], **Лихошвай В. А.**[4]

[1]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
kogai@math.nsc.ru

[2]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
fadeev@math.nsc.ru

[3]*Институт цитологии и генетики СО РАН, Новосибирск, Россия;*
tamara@bionet.nsc.ru

[4]*Институт цитологии и генетики СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
likho@bionet.nsc.ru

В докладе предложен эмпирический критерий достаточности наличия хаотического потенциала у уравнения с запаздыванием общего вида. Критерий является конструктивным в том смысле, что позволяет определить значения параметров управляющих функций, при которых гарантируется наличие хаотической динамики в уравнении для некоторого значения запаздывающего аргумента. Критерий основан на установлении хаотичности одномерного дискретного отображения, порождаемого отношением управляющих функций из указанного уравнения с запаздыванием.

Использование этого критерия позволило нам существенно уменьшить время поиска значений параметров управляющих функций моделей, которые бы гарантировали наличие хаоса в системе, и достаточно быстро и подробно исследовать класс процессов, обладающих, как оказалось, высоким хаотическим потенциалом. Это сопряжённые процессы синтеза и деградации белковых продуктов (или разбавления их концентрации в процессе роста клетки), которые лежат в основе всех метаболических и молекулярно-генетических процессов и описываются уравнениями с запаздывающими аргументами.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00237а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Likhoshvai V. A., Kogai V. V., Fadeev S. I., Khlebodarova T. M.* Alternative splicing can lead to chaos // J. Bioinform. Comput. Biol. 2015. V. 13, No 1. Article ID 1540003.
2. *Likhoshvai V. A., Kogai V. V., Fadeev S. I., Khlebodarova T. M.* Chaos and hyperchaos in a model of ribosome autocatalytic synthesis // Scientific Reports. 2016. V. 6. Article ID 38870.
3. *Khlebodarova T. M., Kogai V. V., Fadeev S. I., Likhoshvai V. A.* Chaos and hyperchaos in simple gene network with negative feedback and time delays // J. Bioinform. Comput. Biol. 2017. V. 15, No 2. Article ID 1650042.
4. *Kogai V. V., Likhoshvai V. A., Fadeev S. I., Khlebodarova T. M.* Multiple scenarios of transition to chaos in the alternative splicing model // Int. J. Bifurcation Chaos. 2017. V. 27. Article ID 38870.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ СЕЙСМИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В СРЕДАХ С МЕЗОМАСШТАБНОЙ СТРУКТУРОЙ

Костин В. И.[1], **Лисица В. В.**[2], **Чеверда В. А.**[3], **Решетова Г. В.**[4]

[1] *Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН, Новосибирск, Россия;* KostinVI@ipgg.sbras.ru
[2] *Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН, Новосибирск, Россия;* LisitsaVV@ipgg.sbras.ru
[3] *Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН, Новосибирск, Россия;* cheverdava@ipgg.sbras.ru
[4] *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;* kgv@nmsf.sscc.ru

В настоящее время подавляющее количество коллекторов углеводородов представлено карбонатными отложениями, характеризующимися повышенной кавернозностью и трещиноватостью, которые и определяют фильтрационно-емкостные параметры пласта. Для развития сейсмических методов, ориентированных на выделение и картирование скоплений подобных мезомасштабных неоднородностей, необходимо проведение численного моделирования процессов распространения сейсмических волн в таких средах. При этом размеры этих объектов составляют порядка нескольких сантиметров, что требует использования неприемлемо мелкого шага сетки для их описания такого, что проведение расчетов во всей целевой области с таким шагом становится невозможным. В данной работе представлен численный метод расчета волновых полей в средах, содержащих локальные скопления неоднородностей, основанный на локальном пространственно-временном измельчении шага сетки [1].

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 16-05-00800 и № 15-05-01310).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kostin V., Lisitsa V., Reshetova G., Tcheverda V.* Local time-space mesh refinement for simulation of elastic wave propagation in multi-scale media // J. Comput. Phys. 2015. V. 281. P. 669–689.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СЖАТИЯ ДАННЫХ В ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Костин В. И.[1], **Соловьев С. А.**[2]

Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН, Новосибирск, Россия; [1]KostinVI@ipgg.sbras.ru, [2]SolovyevSA@ipgg.sbras.ru

Предлагается алгоритм решения системы линейных уравнений, возникающей при численном решении краевых задач для уравнения Гельмгольца. Алгоритм реализует схему прямого решения, основанного на разложении $A = L \cdot D \cdot L^t$ матрицы A коэффициентов системы уравнений в произведение треугольных и диагональной матриц, и предназначен для использования на вычислительных системах с распределенной памятью (кластерах).

Необходимость решения уравнения Гельмгольца в трехмерных областях для некоторого небольшого набора частот (до 10 герц) возникает в так называемых частотных алгоритмах полного волнового обращения (Frequency Domain Full Waveform Inversion, см. [1]).

Наш подход близок к известным мультифронтальным алгоритмам [2]. В его схему включена операция сжатия промежуточных данных, которая позволяет снизить объем требуемой оперативной памяти, и в то же время сократить число арифметических операций, нужное для получения решения. Сжатие данных производится на основе использования малоранговой аппроксимации поддиагональных блоков треугольной матрицы L и иерархического полуразделяемого (HSS) формата для диагональных блоков матрицы L. Сжатие помогает снизить объем требуемой памяти на порядки. Следует отметить, что из-за сжатия вместо “точной” $A = L \cdot D \cdot L^t$ в результате будет достигнута приближенная факторизация $A \simeq L_\varepsilon \cdot D_\varepsilon \cdot L_\varepsilon^t$. Однако включение в алгоритм итерационного уточнения позволяет сравнительно легко исправить этот дефект.

Несмотря на преимущества от использования сжатия промежуточных данных, численное решение уравнения Гельмгольца в трехмерных областях по предлагаемому алгоритму продолжает требовать огромных вычислительных ресурсов, и для интересных для практики геофизических моделей может быть реализовано лишь на кластерах. Заметим, что предложенный нами алгоритм демонстрирует масштабируемость, близкую к идеальной, при вычислениях на кластерах вплоть до 16 узлов (большие размеры продолжают оставаться проблемой). В рассмотренных нами примерах размеры матрицы достигают ста миллионов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-05-00800). Мы благодарны руководству KAUST (King Abdulla University of Sciences and Technology, Саудовская Аравия) за представленный доступ к высокопроизводительному кластеру Shaheen II.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mulder W. A., Plessix R. E.* How to choose a subset of frequencies in frequency-domain finite-difference migration // Geophysical Journal International. 2004. V. 158, No 3. P. 801–812.
2. *Duff I. S., Reid J. K.* The multifrontal solution of indefinite sparse symmetric linear systems // ACM Transactions on Mathematical Software. 1983. V. 9, No 3. P. 302–325.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОДНОГО РЕЖИМА В ДЕЛЬТЕ РЕКИ ЛЕНА

Крылова А. И.[1], **Антипова Е. А.**[2]

[1]*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;* alla@climate.sscc.ru
[2]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;* antipova_aea@mail.ru

В работе рассматривается задача численного моделирования водного режима дельты реки Лена в одномерном приближении на основе уравнений Сен-Венана, которые позволяют исследовать основные закономерности водного стока для многорукавных дельт. Для этого устьевой участок реки представляется в виде системы, состоящей из двух типов элементов (участков открытых русел и узлов разветвления), которую можно представить в виде некоторого плоского графа. На полученном графе рассматривается система уравнений Сен-Венана, в которой расход воды и уровень свободной поверхности являются неизвестными функциями. В качестве начальных условий на каждом отрезке используется решение стационарной задачи; в вершинах графа задаются условия сопряжения в виде баланса расходов и условий связи между уровнями. Граничные условия в начальных и концевых створах русловой сети рассматриваются как частный случай условия сопряжения.

В качестве численного метода решения исходных дифференциальных уравнений используется абсолютно устойчивая неявная разностная схема, представленная в [1]. Реализация данного метода зависит от типа рассматриваемого разветвленного русла. При решении получившейся замкнутой системы линейных алгебраических уравнений для разветвлений с "кольцами" учитывается структура одномерного графа "дерево", а для простых разветвлений без "колец" используется метод параметрической прогонки.

Дельта реки Лены включает пять основных магистральных проток: Быковскую, Трофимовскую, Сардахскую, Туматскую и Оленёкскую.

Цифровая модель рельефа дельты, необходимая для учета в уравнениях движения, получена на основе географических карт и спутниковых фотографий земной поверхности из системы "Google Earth". Для задания граничных условий на левой границе расчетной области использовались данные о расходе воды на гидростворе в с. Кюсюр за 2008 год (Международный геофизический год). Моделирование гидравлического режима в дельте реки Лена проводилось в период открытой воды с мая по октябрь.

Результаты численных экспериментов в дельте реки Лены и их сравнение с данными измерений [2] показали, что модель удовлетворительно описывает распределение расходов воды по основным протокам дельты.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Воеводин А. Ф., Никифоровская В. С., Овчарова А. С.* Численные методы решения задачи о неустановившемся движении воды на устьевых участках рек // Труды ААНИИ. Л.: Гидрометеоиздат, 1983. Т. 378. С. 23–34.
2. *Гуков А. Ю.* Гидробиология устьевой области реки Лены. М.: Научный мир, 2001.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗРЫВА СВЕРХНОВОЙ ТИПА SN 2006GY НА СУПЕРЭВМ

Куликов И. М.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; kulikov@ssd.sscc.ru

В докладе излагается метод высокого порядка точности на гладких решениях и с малой диссипацией решения в области разрывов для решения уравнений релятивистской газовой динамики. Численный метод основан на комбинации метода Годунова и кусочно-параболического метода на локальном шаблоне [1]. Для построения решения задачи Римана решена задача о полном спектральном разложении для уравнений релятивистской газовой динамики [2]. Процедура восстановления примитивных переменных основана на работе [3]. Численный метод протестирован на задаче о распаде релятивистского разрыва, допускающего аналитическое решение. В рамках модели релятивистской газовой динамики смоделирован процесс взрыва сверхновой типа SN 2006gy [4].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 15-01-00508, № 16-07-00434) и гранта Президента РФ для молодых ученых (МК – 1445.2017.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kulikov I., Vorobyov E.* Using the PPML approach for constructing a low-dissipation, operator-splitting scheme for numerical simulations of hydrodynamic flows // Journal of Computational Physics. 2016. V. 317. P. 318–346.
2. *Falle S. A. E. G., Komissarov S. S.* An upwind numerical scheme for relativistic hydrodynamics with a general equation of state // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1996. V. 278, No 2. P. 586–602.
3. *Mignone A., Bodo G.* An HLLC Riemann solver for relativistic flows. I. Hydrodynamics // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2005. V. 364, No 1. P. 126–136.
4. *Ofek E. O., et al.* SN 2006gy: An Extremely Luminous Supernova in the Galaxy NGC 1260 // The Astrophysical Journal Letters. 2007. V. 659. P. L13–L16.

СЦЕНАРИЙ РАБОТЫ СИСТЕМЫ ПО ОЦЕНКЕ ПАРАМЕТРОВ ВОЛНЫ ЦУНАМИ И ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ АЛГОРИТМЫ

Лаврентьев М. М.[1], **Романенко А. А.**[2]

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
[1]`mmlavrentiev@gmail.com`, [2]`arom@ccfit.nsu.ru`

События 2011 года у берегов Японии, 2004 года в Индийском океане и ряд других показывают, что несмотря на большое количество усилий и средств, вкладываемых в защиту прибрежных территорий от разрушительных волн цунами, человечество по-прежнему остается беззащитным перед этим природным явлением. С нашей точки зрения на текущий момент времени наиболее результативным способом защиты является своевременная оценка параметров волны и принятия, в случае необходимости, мер по предупреждению и эвакуации населения, а также соответствующая подготовка объектов инфраструктуры. Скорость, надежность и точность являются ключевыми параметрами в работе системы предупреждения об опасности цунами.

Предлагается следующий Сценарий работы системы по оценке параметров волны цунами:

1. В автоматическом режиме происходит отслеживание сейсмической активности например, на сайте http://earthquake.usgs.gov
2. В случае обнаружения потенциально опасного события:
   (a) Оценка времени распространения волны от эпицентра до объектов защиты на берегу и до ближайших датчиков регистрации волны цунами (DART станций и пр.);
   (b) После прохождения волны через регистратор извлекаются данные о профиле волны (мариаграммы);
   (c) Осуществляется фильтрация приливной компоненты;
   (d) Восстановление первоначального смещения водной поверхности в зоне источника цунами;
   (e) Прямое численное моделирование распространения волны от восстановленного источника до всех участков защищаемого побережья.
3. Информирование правительственных и общественных служб об ожидаемых параметрах волны. Рекомендации по проведению эвакуационных и других мероприятий.

У авторов имеются алгоритмы и их реализации, способные существенно сократить время на выполнение всех перечисленных этапов и, следовательно, на принятия управляющих решений. Так, моделирование распространения волны было перенесено для вычисления на GPU (Graphics Processing Unit) и FPGA (Field-Programmable Gate Array), что позволило сократить время численного моделирования до минут по сравнению с часами для исходной версии программы на CPU. Фильтрация приливной компоненты и восстановление первоначального смешения по предложенным алгоритмам происходит за доли секунды. Имеются также алгоритмы по расчету оптимального расположения измерительной аппаратуры для регистрации волны цунами.

В докладе представлены предложенные авторами алгоритмы и результаты их применения к анализу реальных событий.

О КОМПЬЮТЕРНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ИЕРАРХИЧЕСКИХ БИОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Лашин С. А.[1], **Матушкин Ю. Г.**[2]

[1]*Институт цитологии и генетики СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
lashin@bionet.nsc.ru
[2]*Институт цитологии и генетики СО РАН, Новосибирск, Россия;*
mat@bionet.nsc.ru

Биологические системы являются сложноорганизованными иерархическими системами. Их функционирование определяется координированной работой множества подсистем, относящихся к различным уровням биологической организации — молекулярно-генетическому, клеточному, тканевому, органному, организменному, популяционному, экологическому и, наконец, биосферному. Поэтому понимание принципов функционирования и эволюции биологических систем, которое необходимо для предсказания их свойств и, соответственно, для управления этими свойствами (что, в свою очередь, имеет не только фундаментальное, но и прикладное значение), требует не только развитых аналитических методов (редукционистский подход), но и синтетических, системных методов, способных объединить полученные данные. Большую роль в развитии системной биологии в настоящее время играет математическое и компьютерное моделирование. Отметим, однако, что в настоящее время моделирование биологических систем, ограничивается, как правило, двумя-тремя смежными уровнями [1].

В данной работе представлен метод конструирования составных моделей биологических систем, а также его реализации в виде программных комплексов "Гаплоидный эволюционный конструктор" (ГЭК) и "Диплоидный эволюционный конструктор" (ДЭК). ГЭК [2] предназначен для моделирования функционирования и эволюции микробных сообществ, а ДЭК [3] — популяций сложноорганизованных организмов. В моделях учитываются такие уровни биологической организации как молекулярно-генетический, клеточный/организменный (а также органный в случае ДЭК), популяционный и экологический. Представлены результаты численного моделирования эволюции микробного сообщества в пространственно гетерогенной среде обитания и в изменяющихся условиях среды.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-07-03879).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Grimm V., Berger U.* Structural realism, emergence, and predictions in next-generation ecological modelling: synthesis from a special issue // Ecological Modelling. 2016. V. 326. P. 177–187.
2. *Lashin S. A., Klimenko A. I., Mustafin Z. S., Kolchanov N. A., Matushkin Yu. G.* HEC 2.0: improved simulation of the evolution of prokaryotic communities // Математическая биология и биоинформатика. 2014. Т. 9. С. 585–596.
3. *Lashin S. A., Matushkin Yu. G.* Multi-layer computer models of gene network evolution in diploid populations // FEBS Journal. 2013. V. 280, No 1. P. 563.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДИФФУЗИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК В ПРОЦЕССЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОННОЙ ЛАВИНЫ В ГАЗЕ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

Лотова Г. З.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; lot@osmf.sscc.ru

В работе рассматриваются задачи теории переноса электронов в газе под действием сильного внешнего электрического поля. Электроны, стартовавшие с катода, двигаются с ускорением в направлении анода. В своем движении электроны, сталкиваясь с молекулами газа, поглощаются, рассеиваются упруго или не упруго или ионизируют газ, “выбивая” вторичные электроны. Таким образом, число заряженных частиц экспоненциально растет, образуя ионизированные частицы газа и электронную лавину (электронное облако). Важными транспортными характеристиками лавины являются коэффициенты диффузии (продольной D_L и поперечной D_T).

В результате использования программы ELSHOW, созданной на основе трёхмерного (по пространству) алгоритма, получены выборки состояний частиц в электронной лавине для заданного момента времени. С их помощью разработаны алгоритмы вычисления соответствующих “диффузионных радиусов” и коэффициентов диффузии, которые требуют построения оценок плотности распределения частиц [1].

В данной работе предложены более точные (по сравнению с [1]) оценки радиуса диффузии на основе сглаженных оценок плотности распределения частиц: ядерных оценок Парзена – Розенблатта [2] с использованием группированной выборки и рандомизированного проекционного метода с использованием полиномов Лагерра и Эрмита [3]. Тестовые расчёты показали высокую эффективность проекционных оценок для вычисления диффузионных характеристик.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 15-01-08988, 15-01-00894, 16-01-00530, 16-01-00145, 17-01-00823) и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН (номер гранта I.33П).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lotova G. Z., Marchenko M. A., Mikhailov G. A., Rogazinskii S. V., Ukhinov S. A., Shklyaev V. A.* Numerical statistical modelling algorithms for electron avalanches in gases // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2014. V. 29, No 4. P. 251–263.
2. *Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З.* Асимптотическая теория оценивания. М.: Физматлит, 1979.
3. *Крамер Г.* Математические методы статистики. М.: Мир, 1975.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРИБЛИЖЕННОГО ОБРАЩЕНИЯ ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ТРЕХМЕРНОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Мальцева С. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
maltsevasv@math.nsc.ru

В данной работе рассматривается задача восстановления потенциала, порождающего потенциальную часть трехмерного векторного поля. Данными для задачи является нормальное преобразование Радона.

Нормальное преобразование Радона векторного поля $v = (v_i)$, $i = 1, 2, 3$, определяется следующим образом:

$$[\mathcal{R}v](\xi, s) = \iint\limits_{P_{\xi,s}} v_i \xi^i \mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

где $P_{\xi,s}$ — плоскость, перпендикулярная направлению ξ и отстоящая на расстояние $|s|$ от начала координат, u, v — координаты локальной системы координат плоскости $P_{\xi,s}$. В ядре оператора нормального преобразования Радона лежат соленоидальные поля, поэтому мы можем восстановить только потенциальную часть поля.

В данной работе для восстановления потенциала, порождающего потенциальную часть поля, используется метод приближенного обращения, разработанный А. К. Луисом и его учениками [1]–[3]. Идея метода приближенного обращения состоит в следующем. Пусть требуется найти решение (функцию f) операторного уравнения $Af = g$ для линейного ограниченного оператора $A : H \to K$, где H и K — гильбертовы пространства. Для этого используются усредняющие функции $e^y_\gamma(x)$, обладающие свойствами

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^y_\gamma(x)\, dx = 1, \qquad \lim_{\gamma\to 0} \langle f, e^y_\gamma \rangle_H = f(y).$$

Пусть A^* — сопряженный оператор для A и функции e^y_γ лежат в пространстве образов A^*, тогда существуют функции ψ^y_γ такие, что $A^*\psi^y_\gamma = e^y_\gamma$. Имеем

$$f(y) \approx \langle f, e^y_\gamma \rangle_H = \langle f, A^*\psi^y_\gamma \rangle_H = \langle Af, \psi^y_\gamma \rangle_K = \langle g, \psi^y_\gamma \rangle_K.$$

Таким образом, скалярное произведение исходных данных g и функций ψ^y_γ дает приближенное решение операторного уравнения $Af = g$.

Построенный алгоритм позволяет восстановить потенциал, порождающий потенциальную часть поля. Используя методы численного дифференцирования, из полученного потенциала строим потенциальную часть поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Louis A. K., Maass P.* A mollifier method for linear operator equations of the first kind // Inverse Problems. 1990. V. 6. P. 427–440.
2. *Louis A. K.* Approximate inverse for linear and some nonlinear problems // Inverse Problems. 1996. V. 12. P. 175–190.
3. *Rieder A., Schuster T.* The approximate inverse in action with an application to computerized tomography // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2000. V. 37, No 6. P. 1909–1929.

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ТЕСТИРОВАНИЯ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РАСЧЁТА КИНЕМАТИКИ ВОЛН ЦУНАМИ

Марчук Ан. Г.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; mag@omzg.sscc.ru

В работе приводятся точные решения для кинематики волновых лучей и фронтов цунами при некоторых нетривиальных распределениях глубины в области распространения волны. В частности, такие решения найдены для линейной зависимости глубины от расстояния до прямолинейной береговой линии (наклонное дно) и для квадратичного роста глубины с удалением от берега (параболический рельеф дна). Для наклонного дна траектория волнового луча будет иметь вид дуги циклоиды, а в случае параболического дна волновые лучи представляют собой дуги окружностей с центрами на прямолинейно береговой линии. Найденные формулы позволяют находить положение волнового фронта в любой момент времени, а формулы для траекторий волновых лучей дают возможность оценить в лучевом приближении высоту волны в любой точке области, если известна высота начальной волны. Эти оценки высот цунами были подтверждены численными расчётами по дифференциальной модели мелкой воды. Полученные в работе точные решения могут быть использованы для тестирования численных методов расчёта кинематики и динамики волн цунами.

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД ДЛЯ ДВУМЕРНОГО КОНДЕНСАТА БОЗЕ – ЭЙНШТЕЙНА

Медведев С. Б.[1], **Лиханова Ю. В.**[2], **Федорук М. П.**[3], **Чаповский П. Л.**[4]

[1]*Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия;*
medvedev@ict.nsc.ru
[2]*Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия;*
yulia.likhanova@gmail.com
[3]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
mife@ict.nsc.ru
[4]*Институт автоматики и электрометрии СО РАН, Новосибирск, Россия;*
chapovsky@iae.nsk.su

Теоретический анализ бозе-конденсатов в настоящее время традиционно основывается на уравнении Гросса – Питаевского. Это уравнение стало особенно интенсивно изучаться после первых экспериментальных работ по созданию бозе-эйнштейновских конденсатов (БЭК) разреженных газов. Настоящее исследование было также инициировано экспериментальной работой [1], в которой изучался разлёт бозе-конденсата атомов рубидия после выключения магнитной ловушки, и работой [2], в которой проводилось сравнение эксперимента и расчетов по уравнению Гросса – Питаевского.

Существенное упрощение математического моделирования общей сложной задачи описания БЭК может быть достигнуто, если можно ограничиться двумерным (2D) уравнением Гросса – Питаевского [3].

Была рассмотрена обратная задача восстановления коэффициентов двумерного уравнения Гросса – Питаевского с гармоническим потенциалом на основе вариационного метода. В частности, проведено сравнение решений стационарной задачи для трех пробных функций: Гаусса, супер-Гаусса и Томаса – Ферми с прямым численным моделированием для различных уровней нелинейности при заданных параметрах гармонического потенциала и продольных размеров конденсата. Получено вириальное соотношение, которое верно для любых пробных функций [4].

Работа Ю. В. Лихановой, С. Б. Медведева и М. П. Федорука выполнена при поддержке грантов ведущих научных школ РФ (НШ-7214.2016.9 и НШ-9161.2016.9). Работа П. Л. Чаповского выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-02-05754).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чаповский П. Л.* Бозе – эйнштейновская конденсация атомов рубидия // Письма в ЖЭТФ. 2012. Т. 95, № 3. С. 148—152.
2. *Лиханова Ю. В., Медведев С. Б., Федорук М. П., Чаповский П. Л.* Взаимодействие двух фракций в вырожденном бозе-газе при конечных температурах // Письма в ЖЭТФ. 2016. Т. 103, № 6. С. 452–457.
3. *Медведев С. Б., Лиханова Ю. В., Федорук М. П., Чаповский П. Л.* Эволюция стационарного состояния в двумерном уравнении Гросса – Питаевского // Письма в ЖЭТФ. 2014. Т. 100, № 12. С. 935—940.
4. *Лиханова Ю. В., Медведев С. Б., Федорук М. П., Чаповский П. Л.* Аналитические пробные функции для моделирования двумерного бозе-конденсата // Квантовая электроника. 2017. Т. 47. (в печати).

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИНФРАЗВУКОВЫХ И СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН В СОВМЕЩЁННОЙ МОДЕЛИ "ЗЕМЛЯ – АТМОСФЕРА"

Михайлов А. А.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; alex_mikh@omzg.sscc.ru

В докладе рассматриваются алгоритм и результаты численного моделирования распространения инфразвуковых и сейсмических волн в пространственно-неоднородной модели "Земля – Атмосфера". Данные исследования являются продолжением исследований, приведённых в работах [1], [2]. В предлагаемой работе рассматривается распространение волн в случае криволинейной границы раздела атмосферы и литосферы. Полученные результаты численного моделирования позволяют исследовать влияние рельефа местности на распространения инфразвуковых волн и эффект взаимодействия между волнами в литосфере и атмосфере.

Распространение инфразвуковых волн в изотермической атмосфере описывается линеаризованной системой уравнений Навье – Стокса в виде гиперболической системы первого порядка для трёхмерной декартовой системы координат. Предполагается, что плотность и скорость звука в атмосфере зависят от высоты. Распространение сейсмических волн в литосфере описывается гиперболической системой первого порядка в терминах скоростей вектора смещения и компонент тензора напряжений согласно теории упругости. Полагается, что граница раздела сред атмосфера и упругое полупространство является произвольно криволинейной функцией.

В работе описывается численный алгоритм для проведения расчётов. Особенностью рассматриваемого алгоритма является комбинирование интегральных преобразований с конечно-разностным методом. Предлагаемый алгоритм решения основан на применении интегрального преобразования Лагерра по временной координате. Данный метод решения динамических задач теории упругости был впервые рассмотрен в работах [3], [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михайленко Б. Г., Михайлов А. А.* Численное моделирование распространения сейсмических и акусто-гравитационных волн для модели "Земля – Атмосфера" при наличии ветра в атмосфере // Сиб. журн. вычисл. математики. 2014. Т. 17, № 2. С. 149–162.
2. *Михайлов А. А., Мартынов В. Н.* Математическое моделирование распространения акустико-гравитационных и сейсмических волн в неоднородной модели "Земля – Атмосфера" при наличии стратификации ветра в атмосфере // Мат. заметки СВФУ. 2015. Т. 22, № 2. С. 92–105.
3. *Mikhailenko B. G.* Spectral Laguerre method for the approximate solution of time dependent problems // Appl. Math. Letters. 1999. No 12. P. 105–110.
4. *Konyukh G. V., Mikhailenko B. G., Mikhailov A. A.* Application of the integral Laguerre transforms for forward seismic modeling // J. Comput. Acoustics. 2001. V. 9, No 4. P. 1523–1541.

УПРУГИЕ ДЕФОРМАЦИИ В ГЕТЕРОСТРУКТУРАХ GE/SI, РАССЧИТАННЫЕ МЕТОДОМ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ

Новиков П. Л.[1,2], **Атовуллаев Т.**[2], **Павский К. В.**[1], **Двуреченский А. В.**[1,2]

[1] *Институт физики полупроводников им. А. В. Ржанова СО РАН, Новосибирск, Россия;* novikov@isp.nsc.ru
[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;* p.novikov@nsu.ru

Для формирования пространственно-упорядоченных массивов квантовых точек используется гетероэпитаксия на подложках с рисунком, подготовленным методом литографии. Значительный контроль за расположением квантовых точек достигается при использовании ионного облучения через резист [1]. Вводимые при этом межузельные атомы создают дополнительные упругие деформации в подложке, которые существенно влияют на зарождение наноостровков при последующей гетероэпитаксии. В данной работе распределение деформаций рассчитывается методом молекулярной динамики (МД).

Описание модели. Для выяснения роли межузельных атомов в образовании упругих деформаций проводилось моделирование методом МД. Моделируемая структура включала 20 моноатомных слоев подложки $Si(100) - 2 \times 1$ с канавками. В область под канавками в межузельные позиции были введены атомы Ge. В начальном состоянии атомы Si и Ge помещались в узлы ненапряженной кристаллической решетки кремния. Межузельные атомы Ge занимали тетраэдрические межузельные позиции в алмазоподобной подрешетке, сдвинутой относительно основной на $3a/2$ вдоль направления (111), где a – постоянная решетки Si. Затем производилась процедура релаксации, в ходе которой атомы структуры меняли свое положение под действием сил межатомного взаимодействия. Отрелаксированная структура была объектом дальнейших исследований. Межатомное взаимодействие описывалось эмпирическим потенциалом Терсоффа [2]. Моделируемая структура содержала число атомов $N \sim 10^5$.

Расчет методом МД предполагает вычисление сил на каждый атом системы. Это в свою очередь требует определения соседей для каждого атома. Число операций, необходимых для выявления соседей, пропорционально N^2 (которое можно сократить до $N^{3/2}$, используя алгоритм Верле). Чтобы осуществлять такие вычисления за разумные времена, необходимо использование эффективных алгоритмов. Нами был разработан алгоритм, обеспечивающий параллельный опрос массива на предмет близкого расположения к данному атому на многоядерном процессоре. Ускорение вычислений по сравнению с последовательным алгоритмом составило от 5 до 10 раз, в зависимости от объема массива.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dvurechenskii A. V., et al.* Spatially arranged chains of Ge quantum dots grown on Si substrate prepatterned by ion-beam-assisted nanoimprint lithography // Physica Status Solidi (C). 2016. V. 13, No 10–12. P. 882–885.
2. *Tersoff J.* New empirical approach for the structure and energy of covalent systems // Phys. Rev. B. 1988. V. 37, No 12. P. 6991–7000.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ РАСЧЕТА ПОКАЗАТЕЛЕЙ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ ПРИ ГРУППОВОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ МАШИН

Павский В. А.[1], **Павский К. В.**[2]

[1]*Кемеровский технологический институт пищевой промышленности, Кемерово, Россия;* pavva46@mail.ru

[2]*Институт физики полупроводников им. А. В. Ржанова СО РАН, Новосибирск, Россия;* pkv@isp.nsc.ru

Для оценки эффективности функционирования вычислительных систем (ВС) используют ряд показателей, среди которых отметим показатели потенциальной живучести [1], в основе которых лежат вероятности и числовые характеристики случайных величин. Показатели потенциальной живучести ВС учитывают то обстоятельство, что при решении задач используются все исправные элементарные машины (ЭМ), число которых, вообще говоря, случайно. Параллельные программы сложных задач, при их реализации на живучих ВС, способны задействовать суммарную производительность всех работоспособных ЭМ системы.

Описание модели. Предлагается стохастическая модель функционирования распределенной ВС, в которой ЭМ не абсолютно надежные [1]. Каждая из них отказывает с интенсивностью λ. Машина, вышедшая из строя, попадает в восстанавливающее устройство и ждет восстановления. В случайные моменты времени с интенсивностью μ осуществляется восстановление группами по r ЭМ. Рассматриваются простейшие потоки. Считаем, что в начальный момент времени было n исправных машин. В качестве показателей эффективности (потенциальной живучести) используем: математическое ожидание $M(t)$ и дисперсию $D(t)$ числа исправных ЭМ [1]. В работе получены решения для математического ожидания и дисперсии числа исправных машин в распределенных масштабируемых вычислительных системах при групповом восстановлении:

$$\begin{aligned}
M(r) &= \frac{r\mu}{\lambda} + \left(n - \frac{r\mu}{\lambda}\right) e^{-\lambda t},\\
D(t) &= \left(n^2 - n - \frac{r\mu}{\lambda}\left(2n - \frac{r\mu}{\lambda} + \frac{r-1}{2}\right)\right) e^{-2\lambda t}\\
&\quad + \frac{r\mu}{\lambda}\left(\frac{r\mu}{\lambda} + 2\left(n - \frac{r\mu}{\lambda}\right) e^{-\lambda t}\right) + \frac{r(r-1)\mu}{2\lambda} + M(t) - M^2(t).
\end{aligned}$$

Точного решения для вероятностей состояния системы найти не удается, поскольку даже в стационарном режиме возникают цепные дроби, что приводит к приближенному решению. Используемый метод моментов [2] дает возможность получить точное решение для моментов любых порядков. Получена также качественная оценка — простым наращиванием вычислительной системы элементарными машинами, без улучшения их параметров, достигнуть сколь угодно наперед заданной производительности невозможно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хорошевский В. Г.* Архитектура вычислительных систем. М.: МГТУ им. Баумана, 2008.
2. *Павский В. А., Павский К. В., Хорошевский В. Г.* Вычисление показателей живучести распределенных вычислительных систем и осуществимости решения задач // Искусственный интеллект. 2006. № 4. С. 28–34.

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МИКРОРЕЗОНАТОРА

Пиманов Д. О.[1], **Фадеев С. И.**[1,2]

[1] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
pimanov-daniil@yandex.ru
[2] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
fadeev@math.nsc.ru

Исследуются нелинейные колебания материальной точки, описываемые дифференциальным уравнением второго порядка, под воздействием линейной упругой силы, силы трения и силы электростатического притяжения, меняющейся с заданным периодом. Рассматриваемая проблема представляет математическую модель микрорезонатора, в котором недеформируемая платформа с заданной массой на пружине играет роль материальной точки. В связи с этим формулируется нелинейная краевая задача с условиями периодичности, для исследования которой привлекается метод продолжения решения по параметру на основе дифференциальных прогонок метода множественной стрельбы. В результате установлены области параметров, в которых существуют периодические решения задачи Коши для рассматриваемого дифференциального уравнения с периодом внешнего воздействия, их множественность и устойчивость. Показано существование устойчивых периодических решений с периодом, кратным периоду внешнего воздействия. Приведены примеры, в которых периодические решения переходят в хаотические колебания по сценарию Фейгенбаума через удвоение периода.

Математические модели микрорезонаторов с подобным принципом работы ранее были исследованы авторами в работах [1]–[3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фадеев С. И., Пиманов Д. О.* Исследование периодических решений в математических моделях микромеханики при импульсном периодическом воздействии // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2013. Т. 13, № 3. С. 122–140.
2. *Фадеев С. И., Пиманов Д. О.* Численное исследование математических моделей микромеханики при периодическом импульсном воздействии // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 3. С. 133–145.
3. *Фадеев С. И., Косцов Э. Г., Пиманов Д. О.* Исследование математической модели микроэлектромеханического резонатора типа платформа // Вычислительные технологии. 2016. Т. 21, № 2. С. 63–87.

КАРТИРОВАНИЕ СВОЙСТВ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ С УЧЕТОМ АНИЗОТРОПИИ

Плавник А. Г.[1], **Сидоров А. Н.**[2]

[1]*Западно-Сибирский филиал института нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН, Тюмень, Россия;* plavnikag@ipgg.sbras.ru
[2]*Научно-аналитический центр рационального недропользования ХМАО–Югры, Тюмень, Россия;* sidorov@crru.ru

Анизотропия является характерной чертой в пространственных закономерностях изменения многих свойств геологических объектов. В настоящее время для ее учета при картировании активно развивается подход, в котором реализуется модель деформационного преобразования исходного изотропного пространства. При этом в значительной степени упрощаются как собственно методы построения карт с учетом анизотропии, так и методы анализа анизотропии по имеющимся фактическим данным.

Постановка и решение задачи учета анизотропии на основе моделирования соответствующего деформационного преобразования относительно просто и достаточно строго осуществляется в рамках вариационно-сеточного метода геокартирования. Для решения необходима информация о матрице Якоби преобразования, которая в каждой точке может быть охарактеризована произведением простых матриц, соответствующих преобразованиям поворота, скоса и сжатия. Вычислительная схема моделирования деформации является общей для задач с однородной и с неоднородной анизотропией.

Для анализа возможностей и надежности предлагаемого метода рассмотрены примеры учета отдельных простых аффинных преобразований — поворота, сжатия и скоса. Применимость использования этого подхода в случае с деформационным преобразованием с непостоянной матрицей Якоби рассмотрена на примере деформации сжатия и изгиба. Полученные результаты свидетельствуют о хорошем согласовании модельного приближения и точного преобразования исходной карты для рассмотренных вариантов деформации.

В качестве практического приложения рассматриваемого подхода представлено решение задачи картирования минерализации подземных вод по разрезу отложений. Необходимость учета анизотропии в этой задаче обусловлена наличием слабопроницаемых флюидоупоров, затрудняющих гидродинамическое и гидрохимическое взаимодействие между подземными водами разных водоносных горизонтов.

Примеры моделирования деформационного преобразования и учета на этой основе анизотропии при геокартировании выполнены в рамках существующего программного комплекса GST. В настоящее время программные средства, реализующие трехмерный вариант решения задач геокартирования на основе вариационно-сеточного метода, находятся в стадии разработки. Одним из сдерживающих факторов в их развитии (наряду с резким увеличением требований к вычислительным мощностям компьютерной техники) является то, что в отличие от двумерных задач трехмерные практически всегда характеризуются резкой и неоднородной анизотропией. Предложенный в данной работе подход предоставляет простые и надежные средства учета этой неоднородности.

СИНГУЛЯРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ ЛУЧЕВЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ДВУМЕРНЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ

Полякова А. П.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
apolyakova@math.nsc.ru

Рассматривается задача двумерной тензорной томографии при параллельной схеме сбора данных в случае прямолинейного распространения лучей. Под задачей тензорной томографии подразумевается следующая постановка: требуется восстановить симметричное m-тензорное поле, заданное в единичном круге, по его известным значениям продольного, смешанного или поперечного лучевых преобразований.

Для обращения линейных операторов часто используется метод сингулярного разложения. Суть метода заключается в том, что образ оператора представляется в виде ряда по базисным элементам с сингулярными числами в качестве коэффициентов. Тогда образ обратного оператора будет представлять собой ряд со схожей структурой, в котором задействованы прообразы этих базисных элементов и те же сингулярные числа.

Получено сингулярное разложение операторов продольного, смешанного и поперечного лучевых преобразований. В исходном пространстве $\mathcal{S}^m(L_2(\mathbb{B}))$ интегрируемых с квадратом симметричных m-тензорных полей, заданных в единичном круге, ортонормированные базисы строятся с помощью многочленов Якоби и гармонических полиномов. С использованием результата [1], ранее полученного для оператора преобразования Радона, показано, что в пространстве образов соответствующие ортонормированные базисы строятся на основе многочленов Гегенбауэра и гармонических полиномов. Найдены сингулярные разложения операторов, получены формулы обращения и аппроксимации для обратных операторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Louis A. K.* Orthogonal function series expansions and the null space of the Radon transform // SIAM J. Math. Anal. 1984. V. 15, No 3. P. 621–633.

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ВИДОМ ОПЕРАТОРА ДРОБНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Постнов С. С.

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва, Россия;
postnov.sergey@inbox.ru

Исследованы задачи оптимального управления системами дробного порядка, для которых оператор дробного дифференцирования понимается в смысле Капуто, Римана – Лиувилля или Адамара. Для каждого из этих случаев анализируется постановка и решения задач оптимального управления. Проводится сравнение свойств оптимальных управлений и особенностей динамики систем, обусловленных видом оператора дробного дифференцирования.

Рассматривается линейная стационарная система дробного порядка следующего вида:

$$ {}_0D_t^{\alpha_i} q_i(t) = a_{ij}q_j(t) + b_{ij}u_j(t) + f_i(t), \quad i, j = 1, \ldots, N, $$

где функции
$\vec{q}(t) = (q_1(t), \ldots, q_N(t))$, $\vec{u}(t) = (u_1(t), \ldots, u_N(t))$ и $\vec{f}(t) = (f_1(t), \ldots, f_N(t))$ определяют состояние, управление и возмущение, соответственно; $t \in (t_0, T]$, $T > t_0 > 0$; a_{ij} и b_{ij} — коэффициенты; ${}_0D_t^{\alpha_i}$ — оператор дробного дифференцирования порядка α_i, $0 < \alpha_i < 1$; по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Оператор дробного дифференцирования понимается в смысле Капуто, Римана – Лиувилля или Адамара [1].

Рассматриваются управления $\vec{u}(t) \in L_p(t_0, T]$, $p > 1$. Исследуется две задачи оптимального управления: задача поиска управления с минимальной нормой при заданном времени управления и задача поиска управления, оптимального по быстродействию, при заданном ограничении на норму управления. Поставленные задачи сводятся к l-проблеме моментов, для которой выводятся условия корректности и разрешимости [2], [3], одинаковые для всех трёх определений дробной производной.

Полученная проблема моментов решена аналитически в общем виде для одномерной системы и в частных случаях для двумерной системы. Вычислены границы области, в которой заключены допустимые траектории системы, а также фазовые траектории системы в режиме оптимального управления. Проведён сравнительный анализ полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006.
2. *Кубышкин В. А., Постнов С. С.* Задача оптимального управления линейной стационарной системой дробного порядка в форме проблемы моментов: постановка и исследование // Автоматика и телемеханика. 2014. № 5. С. 3–17.
3. *Kubyshkin V. A., Postnov S. S.* Optimal control problem investigation for linear time-invariant systems of fractional order with lumped parameters described by equations with Riemann–Liouville derivative // J. Control Sci. Eng. 2016. V. 2016. Article ID 4873083.

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Постнова Е. А.

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва, Россия;
5elpostnova@gmail.com

Рассмотрены задачи оптимального управления движением для одномерной и двумерной систем дробного порядка. При исследовании поставленных задач использовался метод моментов, были найдены аналитические решения и проанализированы их свойства в зависимости от показателя дробного дифференцирования, времени управления, начальных и конечных условий.

Работа посвящена вопросам оптимального управления движением линейных систем дробного порядка. Физически подобные задачи, проводя аналогию с системами целого порядка, соответствуют задачам об изменении параметров закона движения некоторого объекта или изменения самого закона движения, например: приведение объекта или системы в движение; вывод объекта или системы на заданную траекторию; смена типа движения объекта или системы.

В качестве объекта исследования выбрано два типа линейных систем дробного порядка: одномерная система общего вида и двумерная система частного вида — двойной интегратор. Первая из них описывается уравнением следующего вида:

$$_{t_0}D_t^{\alpha} q(t) = aq(t) + bu(t),$$

где функции $q(t) \in AC(t_0, T]$ и $u(t) \in L_p(t_0, T]$, $p > 1$ определяют состояние и управление соответственно; $t \in (t_0, T]$, $T > t_0 > 0$; a и b — коэффициенты; $_{t_0}D_t^{\alpha}$ — оператор дробного дифференцирования Капуто [1] порядка α, $0 < \alpha < 1$. Двойной интегратор описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} {}_{t_0}D_t^{\alpha} q_1(t) = q_2(t), \\ {}_{t_0}D_t^{\beta} q_2(t) = u(t), \end{cases}$$

где q_1, q_2 — фазовые координаты, α и β — показатели дробного дифференцирования.

Начальные и конечные условия имели параметрический вид, определяемый законами движения системы в начальный и конечный моменты времени. Проанализировано несколько случаев смены параметров и типов движения. Например, перевод системы из состояния равномерного прямолинейного движения в равноускоренное. Критерий оптимальности при поиске управления задавался либо как минимум нормы управления при заданном времени управления, либо как минимум времени управления при заданном ограничении на норму управления. Исследование поставленных задач проводилось на основе метода моментов.

Получены аналитические решения поставленных задач оптимального управления и проанализировано поведение нормы и времени оптимального управления в зависимости от показателя дробного дифференцирования. Показано, что в ряде случаев эти зависимости имеют немонотонный, экстремальный характер.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ И РАЗРУШЕНИЯ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АВТОРСКОГО ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА EFES

Радченко П. А., Батуев С., Радченко А. В.

Томский государственный архитектурно-строительный университет, Томск, Россия; radchenko@live.ru

В работе исследования проводятся численно методом конечных элементов в трехмерной постановке с помощью авторского высокопроизводительного вычислительного комплекса EFES. Данный программный комплекс основан на трехмерном подходе к описанию поведения материалов и конструкций. По сравнению с ANSYS, ABAQUS, LS-DYNA используемый в работе авторский комплекс EFES имеет ряд существенных преимуществ:

- в нем реализован оригинальный максимально оптимизированный алгоритм расчета контактных границ, что особенно актуально при анализе конструкций сложной геометрии;
- реализован механизм “эрозионного разрушения” контактных элементов, что позволяет сохранять регулярность конечно-элементной сетки при приемлемом шаге интегрирования;
- нет ограничений на количество процессоров (ядер) и количество конечных элементов; в других комплексах, как правило, такие ограничения имеются.

Модели, используемые в вычислительном комплексе EFES, позволяют описывать широкий спектр материалов: металлы, композиты на основе угле- и стеклопластиков, различные типы бетонов с учетом анизотропии, пластичности, разрушения, влияния скорости деформации на пластичные свойства материалов. Предложенные модели и алгоритмы были протестированы на многих экспериментальных данных, которые подтвердили их адекватность.

Метод конечных элементов (МКЭ) получил широкое применение для решения контактных динамических задач механики твердого деформируемого тела. МКЭ основан на лагранжевом подходе к описанию деформирования сплошной среды и позволяет точно описывать контактные границы. Но в случае больших деформаций и разрушения неизбежно появление “неправильных” элементов, которые весьма затрудняют численные исследования.

В существующих программных продуктах реализован ряд алгоритмов расчета контактного взаимодействия тел при решении динамических задач методом конечных элементов. Каждый из них имеет свои преимущества и недостатки. Как правило, такие программные комплексы включают готовые сеточные генераторы. Процесс создания и особенно оптимизации сетки является нетривиальной задачей. Для качественного решения задачи методом конечных элементов важно, чтобы масса в узлах сетки была распределена равномерно, и чтобы размеры расчетных ячеек были близки. В работе предлагается алгоритм описания разрушения контактных элементов, обеспечивающий выполнение всех законов сохранения и проведения расчетов для больших деформаций.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-31-00125 мол_а, проект № 16-38-00256 мол_а), а также гранта Президента РФ МК-413.2017.1.

ЧИСЛЕННАЯ РЕКОНСТРУКЦИЯ ПОЛЕЙ РАДИОАКТИВНОГО ЗАГРЯЗНЕНИЯ ТЕРРИТОРИЙ

Рапута В. Ф.[1], **Ярославцева Т. В.**[2]

[1] *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;* raputa@sscc.ru
[2] *Новосибирский институт гигиены Роспотребнадзора, Новосибирск, Россия;* tani-ta@list.ru

К настоящему времени в открытой печати опубликован значительный объём данных экспериментальных исследований по радиоактивному загрязнению территорий в результате проведённых испытательных ядерных взрывов, а также крупных радиационных аварий на предприятиях ядерно-энергетического комплекса. Численный анализ этой информации несомненно представляет интерес для решения многих теоретических и практических задач [1], [2].

В докладе обсуждаются математические модели реконструкции полей выпадений полидисперсных примесей от мгновенных источников. Принципы построения такого типа моделей достаточно разнообразны и носят компромиссный характер между модельными описаниями процессов загрязнения и данными наблюдений [3], [4]. С использованием полуэмпирического уравнения турбулентной диффузии аэрозольных примесей в атмосфере получены соотношения для оценивания полей осевых концентраций. Предложены алгоритмы численного построения локально оптимальных планов наблюдений.

На данных натурных наблюдений радиоактивного загрязнения территорий проведена апробация предложенных моделей оценивания применительно к наземному ядерному и термоядерному взрывам, произведённых в 1949 и 1953 годах на Семипалатинском полигоне. Обсуждаются результаты численной реконструкции полей аварийных выпадений радионуклидов в окрестностях Сибирского химического комбината, АЭС “Фукусима-1” [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Израэль Ю. А., Цатуров Ю. С., Назаров И. М., Петров В. Н., Стукин Е. Д., Фридман Ш. Д., Кантарович Р. С., Федоткин А. Ф., Керцман В. М.* Реконструкция фактической картины радиоактивного загрязнения местности в результате аварий и ядерных испытаний // Метеорология и гидрология. 1994. № 8. С. 5–18.
2. *Седунов Ю. С., Борзилов В. А., Клепикова Н. В., Чернокожин Е. В., Троянова Н. И.* Физико-математическое моделирование регионального переноса в атмосфере радиоактивных веществ в результате аварии на Чернобыльской АЭС // Метеорология и гидрология. 1989. № 9. С. 5–10.
3. *Рапута В. Ф.* Модели реконструкции загрязнения осевой части Восточно-Уральского радиоактивного следа // Вычислительные технологии. 2006. Т. 11, Ч. 2. Спецвыпуск. С. 10–16.
4. *Рапута В. Ф.* Численная реконструкция радиоактивного загрязнения местности от аварии на радиохимическом заводе в Томске-7 // Оптика атмосферы и океана. 2012. Т. 25, № 8. С. 733–737.

АЛГОРИТМ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА НА ОСНОВЕ ПРОЕКЦИОННОГО МЕТОДА

Рогазинский С. В.

Новосибирский государственный университет, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;
svr@osmf.sscc.ru

В работе построен алгоритм статистического моделирования для решения нелинейного кинетического уравнения Больцмана на основе проекционного метода. В качестве ортонормированного базиса использовались полиномы Эрмита. Алгоритм верифицирован на решении задачи однородной релаксации газа с известным решением.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 15-01-00894 а, № 15-01-08988 а, № 16-01-00530 а), программы фундаментальных исследований Президиума РАН I.33П.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бобылев А. В.* О точных решениях уравнения Больцмана // ДАН СССР. 1975. Т. 225, № 6. С. 1296–1299.
2. *Кац М.* Вероятность и смежные вопросы в физике. М.: Мир, 1965.
3. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967.
4. *Михайлов Г. А., Медведев И. Н.* Оптимизация весовых алгоритмов статистического моделирования. Новосибирск: Омега Принт, 2011.
5. *Михайлов Г. А., Рогазинский С. В.* Весовые методы Монте-Карло для приближённого решения нелинейного уравнения Больцмана // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 48, № 3. С. 620–628.
6. *Mikhailov G. A., Rogazinskii S. V.* Probabilistic model of many-particle evolution and estimation of solutions to a nonlinear kinetic equation // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2012. V. 27, No. 3. P. 229–242.
7. *Михайлов Г. А., Войтишек А. В.* Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. М.: Издательский центр “Академия”, 2006.
8. *Иванов М. С., Рогазинский С. В.* Экономичные схемы статистического моделирования течений разреженного газа // Матем. моделирование. 1989. Т. 1, № 7. С. 130–145.
9. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 2004.

УНИФИЦИРОВАННАЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ ПРИ НАЛИЧИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ: ФОРМУЛИРОВКА УРАВНЕНИЙ И ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

Роменский Е. И.[1], **Пешков И. М.**[1,2], **Думбсер М.**[3], **Занотти О.**[3]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;* evrom@math.nsc.ru

[2] *Университет Тулузы III, Тулуза, Франция;* peshkov@math.nsc.ru

[3] *Университет Тренто, Тренто, Италия;* michael.dumbser@unitn.it, olindo.zanotti@unitn.it

Рассматривается термодинамически согласованная система уравнений механики сплошной среды, позволяющая с использованием единой системы определяющих дифференциальных уравнений моделировать широкий спектр поведения сред (упругое, пластическое, жидкое), учитывая процессы теплопередачи и взаимодействие с электромагнитным полем.

Определяющие уравнения образуют гиперболическую систему и удовлетворяют законам неравновесной термодинамики. Единообразное описание процессов, происходящих в среде, достигается путем использования релаксационной модели для поля упругой дисторсии, потока тепла и для электрического поля с использованием закона Ома. Асимптотический анализ показывает, что при малых временах релаксации рассматриваемые уравнения дают решения, близкие к решениям уравнений вязкой жидкости с законом теплопроводности Фурье и — при наличии электромагнитного поля — уравнений магнитной гидродинамики проводящей жидкости.

Рассматривается серия численных результатов, полученных с помощью высокоточных методов ADER–DG и ADER–WENO методов. Рассчитанные примеры включают в себя сравнение решений уравнений, полученных по сформулированной гиперболической модели, с классическими результатами, полученными решениями уравнений Навье – Стокса. Для примеров с наличием электромагнитного поля рассчитаны примеры течений, описываемых идеальной магнитной гидродинамикой, а также вязкой и проводящей магнитной гидродинамикой.

Результаты основаны на публикациях [1]–[3].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 16-29-15131, № 16-31-00146, № 15-05-01310), Программы президиума РАН № 15 (проект № 121), Программы ANR-11-IDEX-0002-02 (грант ANR-11-LABX-0040-CIMI) и Европейских программ FP7 (проект *STiMulUs*) и Horizon 2020 (проект *ExaHyPE*).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Peshkov I., Romenski E.* A hyperbolic model for viscous Newtonian flows // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2016. V. 28. P. 85–104.
2. *Dumbser M., Peshkov I., Romenski E., Zanotti O.* High order ADER schemes for a unified first order hyperbolic formulation of continuum mechanics: viscous heat-conducting fluids and elastic solids // J. Comput. Phys. 2016. V. 314. P. 824–862.
3. *Dumbser M., Peshkov I., Romenski E., Zanotti O.* High order ADER schemes for a unified first order hyperbolic formulation of Newtonian continuum mechanics coupled with electro-dynamics // arXiv:1612.02093 [physics.flu–dyn], submitted to J. Comput. Phys.

МАРКОВСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Савельев Л. Я.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
savelev@math.nsc.ru

Марковскими называются стохастические процессы, в которых при известном настоящем прошлое и будущее независимы. В физике такие процессы называются неинерционными. Этим марковским свойством обладают многие естественные и социальные процессы. Поэтому марковские модели широко и эффективно применяются.

В докладе рассматриваются дискретные однородные марковские модели с небольшим множеством состояний. Группировка часто позволяет свести к этому случаю и более сложные модели. Описываемая марковская модель определяется строкой начальных вероятностей A и квадратной матрицей переходных вероятностей Q. Распределение состояний в момент n определяется формулой $P(n) = AQ^n$. В связи с символьными и количественными вычислениями при использовании этой формулы возникает целый ряд проблем. В частности, выражения для коэффициентов разложений в степенные ряды рассматриваемых рациональных производящих функций содержат многократные суммы комбинаций таких распределений. Сложные формулы получаются для рассматриваемых собственных чисел и конечных сумм матричных степенных рядов.

В сообщении описываются результаты, полученные при марковском моделировании процессов с 2–4 состояниями. Найдены точные и приближенные общие формулы для их распределений в каждый данный момент, производящие функции, средние значения и отклонения от них. Даны оценки точности приближений. Представление о полученных формулах даёт

Теорема. *Производящая функция* $\hat{F}$ *является решением уравнения*

$$\hat{F}(I - Ku) = L,$$

где

$$K = \sum_{\mu}(A_{\mu\mu} + B_{\mu\mu}\Delta_\mu t^{Se_\mu})s^{Re_\mu}, \quad L = \sum_{\mu} P(\Delta_\mu - B_\mu)t^{Se_\mu}s^{Re_\mu},$$

$$\Delta_\mu = I - T(\mu)A^m_{\mu\mu}s^{mRe_\mu}u^m.$$

При $|u| < 1/3$ *это уравнение корректно и*

$$\hat{F} = L(I - Ku)^{-1} = L\sum_{n=0}^{\infty} K^n u^n, \quad |u| < 1/3.$$

Эти формулы уточняют указанные в [1]. Матрицы Q, $A_{\mu\mu}$, $B_{\mu\mu}$, Δ_μ, K представляют ограниченные линейные операторы в пространстве $L^1 = L^1(C)$ функций на множестве состояний C. В частных случаях получаются достаточно простые формулы и программируемые алгоритмы вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Savelyev L. Ya.* Operator and recursion equations for runs in random sequences // Probabilistic Methods in Discrete Mathematics. Utrecht: VSP, 1997. P. 65–86.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕНЗОРНОЙ ТОМОГРАФИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ПРИБЛИЖЕННОГО ОБРАЩЕНИЯ

Светов И. Е.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
svetovie@math.nsc.ru

Под термином “задача двумерной m-тензорной томографии” в данной работе подразумевается следующая постановка. Пусть ограниченная область плоскости заполнена средой без рефракции. В среде распределено некоторое симметричное m-тензорное поле ($m \geqslant 1$). По известным лучевым преобразованиям требуется восстановить это поле.

В данной работе предлагаются два алгоритма решения задачи тензорной томографии, основанные на так называемом методе приближенного обращения, который развивается уже более 20-ти лет А. К. Луисом и его учениками [1]–[3]. Идея метода приближенного обращения состоит в следующем. Пусть требуется найти решение (функцию f) операторного уравнения $Af = g$ для линейного ограниченного оператора $A : H \to K$, где H и K — гильбертовы пространства. Для этого используются усредняющие функции $e^y_\gamma(x)$, обладающие свойствами

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^y_\gamma(x)\, dx = 1, \qquad \lim_{\gamma\to 0}\langle f, e^y_\gamma\rangle_H = f(y).$$

Пусть A^* — сопряженный оператор для A и функции e^y_γ лежат в пространстве образов A^*, тогда существуют функции ψ^y_γ такие, что $A^*\psi^y_\gamma = e^y_\gamma$. Имеем

$$f(y) \approx \langle f, e^y_\gamma\rangle_H = \langle f, A^*\psi^y_\gamma\rangle_H = \langle Af, \psi^y_\gamma\rangle_K = \langle g, \psi^y_\gamma\rangle_K.$$

Таким образом, скалярное произведение исходных данных g и функций ψ^y_γ дает приближенное решение.

Первый из предлагаемых алгоритмов позволяет восстанавливать компоненты симметричного m-тензорного поля. В то время как с использованием второго алгоритма можно восстановить потенциалы потенциальных и соленоидальной частей тензорного поля. Алгоритмы численно реализованы, приводятся результаты экспериментов по восстановлению векторных и симметричных 2-тензорных полей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Louis A. K., Maass P.* A mollifier method for linear operator equations of the first kind // Inverse Probl. 1990. V. 6. P. 427–440.
2. *Louis A. K.* Approximate inverse for linear and some nonlinear problems // Inverse Probl. 1996. V. 12. P. 175–190.
3. *Rieder A., Schuster T.* The approximate inverse in action with an application to computerized tomography // SIAM J. Numer. Anal. 2000. V. 37, No 6. P. 1909–1929.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ С ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ ПРИ СИММЕТРИЧНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Сенницкий В. Л.

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
Sennitskii@yandex.ru

Теоретическими и экспериментальными результатами (см., например, [1], [2]) доказано существование явления преимущественно однонаправленного движения сжимаемых включений в колеблющейся (вибрирующей) жидкости. Развитие исследований в данной области нашло отражение, в частности, в [3] и в настоящей работе.

Поставлены и решены две новые задачи о периодическом по времени вращательном движении гидромеханической системы, состоящей из вязкой несжимаемой жидкости и двух твердых коаксиальных цилиндрических тел. Жидкость в каждый момент времени заполняет область между телами. Одно из тел является свободным (его движение, наряду с движением жидкости, подлежит определению), другое тело является закрепленным (невращающимся). Радиусы тел периодически изменяются со временем. К свободному телу приложены внешние периодически изменяющиеся со временем моменты сил, средние по времени значения которых равны нулю. Постановка каждой из задач включает в себя уравнение движения свободного тела, уравнения Навье – Стокса и неразрывности, а также условия, которые должны выполняться на границах тел.

Реализовано приближение малых изменений радиусов тел. Из найденных решений, в частности, следует, что в каждой из задач имеет место эффект преимущественно однонаправленного вращения твердого тела и вязкой жидкости, состоящий в том, что гидромеханическая система, подвергающаяся неоднонаправленным симметричным колебательным воздействиям, производит однонаправленные отклики, ответные реакции на воздействия, выражающиеся в том, что каждая из свободных частей системы (на фоне колебаний) совершает однонаправленное стационарное вращение.

Полученные результаты могут найти применение, в частности, в исследованиях необычного поведения гидромеханических систем, а также использоваться при разработке гидромеханических систем, устройств, обладающих заданными свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сенницкий В. Л.* О движении газового пузыря в вязкой вибрирующей жидкости // Прикл. механика и техн. физика. 1988. № 6. С. 107–113.
2. *Сенницкий В. Л.* Преимущественно однонаправленное движение газового пузыря в вибрирующей жидкости // ДАН. 1991. Т. 319, № 1. С. 117–119.
3. *Сенницкий В. Л.* О заданной ориентации твердого включения в вязкой жидкости // Сиб. журн. индустр. математики. 2015. Т. 18, № 1. С. 123–128.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПОДДЕРЖКА ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ПРОТОЧНОГО ТРАКТА ГИДРОТУРБИН

Скороспелов В. А., Турук П. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
vskrsp@math.nsc.ru

В этом году исполняется 45 лет сотрудничества Института математики и СКБ “Гидротурбомаш” Ленинградского металлического завода (ЛМЗ) по проблеме автоматизации проектирования и подготовки производства гидротурбин. Наша совместная деятельность начиналась под руководством Ю. С. Завьялова с разработки методов геометрического моделирования элементов проточного тракта гидротурбин по данным конструкторской документации и их программной реализации. В качестве математического аппарата используются кубические параметрические сплайны.

В практике гидротурбостроения в зависимости от напора используются в основном гидротурбины двух типов: радиально-осевые и поворотно-лопастные. Основные элементы проточного тракта гидротурбины: спиральная камера, направляющий аппарат, рабочее колесо, отсасывающая труба. Разработаны методика и соответствующие программные средства их геометрического моделирования.

С появлением высокопроизводительной вычислительной техники в практике проектирования гидротурбин стали активно использоваться методы, основанные на численном моделировании течения в элементах проточного тракта. Это позволило существенно сократить сроки и затраты проектных работ за счет сокращения объема дорогостоящих модельных испытаний. Совместно с Институтом вычислительных технологий СО РАН подобная методика внедрена на ЛМЗ. Основная роль геометрической поддержки при реализации этой методики состоит в генерации конечно-элементных сеток во всех областях проточного тракта.

Дальнейшее развитие методов проектирования гидротурбин осуществляется в направлении поиска оптимальных форм элементов проточного тракта с точки зрения производительности гидроагрегата и его прочностной характеристики. Основная задача геометрической поддержки в реализации данного подхода состоит в генерации многопараметрического множества вариантов проектируемого элемента для поиска оптимального из них.

Результаты совместной деятельности ЛМЗ, Института математики и Института вычислительных технологий воплотились в нескольких десятках гидроагрегатов различных ГЭС в нашей стране и за рубежом.

Основные результаты по геометрической поддержке проектирования элементов проточного тракта гидротурбин опубликованы в [1]–[3].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-07-07530).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Завьялов Ю. С., Леус В. А., Скороспелов В. А.* Сплайны в инженерной геометрии. М.: Машиностроение, 1985.
2. *Черный С. Г., Чирков Д. В., Лапин В. Н., Скороспелов В. А., Шаров С. В.* Численное моделирование течений в турбомашинах. Новосибирск: Наука, 2006.
3. *Скороспелов В.А. Турук П.А.* Генерация многопараметрического семейства поверхностей лопасти рабочего колеса поворотно-лопастной гидротурбины для последующего поиска оптимальной формы // Сиб. журн. индустр. математики. 2016. Т. 19, № 3. С. 85–89.

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ И МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК В ИНФОРМАЦИОННО-МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЕСПЕЧЕНИИ КОСМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Сушкевич Т. А.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия; tamaras@keldysh.ru

Посвящается 60-летию запуска в СССР ПЕРВОГО искусственного спутника ЗЕМЛИ 4 октября 1957 года [1] и памяти Главного Теоретика Космонавтики [2], Президента АН СССР (19.05.1961–19.05.1975), математика-легенды Мстислава Всеволодовича Келдыша (10.02.1911–24.06.1978). М. В. Келдыш (единственный из математиков трижды Герой Социалистического Труда в 1956, 1961, 1971 гг.) и академик А. Н. Тихонов (дважды Герой Социалистического Труда, в 1954 г. за первую "водородную" бомбу), в 1953 г. основали ПЕРВЫЙ в мире Институт прикладной математики АН СССР для выполнения "атомного" и "ракетно-космического" проектов и создания "ракетно-ядерного щита" на основе достижений математики с использованием вычислительной техники. В 1955 г. академик А. А. Дородницын основал ВЦ АН СССР, а Институт математики СО АН СССР в 1957 г. создает академик С. Л. Соболев — единственный математик, получивший в 1951 г. звание Героя Социалистического труда за успешное испытание первой атомной бомбы в 1949 г. Математики заняли ведущие позиции в науке.

Так был заложен фундамент современной "вычислительной математики" и "математического моделирования". Основоположниками являются С. Л. Соболев, А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Е. С. Кузнецов, В. С. Владимиров, Г. И. Марчук. Достижения этих ведущих участников "атомного" проекта и лекции Б. Л. Рождественского на кафедре математики физфака МГУ (готовил докторскую диссертацию "Разрывные решения системы квазилинейных уравнений гиперболического типа", защитил в 1963 г.), а также возможность личного общения (важнейший фактор) позволили автору создать научно-фундаментальные основы реализации информационно-математического обеспечения для космических проектов [3]–[5]. В основе — обобщенные решения. Основной метод — численный метод характеристик. Это сложный математический аппарат и до настоящего времени полученные на его основе результаты остаются непревзойденными.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 15-01-00783, № 17-01-00220) и Программы фундаментальных научных исследований РАН (проект ОМН-3(3.5)).

ЛИТЕРАТУРА

1. Первая космическая. Сборник статей, посвященных пятидесятилетнему юбилею запуска Первого искусственного спутника Земли. М.: Институт космических исследований РАН, 2007.
2. Келдыш М. В. Творческий портрет по воспоминаниям современников. М.: Наука, 2001.
3. *Сушкевич Т. А.* Осесимметричная задача о распространении излучения в сферической системе // Отчет № 0-572-6. М.: ИПМ АН СССР, 1966.
4. *Сушкевич Т. А., Стрелков С. А., Иолтуховский А. А.* Метод характеристик в задачах атмосферной оптики. М.: Наука, 1990.
5. *Сушкевич Т. А.* Математические модели переноса излучения. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.

О МОДЕЛИ СВЕРТЫВАНИЯ КРОВИ

Тахиров Ж. О.

Институт математики при Национальном университете Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Республика Узбекистан; prof.takhirov@yahoo.com

Нелинейные взаимодействия компонентов системы в сочетании с процессами переноса приводят к сложным пространственно-временным структурам. Возникновение структур, тесно связанных с диссипативными процессами, оказалось общим свойством самых разных нелинейных систем. По многим параметрам это относится к биологическим (экологическим) системам [1].

Математическая модель свертывания плазмы крови была построена и исследована в работах [2], [3] и представляет собой трёхкомпонентную систему параболических уравнений типа реакция-диффузия

$$u_t = d_1 u_{xx} + k_1 uv(1-u)\frac{1+k_2 u}{1+k_3 w} - ku, \tag{1}$$

$$w_t = d_2 w_{xx} + u - k_4 w, \tag{2}$$

$$v_t = d_3 v_{xx} + k_5 u^2 - k_6 v. \tag{3}$$

Здесь $u(t,x)$ — концентрация активатора (тромбина), $w(t,x)$ — концентрация ускорителя производства активатора, $v(t,x)$ — концентрация ингибитора; k_i, $i = \overline{1,6}$; d_j, $j = 1,2,3$; k — положительные постоянные.

В [2], [3] система уравнений (1)–(3) рассмотрена в прямоугольной области и на боковых границах заданы условия отсутствия потоков каждого из веществ. Начальные условия заданы в виде: $u(0,x) = 0$, $0 < x \le s_0$; $u(0,x) = u_0(x)$, $s_0 \le x \le l$; $w(0,x) = v(0,x) = 0$, $0 \le x \le l$.

Предлагается следующая задача (модель) со свободной границей. Уравнение (1) рассматривается в области $D = \{(t,x) : s(t) < x < l, 0 < t \le T\}$, а уравнения (2), (3) — в области $Q = \{(t,x) : 0 < x < l,\ 0 < t \le T\}$, и дополнительные условия задаются в виде

$$u(0,x) = 0,\ 0 \le x \le s_0; \quad u(0,x) = u_0(x),\ s_0 \le x \le l;$$

$$v(0,x) = w(0,x) = 0,\ 0 \le x \le l;$$

$$u_x(t,l) = 0,\ u(t,s(t)) = C,\ \dot{s}(t) = -\mu u_x(t,s(t)), \quad 0 \le t \le T;$$

$$w_x(t,0) = w_x(t,l) = 0,\ v_x(t,0) = v_x(t,l) = 0, \quad 0 \le t \le T,$$

где $x = s(t)$ — свободная (неизвестная) граница, которая представляет фронт распространения тромба и определяется вместе с функциями u, w, v.

С помощью метода, основанного на построении априорных оценок, найдены ограничения на параметры задачи, при которых она глобально разрешима. Исследованы качественные свойства решений. Изучен эффект локализации — размер твердого сгустка изменяется незначительно, тромб не проникает за глубину локализации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Свирежев Ю. М.* Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.: Наука, 1987.
2. *Zarnitsina V. I., et. al.* Dynamics of spatially nonuniform patterning in the model of blood coagulation // Chaos. 2001. V. 11, No 1. P. 57–70.
3. *Атауллаханов Ф. И. и др.* Сложные режимы распространения возбуждения и самоорганизация в модели свертывания крови // Успехи физ. наук. 2007. Т. 177, № 1. С. 87–104.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ ДЛЯ ЛУНЫ И ЗЕМЛИ

Фатьянов А. Г.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; fat@nmsf.sscc.ru

В работе получено устойчивое аналитическое решение для волновых полей в слоистом шаре произвольного размера. Решение построено на основе сведения краевой задачи к двум задачам Коши. Вначале получено явное решение соответствующего нелинейного уравнения Риккати (ранее такой результат был неизвестен). Далее для построения решения используется новая асимптотика цилиндрических функций, полученная в [1]. В итоге это дает устойчивое аналитическое решение для волновых полей в неоднородном шаре произвольного размера.

На основе развитого аналитического метода создан программный модуль и проведено моделирование волновых полей для известных моделей Луны и Земли. В результате моделирования обнаружено новое физическое явление. Низкоскоростное ядро, расположенное в шаре, обладает свойствами собирающей линзы и это приводит к формированию мощной волны. Такое физическое явление раньше было неизвестно. Отметим, что для высокоскоростного ядра подобный эффект не наблюдается.

По современным данным Земля состоит из коры, мантии, внешнего и внутреннего ядра. На волновых полях первыми должны приходить объемные волны PKP (продольные волны, проходящие через внутреннее ядро). На реальных же данных впереди фронта PKP наблюдаются группы волн неизвестной природы (GH по [2], предвестники по современной терминологии). Сделано много попыток объяснения предвестников разными группами исследователей. Так, например, делалось предположение, что это явление вызвано наличием разрыва во внешнем ядре примерно на расстоянии 500 км выше границы внешнего и внутреннего ядра. Однако другие исследователи опровергли такое объяснение [2]. В итоге физику этого явления так и не удалось понять. Сошлись на том, что это явление обусловлено горизонтальной неоднородностью вблизи границы внешнее ядро – мантия, т. е. более сложной двумерной сейсмологической моделью Земли. А, соответственно, появление предвестников объяснили рассеиванием на горизонтальных неоднородностях.

В работе получено волновое поле для наиболее широко известной в настоящее время сейсмологической модели Земли IASPEI [3]. Отметим, что эта модель имеет одномерное строение. На модельном волновом поле для IASPEI четко проявляется группа волн предвестников. Это полностью совпадает с экспериментальными данными. Таким образом, возникновение волн-предвестников происходит за счет того, что внешнее ядро обладает свойствами собирающей линзы и поэтому для объяснения этого явления не требуется наличие горизонтальной неоднородности во внешнем ядре или ещё где-либо.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фатьянов А. Г.* Устойчивое аналитическое решение для волновых полей в шаре // Мат. заметки СВФУ. 2016. Т. 23, № 3. С. 91–103.
2. *Aki K., Richards P. G.* Quantitative seismology. Theory and methods. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1980.
3. *Kennett B. L. N.* IASPEI 1991. Seismological Tables. Research School of Earth Sciences. Australian National University, 1992.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ИЕРАРХИЧЕСКОГО ВКЛЮЧЕНИЯ В СЛОИСТО БЛОКОВОЙ СРЕДЕ ПО ДАННЫМ АКУСТИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА

Хачай О. А.[1], **Хачай А. Ю.**[2], **Хачай О. Ю.**[3]

[1] *Институт геофизики УрО РАН, Екатеринбург, Россия;* olgakhachay@yandex.ru
[2] *Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия;* andrey.khachay@gmail.com
[3] *Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия;* khachay@yandex.ru

Аналогии процессов нефтегазообразования и нефтегазонакопления с процессами рудообразования, формирования рудных месторождений, магматизма, в которых ярко проявляется их эндогенная природа, свидетельствуют о существенной роли эндогенных факторов в процессах формирования нефтегазовых скоплений. Назрела острая необходимость рассмотрения вопросов генерации углеводородов не только в системе с органическим веществом, но и в более широких системах, охватывающих месторождения горючих ископаемых и рудные месторождения.

Процессы разработки нефтегазовых месторождений связаны с движением многофазных многокомпонентных сред, которые характеризуются неравновесными и нелинейными реологическими свойствами. Реальное поведение пластовых систем определяется сложностью реологии движущихся жидкостей и морфологического строения пористой среды, а также многообразием процессов взаимодействия между жидкостью и пористой средой. При этом пластовая система, из которой необходимо извлечь нефть, представляет собой сложную динамическую иерархическую систему.

Для решения поставленных задач необходимо создать новую теорию интерпретации волновых полей в рамках усложненной модели: слоисто-блоковой с включениями иерархического типа. Разработан новый подход к интерпретации волновых полей, для определения контуров или поверхностей локально напряженных иерархических объектов [1]–[3]. Предложен итерационный процесс решения теоретической обратной задачи для случая определения конфигураций 2D иерархических включений k-го ранга с различными значениями аномальных физических параметров для каждого ранга. При интерпретации результатов мониторинга необходимо использовать данные таких систем наблюдения, которые настроены на исследование иерархической структуры среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хачай О. А., Хачай А. Ю.* Определение поверхности аномально напряженного включения в иерархической слоисто-блоковой среде по данным акустического мониторинга // Горный информационно-аналитический бюллетень. 2016. № 4. С. 354–366.
2. *Хачай О. А., Хачай А. Ю.* Определение поверхности флюидонасыщенного пористого включения в иерархической слоисто-блоковой среде по данным электромагнитного мониторинга // Горный информационно-аналитический бюллетень. 2015. № 4. С. 150–154.
3. *Хачай О. А., Хачай О. Ю., Хачай А. Ю.* Новые методы геоинформатики мониторинга волновых полей в иерархических средах // Геоiнформатика. 2015. № 3. С. 45–51.

ИМИТАЦИОННЫЙ МЕТОД С РАСЩЕПЛЕНИЕМ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

Хисамутдинов А. И.

Новосибирский государственный университет, Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН, Новосибирск, Россия;
KhisamutdinovAI@ipgg.sbras.ru

В докладе рассматриваются моделирование разреженного газа согласно уравнению Больцмана, управляющие уравнения марковской эволюции газа и соответствующие методы Монте-Карло. Выбор оптимального численного метода для моделирования разреженного газа зависит от параметров течения. Имитационные, или непрерывного времени, методы Монте-Карло [1]–[3] являются адекватными и конкурентно способными для задач с числом Кнудсена $Kn \sim 1$. Если же $Kn < 0.1$ (системы большого размера), то необходимость просмотра всех пар частиц ведет к значительному росту вычислительной трудоемкости. В докладе анализируются методы для стационарных течений в областях достаточно больших размеров. Характерное свойство больших систем — слабая зависимость ее подчастей друг от друга на достаточно малых временных интервалах. Мы применяем это свойство, рассматривая приближенный метод, основанный на расщеплении оператора системы управляющих уравнений процесса “по группам частиц”, или “по подобластям” [2], [3]. Сущность метода в том, что система частиц разделяется на подсистемы, которые моделируются “почти” независимо на малых временных интервалах согласно “точному” имитационному методу. Введенный тип расщепления отличен от другого, хорошо известного, типа “по соударениям и сдвигам”, являющегося атрибутом известных методов “Прямого статистического моделирования” (ПСМ). Вторым атрибутом последних является “сетка ячеек взаимодействий”, совершенно отсутствующая в имитационных методах; в последних взаимодействие произвольной пары зависит от разностей координат частиц пары.

В докладе даются асимптотические оценки трудоемкостей Имитационного и Имитационного с расщеплением методов, приводятся технологии организации вычислений с расщеплением и с распараллеливанием, представляются результаты вычислений нескольких задач [3]–[5]. В задаче о продольном обтекании плоской пластины гиперзвуковым потоком вычисления проводились также с использованием других независимых программ, основанных на ПСМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хисамутдинов А. И.* Об имитационном методе статистического моделирования разреженных газов // ДАН СССР. 1986. Т. 291, № 6. С. 1300–1304.
2. *Khisamutdinov A. I.* On connection between “Continuous time” and “Direct simulation” Monte Carlo methods for Boltzmann equation and on some new approximate methods // Monte Carlo Methods and Applications. 2000. V. 6, No 4. P. 323–340.
3. *Khisamutdinov A. I., Velker N. N.* On reduction of computational cost of imitation Monte Carlo algorithms for modeling rarefied gas flows // Mathematical Models and Computer Simulations. 2012. V. 4, No 2. P. 187–202.
4. *Khisamutdinov A. I., Velker N. N.* Imitation Monte Carlo methods for problems of the Boltzmann equation with small Knudsen numbers, parallelizing algorithms with splitting // Journal of Physics: Conference Series. 2014. V. 510. Article ID 012021.
5. *Khisamutdinov A. I., Velker N. N.* Algorithms and numerical implementation of imitation Monte Carlo methods with splitting for problems of the Boltzmann equation // Journal of Computational and Theoretical Transport. 2016. V. 45, No 3. P. 230–241.

СЦЕНАРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ГАЗА, ВЫХОДЯЩЕГО СО ДНА БАЙКАЛА

Цветова Е. А.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; e.tsvetova@ommgp.sscc.ru

За последние 10 лет концентрация растворенного метана в Байкале увеличилась в три раза, причем переходный процесс начался в 2003 г. и сопровождался линейным ростом концентрации [1]. Поступление метана может происходить со дна озера, где находятся грязевые вулканы и подводные выходы газа (ПВГ). Инвентаризация ПВГ показала, что они имеются во всех трех котловинах озера [2]. Глобальная мотивация наших исследований связана с изучением влияния метана на состояние водных экосистем и окружающей среды озера.

В настоящем докладе рассматривается часть этих исследований, относящаяся к моделированию функционирования газо-жидкостной смеси вода-метан [3]. Последний присутствует в модели в растворенном виде и в виде газа.

Для моделирования гидротермодинамики воды в озере, как несущей среды, используется математическая модель в негидростатическом приближении. Она представлена системой уравнений в частных производных для трех компонентов вектора скорости, уравнения для температуры, уравнения состояния и уравнения неразрывности. Поведение фаз метана описывается системой уравнений типа конвекции-диффузии-реакции. Предполагается, что растворенный метан движется со скоростью несущей среды, а газовая фаза получает дополнительные скорости подъема за счет сил плавучести. Переход газа в раствор регулируется условиями закона Генри – Дальтона.

Представлены результаты численных экспериментов по моделированию гидротермодинамики и процессов переноса и трансформации газа, выходящего из источников на дне озера. Рассмотрена задача о крупномасштабной конвекции, которая возникает за счет выталкивающей силы пузырьков, поступающих из глубоких и мелких источников в стратифицированную водную среду озера.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00137).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гранин Н. Г., Верещагин О. Ф., Козлов В. В. и др.* Изменение концентрации метана в озере Байкал: возможная причина // Российская конференция “Газовые гидраты в экосистеме Земли”. Новосибирск, 2014. С. 25.
2. *Макаров М. М., Шагдуров А. А., Гранин Н. Г.* Пузырьковые выходы газа из донных отложений // Экологический атлас бассейна оз. Байкал [Электронный ресурс] http://bic.iwlearn.org/ru/atlas/atlas/138-puzyrkovye-vyhody-gaza-iz-donnyh-otlozhenii-map
3. *Tsvetova E. A.* Modeling of hydrodynamics of water-methane heterogeneous system // Proc. SPIE 9680, 21st International Symposium Atmospheric and Ocean Optics. Atmospheric Physics. 2015. Article ID 968075.

РАДИКАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦЕЛЕНАПРАВЛЕННЫХ СИСТЕМ И ЛЕКСИКОН ПРОГРАММИРОВАНИЯ А. П. ЕРШОВА

Чечкин А. В.

Военная академия РВСН им. Петра Великого,
Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва, Россия;
a.chechkin@mail.ru

Необходимость обеспечения *информационно системной безопасности* целенаправленной системы требует ее интеллектуализации на основе *избыточного моделирования* театра действий такой системы в форме среды радикалов. Новый тип избыточного моделирования системы, названный *радикальным моделированием*, учитывает широкую проблемную область системы. *Радикалами* модели названы отдельные функциональные модули модели, имеющие в обязательном порядке два типа состояний, *пассивные и активные.* Активация модели выделяет в ней согласно цели ту или иную рабочую сеть радикалов, названную *системоквантом.* В зависимости от цели системоквант обеспечивает управление поведением системы и ее развитием. Все радикалы вне системокванта остаются пассивными и определяют невостребованный пока потенциал, ресурс радикальной модели. Радикальная модель положена в основу интеллектуального управления и инструментального средства развития системы. Очевидно к развитию системы относится разработка ее *программно технических средств.* Технология программирования, использующая радикальное моделирование системы, названа *радикальным программированием* [1]. При этом радикальная модель системы определяет семантику создаваемых программ, т. е. является лингвистической структурой программирования, на которой настаивал академик А. П. Ершов в лексиконе программирования [2].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-29-04326).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чечкин А. В., Пирогов М. В.* Радикальное программирование на основе радикального моделирования // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. 2016. № 1. С. 3–16.
2. *Чечкин А. В., Пирогов М. В.* Лексикон программирования А. П. Ершова и моделирующая среда широкой проблемной области целенаправленных систем в форме среды радикалов // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. 2016. № 11. С. 3–14.

ОБ УРАВНЕНИЯХ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ГАЗОВОГО ВИХРЯ

Чупахин А. П.[1], **Янченко А. А.**[2]

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
[1]chupakhin@hydro.nsc.ru, [2]aya.home.nsk@gmail.com

Уравнения релятивистской газовой динамики имеют вид [1]

$$\begin{aligned}
&(\Gamma\rho)_t + \nabla\cdot(\Gamma\rho\vec{u}) = 0,\\
&(\Gamma^2\rho w\vec{u})_t + \nabla\cdot(\Gamma^2\rho w\vec{u}\times\vec{u}) + \nabla p = 0,\\
&(\Gamma^2\rho w - p)_t + \nabla\cdot(\Gamma^2\rho w\vec{u}) = 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

В (1) $\vec{u}$ — скорость газа, $\Gamma = (1-|\vec{u}|^2)^{-1/2}$ — фактор Лоренца, p, ρ, $w = 1 + \frac{\gamma}{\gamma-1}p/\rho$ — давление, плотность, энтальпия газа; γ — показатель адиабаты. Выбрана система единиц, в которой скорость света $c = 1$.

В работе найдено и исследуется точное решение уравнений (1), частично инвариантное относительно группы вращений $SO(3)$ в пространстве $\mathbb{R}^6(\vec{x},\vec{u})$ координат-скоростей. Это релятивистский аналог вихря Овсянникова в классической газовой динамике [2], [3].

Доказана теорема о представлении факторсистемы для (1) в виде объединения неинвариантной подсистемы для функции, определяющей отклонение вектора скорости от меридиана, и инвариантной, определяющей термодинамические параметры, фактор Лоренца и радиальную компоненту скорости.

Доказано, что инвариантная подсистема после введения обобщенного потенциала сводится к неявному обыкновенному дифференциальному уравнению. Это уравнение определено на некоторой алгебраической поверхности в пространстве 1-струй. Исследовано многообразие ветвления решений этого уравнения, поведение интегральных кривых в зависимости от параметров задачи (энергии и закрутки потока). Дана физическая интерпретация найденных решений.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта № 14.W03.31.0002 Правительства РФ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
2. *Овсянников Л. В.* Особый вихрь // Прикл. механика и техн. физика. 1995. Т. 36, № 3. С. 45–52.
3. *Черевко А. А., Чупахин А. П.* Стационарный вихрь Овсянникова // Новосибирск, 2005. (Препринт / Ин-т гидродинамики СО РАН, № 1-2005).

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОСТИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ДУАЛЬНЫХ СЕТКАХ

Штабель Н. В.

Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А. А. Трофимука СО РАН, Новосибирск, Россия; OrlovskayaNV@ipgg.sbras.ru

В задачах вычисления эффективных коэффициентов среды возникает необходимость моделирования напряженности магнитного поля в естественных переменных. Напряженность магнитного поля в терминах дифференциальных форм представима в виде дифференциальной формы первого порядка внешней ориентации [1]. Это означает, что дискретный аналог магнитного поля следует искать на ребрах дуальных (полиэдральных) сеток.

В работе построены полиэдральные сетки с использованием дуальности Пуанкаре через барицентры исходной симплициальной сетки [2]. Полиэдры, входящие в дуальную сетку, будут регулярными, за исключением прилегающих к границам области, если исходная тетраэдральная сетка обладает свойством регулярности. В общем случае полиэдры дуальной сетки имеют произвольную форму: могут быть выпуклыми, невыпуклыми, с плоскими гранями или гранями, образованными поверхностью, ограниченной дуальными ребрами.

Для моделирования на полиэдральных сетках необходимо построить специальный базис, определенный на ребрах и ячейках дуальных сеток. В качестве такого базиса были выбраны функции формы, ассоциированные с ребрами дуальной сетки и определенные на ячейках, в которые входит ассоциированное ребро. Для построения функций формы формулируются и решаются задачи вида

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{rot}\ \vec{\varphi} = 0,$$

$$\vec{\varphi}|_{l_i} = \vec{\varphi}_g,$$
$$\vec{\varphi}|_{l_j} = 0,\ j \neq i,$$

где $\vec{\varphi}$ — искомая функция формы, $\vec{\varphi}_g$ — заданное значение функции формы на ребре, l_i — ребро, ассоциированное с $\vec{\varphi}$.

Вычислительная схема апробирована на модельных задачах без локального источника, проведено сравнение результатов моделирования с магнитным полем, вычисленным как ротор от электрического поля.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 16-29-15094 офи_м) и проекта Программы № 43 фундаментальных исследований Президиума РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Desbrun M., Kanso E., Tong Y.* Discrete differential forms for computational modeling // Discrete Differential Geometry. Basel: Birkhäuser, 2008. P. 287–323. (Oberwolfach Seminars, v. 38).
2. *Штабель Н. В.* Алгоритм построения двойственности Пуанкаре для симплициальных сеток // Математика и ее приложения: фундаментальные проблемы науки и техники. Сборник трудов всероссийской конференции. Алтайский государственный университет, 2015. С. 139–145.

РАСЧЕТ ЧАСТОТ ВСТРЕЧАЕМОСТИ СЕТЕВЫХ МОТИВОВ МЕТОДОМ СЛУЧАЙНОЙ ВЫБОРКИ КАРКАСОВ

Юдина М. Н.[1], **Задорожный В. Н.**[2], **Юдин Е. Б.**[3]

[1] *Омский государственный технический университет, Омск, Россия;* forrts@mail.ru

[2] *Омский государственный технический университет, Омск, Россия;* zwn2015@yandex.ru

[3] *Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омск, Россия;* udinev@asoiu.com

Расчет частот встречаемости различных неизоморфных подсетей из заданного их набора — сетевых мотивов — является одной из актуальных задач науки о сетях (Network Science). Изучение мотивов может обеспечить понимание функциональных возможностей сети, а также выявить подсистемы, из которых эта сеть "сложена". Многие исследовательские группы в течение последнего десятилетия разрабатывают эффективные алгоритмы для обнаружения мотивов [1]–[3].

Разработанные авторами алгоритмы позволили значительно ускорить расчет числа мотивов в ненаправленных и направленных сетях. Для ускорения процедуры подсчета частот встречаемости мотивов предлагается использовать метод Монте-Карло — численный метод, основанный на получении большого числа реализаций случайного процесса, который формируется таким образом, чтобы его вероятностные характеристики совпадали с искомыми величинами решаемой задачи. Ранее авторами были разработаны алгоритмы в соответствии с методом Монте-Карло для подсчета частот мотивов на трех и четырех вершинах для неориентированных сетей [3]. При этом получен существенный выигрыш в скорости по сравнению со скоростью выполнения алгоритмов, предложенных рядом зарубежных ученых: MFINDER, FANMODE, KAVOSH, accMotif. В докладе представлены алгоритмы, разработанные для сетей с направленными связями. Это важный шаг в развитии используемого авторами подхода, потому что большинство исследуемых сетей (например, генные регуляторные сети, сети ссылок веб-страниц, сети платежей) содержат направленные связи. Кроме того, поскольку исследуемая задача относится к задачам естественного параллелизма, то предлагаемые алгоритмы учитывают возможности параллельной обработки.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 16-31-60023 мол_а_дк.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kashtan N., Itzkovitz S., Milo R., Alon U.* Efficient sampling algorithm for estimating subgraph concentrations and detecting network motifs // Bioinformatics. 2004. V. 20, No 11. P. 1746–1758.
2. *Luis A., et al.* acc-Motif: Accelerated Network Motif Detection // IEEE / ACM Trans. Comput. Biology Bioinform. 2014. V. 11, No 5. P. 853–862.
3. *Yudin E. B., Zadorozhnyi V. N.* Statistical approach to calculation of number of network motifs // 2015 International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON 2015). Omsk, 2015. P. 1–4.

GROUP FOLIATION OF THE EQUATIONS OF THE STATIC TRANSVERSELY ISOTROPIC ELASTIC MODEL WITH GASSMAN CONDITIONS

Chirkunov Yu. A.[1], **Belmetcev N. F.**[2]

[1] *Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering, Novosibirsk, Russia;* `chr101@mail.ru`
[2] *Tyumen State University, Tyumen, Russia;* `weqsmachine@gmail.com`

We found the conditions under which the system of the equations of the three-dimensional static transversely isotropic elastic model has a gradient of a harmonic function as a partial solution. In this case, parameters of the elasticity modulus tensor satisfy to the Gassman conditions. The Gassman conditions are widely used in the geophysics in the research of the transversely isotropic elastic media. We fulfilled a group foliation of the system of the equations of the static transversely isotropic elastic model with the Gassman conditions with respect to the infinite subgroup generated by the gradient of a harmonic function and contained in normal subgroup of the main group of this system. We obtained a general solution of the automorphic system. This solution is a three-dimensional analogue of the Kolosov–Muskhelishvili formula. We found the main Lie group of transformations of the resolving system of this group foliation. With a help of this group foliation we obtained non-degenerate exact solutions of the equations of the static transversely isotropic elastic model with the Gassman conditions. For the found exact solutions we have depicted the corresponding deformations arising in an elastic body for particular values of the elastic moduli.

The authors were supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00446 a).

REFERENCES

1. *Chirkunov Yu. A., Belmetsev N. F.*, “Exact solutions of three-dimensional equations of static transversely isotropic elastic model,” Acta Mechanica, **228**, 333–349 (2017).

WAVELET-TRANSFORMATION ALGORITHM FOR CUBIC SPLINES ON NON-UNIFORM GRIDS

Shumilov B. M.

Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk, Russia;
sbm05@yandex.ru

For spline $S^L(x)$ of the third degree

$$S^L(x) = \sum_{i=1}^{2^L-1} C_i^L N_i^L(x), \quad a \le x \le b,$$

with non-uniform grid of knots $\Delta^L : a = x_{-1} = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2^L} = x_{2^L+1} = b$, basic functions $N_k^L(x) = (x_{k+2} - x_{k-2})\varphi_3[x; x_{k-2}, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$, $k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, 2^L - 1$, where $\varphi_3(x,t) = (\max\{x-t, 0\})^3$, and homogeneous boundary conditions $S^L(a) = \left(S^L\right)'(a) = S^L(b) = \left(S^L\right)'(b) = 0$ a wavelet-thinning algorithm on grid Δ^{L-1}, received from Δ^L by means of removal of internal odd nodes, is constructed.

Theorem. *Let the scaling relations* $N_i^{L-1}(x) = \sum_{j=0}^{4} p_{i,j} N_{2i-2+j}^L(x)$, $\forall i$ *take place and spline coefficients* C_i^{L-1} *on the thinned-out grid* Δ^{L-1}, $L \ge 2$, *are calculated from the solution of three-diagonal system of the linear equations of the form*

$$\begin{bmatrix} N_1^{L-1}(x_2) & N_2^{L-1}(x_2) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ N_1^{L-1}(x_4) & N_2^{L-1}(x_4) & N_3^{L-1}(x_4) & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & N_2^{L-1}(x_6) & N_3^{L-1}(x_6) & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_3^{L-1}(x_8) & \ddots & N_{2^{L-1}-1}^{L-1}(x_{2^L-6}) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & N_{2^{L-1}-1}^{L-1}(x_{2^L-4}) & N_{2^{L-1}}^{L-1}(x_{2^L-4}) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N_{2^{L-1}-1}^{L-1}(x_{2^L-2}) & N_{2^{L-1}}^{L-1}(x_{2^L-2}) \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} C_1^{L-1} \\ C_2^{L-1} \\ \vdots \\ C_{2^{L-1}-1}^{L-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{2^{L-1}-1} \end{bmatrix}, \quad f_i = S^L(x_{2i}), \quad i = 1, \ldots, 2^{L-1}-1.$$

Then the values of wavelet-coefficients [1] *are equal to*

$$\begin{aligned} D_1^{L-1} &= C_1^L - p_{1,1}C_1^{L-1}, \; D_{2^{L-1}}^{L-1} = C_{2^L-1}^L - p_{2^{L-1}-1,3}C_{2^{L-1}-1}^{L-1}, \\ D_i^{L-1} &= C_{2i-1}^L - p_{i-1,3}C_{i-1}^{L-1} - p_{i,1}C_i^{L-1}, \quad i = 2, 3, \ldots, 2^{L-1}-1. \end{aligned}$$

Application to problems of differentiation and forecasting is investigated.

The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research and the Tomsk region (project no. 16-41-700400 r_a).

REFERENCES

1. *Wang J.*, “Interpolating cubic spline wavelet packet on arbitrary partitions,” Journal of Computational Analysis and Applications, **5**, 179–193 (2003).

NON-CONFORMING METHODS FOR 3D PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS

Shurina E. P.[1,2], **Itkina N. B.**[2], **Arkhipov D. A.**[1], **Dobrolyubova D. V.**[1], **Kutisheva A. Yu.**[1], **Markov S. I.**[1], **Shtanko E. I.**[1]

[1] *Trofimuk Institute of Petroleum Geology and Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia;* shurina@online.sinor.ru

[2] *Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*

The majority of modern engineering problems imply simultaneous modelling of multiple physical processes and, therefore, require the development of multiphysical mathematical software that allows electromagnetic, percolation, deformation (or elasticity) and other problems to be solved in combination. When developing such software, special techniques must be implemented to couple the processes of different physical nature.

Numerical modeling in three-dimensional media with a complex internal structure also has its own peculiarities, related to the fact that the triangulation depends on a wavelength strongly. This imposes serious limitations on the minimum size (i.e., number of finite elements) of mesh partition.

Classic conforming methods-based computational schemes are either ineffective or unapplicable to the problems mentioned above. The development of the up-to-date non-conforming methods based on the finite element method, such as discontinuous Galerkin method (DG-FEM), virtual finite element method (VEM), generalized and extended FEM (GFEM and XFEM), along with the multiscale and heterogeneous finite element methods seems to be one of the most promising tendencies of the computational mathematics [1]–[4].

The authors were supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-29-15094) and by the Fundamental Research of the Presidium of Russian Academy of Sciences program no. 43.

REFERENCES

1. *Epov M. I., Shurina E. P., Mikhaylova E. I., Kutisheva A. Yu.*, "The modifications of the multiscale finite element method for solving electromagnetic problems on the AC and DC," Joint Issue of Journals Comp. Techn. and Vestnik KazNU, **20**, 219–230 (2015).
2. *Cockburn B., Gopalakrishnan J., Lazarov R.*, "Unified hybridization of discontinuous Galerkin, mixed, and continuous Galerkin methods for second order elliptic problems," SIAM J. Numer. Anal, **47**, No. 2, 1319–1365 (2009).
3. *Inkina N. B., Markov S. I.*, "Stabilized vector finite element method for gas flow simulation," Proceedings of the Russian Higher School Academy of Sciences, **2**, No. 31, 57–67 (2016).
4. *Inkina N. B., Markov S. I.*, "Discontinuous Galerkin method for singularity perturbed problems," Comp. Techn, **21**, No. 4, 49–63 (2016).

THE EFFECTIVE COEFFICIENTS FOR 2D ELASTIC EQUATIONS WITH ISOTROPIC FRACTAL PARAMETERS

Soboleva O. N.

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS; Novosibirsk State University, Baker Hughes Joint Laboratory of The Multi-Scale Geophysics and Mechanics; Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia;
olga@nmsf.sscc.ru, olgasob@gmail.com

Propagation of elastic waves in strongly heterogeneous media is studied using subgrid modeling approach. The local elastic parameters and the mass density have essentially variations from some interval of scales at each spatial point. To approximate the medium, we have started from the modified Kolmogorov theory in terms of the ratios of smoothed fields. The correlated fields of the elastic parameters and of the mass density have been represented mathematically by Kolmogorov's multiplicative cascades. The wave propagates over a distance that is of the same order as the typical wavelength of a source. The averaging 2D elastic equations have been obtained if the wavelength is large as compared with the maximum scale of heterogeneities of the medium. For a scale-invariant medium, effective coefficients have power dependence on the scale of smoothing. The exponents of power dependencies have been calculated. It has been shown that small-scale heterogeneities affect the wave propagation. The numerical testing illustrates the efficiency of the approach proposed.

The authors were supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 15-01-01458).

REFERENCES

1. *Sahimi M.*, "Flow phenomena in rocks: from continuum models, to fractals, percolation, cellular automata, and simulated annealing," Reviews of Modern Physics, **65**, 1393–1534 (1993).
2. *Kolmogorov A. N.*, "A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number," J. Fluid Mech., **13**, 82–85 (1962).
3. *Soboleva O.*, "Modeling of propagation of antiplane acoustic waves in multiscale media with lognormal distribution of parameters," J. Comp. Acous., **25**, Article ID 1750007 (2017).

СЕКЦИЯ 10

Математическая экономика

Тезисы докладов

SECTION 10

Mathematical Economics

Abstracts

МОДЕЛИ РАЗВИТИЯ СЛОЖНЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Анцыз С. М.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
antzys@math.nsc.ru

Основными инструментами, которыми государство регулирует экономическую динамику, являются подоходный налог и налоги на товары и услуги. Ранее рассматривалось влияние различных схем налогообложения на развитие экономики в дискретных [1], [2] и непрерывных [3], [4] моделях иерархической системы "государство – инвесторы". В этих работах предполагалось, что инвесторы (нижний уровень иерархии) максимизируют количественные показатели своей деятельности: прибыль или потребление.

В настоящей работе нижний уровень иерархии будет представлен двумя группами субъектов: инвесторами, у которых критерии деятельности количественные, и инвесторами, получающими заданную прибыль или заданные дивиденды с помощью минимальных усилий. В качестве критерия государства предлагается рассматривать объем налоговых сборов. Они необходимы для финансирования общественных благ.

В докладе будет приведен сравнительный анализ влияния разных схем вышеупомянутых налогов на величину налоговых сборов. Отметим, что выводы, полученные с помощью подобного анализа, не всегда совпадают с выводами, полученными при изучении моделей с одним видом инвесторов. Например, в новых моделях не обнаруживается преимущество прогрессивного подоходного налога.

Работа выполнена при поддержке Российского гуманитарного научного фонда (проект № 16-06-00049) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-06-00046, проект № 16-06-00101 и проект № 16-01-00108).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Анцыз С. М., Рыпалова О. А.* О двух схемах налогообложения: дискретные модели // Препринт № 252. Новосибирск: Издательство ИМ СО РАН, 2010.
2. *Ицкович М. А.* О налогообложении капитала в дискретных аналогах модели Рамсея – Солоу // Труды 12-й Международной Азиатской школы-семинара "Проблемы оптимизации сложных систем". Новосибирск: Издательство ИВМиМГ СО РАН, 2016. С. 229–233.
3. *Рылова А. А.* О налогообложении фондов в модели Рамсея – Солоу // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2014. Т. 14, вып. 1. С. 84–97.
4. *Трубачева А. Е.* Об оптимальности ставки единого пропорционального налога в двухуровневой экономической системе // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. 12, № 4. С. 137–151.

О МОДЕЛЯХ РАМСЕЕВСКОГО ТИПА С НЕСКОЛЬКИМИ ИНВЕСТОРАМИ

Балдоржиева И. Д.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
ibaldorzhieva@mail.ru

Под моделью рамсеевского типа подразумевается динамическая модель функционирования двухуровневой иерархической системы государство – инвестор.

Целью работы является изучение влияния плоской шкалы налогообложения на поведение системы государство – инвесторы в ситуации, когда инвесторов “достаточно много”. Необходимо установить единые для всех инвесторов правила сбора налогов.

Государство решает задачу о выборе ставки налогообложения $\rho = \mathrm{const}$, максимизирующей налоговые сборы на доход за период $[0, T]$:

$$\sum_{i=1}^{M} \int_{0}^{T} \rho f_i(k_i(t)) e^{-\delta t} dt \longrightarrow \max_{\rho},$$

где M — число инвесторов, $\delta > 0$ — константа дисконтирования, k — значение фондовооруженности, $f_i(k_i(t))$ — производственная функция i-го инвестора, определяющаяся управлением $s_i(t)$, найденным в результате решения модифицированной задачи оптимального управления из [1].

В докладе будет приведено уравнение, позволяющее найти оптимальное значение ставки для задачи с достаточно большим числом инвесторов. Получение этого уравнения основывается на найденной формуле определения оптимальной для государства ставки налогообложения в ситуации, когда инвестор один.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-06-00101 и проект № 16-01-00108).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ашманов С. А.* Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984.

РАВНОВЕСИЕ В МОДЕЛИ МЕЖДУНАРОДНОЙ ТОРГОВЛИ ПРИ МОНОПОЛИСТИЧЕСКОЙ КОНКУРЕНЦИИ

Беляев И. А.[1], **Быкадоров И. А.**[2]

[1]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;* ivanbelyaev1708@gmail.com

[2]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирский государственный университет экономики и управления, Новосибирск, Россия;* bykadorov.igor@mail.ru

В настоящее время актуально и широко распространено изучение модели монополистической конкуренции [1] (см. также [2]) для ситуаций рыночного равновесия применительно к торговле двух различных по населению стран. Исследование этой модели позволяет не только объяснить процессы, происходящие в современной экономике, но и спрогнозировать ее дальнейшее развитие. При этом наиболее актуальным представляется рассмотрение нелинейных функций производственных издержек [3], [4] (см. также [5]).

Работа посвящена изучению реакции (“сравнительной статики”) потребления, выпуска продукции, количества (массы) фирм, цен, функции общественного благосостояния на изменение торговых (транспортных) издержек в ситуации рыночного равновесия с нелинейной функцией производственных издержек.

Как обычно [6], наибольшее внимание уделено исследованию двух важных “предельных” случаев: свободы торговли (“почти” отсутствие торговых издержек) и автаркии (“почти” прекращение торговли вследствие слишком больших торговых издержек).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Антощенкова И. В., Быкадоров И. А.* Модель монополистической конкуренции: влияние технологического прогресса на равновесие и общественную оптимальность // Математическая теория игр и ее приложения. 2014. Т. 6, вып. 2. С. 3–31.
2. *Antoshchenkova I. V., Bykadorov I. A.* Monopolistic competition model: the impact of technological innovation on equilibrium and social optimality // Autom. Remote Control. 2017. V. 78, No 3. P. 537–556.
3. *Быкадоров И. А., Коковин С. Г.* Эффективность рыночной власти ритейлеров: случай монополистической конкуренции производителей // Вестник НГУЭУ. 2014. № 1. С. 326–337.
4. *Быкадоров И. А., Желободько Е. В., Коковин С. Г.* Товарное разнообразие в вертикальном распределительном канале при монополистической конкуренции // Математическая теория игр и ее приложения. 2010. Т. 2, вып. 2. С. 3–41.
5. *Bykadorov I. A., Kokovin S. G., Zhelobodko E. V.* Product diversity in a vertical distribution channel under monopolistic competition // Autom. Remote Control. 2014. V. 75, No 8. P. 1503–1524.
6. *Bykadorov I., Gorn A., Kokovin S., Zhelobodko E.* Why are losses from trade unlikely? // Econ. Lett. 2015. No 129. P. 35–38.

ОБЩЕСТВЕННАЯ ОПТИМАЛЬНОСТЬ В МОДЕЛИ МЕЖДУНАРОДНОЙ ТОРГОВЛИ ПРИ МОНОПОЛИСТИЧЕСКОЙ КОНКУРЕНЦИИ

Быкадоров И. А.[1], **Кабаева С. Э.**[2]

[1]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,*
Новосибирский государственный университет,
Новосибирский государственный университет экономики и управления,
Новосибирск, Россия; bykadorov.igor@mail.ru
[2]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
svetikk_94@mail.ru

Исследуется модель международной торговли при монополистической конкуренции производителей [1] в ситуации общественной оптимальности.

В отличие от [2] (см. также [3]) функция полезности каждого потребителя предполагается аддитивно-сепарабельной.

Функция производственных издержек является нелинейной [4], [5] (см. также [6]).

Рассматриваются две страны: “домашняя” (H) и “зарубежная” (F). Предполагается, что население страны H не меньше населения страны F.

Кроме того, предполагается, что торговые (транспортные) издержки τ имеют вид “iceberg type”.

Изучается сравнительная статика по τ в двух важных “предельных” случаях:
1) свободы торговли ($\tau \approx 1$);
2) автаркии (“почти” прекращение торговли в силу слишком большого τ).

Проведенные исследования позволяют понять, как торговые издержки влияют на общественно оптимальные характеристики: выпуск продукции (“размер фирмы”), потребление, количество (массу) фирм, общественное благосостояние.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Быкадоров И. А., Коковин С. Г.* Эффективность рыночной власти ритейлеров: случай монополистической конкуренции производителей // Вестник НГУЭУ. 2014. № 1. С. 326–337.
2. *Быкадоров И. А., Желободько Е. В., Коковин С. Г.* Товарное разнообразие в вертикальном распределительном канале при монополистической конкуренции // Математическая теория игр и ее приложения. 2010. Т. 2, вып. 2. С. 3–41.
3. *Bykadorov I. A., Kokovin S. G., Zhelobodko E. V.* Product diversity in a vertical distribution channel under monopolistic competition // Autom. Remote Control. 2014. V. 75, No 8. P. 1503–1524.
4. *Bykadorov I., Gorn A., Kokovin S., Zhelobodko E.* Why are losses from trade unlikely? // Econ. Lett. 2015. No 129. P. 35–38.
5. *Антощенкова И. В., Быкадоров И. А.* Модель монополистической конкуренции: влияние технологического прогресса на равновесие и общественную оптимальность // Математическая теория игр и ее приложения. 2014. Т. 6, вып. 2. С. 3–31.
6. *Antoshchenkova I. V., Bykadorov I. A.* Monopolistic competition model: the impact of technological innovation on equilibrium and social optimality // Autom. Remote Control. 2017. V. 78, No 3. P. 537–556.

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ МАРКЕТИНГА

Быкадоров И. А.[1], Тарелкин А. М.[2]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирский государственный университет экономики и управления, Новосибирск, Россия;* bykadorov.igor@mail.ru

[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;* komplanar@gmail.com

Исследуется ценообразование в структуре "производитель – посредник – потребитель". В [1] введено и изучено понятие мотивации ритейлера (посредника). Управлением производителя является $\alpha(t)$ — торговый (т. е. оптовый) дисконт, управлением посредника является $\beta(t)$ — часть торгового дисконта, используемого посредником для снижения розничной цены. Исследуется задача максимизации прибылей производителя и посредника. Возникающая двухкритериальная задача оптимального управления (дифференциальная игра) является нелинейной по управлению. Общих эффективных методов исследования таких задач неизвестно.

В [1] изучена ситуация, когда $\beta(t)$ является постоянной. Получена структура оптимального торгового дисконта. Выделены случаи "эффективного" и "неэффективного" посредника. При этом в случае "неэффективного" посредника фирма-производитель вынуждена увеличивать (по крайней мере, не уменьшать) торговый дисконт на всем интервале продаж; в случае же "эффективного" посредника производитель имеет возможность в конце интервала продаж несколько снижать торговый дисконт (т. е. увеличивать розничную цену).

В данной работе изучаются ситуации, когда управления $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ являются кусочно-постоянными с фиксированными моментами переключения. (По-видимому, такой подход достаточно адекватно отражает реальные рыночные процессы.) Таким образом, прибыли производителя и посредника являются функциями от уровней α и β на подынтервалах интервала продаж. При этом оптовая и розничная цены зависят как от α, так и от β.

Выявлены ситуации, при которых функция прибыли производителя является вогнутой по $\alpha(t)$, а функция прибыли посредника является вогнутой по $\beta(t)$.

Для различных ситуаций взаимоотношений производителя и посредника найдены равновесия по Нэшу и по Штакельбергу и условия их существования.

Изучены последствия нарушения достигнутых ранее договоренностей между производителем и посредником. Изучены ситуации, когда возможен пересмотр соглашений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bykadorov I., Ellero A., Moretti E., Vianello S.* The role of retailer's performance in optimal wholesale price discount policies // Eur. J. Oper. Res. 2009. V. 194, No 2. P. 538–550.

РАВНОВЕСИЕ В МОДЕЛЯХ СМЕШАННОЙ ЭКОНОМИКИ: СУЩЕСТВОВАНИЕ И КОАЛИЦИОННАЯ СТАБИЛЬНОСТЬ

Васильев В. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
vasilev@math.nsc.ru

В докладе излагаются условия существования и экстремальные свойства равновесий для достаточно широкого класса моделей смешанных экономических систем с двумя рынками для каждого из продуктов. На первом рынке цены фиксированы, и распределение благ осуществляется с учетом схем рационирования и в рамках государственного заказа, действующего как в производственном, так и в потребительском секторе. На втором рынке действуют гибкие цены, определяемые конкурентным механизмом уравнивания спроса и предложения. Предполагается, что избыток продуктов, приобретенных на первом рынке, может свободно реализовываться на втором по текущим гибким ценам.

Рассматриваемая модель, детальное описание которой представлено в работе [1], является конкретизацией весьма общей модели смешанной экономики, предложенной В. Л. Макаровым в [2]. Как и в моделях смешанной экономики без производственного сектора (см., например, [3]), одно из главных препятствий для использования традиционных методов равновесного анализа для решения вопросов существования и коалиционной стабильности равновесных распределений в рассматриваемой модели типа Эрроу – Дебре, состоит в нарушении традиционного закона Вальраса, являющемся следствием взаимодействия рынков с различными механизмами регулирования. Это препятствие при отыскании условий существования преодолевается на основе гомотопического подхода к исследованию нетангенциальных отображений избыточного спроса, позволяющего редуцировать "смешанную" проблему существования к ее аналогу в довольно сложной, но уже почти стандартной модели чисто рыночной экономической системы. В итоге получаются условия существования равновесных цен для рассматриваемой модели, аналогичные стандартным предположениям теорем существования для классической модели Эрроу – Дебре. Что касается экстремальной характеризации равновесных распределений, то здесь ключевым моментом является раздельное рассмотрение отношений нечеткого доминирования, отвечающих различным (по отношению к фиксированным ценам) типам равновесий. Получающиеся здесь теоремы о совпадении нечетких ядер и отвечающих соответствующему типу цен множеств равновесных распределений вполне аналогичны результатам для смешанных моделей без производственного сектора [3].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-06-00101).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vasil'ev V., Wiesmeth H.* Equilibrium in a mixed economy of Arrow–Debreu type // Journal of Mathematical Economics. 2008. V. 44, No 2. P. 132–147.
2. *Макаров В. Л., Васильев В. А., Козырев А. Н., Маракулин В. М.* О некоторых проблемах и результатах современной математической экономики // Оптимизация. 1982. Т. 30. С. 5–87.
3. *Васильев В. А.* О совпадении ядер и согласованных распределений в смешанных экономических системах // ДАН. 1997. Т. 352, № 4. С. 446–450.

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ТРАНСПОРТНЫХ СИСТЕМ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ РЫНКОВ

Васин А. А.[1], Григорьева О. М.[2], Цыганов Н. И.[3]

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия;
[1]`foravas@yandex.ru`, [2]`olesyagrigez@gmail.com`, [3]`nikita-93@mail.ru`

Рынки природного газа, нефти и электроэнергии играют важную роль в экономике многих стран. Каждый такой рынок включает свою собственную систему передачи. Потребители и производители расположены в различных узлах, соединенных транспортными линиями. Доля затрат на передачу в окончательной стоимости ресурса, как правило, велика (для электроэнергии превышает 40 %). Поэтому задача оптимизации транспортной системы представляет большой практический интерес. В работе [1] определяется оптимальная пропускная способность для рынка с двумя узлами. Мы рассматриваем общую проблему оптимизации общественного благосостояния с учетом производственных затрат, полезности потребления и затрат на увеличение пропускных способностей. Сложность проблемы определяется наличием существенных фиксированных расходов, связанных с расширением линий передачи. В целом проблема оптимизации транспортной системы — NP-трудная (см. [2]). В работе [3] указаны некоторые случаи, когда функция благосостояния обладает свойствами субмодулярности или супермодулярности на множестве линий. Нами описан новый алгоритм оптимизации транспортной системы в случае супермодулярности. Результаты вычислительных экспериментов показывают его эффективность. Предлагается обобщение указанных свойств в форме понятий дополнительных и конкурентных транспортных линий. Для рынков с древовидной структурой указываются легко проверяемые необходимые и достаточные условия инвариантности структуры потоков, при выполнении которых любая пара линий с одинаковой ориентацией потоков является дополнительной, а с противоположной ориентацией — конкурентной. Указанные свойства позволяют разработать эффективные алгоритмы как для решения дискретной задачи поиска оптимального множества расширяемых линий, так и для вспомогательной задачи оптимизации благосостояния при заданном множестве расширяемых линий. При этом последняя задача решается методом переноса функций спроса и предложения из всех узлов в корневой узел дерева.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Daylova E., Vasin A.* Determination of transmission capacity for a two-node market // Procedia Computer Science. 2014. V. 31. P. 151–157.
2. *Guisewite G. M., Pardalos P. M.* Minimum concave-cost network flow problems: applications, complexity, and algorithms //Annals of Operations Research. 1990. V. 25, No 1. P. 75–99.
3. *Vasin A., Dolmatova M.* Optimization of transmission capacities for multinodal markets // Procedia Computer Science. 2016. V. 91, No 10. P. 238–244.

ТЕОРЕМЫ О НЕВОЗМОЖНОСТИ КОРРЕКТНОГО АГРЕГИРОВАНИЯ В ЭКОНОМИКЕ

Зоркальцев В. И.

Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, Иркутск, Россия; zork@isem.irk.ru

В докладе планируется обсудить задачи и проблемы агрегирования в рамках современной экономической теории. Выделены три составляющие.

1. Агрегирование во времени: соотношения данных, относящихся к моментам и к периодам (разной продолжительности) времени. Приводятся примеры некоторых внешне парадоксальных эффектов.

2. Агрегирование экономических субъектов (потребители, покупатели, продавцы, производители). Приводится теорема о возможности построения коллективной функции полезности, согласованной с индивидуальными в том и только в том случае, если все функции полезности (индивидуальные и коллективная) квазиэквивалентные и квазиоднородные. Под условием согласованности индивидуальных и коллективной функций полезности понимается требование совпадения суммы индивидуально выбранных наборов благ с набором благ, выбранных по коллективной функции полезности, когда денежные средства "коллективного покупателя" равны сумме средств агрегируемых им исходных покупателей. Приведенная теорема является существенным усилением аналогичного результата по проблеме построения агрегированной функции полезности Громана. Приводятся аналогичные теоремы о возможности построения агрегированных производственных функций в том и только в том случае, если эти функции примитивны (квазиэквивалентны и квазиоднородны), явно неудовлетворительны с позиций экономической теории.

3. Обсуждаются результаты аксиоматического анализа методов построения агрегированных экономических индексов. Приводятся теоремы о противоречивости общепризнанных, безусловно, необходимых требований к методам их расчета. В этой связи рассматриваются возможные альтернативы в построении индексов. Обсуждается возможность теоретического разрешения проблемы выбора непротиворечивого метода на базе аналитической концепции индексов (называемых также экономической концепцией или индексами Конюса). Центральной проблемой аналитических индексов, снижающей их даже теоретическую ценность, является их неоднозначность, проистекающая от их зависимости от выбора траектории перехода из одного состояния в другое. Приводится теорема о необходимых и достаточных условиях независимости индексов от траектории в непрерывном времени (индексов Дивизиа), согласованных с выбором товаров на базе функции полезности (т.е. в рамках аналитической концепции). Этим условием является квазиоднородность функции полезности. Такая функция полезности явно неудовлетворительна для экономической теории.

Приводятся аналогичные результаты для аналитических индексов, формируемых с позиций продавцов (на базе областей производственных возможностей, производственных функций).

Теоремы о невозможности корректного агрегирования экономических субъектов и экономических показателей в рамках современной экономической теории вероятно следует интерпретировать как наличие внутренних противоречий в экономической теории. Поскольку агрегирование показателей и субъектов явно или неявно присутствует при изложении многих разделов Микроэкономики и при переходе от нее к Макроэкономике.

О НАЛОГООБЛОЖЕНИИ КАПИТАЛА В ДИСКРЕТНЫХ АНАЛОГАХ МОДЕЛИ РАМСЕЯ – СОЛОУ

Ицкович М. А.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
mariya.itskovich@gmail.com

В работе рассматривается модель иерархической системы, состоящей из государства и нескольких компаний (инвесторов). Целью данной работы является решение проблемы нахождения условий существования рациональных стратегий поведения государства и инвесторов. Предполагается, что государство задает налоговую схему и налоговую ставку. Инвесторы, зная стратегию государства и предполагая, что она фиксирована, максимизируют свои функции полезности. В качестве функции полезности инвесторов рассматривается общее потребление с дисконтированием. Государство выберет ту стратегию, при которой оно собирает большее количество налогов в течение рассматриваемого периода $[0, T]$. Анализ основан на модифицированной модели Рамсея. В классической модели Рамсея доход компании распределяется между потреблением и инвестициями [1]. Однако эта модель не учитывает существование налогообложения и таким образом описывает функционирование системы "государство – инвесторы" неадекватно.

В настоящей работе с помощью аппаратов математического программирования и математического анализа была исследована задача распределения доходов от производства между потреблением и инвестициями при существовании налогов на основные фонды. Построены дискретные модели функционирования двухуровневой системы "государство – инвесторы" для данной задачи. Найдены условия квазивогнутости целевых функций задач нижнего и верхнего уровней с постоянной по времени долей дохода, идущей на потребление, и плоской шкалой налогообложения, доказаны соответствующие теоремы. Предложены эвристические алгоритмы для нахождения точек максимума целевых функций задач верхнего и нижнего уровней, когда ничего нельзя сказать об их квазивогнутости.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00108 и проект № 16-06-00101).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ашманов С. А.* Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984.

О ВЛИЯНИИ СКЛОННОСТИ ИНВЕСТОРОВ К ПОТРЕБЛЕНИЮ НА СТАВКУ НДФЛ

Котова А. А.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
a.kotova8@g.nsu.ru

В настоящей работе рассматривается задача с двумя уровнями управления: государство и несколько инвесторов, аналогичная поиску равновесия по Штакельбергу [1]. Инструментом управляющего органа является налог на потребление инвесторов, который моделирует налог на доход физических лиц (НДФЛ).

Государство устанавливает величину налоговой ставки, единую для всех инвесторов. Глава i-го предприятия, зная стратегию государства и считая ее фиксированной, стремится найти функцию $s_i(t)$ (доля дохода от производства, идущая на инвестиции), которая максимизирует линейную комбинацию удельного потребления работников предприятия и дальнейшего развития производства. Коэффициенты линейной комбинации: α_i и $(1-\alpha_i)$ соответственно. Ограничениями являются скорость изменения фондовооруженности и условие экономического горизонта. Коэффициент α_i — показатель склонности i-го инвестора к потреблению, значение которого принадлежит отрезку $[0,1]$.

Критерием деятельности государства является усредненная по всем предприятиям производительность труда работников при условии, что инвесторы действуют рационально. В работе также рассматривается ситуация, когда государство стремится ограничить налоговые сборы для повышения благосостояния трудящихся. Другими словами, введение налога на потребление может уменьшить этот показатель не более чем в заданное число раз ($\beta > 1$) по сравнению с ситуацией, когда налоги отсутствуют.

В докладе будут изложены результаты определения оптимальных размеров налоговых ставок, зависящие от величины склонности инвесторов к потреблению.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-06-00101 и проект № 16-01-00108).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мулен Э.* Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир, 1985.

О КРИТЕРИИ ПАРЕТО ПРИ РЕШЕНИИ ПРОБЛЕМЫ “ПОТРЕБЛЕНИЕ – ИНВЕСТИЦИИ”

Кулакова А. А.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
annkuul@mail.ru

В монографии [1] для решения задачи поиска оптимального управления $s(t)$ при распределении дохода на потребление C и инвестиции используется модель Ф. Рамсея. В этой модели критерием, подлежащим максимизации в плановом периоде $[0, T]$, является общее удельное потребление с дисконтированием:

$$\int_0^T \frac{C(t)}{L(t)} e^{-\delta t}\, dt,$$

где L — величина трудовых ресурсов, δ — константа дисконтирования.

В настоящей работе предполагается, что инвестор руководствуется принципом Парето, суть которого в том, что 20 процентов усилий дают 80 процентов результата. Таким образом, можно понять, что, выбрав те оптимальные ресурсы, которые дают наибольший эффект, можно достичь высоких результатов малыми издержками. В то же время последующие усилия будут ненужными и неэффективными.

Цель данной работы: найти оптимальное управление $s(t)$, при котором при минимуме затрат усилий (производства) достигает максимума потребление.

Возникает задача:

$$\frac{\int_0^T (1 - s(t)) f(k(t))\, dt}{\int_0^T k(t)\, dt} \longrightarrow \max_s,$$

при ограничениях:

$$\dot{k}(t) = s(t) f(k(t)) - \mu k(t),$$

$$0 \le s(t) \le 1, \quad k(0) = k_0, \quad k(T) \ge k_T,$$

где $f(k(t))$ — производственная функция, аргументом которой является фондовооруженность $k(t)$, μ — темп амортизации фондов, положительные константы k_0 и k_T считаются заданными.

В докладе будут предложены алгоритмы поиска оптимального решения этой задачи с применением принципа максимума Понтрягина и принципа полного решения Динкельбаха.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-06-00101 и проект № 16-01-00108).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ашманов С. А.* Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984.

ГОСУДАРСТВЕННО-ЧАСТНОЕ ПАРТНЕРСТВО В МИНЕРАЛЬНО-СЫРЬЕВОМ КОМПЛЕКСЕ РОССИИ: МЕХАНИЗМЫ И МОДЕЛЬНЫЙ ИНСТРУМЕНТАРИЙ

Лавлинский С. М.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
lavlin@math.nsc.ru

Доклад посвящен анализу сегодняшнего уровня развития института государственно-частного партнерства (ГЧП) в минерально-сырьевом комплексе России и оценке перспектив использования специального экономико-математического инструментария для поддержки процесса принятия управленческих решений в этой сфере. Основное внимание уделено модели ГЧП, связанной с проектами создания производственной инфраструктуры на основе средств Инвестиционного фонда РФ. Эта специфическая российская модель использована в Нижнем Приангарье (проект "Комплексное развитие Нижнего Приангарья") и Забайкалье (проект "Создание транспортной инфраструктуры для освоения минерально-сырьевых ресурсов юго-востока Читинской области").

Методически инвестиционные проекты становятся проектами ГЧП только в том случае, когда частная компания финансирует строительство и (или) эксплуатацию объектов государственной собственности. В вышеупомянутых российских проектах производственно-инфраструктурный комплекс строится по принципу — каждый субъект финансирует только свой объект. На практике это означает, что государство финансирует объекты своей собственности (дороги, мосты, ЛЭП и т. п.), а бизнес строит свои объекты — заводы, комбинаты и пр. В такой ситуации основная проблема — раздел затрат на реализацию проекта между участниками партнерства.

Анализ хода реализации этих проектов ГЧП говорит о том, что первый современный российский опыт ГЧП в промышленной и инфраструктурной сферах в рамках Инвестиционного фонда оказался не очень успешным. И здесь дело не только в переходном характере экономики и отсутствии необходимых рыночных институтов. Не последнюю роль в этом сыграло отсутствие комплексной оценки механизма реализации проекта ГЧП и используемой схемы проектного финансирования в момент принятия решения.

Для решения ключевой задачи управления ресурсным регионом — задачи разработки программы освоения минерально-сырьевой базы — в работе строится модель формирования эффективного механизма партнерства, в рамках которого государство дает налоговые льготы и оказывает помощь инвестору в создании инфраструктуры и реализации части необходимых природоохранных мероприятий. Для этого формулируется модель Штакельберга, а методика использования соответствующей двухуровневой задачи математического программирования демонстрируется на примере Забайкалья. Для него строится программа освоения группы месторождений полиметаллов с использованием механизма ГЧП, и исследуются свойства равновесных решений. Результаты численных экспериментов подтверждают рациональность использования такого механизма ГЧП. Они показывают, что важен выверенный подход к определению конкретного размера помощи инвестору со стороны государства, обеспечивающий эффективность для обоих партнеров.

Работа выполнена при поддержке Российского гуманитарного научного фонда и Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 16-02-00049, № 16-06-00046).

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ПОЛИТИКЕ БУКМЕКЕРА

Лев Г. Ш.

Алтайский государственный технический университет, Барнаул, Россия;
gersh.lev@yandex.ru

Рассматривается двумерная случайная величина, компоненты которой независимы и принимают значения: $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Первая компонента характеризует результат игры, вторая — выбор игрока. Игрок осуществляет единичный взнос и, при совпадении значений компонент, он получает выигрыш

$$\frac{1}{r_i}, \quad i = 1, \ldots, n$$

(см. [1], [2]).

Изучается вопрос об оптимальной стратегии букмекера при различных ограничениях на размер премии. В частности, оптимальная стратегия, когда

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = 1,$$

задается соотношениями

$$r_i = z\sqrt{p_i q_i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где z соответствует условиям нормировки.

Оценивается также количество игр, гарантирующее букмекеру положительный результат.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ллойд Э.* Справочник по прикладной статистике. Т. 2. М.: Финансы и статистика, 1990.
2. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2010.

СОВЕРШЕННАЯ КОНКУРЕНЦИЯ БЕЗ УСЛОВИЯ СЛЕЙТЕРА: ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ НЕСТАНДАРТНОГО И ДОГОВОРНОГО ПОДХОДА

Маракулин В. М.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; marakulv@gmail.com

Исследуется совершенная конкуренция в моделях экономики, где условие выживаемости экономических агентов (survival assumption, оно же условие Слейтера) нарушается, и классическое конкурентное равновесие может не существовать. Автором в 80-х годах 20-го века было доказано, что корректной концепцией равновесия здесь является понятие *равновесия с нестандартными ценами и трансферабельными стоимостями.* Этот подход основан на ревизии понятия цены, где вместо обычных "стандартных" цен используются "нестандартные" (в смысле нестандартного анализа). Таким образом, цены на продукты задаются числами из нестандартного расширения числовой прямой $^*\mathbb{R}$. В то же время потребление измеряется в стандартных величинах. Концепция нестандартного равновесия включает также в себя трансферабельные (передаваемые) стоимости, что позволяет насыщенным индивидам возвращать в экономику избыточную стоимость. Равновесия этого вида существуют в моделях без условия Слейтера и прочих слабейших предположениях.

В соответствии с классическими представлениями совершенная конкуренция — это условия, в которых ядро совпадает с равновесием, однако возможно ли это осуществить для нестандартных равновесий в случае, когда они отличаются от обычных (нет Слейтера)? Анализ основывается на договорном подходе, разработанном автором в 21 веке и показавшем высокую эффективность в теоретической экономике. При договорном подходе классическому ядру экономики соответствуют распределения, стабильные при заключении нового договора и полном разрыве имеющихся. В исследовании доказано, что корректной моделью совершенной конкуренции является понятие нечётко договорного распределения — это распределения такие, что не существует коалиции, для членов которой при *частичном* и потенциально *асимметричном* разрыве договоров было бы выгодно заключить новый взаимовыгодный контракт. Договорная модель существенно проще других моделей совершенной конкуренции, известных в литературе.

При минимально слабых предположениях доказана теорема о совпадении множества всех "нестандартных" равновесий и нечётко договорных. В качестве следствия этой теоремы установлен (новый) факт существования нечётко договорных распределений — это предположения, обеспечивающие существование нестандартных равновесий.

Исследован классический метод моделирования совершенной конкуренции, основанный на представлении о равновесиях Эджуорта и развивающий подход Дебре – Скарфа. Получено их описание в терминах нестандартных цен, из которого следует, что эта модель менее квалифицированная, чем договорная. Дополнительно представлены и обоснованы условия (частично известные ранее), при которых равновесия Эджуорта совпадают с конкурентными равновесиями. Доказано, что при этих условиях все изученные понятия эквивалентны.

МОДЕЛИ ЭКСТЕРНАЛИЙ ЗНАНИЙ И ПРОИЗВОДСТВА В СЕТЯХ: ИГРОВЫЕ РАВНОВЕСИЯ, ТИПЫ ВЕРШИН, ФОРМИРОВАНИЕ СЕТИ

Матвеенко В. Д.[1], Королев А. В.[2], Бахтин М. А.[3]

Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Санкт-Петербург, Россия;
[1]`vmatveenko@hse.ru`, [2]`danitschi@gmail.com`, [3]`max-bahtin@mail.ru`

Модель [1] описывает ситуации, в которых полезность каждого агента в сети (неориентированном графе) зависит от потребления в двух периодах времени. В период 1 за счет сокращения потребления агент может инвестировать ресурс, чтобы увеличить потребление периода 2, определяемое производственной функцией, зависящей от собственных инвестиций и среды (взвешенной суммы собственных инвестиций и инвестиций соседей по сети). Мы исследуем игровые равновесия, соответствующие двум концепциям: (1) равновесие Нэша и (2) "джекобианское" равновесие с экстерналиями. Вторая концепция [2] предполагает, что агент в момент принятия решения рассматривает среду как экзогенно заданную. Для каждого из этих случаев мы доказываем единственность внутреннего равновесия (такого, что каждый агент инвестирует лишь часть ресурса), находим зависимость инвестиций агента от получаемой экстерналии, показываем, что полезность агента монотонно зависит от его среды. Оказывается, что в случае внутреннего равновесия поведение агента определяется его альфа-центральностью в сети, и что две компоненты альфа-центральности (положение агента и его экзогенная "важность") всегда влияют на уровень инвестиций в противоположных направлениях. Мы вводим теоретико-графовое понятие "тип вершины", даем классификацию сетей на основе этого понятия, описываем алгоритм разбиения множества вершин на типы и показываем, что именно эта типология вершин определяет альфа-центральности, а значит и внутренние равновесия. Мы изучаем последствия появления новых связей в сетях и присоединения новых компонент, в частности, идентифицируем агентов, потенциально заинтересованных в том или ином способе формирования сети.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-06-00618).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Матвеенко В. Д., Королев А. В.* Равновесие в сетевой игре с производством и экстерналиями знаний // Математическая теория игр и ее приложения. 2016. Т. 8, № 1. С. 106–137.
2. *Lucas R. E.* On the mechanics of economic development // Journal of Monetary Economics. 1988. V. 22, No 1. P. 3–42.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫМИ БЛУЖДАНИЯМИ

Рапопорт Э. О.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
rapoport@math.nsc.ru

Изучается динамическая экономическая система с дискретным временем, состояния которой в каждый момент времени характеризуются целыми неотрицательными точками двумерного векторного пространства. Имеется два продукта и два различных производства, в каждом из которых состояние системы может изменяться на некоторый случайный вектор с целыми компонентами (a_i, b_i) с различными наборами вероятностей $\{p_i\}$ или $\{q_i\}$.

Под управлением системой будем понимать выбор в каждый момент времени одной из двух случайных величин, определяющих новое состояние системы. Цель управления — минимизация вероятности вырождения системы, т. е. минимизация вероятности выхода из первого квадранта.

Теорема 1. *Оптимальное управление существует.*

Пусть $g(x, y)$ — вероятность вырождения (выхода из первого квадранта) при оптимальном управлении.

Для оценки $g(x, y)$ особую роль играет введенная в [1] система уравнений (названная ассоциированной системой), решениями которой (при выполнении некоторых естественных условий) являются точка $(0, 0)$ и некоторые положительные точки (β^*, α^*). Случай, когда таких точек много, исследовался в [2]. В [2], [3] для $g(x, y)$ была получена оценка снизу.

Теорема 2. *Существует такая положительная постоянная c, что*

$$g(x, y) \geq e^{x\beta^* + y\alpha^*}.$$

Для точек, достаточно удаленных от осей первого квадранта, удалось доказать следующую теорему.

Теорема 3. *При $(x, y) \to (\infty, \infty)$ справедливо асимптотическое отношение*

$$g(x, y) = O(e^{-(\alpha^* x + \beta^* y)}).$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00108 и проект № 16-06-00101).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рапопорт Э. О.* Об одной модели распределения неделимого ресурса // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 2. 2005. Т. 12, № 1. С. 55–73.
2. *Рапопорт Э. О.* Об оптимальном управлении при распределении неделимого ресурса // Дискретный анализ и исследование операций. 2009. Т. 16, № 1. С. 64–79.
3. *Рапопорт Э. О.* Распределение неделимого ресурса: оптимальное управление и цены // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. 12, № 3. С. 75–84.

О МОДЕЛЯХ ТРАНСПОРТНОГО ПОТОКА В ГОРОДЕ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯХ

Романовский И. В.

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия; josephromanovsky@gmail.com

60 лет назад я заканчивал аспирантуру матмеха Ленинградского университета и уже был сотрудником Вычислительного центра. Мы дружили с ЛОМИ и с обитавшими там будущими сотрудниками Института математики СО РАН.

Вопросы исследования операций были мне интересны, и я с удовольствием с этой группой контактировал. В то время я только начинал заниматься теорией игр, динамическим и линейным программированием. В ВЦ ЛГУ у нас сформировалась своя группа исследования операций.

Одну из наших задач нужно упомянуть особо. К нам обратились с просьбой запрограммировать довольно простую балансировку матрицы, понадобившуюся при расчетах прогноза развития Ленинграда. Этот метод был предложен архитектором Г. В. Шелейховским. Доказательства сходимости метода у них не было, но нас заверяли, что метод сходится очень быстро. Легко выяснилось, что если метод сходится, то результат будет доставлять максимум величине

$$\sum_{i\in 1:m, j\in 1:n} x[i,j] \ln \left(x[i,j]/p[i,j] \right),$$

где $p[1:m, 1:n]$ — исходное заполнение матрицы $x[1:m,1:n]$. Вскоре мой аспирант Л. М. Брэгман [1] доказал сходимость метода Шелейховского, а потом создал обобщение метода, позволяющее применять его для решения более сложных нелинейных задач [2]. Уже тогда возникла мысль, что этот метод при всей его простоте может оказаться очень интересным для дальнейших приложений. В 1975 г. мы с Брэгманом написали статью [3], в которой постарались понятно объяснить возникающие при его обобщении формулы. Эта работа была продолжена Н. И. Наумовой и опубликована в нескольких статьях, включая [4]. Много интересных исследований в этом направлении, с большими приложениями, было выполнено под руководством Б. Г. Питтеля и В. П. Федорова в СПб ЭМИ РАН.

Сейчас мы пробуем применить потоки, получаемые при таком расчете, к составлению расписания ремонтов уличной сети в крупном городе. При этом в модели допускается несколько видов частичного ограничения попутных и встречных потоков, и при проверке допустимости потока делается пересчет по методу Брэгмана – Шелейховского.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Брэгман Л. М.* Доказательство сходимости метода Г. В. Шелейховского для задачи с транспортными ограничениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1967. Т. 7, № 1. С. 147–156.
2. *Брэгман Л. М.* Релаксационный метод нахождения общей точки выпуклых множеств и его применение для решения задач выпуклого программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1967. Т. 7, № 3. С. 620–631.
3. *Брэгман Л. М., Романовский И. В.* Разверстка и оптимизация в задачах распределения // Исследование операций и статистическое моделирование. Вып. 3. Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1975. С. 137–162.
4. *Naumova N. I.* Generalized proportional solutions // Advances in Economics and Optimization: Collected Scientific Studies Dedicated to the Memory of L. V. Kantorovich. New York: Nova Science Publishers, Inc., 2014. P. 123–143.

О МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИКИ ИНДЕКСА РТС НА ОСНОВЕ p-АДИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Симонов П. М.[1], **Ахуньянова С. А.**[2]

Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия; [1]`simpm@mail.ru`, [2]`sofi-perm@mail.ru`

Главной предпосылкой изучения ценовых колебаний, происходящих на финансовых рынках, с помощью методов эконофизики является схожесть физических и экономических процессов. В качестве метода моделирования финансовых процессов выбирается один из методов эконофизики — p-адический анализ [1], который наиболее детально разработан и изучен В. М. Жарковым и Н. Н. Павловой [2], В. М. Жарковым [3]. Целью исследования является применение методики p-адического моделирования и прогнозирования для колебаний цен на финансовых рынках, предметом — динамика индекса РТС.

Приведено математическое описание p-адического анализа — определение p-адических чисел и их представление в поле чисел $\mathbb{Q}_p$. Оно является полным метрическим (порожденным p-адической неархимедовой нормой) полем чисел, что позволяет применять p-адические числа для моделирования стохастических явлений. Элементами поля $\mathbb{Q}_p$ являются классы эквивалентных последовательностей Коши рациональных чисел относительно p-адической нормы [1].

Построены модели основных элементарных фигур динамики цен на финансовых рынках, таких как линейная функция, ступенчатая функция и волновая модель Р. Н. Эллиотта. Сделана попытка создания методики по построению p-адических моделей и прогнозов, в соответствии с которой произведен анализ динамики индекса РТС [4].

Для динамики индекса РТС построены четыре модели — по месяцам, неделям, дням и часам. Определены основные типы прогнозов, полученных на основе p-адических моделей, — оптимистичный, пессимистичный, усредненный и прогноз продолжающегося развития. Сделаны выводы о точности как p-адических моделей в зависимости от таймфреймов, так и их прогнозов в зависимости от выявленных типов [4].

Найдены преимущества и недостатки p-адического анализа. Результаты исследований могут быть использованы для дальнейшего изучения волновых паттернов p-адическим отображением, применяемых не только к ценовым колебаниям, но и к другим экономическим процессам [4]. Кроме того, p-адические модели могут выступать в качестве инструмента технического анализа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каток С. Б.* P-адический анализ в сравнении с вещественным. М.: МЦНМО, 2004.
2. *Жарков В. М., Павлова Н. Н.* P-адическая аппроксимация ценовых рядов // Вестник Пермского университета. Сер. Информационные системы и технологии. 2009. Вып. 9(35). С. 25–29.
3. *Zharkov V.* Adelic theory of stock market // Proc. Perm Winter School 2011 "Market Risk and Financial Markets Modeling". Berlin, Heidelberg et.al.: Springer, 2012. P. 255–267.
4. *Симонов П. М., Филимонова С. А.* P-адическое моделирование динамики индекса РТС в зависимости от таймфреймов // Вестник Пермского университета. Сер. Экономика. 2016. Вып. 4(31). С. 74–85.

ВКЛЮЧЕНИЕ БЛОКА ИНВЕСТИЦИЙ В АГЕНТ-ОРИЕНТИРОВАННУЮ МОДЕЛЬ ЭКОНОМИКИ

Цыплаков А. А.

Новосибирский государственный университет,
Институт экономики и организации промышленного производства СО РАН,
Новосибирск, Россия; tsy@scadem.org

В разрабатываемую в ИЭОПП и НГУ агент-ориентированную межрегиональную многоотраслевую модель российской экономики (АОМММ, [1]) планируется добавить инвестиционный блок. Суть агент-ориентированного подхода состоит в имитационном моделировании множества децентрализованных агентов, взаимодействующих по определенным правилам (см. [2]). Особенностью АОМММ является то, что она в явном виде учитывает пространство, рассматривая торгующих друг с другом агентов, расположенных на карте. Агенты (фирмы, домохозяйства, товарные рынки, рынок труда и внешние рынки) принимают решения на основе микроэкономических моделей при ограниченной рациональности с учетом транспортных расходов.

Мы считаем важным при моделировании инвестиций учесть межотраслевые взаимодействия и поставить решения об инвестициях в зависимость от финансовых результатов деятельности фирм. Используемые в существующих моделях Eurace@Unibi и MABM-II подходы не отвечают этим требованиям.

Инвестиционный блок включает несколько частей. В модель вводятся два вида капитала, производимые отраслями “Обработка” и “Строительство” по имеющимся леонтьевским технологиям. У фирмы есть запасы капитала K_c каждого вида c. Они задают ограничения сверху на выпуск: $y \leq \max\{K_c - K_c^{\min}, 0\}/a_{Kc}$, где a_{Kc} — фондоёмкость, $K_c^{\min}$ — минимальный необходимый запас капитала. Капитал выбывает с постоянным коэффициентом δ_c и возмещается за счет инвестиций. Дискретность капитала и инвестиционные лаги не учитываются.

Важнейший аспект — принятие фирмой решения об объеме инвестиций. Основной вариант нашей модели подразумевает принятие такого решения на основе прогнозирования цен и спроса на продукцию и расчета дисконтированных денежных потоков.

Дополнение АОМММ инвестиционным блоком позволит изучать различные динамические процессы. Важным является то, что моделируемая экономика может как расти, так и сокращаться в результате независимых инвестиционных решений отдельных фирм и домохозяйств. Эти же решения обусловливают и изменения в отраслевой и пространственной структуре экономики.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Суслов В. И., Доможиров Д. А., Ибрагимов Н. М., Костин В. С., Мельникова Л. В., Цыплаков А. А.* Агент-ориентированная многорегиональная модель “затраты – выпуск” российской экономики // Экономика и математические методы. 2016. Т. 52, № 1. С. 112–131.
2. *Макаров В. Л., Бахтизин А. Р.* Социальное моделирование — новый компьютерный прорыв. М.: Экономика, 2013.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В МОДЕЛЯХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

Шананин А. А.

Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия; Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН, Москва, Россия; alexshan@yandex.ru

Основным трендом в мировой экономике, начиная с последней четверти XX века, был процесс глобализации, в результате которого на внутренних рынках развивающихся стран отечественные товары стали конкурировать с импортными аналогами. В тоже время экономическая статистика, например индексы Ласпейреса, и модели, используемые в прикладных исследованиях, такие как модели межотраслевого баланса В. В. Леонтьева, основывались на эмпирических гипотезах о постоянстве структуры потребления конечных товаров и производственных факторов. В условиях глобализации рынков и сопровождавшей её стандартизации товаров существенно выросла их взаимозаменяемость, и гипотезы о постоянстве структуры перестали выполняться. Вследствие этого собираемая и обрабатываемая статистика перестала адекватно отражать экономические процессы и появились проблемы с идентификацией общепринятых моделей. В докладе рассматривается проблема моделирования замещения товаров и обработки экономической статистики, а также связанные с ней обратные задачи.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (проект № 16-11-10246).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петров А. А., Поспелов И. Г., Шананин А. А.* Опыт математического моделирования экономик. М.: Энергоатомиздат, 1996.
2. *Шананин А. А.* Исследование одного класса производственных функций, возникающих при макроописании экономических систем // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1984. Т. 24, № 12. С. 1799–1811.
3. *Шананин А. А.* Исследование одного класса функций прибыли, возникающих при макроописании экономических систем // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1985. Т. 25, № 1. С. 53–65.
4. *Henkin G. M., Shananin A. A.* Bernstein theorems and Radon transform. Application to the theory of production functions // Translation of mathematical monographs. 1990. V. 81. P. 189–223.
5. *Шананин А. А.* Проблема интегрируемости и обобщенный непараметрический метод анализа потребительского спроса // Труды МФТИ. 2009. Т. 1, № 4. С. 84–98.
6. *Шананин А. А.* Исследование обобщённой модели чистой отрасли производства // Математическое моделирование. 1997. Т. 9, № 10. С. 73–82.
7. *Шананин А. А.* Двойственность для задач обобщенного программирования и вариационные принципы в моделях экономического равновесия // ДАН. 1999. Т. 366, № 4. С. 462–464.
8. *Карзанов А. В., Шананин А. А.* О стабильных соответствиях конечных множеств евклидова пространства и их приложениях // Экономика и математические методы. 2005. Т. 41, № 2. С. 111–112.
9. *Шананин А. А.* Непараметрический метод анализа технологической структуры производства // Математическое моделирование. 1999. Т. 11, № 9. С. 116–122.

РЕНТА КАК ОБЪЕКТ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Шестакова Н. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
nadine@math.nsc.ru

Двойственные оценки, которые получают ограничения на землю в линейно-программных моделях оптимизации размещения сельскохозяйственного производства, по своему экономическому смыслу имеют рентный характер. Анализ таких оценок в многопродуктовых моделях распределительного типа, где присутствует только один ограниченный ресурс — земля, привёл к новым качественным выводам, в том числе относительно взаимосвязи земельной ренты и цен на продукцию. Теоретические выводы, полученные из анализа линейно-программных задач, использованы при разработке балансовых моделей для исчисления оценок продукции, земельных и других ресурсов. В них реализована идея построения аналога двойственной задачи линейного программирования для некоторой фиксированной производственной программы. В частности, это может быть реально сложившееся размещение сельскохозяйственного производства, если оно рационально в общих чертах. Эти модели отражают основные связи между натуральными и стоимостными экономическими показателями. Они позволяют одновременно и взаимосвязанно находить рентные оценки земли и цены на продукцию, а также общий уровень цен, достаточный для бездотационных финансовых отношений в некоторой экономической системе, состоящей из территориальных объектов. Балансовые модели сохраняют основные свойства оптимизационных. Единство формулы цены на продукцию, включающей затраты земельных ресурсов на её производство по рентной оценке, демонстрирует преемственность моделей [1].

Балансовые модели могут служить удобным аналитическим инструментом для теоретического анализа проблем земельной ренты, а также использоваться для расчёта экономических нормативов, необходимых для государственного регулирования цен и доходов в сельском хозяйстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Булавский В. А., Шестакова Н. В.* Об исчислении рентных оценок // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2014. Т. 21, № 3. С. 4–10.

ПОЛИЭДРАЛЬНАЯ КОМПЛЕМЕНТАРНОСТЬ И ПРОБЛЕМА РАВНОВЕСИЯ В ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЯХ ОБМЕНА

Шмырев В. И.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
shvi@math.nsc.ru

Рассматривается класс задач о неподвижной точке, возникших при исследовании проблемы равновесия в линейных моделях обмена — задачи полиэдральной комплементарности. Это естественное обобщением задач линейной комплементарности. Задача задается парой двойственных друг другу полиэдральных комплексов ω и ξ и некоторым соответствием между их клетками: $R = \{(\Omega_i, \Xi_i)\}_{i=1}^r$, где $\Omega_i \in \omega$, $\Xi_i \in \xi$. Задача состоит в отыскании точки, принадлежащей пересечению клеток некоторой пары (Ω_i, Ξ_i).

При рассмотрении моделей обмена речь идет о полиэдральной комплементарности на симплексе цен σ. При этом возникающие точечно-множественные отображения являются в определенном смысле монотонно убывающими. Более того, задачам с фиксированными бюджетами отвечают потенциальные и логарифмически монотонные убывающие отображения. Такие отображения G характеризуются неравенством:

$$(p^2 - p^1, \ln q^2 - \ln q^1) \le 0, \qquad \forall p^1, p^2 \in \sigma, \quad \forall q^1 \in G(p^1), q^2 \in G(p^2).$$

Потенциальность позволяет свести проблему к задаче оптимизации на симплексе цен.

Теорема. *Равновесные цены модели задаются точкой минимума на σ выпуклой функции $\varphi(p) = (p, \ln p) - f(p)$, где f — потенциальная функция возникающего отображения.*

Рассматриваемый подход позволил предложить конечные алгоритмы для широкого класса моделей [1]. Получаемые на этом пути процедуры используют лишь хорошо известные элементы алгоритмов для транспортных задач. На их основе можно получить и итеративные методы для более сложных моделей, в частности для модели с сепарабельными кусочно-линейными функциями предпочтений участников [2].

В моделях с переменными бюджетами потенциальность утрачивается, и для них разработан более общий подход — метод встречных траекторий [3].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00108).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шмырев В. И.* Алгоритмы полиэдральной комплементарности для отыскания равновесия в линейных моделях конкурентной экономики // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2014. Т. 21, № 2. С. 84–101.
2. *Shmyrev V. I.* An iterative approach for searching an equilibrium in piecewise linear exchange model // Proc. 9th Int. Conf. "Discrete Optimization and Operations Research" (Lecture Notes in Computer Sciences, V. 9869). Heidelberg: Springer, 2016. P. 61–73.
3. *Shmyrev V. I.* A method of meeting paths for the linear production-exchange model // J. Appl. Ind. Math. 2012. V. 6, No 4. P. 490–500.

INTERACTION BETWEEN VARIOUS TYPES OF CONSUMERS AND POWER SUPPLY COMPANY

Aizenberg N. I.[1], **Voropai N. I.**[2], **Stashkevich E. V.**[3]

[1] *Melentiev Energy Systems Institute SB RAS, Irkutsk, Russia;*
ayzenberg.nata@gmail.com
[2] *Melentiev Energy Systems Institute SB RAS, Irkutsk, Russia;*
voropai@isem.ikr.ru
[3] *Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russia;*
evstashkevich@yandex.ru

There are several types of consumers that have different load management capabilities Θ — a set of n types of consumers, each will be denoted by $\theta \in \Theta$. There are K consumers in the model. The k-th consumer ($k = \overline{1, K}$) is defined by the demand function determined through the utility function $u_k\left(q_{tk}^{\theta}\right)$ and load at time t - q_{tk}^{θ}, as well as by a certain consumer type θ. The total utility is calculated as a sum of utilities over all time periods $t = \overline{1, T}$: $\sum_{t=1}^{T} u_k\left(q_{kt}^{\theta}\right)$. Each consumer has costs related to the payment for received power R^{θ}. The problem solved by each k-th consumer is maximization of a payoff from power purchase. A share of each type γ^{θ} can be determined as a ratio of the power consumed by load of type θ to all the power sold by the power supply company. The company does not have full information about the type of consumer but has an idea on the share of the consumer types.

The company establishes tariff R^{θ} for the θ-th consumer type according to the total load $\sum_{k=1}^{m^{\theta}} q_{kt}^{\theta}$ and function of costs $C\left(\sum_{k=1}^{m^{\theta}} q_{kt}^{\theta}\right)$, that are calculated for each time period t. In the case studies considered below, R^{θ} is a value of tariff for consumer type θ. The main objective of the company is to maximize profit.

We would like to address the problem in the situation of potential selection by each consumer of their tariff from a set of tariffs offered by the power supply company. There are the reasons why the “adverse selection” can occur. In this case this will happen when consumers of different types will choose the same tariff schemes, but without their load curve optimization. The formulated statement below pursues the aim to develop a tariff scheme where each consumer type selects “their” tariff optimally and manages their load.

$$\begin{cases} \pi = \sum_{\theta\in\Theta} \gamma^{\theta}\left(R^{\theta} - \sum_{t=1}^{T} C\left(\sum_{k=1}^{m^{\theta}} q_{kt}^{\theta}\right)\right) \to \max\limits_{R^{\theta} q_{kt}^{\theta}}; \\ \sum_{t=1}^{T} u_k\left(q_{kt}^{\theta}\right) - R^{\theta} \geq \bar{U}_k, \quad k \in [1, m^{\theta}],\ \theta \in \Theta; \\ \sum_{t=1}^{T} u_k\left(q_{kt}^{\theta}\right) - R^{\theta} \geq \sum_{t=1}^{T} u_k^{\theta}\left(q_{kt}^{o}\right) - R^{o}, \quad k, j \in [1, K],\ \forall\theta, o \in \Theta; \\ \sum_{\theta\in\Theta} \gamma^{\theta} = 1; \quad q_{kt}^{\theta} \geq 0,\ q_{kt}^{o} \geq 0;\ R^{\theta} \geq 0,\ R^{o} \geq 0,\ \gamma^{\theta} > 0. \end{cases}$$

The research proposes a methodology for the formation of tariffs in the retail electricity market. The methodology takes into account several factors that affect the demand-side management, namely: the presence of various types of consumers; the possibility of selecting a tariff type from several tariffs proposed by power supply company; the need to stimulate consumers to optimize their load during a day, in particular, to smooth peak load by shifting it to off-peak time; and the elimination of shortage risks. In our statement, the shortage is considered as a deviation of the actual consumption from the planned load, and, hence the emergence of the need to purchase the deficient electricity at higher prices.

GENERALIZED CONCAVITY AND GLOBAL OPTIMIZATION

Bykadorov I. A.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
Novosibirsk State University,
Novosibirsk State University of Economics and Management,
Novosibirsk, Russia; bykadorov.igor@mail.ru

We suggest an approach to solve special classes of multi-extremal problems — optimization the monotone combination (e.g., sum, product) of several functions, under which there are known the effective algorithms to optimize each of this item (e.g., each of these functions has some properties of generalized convexity).

The algorithm proposed is iterative. It realizes the idea of the branch-and-bound method, consists in successive correcting the bounds of optimal value of objective functions. Moreover, we use the methodology of multi-objective optimization, studying the image of Pareto boundary in the image space.

In each iteration, the total area of the region, guaranteed to contain the image optimal point, decreases at least twice. This allows us to discuss the effectiveness of the proposed approach.

We discuss the applicability to marketing models: optimization of communication expenditure [1] and the effectiveness of advertising [2], pricing [3]; to monopolistic competition models: retailing [4], investments in R&D [5], market distortion [6], and international trade [7].

REFERENCES

1. *Bykadorov I., Ellero A., Moretti E.*, "Minimization of communication expenditure for seasonal products," RAIRO, Oper. Res., **36**, No. 2, 109–127 (2002).
2. *Bykadorov I., Ellero A., Funari S., Moretti E.*, "Dinkelbach approach to solving a class of fractional optimal control problems," J. Optim. Theory Appl., **142**, No. 1, 55–66 (2009).
3. *Bykadorov I., Ellero A., Moretti E., Vianello S.*, "The role of retailer's performance in optimal wholesale price discount policies," Eur. J. Oper. Res., **194**, No. 2, 538–550 (2009).
4. *Bykadorov I. A., Kokovin S. G., Zhelobodko E. V.*, "Product diversity in a vertical distribution channel under monopolistic competition," Autom. Remote Control, **75**, No. 8, 1503–1524 (2014).
5. *Antoshchenkova I. V., Bykadorov I. A.*, "Monopolistic competition model: the impact of technological innovation on equilibrium and social optimality," Autom. Remote Control, **78**, No. 3, 537–556 (2017).
6. *Bykadorov I., Ellero A., Funari S., Kokovin S., Pudova M.*, "Chain store against manufacturers: regulation can mitigate market distortion," in: Proc. 9th Int. Conf. "Discrete Optimization and Operations Research" (Lecture Notes in Computer Sciences, Vol. 9869), Springer, Heidelberg, 2016, pp. 480–493.
7. *Bykadorov I., Gorn A., Kokovin S., Zhelobodko E.*, "Why are losses from trade unlikely?" Econ. Lett., **129**, 35–38 (2015).

THE HETEROGENEITY OF FIRMS BEHAVIOR AT OLIGOPOLY: PRICE-MAKERS AND PRICE-TAKERS

Filatov A. Yu.

Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia;
Irkutsk State University, Irkutsk, Russia;
alexander.filatov@gmail.com

The paper considers the model of strategic interaction of firms at a quantity oligopoly market. There are several price-makers maximizing profits using Cournot strategy, and also several price-takers obtaining outputs from the equivalence of price and marginal costs. The second strategy can be used due to some rational reasons, for example, unavailability of demand function, and competitors' cost functions essential for best response curves construction, or due to misunderstanding of its own market power and influence on the equilibrium parameters. Myopic behavior decreases profits comparing to Cournot firms if occurs unilaterally. But the competitors will adapt, and it can unexpectedly make the second strategy effective.

Let's assume that n oligopolists with quadratic cost functions $TC\left(q\right) = dq^2+cq+f$ interact at the homogeneous product market with inverse demand $p = a - bQ$. Let k firms use Cournot strategy and m other firms be price-takers. Several propositions were proved in the paper.

Theorem 1. *The optimum price-taker output always exceeds the optimum price-maker output. The ratio is fixed, doesn't depend on the number of firms, and is defined only by parameters of demand and cost functions b and d.*

Theorem 2. *If the total number of firms is fixed, and some price-makers become price takers, the outputs of all other competitors decrease, the total output increases, and the prices get lower.*

Theorem 3. *The only price-taker output is always greater than the Stackelberg leader one. The profit can be greater or lower than the original price-makers profits. In the last case, it's unprofitable to become price-taker.*

Theorem 4. *Coefficients a, c, f don't impact the profitability of firms transition from price-makers to price-takers. The ratio between coefficients b and d, number of firms n, and number of price-takers m impact.*

Theorem 5. *For any fixed number of price-takers m there is a certain total number of firms n_0, such that for $n \geq n_0$ there exists the interval $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$, where for $b = 2\alpha d$ it's better to be price-taker than price-maker. The interval is asymmetrically (more strongly to the right) extended under n increasing.*

It means from the economic point of view that the probability for price-taker to be efficient is not big, but increases in n and b, and decreases in m and d. So, it's better to be price-taker at a large market with inelastic demand and many firms with slowly increasing marginal costs. It's better for price-taker to be the only one firm with such a strategy.

The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-06-00071) and the European Union's Seventh Framework Program FP7/07-13/ under REA grant agreement number 609642.

THE INCREASING CONCENTRATION AT INDUSTRIAL MARKETS: THE SOCIAL WELFARE MAXIMIZATION AND POSSIBLE RISKS

Filatov A. Yu.[1], **Makolskaya Ya. S.**[2]

[1]*Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia;*
alexander.filatov@gmail.com
[2]*Irkutsk State University, Irkutsk, Russia;*
yana-makolskaya@yandex.ru

The paper considers market power at industrial markets. Using theoretical models and empirical data we will answer the following three questions: is there excessive or insufficient number of firms at a market in equilibrium, should we use regulation and what are the possible risks?

Most industries nowadays are high-concentrated markets where every producer maximizes profit taking into account a wide spectrum of the competitors' behavior strategies from price wars to collusion. A lot of books and papers are devoted to the different aspects of such oligopoly markets. The main feature of oligopoly is a small number of strategic firms interacted at a market. But there is a significant difference between duopoly and oligopoly with, for example, ten firms. So, the best strategies, equilibrium price and quantity, social welfare, and deadweight loss are strongly dependent on market concentration, and entry barriers created by the incumbent firms on the base of absolute cost advantages, increased returns to scale, access to resources and technologies limitation and government through the system of licenses and permissions for doing business.

There is a common opinion that entry barriers are always bad for society, because they decrease the number of firms, weaken competition, raise prices and decrease quantities. However we should understand that a lot of firms also mean duplicated fixed costs. Thus, free entry can lead to both situations: excessive and insufficient number of firms in equilibrium. The correct conclusion depends on the market structure, demand and cost functions, and features of strategic interaction between companies at a market.

The first result proposed in the paper is that socially effective number of firms is smaller than the equilibrium one for the wide spectrum of demand and cost functions, and also for different strategies of companies' behavior. This proposition is satisfied for the markets where output of each company decreases when the number of firms increases, and the competition gets stronger. Thus, the entry barriers, constructed by incumbent companies, do not always decrease social welfare. In some cases, it's even good for government not to stimulate excessive competition but on the contrary to restrict the entry of new companies to the market.

At the same time, there is a considerable danger of the increasing probability of collusion in a situation of number of firms limitation. So, we compared the losses caused by duplicated fixed costs, and by possible collusion, and showed that collusion is the lesser of two evils if the gap between "choke price" and marginal costs is smaller than a certain critical value connected with the share of fixed costs. The empirical research is also carried out on the base of the financial statistics of the biggest world corporations of different industries.

The research is supported by the RFBR grant no. 16-06-00071 and the European Union's Seventh Framework Program FP7/07-13/ under REA grant agreement number 609642.

MODELS OF MONOPOLISTIC COMPETITION WITH HETEROGENEOUS LABOR

Filatov A. Yu.[1], **Sokolovsky Yu. M.**[2]

[1]*Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia;*
alexander.filatov@gmail.com
[2]*Irkutsk State University, Irkutsk, Russia;*
sokolovskyyu@yandex.ru

The paper presents a tool for modeling monopolistic competition markets, based on Dixit – Stiglitz ideology but taking into account heterogeneity at labor market. We analyze several modifications of a two-sector general equilibrium model. Agriculture sector produces homogeneous good with constant returns to scale, and manufacture sector – continuum of horizontally differentiated varieties.

In the basic model with two levels of workers qualification their shares are determined endogenously on the base of comparison between higher wage of the skilled workers and heterogeneous education costs, also taking into account the labor mobility between manufacture and agriculture sector. The impact of the model parameters (ratio of fixed and variable costs, market size, heterogeneity in productivity, elasticity of substitution, etc.) on the obtained equilibrium prices, quantities, wages, number and size of firms, social welfare is investigated.

We also analyze some institutional restrictions on labor market. Particularly the model with fixed wages has been worked out and explored. The restrictions can be caused, for example, by government policy (uniform scale of wages, etc.) or asymmetric information when transactions between principals (firms) and agents (workers) take place. The mechanisms of effective workers stimulation, included firm profit reallocation, were investigated. The obtained equilibrium was compared with equilibrium in the basic model. The basic model was generalized for the case of continuous distribution of labor qualification.

The presented tool due to its simplicity and possibility to obtain non-trivial analytical results can be used for solution different problems and giving policy advices for both firms and market regulator. It's also possible to use it for empirical analysis of the data described monopolistic competition markets of different goods in different regions and countries, making forecasts of such markets dynamics, comparing different mechanisms of regulation, and investigation of international or interregional trade.

The authors were supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-06-00071) and the European Union's Seventh Framework Program FP7/07-13/ under REA grant agreement number 609642.

HOLISTIC THEORY OF MARKET DEMAND AND EQUILIBRIUM

Gorbunov V. K.

Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, Russia; vkgorbunov@mail.ru

The report is devoted to the problem of failures of the neoclassical Economics in its fundamental parts — the Demand Theory (DT) and the Equilibrium Theory (ET), and also to a way of the failures elimination. The contemporary DT is the axiomatic theory of rational and independent individuals. It doesn't correspond to reality and it is unsuitable means for creation of the theory of market (aggregate) demand (MD), which is of practical interest. The main direction of ET created by Leon Walras was developed on reductive (individualistic) basis and investigated by K. Arrow and G. Debreu in 1954. They proved existence of equilibrium prices, but in 1970th it was proved by H. Sonnenschein and others that almost any set of prices can be equilibrium set at natural, as then it seemed, assumptions about individual preferences!

Another, holistic (systemic) approach to the problem of MD was created by Gustav Cassel in 1918 [1]. He has rejected the individualistic DT of Walras, and described the MD explicitly as initial object. Cassel hasn't elaborated any theory of market demand and equilibrium. It was done by Abraham Wald in 1930th [2]. Wald has introduced an assumption on MD that provided the existence and uniqueness of equilibrium in the improved equilibrium model of Walras – Cassel. This assumption was rediscovered in 1938 by P. Samuelson as a principle of rationality and it was called the Weak Axiom (of revealed preference). However, in Economics this principle is being applied only for individual demand, and it isn't fulfilled for a sum of such demands except of unrealistic case when all individual preferences are similar and homothetic. Correspondingly, Wald's result for Walras – Cassel model was disqualified.

In our works [3]–[5] the holistic theory of MD has elaborated. Here the initial object is the “statistical ensemble of consumers” of a studied market. Rationality of this ensemble is a hypothesis being verified on the trade statistics. The model of MD generally is the choice rule corresponding to a preference vector-field at the expense constraint. In case of potentiality of the field its potential is a utility function, and the model is the customary utility maximization. The theory of MD provides validation of the Wald's condition for a MD and of the holistic equilibrium models of Cassel type. It will be demonstrated for our modification of the Walras – Cassel – Leontief equilibrium model suggested by M. Morishima [6].

The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 14-06-00401).

REFERENCES

1. *Cassel G.*, The Theory of Social Economy, Augustus Kelley, New York (1967, Germ. Orig. 1918).
2. *Wald A.*, “On some systems of equations of mathematical economics,” Econometrica, **19**, No. 4, 368–403 (1951, Germ. Orig. 1936).
3. *Gorbunov V. K.*, Mathematical Model of Consumers' Demand: Theory and Applied Potential [in Russian], Economika, Moscow (2004).
4. *Gorbunov V. K.*, “On the theory of market demand: regularity and economic equilibrium,” Econ. Nauka Sovrem. Ross. [in Russian], No. 4, 19–36 (2013).
5. *Gorbunov V. K.*, Consumers' Demand: Analytical Theory and Applications [in Russian], UlSU Press, Ulyanovsk (2015).
6. *Morishima M.*, Equilibrium, Stability, and Growth: A Multi-Sectoral Analysis, Clarendon Press, Oxford (1964).

EFFECTIVE PRODUCTION FUNDS AND PRODUCTION FUNCTIONS: SIMULTANEOUS ESTIMATION AND CONSTRUCTION

Gorbunov V. K.[1], **Lvov A. G.**[2]

Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, Russia;
[1]vkgorbunov@mail.ru, [2]aglvov@mail.ru

Effective production funds (EPFs) of a region, country, and sectors of economy are a part of balance (inventory) funds participating in creation of goods and services. In production functions (PFs) representing complex production objects, the effective funds, but not balance ones, have to be used. A method for the construction of standard PFs, which have a value of EPFs as one of factors, was suggested in [1], for the case when production statistics contains production investment data instead of or together with balance funds ones. The estimation of PF's parameters uses the EPF dynamic equation defined by investments as well as a depreciation rate and a lag of investment capitalization. The latter values and the initial value of EPFs should be estimated simultaneously with a PF's parameters.

The problem of simultaneous estimation of the PF's and the dynamics parameters is an ill-conditioned one. It should be regularized with appropriate usage of additional expert information and non-trivial optimization technique. In [1] the calculation problems were overcome by the subsequent complication of classes of the PFs under estimation starting from the simplest Cobb and Douglass one. Also in the paper a special variant of the continuation method [2, sec. 7.5] was suggested which can overcome complexity of nonlinear minimization.

The work [3] develops the approach of [1] in the next respects. A coefficient of the realizability of investments is introduced in the dynamics equation. This coefficient represents a ratio of really used capital investments which is less of one because of corruption. As an additional means for overcoming of computational complexities, the transform to the index form of PFs was used. The latters are the production functions of the same specification which variables are the ratios of the current values of the original variables with respect to their initial values.

In this paper, a new regularization condition on the initial and final values of the EPFs is being introduced. It will be presented the results of realization of the proposed estimation model and techniques to real data for the gross regional product (GRP) and production factors which are labor and/or energy, with given values of production investments, for Volga and Ural Federal Regions.

The authors were supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-06-00372).

REFERENCES

1. *Gorbunov V. K., Lvov A. G.*, "The construction of production functions using investment data" [in Russian], Ekonomika i Matematicheskie Metody, **48**, No. 2, 95–107 (2012).
2. *Ortega J. M., Rheinboldt W. C.*, Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, Academic Press, New York, London (1970).
3. *Gorbunov V. K., Krylov V. P.*, "Region effective production assets and their assessment by the production function method" [in Russian], Ekonomika Regiona, No. 3, 334–347 (2015).

IMPACT OF RETIREMENT ON HEALTH IN RUSSIA

Kapelyuk S. D.

Siberian University of Consumer's Cooperation, Novosibirsk, Russia;
skapelyuk@bk.ru

In recent years, many countries placed an increase in retirement age at the center of the discussion hoping to benefit the social security budgets. However, the prolongation of working lives could worsen the health. In such case, there would be the decline in the quality of life of the elderly and the increase of the health care expenditures that in turn could adverse the gains for social security budgets. Thus, an evaluation of the impact of retirement on health is relevant for public policy. Using Russia Longitudinal Monitoring Survey (RLMS-HSE) data from 1994 to 2013, this study investigates the impact of retirement on health in Russia. The Russian case is remarkable due to relatively low life expectancy and low retirement age. Assessing the effect of retirement on health is challenging because causality also runs in the opposite direction as poor health could lead to earlier retirement. The baseline identification strategy is based on the instrumental variables method that helps to overcome the endogeneity problem. To instrument retirement, I use the eligible retirement age that varies for different categories of employees. I also apply data on retirement expectations from previous waves of the panel and spouse's labor market participation as additional instrumental variables. The results show significant health-reducing effects of retirement. This effect is observed only for full retirees and does not exist for those who move into part-time retirement. The result is robust to applying different health measures and adjusting for attrition bias. The effect of retirement on health is most significant for males, highly educated, married individuals, those living in urban area, and individuals with low initial health level. To explain the evidence of the negative impact I investigate the channels of retirement impact on health. In contrast to the results obtained in previous studies of retirement impact in Western countries [1]–[3], I find that the retirement does not lead to the significant changes in the lifestyle. However, I discover the channels that are not described in previous literature. Specifically, I find that following the retirement the tobacco consumption shifts towards cheaper products that could be more harmful to health.

The author was supported by an individual grant no. 14-5571 from the Economics Education and Research Consortium, Inc. (EERC), with funds provided by the Global Development Network. Views and opinions expressed in this paper do not necessarily represent those of the Eurasia Foundation, the US Agency for International Development, the World Bank Institution, the Global Development Network and the Government of Sweden. The author thanks James Leitzel, Irina Murtazashvilli, the participants of the EERC Workshops, 2016 Asian Meeting of the Econometric Society, VIII Russian Summer School in Labour Economics, 2nd International Russia Longitudinal Monitoring Survey of HSE User Conference, Fall Workshop “International Trade and Urban Economics,” Workshop on Health and Labour Policy Evaluation, for very helpful comments. The author is solely responsible for all errors.

REFERENCES

1. *Dave D., Rashad I., Spasojevic J.*, “The effects of retirement on physical and mental health outcomes,” Southern Economic Journal, **75**, No. 2, 497–523 (2008).
2. *Insler M.*, “The health consequences of retirement,” Journal of Human Resources, **49**, No. 1, 195–233 (2014).
3. *Eibich P.*, “Understanding the effect of retirement on health: mechanisms and heterogeneity,” Journal of Health Economics, **43**, 1–12 (2015).

ASYMPTOTICALLY STABLE OUTPUT OF A MULTIDIMENSIONAL NONLINEAR OBJECT INTO A GIVEN SET OF STATES

Kolesnikova S. I.[1], **Dubina N. D.**[2], **Egorov S. A.**[3]

National Research Tomsk State University, Tomsk, Russia;
[1]skolesnikova@yandex.ru, [2]dubina-nina@mail.ru,
[3]serezha-egorov-93@mail.ru

Control object is represented by a system of ordinary differential or difference equations with a partially unknown description, e.g. [1], [2]:

$$\dot{x}(t) = f(x; u), \quad \Psi(x(t)) = 0,$$

$$J = \sum_{i=1}^{m} \int_{0}^{\infty} ((\Psi_i(x(t))^2 + \omega^2(\dot{\Psi}_i(x(t)))^2)dt \to \min. \tag{1}$$

The vectors $x, f \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $m \leq n$, from (1) are the vectors of state and of control, respectively; some components of the vector $f \in \mathbb{R}^n$ contain uncertainty as an unknown bounded function of time; $\Psi(x)$ is target macro variable; J is criterion of quality control.

It is assumed that the following conditions are right: 1) there is a global stability of the target system for the initial model; 2) target manifold can be defined analytically with implicit description; 3) all solutions of the initial system are bounded.

Basic provisions of the algorithm for constructing control of an object with incomplete description

1) Control structure in accordance with the classical method of analytical constructing of aggregated regulators is formed.

2) The replacement of the unknown description with the upper bounds of the state in the regulator is carried out.

3) Problem of achieving the target manifold is posed and an algorithm based on the non-linear adaptation method is used, which guarantees the output of the control object to a neighborhood of the given manifold.

Solved application problems

1) Nonlinear control object modeling the process of competition between two firms (private and state enterprises) that produces homogeneous products is considered.

2) Nonlinear control object modeling the activity of a firm, represented by the equations of change of three variables: X_1 is employee costs, X_2 is capital, X_3 is costs for new technologies, is considered.

Control systems for the above mentioned objects are designed and the results of numerical simulation are presented.

The authors were supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 17-08-00920).

REFERENCES

1. *Kolesnikov A. A. (ed.),* Synergetics and Problems of Control Theory: Collected Articles [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2004).
2. *Kolesnikova S. I.,* "Nonlinear regulator with disturbance compensation," Optoelectron. Instrument. Proc., **51**, No. 4, 408–416 (2015).

MATHEMATICAL ECONOMICS AS DRAWING ART FOR MULTIDIMENSIONAL SPACES

Kozyrev A. N.

Central Economics and Mathematics Institute RAS,
Moscow Institute of Physics and Technology (State University),
Moscow, Russia; kozyrev@cemi.rssi.ru

Mathematical Economics is not applied to the real economy and in this sense it is an art but not a science. More precisely this is some kind of drawing art for multidimensional spaces. We get the simplest way to demonstrate this thesis with theorems about number of equilibria for regular economies [1].

Pure exchange economy with l goods and m agents can be defined by the set of utility functions $\mathbf{u} = \{u_i\}_{i=1}^m$, on $\mathbb{R}^l_+$ and initial endowment vector $\mathbf{w} = \{w_i\}_{i=1}^m$. Consumption bundle for $i-$agent is a vector $x_i \in \mathbb{R}^l_+$ for every $i \in M = \{1, \ldots, m\}$ and distribution of goods is an element of

$$X(\mathbf{w}) = \Big\{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in (\mathbb{R}^l_+)^m | \sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m w_i\Big\}.$$

The price vector is any vector p from $S^{l-1} = \{p \in \mathbb{R}^l | \|p\| = 1\}$. The equilibrium for the market $(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ is a pare $(\bar{p}, \bar{\mathbf{x}}) \in S^{l-1} \times X(\mathbf{w})$, such that:

$$u_i(\bar{x}_i) = \max\{u_i(x_i) | x_i \in \mathbb{R}^l_+, \bar{p} \cdot x_i \le \bar{p} \cdot w_i\}; \quad \bar{p} \cdot \bar{x}_i = \bar{p} \cdot$$

for every $i \in M$, were u_i on $\mathbb{R}^l_+$ is defined as

$$u_i(x_i) = \min_{j \in J_i} v_{ij}(x_i), \;\; x_i \in \mathbb{R}^l_+,$$

where v_{ij} for all $j \in J_i$ twice continuously differentiable at $\mathbb{R}^l_+$. Differentiability of a function on the boundary of the $\mathbb{R}^l_+$ we understand as functions v_{ij} defined in some neighborhood of $\mathbb{R}^l_+$ and two functions coincides on $\mathbb{R}^l_+$, are not distinguished. If the pare $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, were $\mathbf{v} = \{v_i\}_{i=1}^m$ and $v_i = \{v_{ij}\}_{j \in J_i}$, are identified with the pure exchange model that are generated by this pare then we can understand this model as a map v_i from $\mathbb{R}^l_+$ to $\mathbb{R}^{J_i}$ with coordinates functions $v_{ij}, j \in J_i$, and the pare $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ is a point in the space

$$E = \prod_{i=1}^m C^2_s(\mathbb{R}^l_+, \mathbb{R}^{J_i}) \times int(\mathbb{R}^l_+)^m.$$

Theorem. *There exists an open everywhere dense subset $E_{\pitchfork}$ of E such that for any market $(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ from $E_{\pitchfork}$ the set of equilibria is finite.*

Remark. No problem with equilibrium on the border and with using min operation in the definition of utility functions. It is easy to demonstrate these in Edgeworth box by simple drawing. But in multidimensional space we have to use parametric transversality theorems [2] and Whitney topology [3].

REFERENCES

1. *Nagata R.*, Theory of Regular Economies, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore (2001).
2. *Abraham R., Robbin J.*, Transversal Mappings and Flows, W. A. Benjamin Inc., New York, Amsterdam (1967).
3. *Trotman D. J. A.*, “A transversality property weaker then Witney (A)-regularity,” Bull. London Math. Soc., **8**, No. 3, 225–228 (1976).

DETERMINATION OF THRESHOLD VALUES FOR THE SOLUTION OF THE MULTIPARAMETRIC PROBLEM OF ASSESSING THE EFFICIENCY OF GEOLOGICAL EXPLORATION

Milyayev D. V.[1], Kidanova O. A.[2], Dushenin D. I.[3]

Siberian Research Institute of Geology, Geophysics and Mineral Resources, Novosibirsk, Russia;
[1]mdv@sniiggims.ru, [2]kidanova@sniiggims.ru, [3]dushenin@sniiggims.ru

In many oil and gas bearing provinces in Russia with the depletion of highly productive hydrocarbon deposits the main prospects for the growth of oil and gas resources are attributed to hard-to-recover reserves [1], [2]. With a high level of development costs these reserves are unprofitable, high-risk financing items. In the current situation, the development of a methodology for assessing the profitability of the field, based on an analysis of a set of significant parameters, with which the greatest uncertainty and risks are associated [3], acquires particular urgency. The paper considers a method for finding threshold values for the function of net discounted income [4], [5].

In the framework of this work, the main problems and prospects for the development of the Russian oil and gas sector are identified. The main methods for assessing the profitability of hydrocarbon facilities are considered [6]. The example of the Kuonamsky suite (Eastern Siberia) shows the application of the cost method for estimating the value of technologies for developing hard-to-recover shale oil reserves. The advantages and disadvantages of this approach are revealed. An alternative method for assessing the profitability of oil and gas projects is proposed. A computational algorithm for solving the problem is presented.

REFERENCES

1. *Kryukov V. A.*, “The formation of regulation system aimed to develop more complex and less conventional hydrocarbon sources” [in Russian], Georesources, No. 4, 261–270 (2016).
2. *Shafranik Y. K., Kryukov V. A.*, Petroleum Sector in Russia: A Difficult Path to Diversity [in Russian], Pero Press, Moscow (2016).
3. *Krasnov O. S.*, “Theory and practice of probabilistic assessment of geological risks and uncertainty in the preparation of oil and gas reserves” [in Russian], Petroleum Geology – Theoretical and Applied Studies, No. 4, 1–30 (2009).
4. *Bogatkina Y. G., Ponomareva I. A., Yeremin N. A.*, Application of Information Technologies for the Economic Evaluation of Oil and Gas Investment Projects [in Russian], MAKS Press, Moscow (2016).
5. *Leonard D., Long N. V.*, Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics, Cambridge University Press, New York (1992).
6. *Gert A. A., Milyayev D. V.*, “Methodology of geological and economic assessment of hydrocarbon resources and its application to Eastern Siberia and the Republic of Sakha (Yakutia)” [in Russian], Mineral Resources of Russia, Economics and Management, No. 2, 31–41 (2015).

MODELING RESOURCE DEVELOPMENT OF MEGA PROJECT WITH THE RESTRICTIONS ON THE DISCOUNT FEE FOR THE USING RAW MATERIALS

Plyaskina N. I.

Institute of Economics and Industrial Engineering SB RAS, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia; pliaskina@hotmail.com

The offered research is directed to use of the device of network models for an assessment of alternative scenarios of implementation of the investment program of the megaproject. The network model is represented as an oriented graph $G = (V, U)$, where $V = \{V_j, j = 1, \ldots, n\}$ is the set of graph vertices corresponding to works $j \in J$, U is the set of arcs. It is required to find the optimal schedule of work taking into account restrictions on the warehouse resources $k \in K$ (K is types of resources: raw materials, materials with a long shelf life, investments, etc.) and a discount for the use of raw materials (characterizes the profitability of this project for the investor), at which the minimum value of objective function is achieved.

The considered problem can be written formally as follows:

$$C_{\max} = \max_j (s_j + p_j) \to \min,$$

where $C_{\max}$ is the project completion time, s_j is the start time of the j-th work, p_j is the duration of the j-th works;

1. $s_i + p_i \le s_i$ for $i \le j$ — the precedence constraints;
2. $\sum\limits_{\tau=1}^{t} \sum\limits_{j \in J(\tau)} r_{jk} \le \sum\limits_{\tau=1}^{t} q_{k\tau}$ for $\forall t \in [1, C_{\max}]$ — the warehouse resources constraints, where r_{jk} is the consumption intensity of the k-th resource by work j, $k \in K$, q_{kt} is the resource availability k at time t, $s_i + p_i \le T$, T is a later schedule [1], $J(t) = \{j \mid s_j < t \le s_j + p_j\}$ is the set of works performed at time t;
3. $\sum\limits_{k \in K} \sum\limits_{\tau=1}^{C_{\max}} \sum\limits_{j \in J(\tau)} r_{jk} \cdot c_{k\tau} \cdot \alpha^{\tau-1} \le S^0$ — constraint on the discount fee for the use of raw materials, where $c_{k\tau}$ is the payment for the use of the k-th resource at time t, α is the discount coefficient, $0 < \alpha \le 1$, $\alpha = \frac{1}{1+\beta}$, β is the bank interest;
4. $s_j \in Z^+$, $j \in J$, — non negativity constraints.

The following statement was formulated and proven: the discount for the use of resources reaches its minimum with the T-late schedule, $s_i + p_i \le T$, $\forall i \in J$, which allows us to search for the optimal schedule among the late allowable schedules by the dichotomy method. The algorithm is implemented for a discrete case of two resources.

REFERENCES

1. *Gimadi E. Kh., Glebov N. I.,* Mathematical Models and Methods of Decision Making [in Russian], NSU, Novosibirsk (2008).

A NEW APPLICATION OF THE CLONE METHOD IN CSC: A POSSIBILITY THEOREM FOR RANDOMIZED SOCIAL WELFARE FUNCTIONS

Polyakov N. L.

Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russia; nlpolyakov@fa.ru

We consider one of standard problems of Computational Social Choice (CSC). Let A be a finite set (of alternatives) of cardinality $m \geq 3$, and let $N = \{1, \dots, n\}$ be a non-empty finite set (of voters). The set of all choice functions defined on the set $[B]^2$ of all two-element subsets of a set B is denoted by $\mathfrak{C}_2(B)$. Any function $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_2(A)$ represents *preferences* of a voter. A function $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_2(A)$ is *rational* if $\mathfrak{c}(\{a, b\}) = \max_{\prec}(a, b)$ for some linear order $\prec$. The set of all rational preferences is denoted by $\mathfrak{R}(A)$. A *social welfare function* (SWF) is a function $w : (\mathfrak{C}_2(A))^n \to \mathfrak{C}_2(A)$. A SWF w satisfies the *Arrow's conditions* if there is a *conservative* function $f : A^n \to A$ such that $w(\mathfrak{c}_1, \dots, \mathfrak{c}_n)(p) = f(\mathfrak{c}_1(p), \dots, \mathfrak{c}_n(p))$ for all $p \in [A]^2$.

The *Arrow's impossibility theorem* states that any function that satisfies the Arrow's conditions and preserves the set $\mathfrak{R}(A)$ is a dictatorship (a projection). We describe another natural class of SWF preserving $\mathfrak{R}(A)$.

A *reordering function* F is a function defined on the set of all couples $(\mathfrak{d}, a)$ (where $B \subset A$, $\mathfrak{d} \in \mathfrak{C}_2(B)$ and $a \in A \setminus B$) such that $F(\mathfrak{d}, a) \in \mathfrak{C}_2(B \cup \{a\})$ and the restriction of $F(\mathfrak{d}, a)$ to $[B]^2$ coincides with $\mathfrak{d}$. A reordering function F is *rational* if $F(\mathfrak{d}, a)$ is rational for any rational $\mathfrak{d} \in \mathfrak{C}_2(B)$. *Flexible preferences* is a couple $(\mathfrak{c}, F)$ where $\mathfrak{c} \in \mathfrak{C}_2(A)$ and F is a rational reordering function.

Let f be a conservative n-ary function on A and let $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)$ be a numeration of A. An *iterative averaging procedure* (IAP) $\mathcal{P}^f_{\mathbf{a}}$ is defined by recursion as follow. For any n-tuple $\Pi = ((\mathfrak{c}_1, F_1), \dots, (\mathfrak{c}_n, F_n))$ of flexible preferences

(*i*) $\mathcal{P}^f_{\mathbf{a}}(\Pi, 1)(\{a_1, a_2\}) = f(\mathfrak{c}_1(\{a_1, a_2\}), \dots, \mathfrak{c}_n(\{a_1, a_2\}))$;

(*ii*) $\mathcal{P}^f_{\mathbf{a}}(\Pi, k+1)(p) = f(F_1(\mathfrak{d}, a_{k+2})(p), \dots, F_n(\mathfrak{d}, a_{k+2})(p))$, where $\mathfrak{d} = \mathcal{P}^{\mathbf{f}}_{\mathbf{a}}(\Pi, k)$, $p \in [\{a_1, \dots, a_{k+2}\}]^2$.

An IAP models a multi-round social decision making in which before each round voters reorder alternatives in accordance to an intermediate outcome.

Now we can define a large class of SWF. Let θ be a function on $\mathfrak{C}_2(A)$ that for each preferences $\mathfrak{c}$ returns a rational reordering function $F_{\mathfrak{c}}$. A function θ represents a fixed behavior of a voter in the situation of forced reordering of prior preferences. We define a SWF w_f by $w_f(\mathfrak{c}_1, \dots, \mathfrak{c}_n) = \mathcal{P}^f_{\mathbf{a}}((\mathfrak{c}_1, F_{\mathfrak{c}_1}), \dots, (\mathfrak{c}_n, F_{\mathfrak{c}_n})), m-1)$. The SWF w_f has two implicit parameters θ and $\mathbf{a}$, of which $\mathbf{a}$ is regarded as random (it plays the part of a *sortition*). The main property of SWF w_f does not depend on these parameters.

Theorem. *A SWF w_f preserves rational preferences if and only if f belongs to the clone on A generated by all majority finction.*

We can obtain the SWF w_f with sufficiently good properties by choosing a parameter θ. In some ways, this result opposite to the Arrow's impossibility theorem and even to the Condorcet's paradox.

The main result was obtained using the *clone method* in CSC proposed by S. Shelah [1] and developed by the author (see, for example, [2]).

REFERENCES

1. *Shelah S.*, "On the Arrow property," Adv. Appl. Math., **34**, 217–251 (2005).
2. *Polyakov N. L., Shamolin M. V.*, "On a generalization of Arrow's impossibility theorem," Dokl. Math., **89**, No. 3, 290–292 (2014).

FORD EFFECT IN OLIGOPOLY: WHEN THE KNOWLEDGE IS POWER?

Sidorov A. V.[1], **Parenty M.**[2], **Thisse J.-F.**[3]

[1] *Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;* alex.v.sidorov@gmail.com

[2] *ECARES, Bruxelles, Belgium;* mathieu.parenti@ulb.ac.be

[3] *CORE-UCLouvain, Louvain-la-Neuve, Belgium;* jacques.thisse@uclouvain.be

The paper studies the detailed comparison of the Social welfare, measured as indirect utility, under two types of imperfect competition in a general equilibrium model. The key feature of this model is that the firms' profit is uniformly distributed across consumers, thus the strategic choice of firms affects also on consumers' income, and consequently, on demand. The standard Bertrand competition assumes the myopic income-taking behavior of firms, another type of behavior (so called, *Ford effect*, see [1]) implies that firms allow for dependence of profits on their strategic choice. The first result we present is that considering the Ford effect provides to firms more market power, which is agreed with the folk wisdom "Knowledge is power." As a measure of market power we use a *Lerner index*, which is, by definition, the relative excess of equilibrium prices over marginal cost. Another folk wisdom implies that an increasing of the firms' market power leads to the the diminishing of consumers' well-being (in terms of indirect utility.) We show that this is not true in general. This is accomplished in a simple general equilibrium model where consumers are endowed with separable preferences. This model was introduced in paper [2], where the Ford effect was ignored and firms were treated as *income-takers*. We find the sufficient condition in terms of the representative consumer preference providing the "intuitive" behavior of the indirect utility and show that this condition satisfies the classes of utility functions, which are commonly used as examples (e.g., CES, CARA and HARA). Moreover, we provide sufficient condition and series of examples, for the "counter-intuitive" behavior of indirect utility, when the Bertrand equilibrium under Ford effect provides the higher amount of the consumer's welfare than under the standard Bertrand competition. Here superscript F stands for Ford effect.

Proposition 1. *Let number of consumers L be sufficiently large, then the equilibrium prices, outputs, and numbers of firms are ordered as follows $\bar{p}^F(L) > \bar{p}(L)$, $\bar{q}^F(L) < \bar{q}(L)$, $\bar{n}^F(L) > \bar{n}(L)$.*

To determine an impact of Ford effect on welfare (indirect utility) $\bar{V}$, let's consider the following characteristics of elementary utility function $u(x)$:

$$\rho_u \equiv -\lim_{x\to 0}\frac{xu''(x)}{u'(x)},\ \delta_u \equiv \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{xu'(x)}{u(x)}+\frac{xu''(x)}{u'(x)}}{x}.$$

Proposition 2. *Let $\delta_u < \rho_u$, then inequality $\bar{V} > \bar{V}^F$ holds. Let $\delta_u > \frac{\rho_u}{1-\rho_u}$, then an inequality $\bar{V}^F > \bar{V}$ holds.*

The authors were supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 15-06-05666).

REFERENCES

1. *d'Aspremont C., Dos Santos Ferreira R., Gérard-Varet L.*, "On the Dixit–Stiglitz model of monopolistic competition," The American Economic Review, **86**, No. 3, 623–629 (1996).
2. *Parenti M., Sidorov A. V., Thisse J.-F. , Zhelobodko E. V.*, "Cournot, Bertrand or Chamberlin: Toward a reconciliation," Int. J. Econ. Theory, **13**, No. 1, 29–45 (2017).

THE GEOMETRIC ARBITRAGE AND PRICING IN THE FINANCIAL MARKET WITH TRANSACTION COST

Tang W.[1], **Zhao P.**[2]

Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, People's Republic of China;
[1]wanxiaotang92@163.com, [2]pbzhao@njust.edu.cn

We consider the no-arbitrage condition in the financial market with transaction cost by applying geometric arbitrage theorem (GAT). When the investors buy or sell the asset, they have to pay some extra money. GAT rephrases classical stochastic finance in stochastic differential geometric terms in order to characterize arbitrage. In this paper, we also model the market as principal fibre bundles and then construct the appropriate connection. So, we could characterize arbitrage by curvature in the financial market with transaction cost by using the idea of the GAT approach. At last, we consider an asset model whose dynamics is given by a multidimensional Ito-process to extend the Black–Scholes PDE to the market with transaction cost allowing arbitrage.

СЕКЦИЯ 11

Теоретическая физика

Тезисы докладов

SECTION 11

Theoretical Physics

Abstracts

АДАПТАЦИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА – ПАРКЕРА – МОФФАТА К ОПИСАНИЮ ЕСТЕСТВЕННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ

Аксенов В. В.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; aksenov@omzg.sscc.ru

В связи с гидромагнитными эффектами, наблюдаемыми в атмосфере Земли ($j = 0,\ \ \nabla \times H \neq 0,\ \ E_z \neq 0$), стандартными уравнениями Максвелла пользоваться *уже* нельзя.

В связи с малыми критериями подобия на Земле (магнитные числа Рейнольдса $R_{em} \approx 10^3 \div 10^5$) полномасштабной теорией гидромагнитной электродинамики — *ещё* нельзя. Но гидромагнитные эффекты на Земле наблюдаются.

Поэтому решена проблема определения тороидальных несиловых и полоидальных силовых магнитных и электрических полей. Затем найдены источники этих полей на Земле.

Кроме того, удалось:

– Доказать аналог теоремы Гельмгольца для восстановления тороидального и полоидального гидромагнитных полей по нормальной компоненте полоидального поля на поверхности шара.

– Доказать теорему о полном разделении электромагнитных полей по данным наблюдений на шаре (теорема Гаусса – Шмидта).

– Разработать алгоритмы интерпретации данных МГГ и всемирной магнитной съёмки.

– Решить обратные задачи восстановления источников ЭМП на Земле путём подавления математической некорректности с помощью введения дополнительной физической информации.

– Скорректировать уравнения Максвелла – Паркера – Моффата до их пригодности в прикладном геомагнетизме.

НА КАКИХ РАССТОЯНИЯХ ПРОИСХОДИТ РОЖДЕНИЕ ЛЁГКИХ СКАЛЯРНЫХ МЕЗОНОВ В РАДИАЦИОННЫХ РАСПАДАХ ϕ-МЕЗОНА

Ачасов Н. Н.[1], Киселёв А. В.[2]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
[1]achasov@math.nsc.ru, [2]kiselev@math.nsc.ru

Многое говорит о том, что лёгкие скалярные $a_0(980)$ и $f_0(980)$ мезоны являются компактными четырёхкварковыми состояниями. Наивная двухкварковая модель сталкивается с такими трудностями, что экзотическая природа этих частиц практически не оспаривается. В числе прочих, были попытки объяснить свойства $a_0(980)$ и $f_0(980)$ в рамках модели $K\bar{K}$ молекулы, в которых лёгкие скаляры являются связанными состояниями пары каонов.

В конце 1990-х годов экспериментально были обнаружены распады $\phi(1020) \to a_0(980)\gamma$ и $\phi(1020) \to f_0(980)\gamma$, их интенсивность оказалась относительно высокой, что подтверждало четырёхкварковую природу $a_0(980)$ и $f_0(980)$ и противоречило гипотезе каонной молекулы.

В работах [1], [2] утверждается, что наблюдаемые в эксперименте относительно высокие интенсивности распадов $\phi(1020) \to a_0(980)\gamma$ и $\phi(1020) \to f_0(980)\gamma$ могут быть объяснены в рамках гипотезы каонной молекулы. В докладе, основанном на работах [3], [4], показано, что это утверждение неверно и основано на некорректном применении интегрирования по частям. Дело в том, что исходный интеграл, дающий вклад в амплитуды процессов, набирается в основном в релятивистской области, что означает неприменимость нерелятивистского подхода каонной молекулы и некорректность интегрирования по относительному импульсу до бесконечности. Однако после интегрирования до бесконечности по частям новый интеграл быстро сходится, и авторам показалось, что это подтверждает применимость подхода. Очевидно, что это не так: сходящийся интеграл может быть преобразован в равный быстро сходящийся, но подынтегральное выражение уже не будет распределением по импульсу.

Можно отметить, что в настоящее время модель каонной молекулы противоречит уже тому, что $a_0(980)$ и $f_0(980)$ интенсивно рождаются в реакциях с большой передачей импульса, что невозможно в случае “рыхлой” молекулы.

Работа выполнена при поддержке Президентского гранта № НШ-5362.2006.2 для ведущих научных школ и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07-02-00093). А.В.К. благодарит за поддержку фонд “Династия” и МЦФФМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kalashnikova Yu. S., Kudryavtsev A. E., Nefediev A. V., Hanhart C., Haidenbauer J.* The radiative decays $\phi \to a_0/f_0$ in the molecular model for the scalar mesons // Eur. Phys. J. A, Hadrons Nuclei. 2005. V. 24, No 3. P. 437–443.
2. *Kalashnikova Yu. S., Kudryavtsev A. E., Nefediev A. V., Hanhart C., Haidenbauer J.* Comment on “Once more about the $K\bar{K}$ molecule approach to the light scalars” // Phys. Rev. D. 2008. V. 78, No 5. P. 058501-1–058502-4.
3. *Achasov N. N., Kiselev A. V.* Once more about the $K\bar{K}$ molecule approach to the light scalars // Phys. Rev. D. 2007. V. 76, No 7. P. 077501-1–077501-3.
4. *Achasov N. N., Kiselev A. V.* Reply to the «Comment on “Once more about the $K\bar{K}$ molecule approach to the light scalars”» // Phys. Rev. D. 2008. V. 78, No 5. P. 058502-1–058502-2.

СИЛЬНОЕ НАРУШЕНИЕ ИЗОТОПИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ ПРИ РОЖДЕНИИ ЛЕГКИХ СКАЛЯРНЫХ МЕЗОНОВ

Ачасов Н. Н.[1], Шестаков Г. Н.[2]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
[1]achasov@math.nsc.ru, [2]shestako@math.nsc.ru

Обсуждается нарушение изотопической симметрии как инструмент изучения механизмов рождения и природы лёгких скалярных мезонов [1]. Речь идёт об эффектах нарушения изоспина, амплитуда которых $\sim \sqrt{m_d - m_u}$ (а не как обычно $\sim (m_d - m_u)$, где m_u и m_d — массы u- и d-кварков) и обладает характерной резонансной зависимостью от энергии в области $K\bar{K}$-порогов [1]–[5]. В докладе рассмотрены разнообразные реакции, в которых может быть обнаружено, и в которых уже было обнаружено на опыте, пороговое явление, известное как смешивание $a_0^0(980)$- и $f_0(980)$-резонансов [2], нарушающее изоспин за счёт разницы масс K^+- и K^0-мезонов. Подробно обсуждается возможность теоретического объяснения большого нарушения изотопической симметрии в распаде $\eta(1405) \to f_0(980)\pi^0 \to \pi^+\pi^-\pi^0$ за счёт механизма, содержащего аномальные пороги Ландау (логарифмические треугольные сингулярности), т. е. за счёт перехода $\eta(1405) \to (K^*\bar{K} + \bar{K}^*K) \to (K^+K^- + K^0\bar{K}^0)\pi^0 \to f_0(980)\pi^0 \to \pi^+\pi^-\pi^0$ [4]. При этом принципиально важным оказывается учёт конечной ширины K^*-мезона.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-02-00065) и Президиума Российской академии наук (проект № 0314-2015-0011).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Achasov N. N., Shestakov G. N.* Strong isospin breaking at production of light scalars // Nuclear and Particle Physics Proceedings. 2017. V. 287–288. P. 89–94.
2. *Achasov N. N., Devyanin S. A., Shestakov G. N.* $S^* - \delta^0$ mixing as threshold phenomenon // Phys. Lett. 1979. V. 88B, No 3–4. P. 367–371.
3. *Achasov N. N., Shestakov G. N.* Proposed search for $a_0^0(980) - f_0(980)$ mixing in polarization phenomena // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 92, No 18. P. 182001-1–182001-4.
4. *Achasov N. N., Kozhevnikov A. A., Shestakov G. N.* Isospin-breaking decay $\eta(1405) \to f_0(980)\pi^0 \to 3\pi$ // Phys. Rev. D. 2015. V. 92, No 03. P. 036003-1–036003-10.
5. *Achasov N.N., Kozhevnikov A.A., Shestakov G.N.* Mechanisms of the isospin-breaking decay $f_1(1285) \to f_0(980)\pi^0 \to \pi^+\pi^-\pi^0$ // Phys. Rev. D. 2016. V. 93, No 11. P. 114027-1–114027-14.

О ПОСТРОЕНИИ ОПЕРАТОРОВ ПЕРЕПЛЕТЕНИЯ В МНОГОУРОВНЕВОЙ МОДЕЛИ КВАРК-ГЛЮОННОЙ СРЕДЫ: СВОЙСТВА ОРНАМЕНТА ПЕРВОГО УРОВНЯ

Левичев А. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
levit@math.nsc.ru

В [1] предложена модель кварк-глюонной среды, основанная на цепочке вложений групп: $U(2)$ в $U(3)$, $U(2)$ в $U(4)$, и т. д. Эти группы названы **уровнями** (материи): $U(2)$ — нулевой (т. е. наш обычный), $U(3)$ — первый, и т. д. Уровни соответствуют поколениям (кварков), а **аромат** и **цвет** также введены строго математически. В [1] предсказано наличие трёх (новых) кварков четвёртого поколения. Представляется перспективным дальнейшее осмысление (и развитие вплоть до вычислительных формул) модели на основе теории индуцированных представлений групп (см. [2]). Фундаментальную роль в соответствующей теории играют **переплетения представлений**. Начато их построение: введены (наиболее естественные) соответствия W между носителями тех волновых функций, которые необходимо будет рассматривать. Для нулевого и первого уровней найдены такие отображения W, которые сохраняют причинную структуру носителей (т. е. являются конформными отображениями). Нулевой уровень охарактеризован (в терминах орнамента) отдельно (см. тезисы автора в секции геометрии и топологии). Для первого уровня орнамент оказывается (в итоге) состоящим из бинарных матриц W_1, W_2, W_3, W_4 размера 6 на 6. Носители D_{12}, D_{13} и D_{23} были введены в [1]; обозначения соответствуют главным минорам матриц в $U(3)$. Каждый из этих трёх носителей является т. н. идеальной жидкостью (а также компактным космосом Сигала, см. [3]). Вложенными (плотно) в них являются носители F_{12}, F_{13} и F_{23} (см. [4]). Каждое из этих пространств-времён является т. н. тахионной жидкостью (см. [5]). Обозначения $Z = W_m(X)$ станут понятны ниже; здесь X из F, Z из D, а двойные индексы опущены.

Теорема. *Каждая W_m из орнамента задаёт конформную биекцию (каждого) F_{sr} на его образ $E_m(s,r,p,q)$ в соответствующем $D_{pq} = D_{pq}(m,s,r)$. Этот образ получен из D_{pq} удалением двумерного тора. В некоторых случаях исходная биекция может быть продолжена до изометрии между D_{sr} и D_{pq}. Выполняются соотношения $(W_1)^2 = (W_3)^2 = 1$, $W_2W_4 = W_4W_2 = 1$. Для любого X из F_{sr}, $W_3(X) = (W_1(X))^{-1}$, $W_4(X) = (W_2(X))^{-1}$. Матрицы орнамента порождают подгруппу S_3 (т. е. 6-элементную) в S_6. Последний элемент W_5 этой S_3 равен W_1W_2, причём $(W_5)^2 = 1$. Эта W_5 изометрично отображает D_{13} на себя и задаёт изометрию между D_{12} и D_{23}.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Levichev A. V.* Towards a matrix multi-level model of quark-gluon media // Journal of Progressive Research in Mathematics. 2016. V. 10, No 2. P. 1493–1496.
2. *Менский М. Б.* Метод индуцированных представлений: пространство-время и концепция частиц. М.: Наука, 1976.
3. *Levichev A. V., Palyanov A. Yu.* On separation between metric observers in Segal's compact cosmos // Journal of Modern Physics. 2015. V. 6, No 14. P. 2040–2049.
4. *Levichev A. V.* A contribution to the DLF-theory: on singularities of the SU(2,2)-action in U(1,1) // Journal of Modern Physics. 2016. V. 7, No 15. P. 1963–1971.
5. *Levichev A. V.* Pseudo-Hermitian realization of the Minkowski world through DLF theory // Physica Scripta. 2011. V. 83, No 1. P. 1–9.

СООТНОШЕНИЕ ДЛЯ РАДИАЛЬНОГО УСКОРЕНИЯ И ДИССИПАТИВНАЯ ТЕМНАЯ МАТЕРИЯ

Чащина О. И.[1], Фут Р.[2], Силагадзе З. К.[3]

[1]*École Polytechnique, Palaiseau, France;* chashchina.olga@gmail.com
[2]*ARC Centre of Excellence for Particle Physics, The School of Physics at the University of Melbourne, Victoria, Australia;* rfoot@unimelb.edu.au
[3]*Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;* silagadze@inp.nsk.su

Наблюдения показывают, что обычное вещество, барионы, влияют на структурные свойства темной материи на галактических масштабах. Одним из таких проявлений является соотношение для радиального ускорения, которое представляет собой корреляцию между измеренным гравитационным ускорением и ожидаемым ускорением только от барионов. В частности, недавнее всестороннее исследование около 153 различных типов галактик показывает, что упомянутое соотношение для радиального ускорения имеет вид $g = \frac{g_B}{1-e^{-\sqrt{g_B/a_0}}}$, где g — ускорение пробной массы в галактике, g_B — напряженность гравитационного поля в том же самом месте, создаваемая только барионным веществом галактики, и $a_0 = (1.20 \pm 0.02 \pm 0.24) \cdot 10^{-1}$ мс$^{-2}$ является эмпирической константой.

Первоначально такое соотношение для ускорения было предсказано модифицированной Ньютоновской динамикой (MOND), которая изначально мыслилась как альтернатива темной материи. Теории темной материи должны воспроизвести это и другие галактические эмпирические соотношения (в пределах неопределенностей измерений), если они претендуют описывать природу.

Однако наблюдаемые корреляции форм кривых вращения галактик с содержанием барионов в галактиках, на которых указывают соотношения для радиального ускорения, представляют собой серьезный вызов для теорий темной материи. В частности, корреляции наблюдаются и в богатых газом карликовых нерегулярных галактиках, в которых темная материя доминирует на всех масштабах. Трудно представить себе, как гравитационно незначительное количество барионов могло бы столь сильно влиять на структурные свойства темной материи, если гравитация является единственным взаимодействием между темной и обычной материями.

Диссипативная темная материя — это особый вид темной материи, который на самом деле нуждается в нетривиальных взаимодействиях с барионами для согласованной картины темной материи в вращательно поддерживаемых галактиках. Теоретически хорошо обоснованный случай диссипативной темной материи — это зеркальная темная материя с дублированным набором частиц и сил с точно такими же фундаментальными параметрами (массы частиц и константы связи), что и стандартные частицы и силы.

В данной работе мы показываем, что профиль плотности темной материи, который был мотивирован диссипативными моделями темной материи, включая зеркальную темную материю, может воспроизвести эмпирическое соотношение для радиального ускорения. Работа опубликована в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chashchina O. I., Foot R., Silagadze Z. K.* Radial acceleration relation and dissipative dark matter // Phys. Rev. D. 2017. V. 95, No. 2. Article ID 023009.

ONCE MORE ABOUT PHYSICS OF THE CHARMONIUM-LIKE STATE $X(3872)$

Achasov N. N.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;
achasov@math.nsc.ru

The $X(3872)$ resonance generated a stream of interpretations and ushered in a new exotic XYZ spectroscopy. Meanwhile many (if not all) characteristics of $X(3872)$ are rather ambiguous.

Almost generally it is accepted that the $X(3872)$ resonance is the loose $D^{*0}\bar{D}^0+c.c.$ molecule. We draw attention to the fact that the resonance $X(3872)$ is produced at short distances and cannot be the loose molecule. In addition, we show that the mixing of the loose molecule with the compact charmonium is negligibly small and cannot explain the production of the $X(3872)$ resonance at short distance.

Then we discuss the scenario where the $X(3872)$ resonance is the $c\bar{c} = \chi_{c1}(2P)$ charmonium which "sits on" the $D^{*0}\bar{D}^0$ threshold.

We explain the shift of the mass of the $X(3872)$ resonance with respect to the prediction of a potential model for the mass of the $\chi_{c1}(2P)$ charmonium by the contribution of the virtual $D^*\bar{D} + c.c.$ intermediate states into the self energy of the $X(3872)$ resonance. This allows us to estimate the coupling constant of the $X(7872)$ resonance with the $D^{*0}\bar{D}^0$ channel, the branching ratio of the $X(3872) \to D^{*0}\bar{D}^0+c.c.$ decay, and the branching ratio of the $X(3872)$ decay into all non-$D^{*0}\bar{D}^0 + c.c.$ states.

We predict a significant number of unknown decays of $X(3872)$ via two gluon: $X(3872) \to gluon\ gluon \to hadrons$. In addition, we predict the decay of the $\chi_{b1(2P)}$ bottomonium: $\chi_{b1(2P)} \to \rho\Upsilon(1S)$.

We suggest a physically clear program of experimental researches for verification of our assumption.

This work was supported in part by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-02-00065), and by Presidium of the Russian Academy of Sciences (project no. 0314-2015-0011).

REFERENCES

1. *Achasov N. N., Rogozina E. V.*, "How learn the branching ratio $X(3872) \to D^{*0}\bar{D}^0+c.c.$," JETP Letters, **100**, No. 4, 227–231 (2014).
2. *Achasov N. N., Rogozina E. V.*, "$X(3872)$, $I^G(J^{PC}) = 0^+(1^{++})$, as the $\chi_{c1}(2P)$ charmonium," Mod. Phys. Lett. A., **30**, No. 33, 1550181-1–1550181-6 (2015).
3. *Achasov N. N., Rogozina E. V.*, "Towards the nature of $X(3872)$ resonance," J. Univ. Electron. Sci. Technol. China, **46**, No. 7, 574–579 (2016).
4. *Achasov N. N.*, "Physics of the charmonium-like state $X(3872)$," EPJ Web Conf., **125**, 04002-1–04002-9 (2016).

PROBLEMS WITH VARIABLE HILBERT SPACE IN QUANTUM MECHANICS. QUESTIONS FOR COSMOLOGY

Ginzburg I. F.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;
ginzburg@math.nsc.ru

Assume that we start with an infinite potential well between points 0 and b. Then the width of this well changes $b \to b\alpha$ in finite time T. The standard methods for describing transition between the initial and final states of the well are inapplicable since these states belong to different Hilbert spaces. We discuss two problems:
1. How to calculate probabilities of the above-mentioned transitions.
2. What new phenomena appear at the variation of the Hilbert space.

For the case when the final well covers only some part of the initial well (and possibly some outer part of configuration space), total probability of transitions from each stationary state of the initial well into all possible states of the final well is less than 1. In the terminology of regularization by a well with finite height V it can be treated as non-zero probability of transitions into the continuous spectrum despite the fact that this spectrum disappears at $V \to \infty$ ("transition to nowhere").

Besides, we discuss briefly possible value of similar phenomena for the Electroweak phase transition in the earlier Universe.

NONLINEAR COMPTON SCATTERING IN THE FIELD OF TWO STRONG LASER WAVES

Ivanov D. Yu.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;
d-ivanov@math.nsc.ru

We derived results for the nonlinear Compton scattering in the two-mode strong plane wave laser field $A = A_\omega + A_{2\omega}$. We consider the case when both modes propagate in the same direction and when a frequency of the second mode is twice as the one of the first mode. Besides, both laser fields are circularly polarized. Such configuration of the laser field could be realized using well developed since 1961 experimental technique of the Second-Harmonic-Generation [1].

It is well known [2] that with the growth of the laser field intensity, an electron starts to interact coherently with more than one laser photons. Our two-mode laser field configurations allows interference of the Compton amplitudes corresponding to the different numbers of photons absorbed from different modes but having the same total photon momentum. The pattern of such interference is especially interesting when we consider the processes with the absorption of one quanta from the mode $A_{2\omega}$ and two quanta from the mode A_ω. We found that nonlinearity in such case induces strong azimuthal angle dependence for the final state Compton photon distributions. In particular, at some relation between the intensities of modes A_ω and $A_{2\omega}$ we obtained large enhancement of the output for the second Compton harmonic at some azimuthal angle, whereas at the opposite azimuthal angle direction the destructive interference leads to almost full cancellation of the second Compton harmonic output with the exception of a narrow region near the second harmonic threshold, where such cancellation is forbidden by the angular momentum conservation law. As the result, we obtained at this azimuthal direction the spectrum of the Compton photons being highly peaked near the threshold of the second harmonic. Therefore, we hope that such two-mode Compton scattering opens an interesting possibility to obtain a quasi-monochromatic source of the high energy photons.

The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 15-02-05868).

REFERENCES

1. *Franken P., Hill A., Peters C., Weinreich G.*, "Generation of optical harmonics," Phys. Rev. Lett., **7**, No. 4, 118–119 (1961).
2. *Nikishov A. I., Ritus V. I.*, "Pair production by a photon and photon emission by an electron in the field of an intense electromagnetic wave and in a constant field," Sov. Phys., JETP, **25**, No. 6, 1135–1142 (1967).

MIXING OF FERMIONS AND SPECTRAL REPRESENTATION OF PROPAGATOR

Kaloshin A. E.[1], **Lomov V. P.**[1,2]

[1] *Irkutsk State University, Irkutsk, Russia;* alexander.e.kaloshin@gmail.com
[2] *Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, Russia;* v.p.lomov@yandex.ru

Problem of neutrino oscillations is in the center of attention last decades, both from experimental and theoretical points of view. This phenomenon is generated by mixing in system of neutrinos, when mass states differ from flavor ones. In studying of mixing and oscillation phenomena in quantum field theory, the matrix propagator (n mixing fermion fields) plays the central role.

We develop the spectral representation of dressed propagator for n mixing fermion fields in case of P-parity violation. Solving of the eigenvalue problem (both left and right) for inverse matrix propagator S allows to build the system of orthogonal projectors $\Pi_i \Pi_k = \delta_{ik} \Pi_k$ and to represent the matrix propagator G as a sum of poles with positive and negative energy

$$S(p) = \sum_{i=1}^{2n} \lambda_i \Pi_i, \qquad \Rightarrow \qquad G(p) = S^{-1} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{\lambda_i} \Pi_i.$$

Here S and Π have two sets of indices: Dirac γ-matrix indices and generation ones.

For eigenvalues λ there appears an algebraic equation of the order $2n$. In case of CP-conservation in order to build the eigenprojectors Π_i for given i we need vector $\Psi_i(W)$ — a solution of homogeneous matrix (dimension n) equation.

The procedure of multiplicative renormalization is investigated, the renormalization matrices are obtained in a closed form without using of perturbation theory. Renormalization condition are easily formulated in terms of the vectors Ψ_i.

We found that the completeness condition for projectors Π_i, necessary to build the spectral representation of matrix propagator, requires the accounting of spin degrees of freedom. In theory with γ^5 the usual spin projectors do not commute with dressed propagator and should be modified. The generalized off-shell spin projectors for single fermion or for system of fermions look as

$$\Sigma(s) = I_n \frac{1}{2} \Big(I_4 + \gamma^5 \hat{s} \hat{n} \Big).$$

Here I_4, I_n are the unit matrices of indicated dimension, $n^\mu = p^\mu / W$, $W = \sqrt{p^2}$, s^μ is a polarization vector: $s^2 = -1$, $(sp) = 0$.

The constructed spectral representation gives a convenient algebraic approach to study mixing and oscillation phenomena in system of neutrinos or quarks.

REFERENCES

1. *Beuthe M.*, “Oscillations of neutrinos and mesons in quantum field theory,” Phys. Rep., **375**, No. 2–3, 105–218 (2003).
2. *Kaloshin A. E., Lomov V. P.*, “Top quark as a resonance,” Eur. Phys. J. C, Part. Fields, **72**, No. 8, 2094 (2012).
3. *Kaloshin A. E., Lomov V. P.*, “Mixing of fermions and spectral representation of propagator,” Int. J. Mod. Phys. A, **31**, No. 8, 1650031 (2016).

$\phi\phi$ AND $J/\psi\phi$ MASS SPECTRA IN DECAY $B_s^0 \to J/\psi\phi\phi$

Kozhevnikov A. A.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;
kozhev@math.nsc.ru

The mass spectra of the $\phi\phi$ and $J/\psi\phi$ states in the decay $B_s^0 \to J/\psi\phi\phi$ recently observed by LHCb [1] are calculated in the model which takes into account the $J^P = 0^+, 0^-, 2^+$ intermediate resonances R_1, R_2 in the $\phi\phi$ channel and the $J^P = 1^+$ ones, X_1, X_2, in the $J/\psi\phi$ channel. When obtaining the expressions for the effective amplitudes and mass spectra, the approximate threshold kinematics of the decay is used essentially. The $R_1 - R_2$ and $X_1 - X_2$ mixings arising due to the common decay modes $\phi\phi$ and $J/\psi\phi$, respectively, are also taken into account. The obtained expressions for the mass spectra are applied for extracting the information about masses and coupling constants of the resonances in the $\phi\phi$ and $J/\psi\phi$ final states.

REFERENCES

1. *Aaij R., et al.*, "Observation of the $B_s^0 \to J/\psi\phi\phi$ decay," J. High Energy Phys., **2016**, No. 3, Article 40 (2016).

AUTHOR INDEX

Научное издание

МАТЕМАТИКА В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ

Международная конференция,
посвященная 60-летию
Института математики им. С. Л. Соболева

Новосибирск, Россия, 14–19 августа 2017 г.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Оригинал-макет: *М. А. Скворцова*
Дизайн обложки: *И. А. Уварова*

Подписано в печать 17.07.2017 Формат 70×108 1/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 51,8. Уч.-изд. л. 37,0. Тираж 500 экз. Заказ № 122

Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре НГУ,
ул. Пирогова, 2, 630090 Новосибирск, Россия.