АРХИМЕДОВЫ КОНУСЫ И ВХОДНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Гутман А. Е.[1], **Матюхин А. В.**[2]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
[1]gutman@math.nsc.ru, [2]anatoly.matyukhin@yandex.ru

Всюду ниже X — векторное пространство над $\mathbb{R}$. Непустое выпуклое подмножество $W \subseteq X$ называется *клином*, если $\alpha W \subseteq W$ для всех $\alpha \geqslant 0$. Клин W является *конусом*, если $W \cap (-W) = \{0\}$. Выпуклое множество $C \subseteq X$ называется *архимедовым*, если для любых x, $y \in X$ из справедливости включения $x + \frac{1}{n}y \in C$ для всех $n \in \mathbb{N}$ следует $x \in C$. Архимедовость конуса (клина) $W \subseteq X$ равносильна истинности аксиомы Архимеда в (пред)упорядоченном векторном пространстве $(X, \leqslant)$, где $x \leqslant y \Leftrightarrow y - x \in W$. Основные сведения об архимедовых конусах можно почерпнуть из [1]. Связь между архимедовыми и замкнутыми конусами исследована в [2].

Определение. Для $x, y \in X$ положим $]x, y[\, = \{(1-\alpha)x + \alpha y : \alpha \in [0,1]\} \setminus \{x, y\}$. Пусть C — выпуклое подмножество X. Условимся называть вектор $y \in X$ *входным направлением* для C в точке $x \in X \setminus C$ и писать $y \in \operatorname{ent}_x C$, если $]x, x+\varepsilon y[\, \subseteq C$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Введем обозначение $\operatorname{ent} C = \cup\{\operatorname{ent}_x C : x \in X \setminus C\}$.

Предложение 1. *Пусть* C — выпуклое подмножество X.

(1) Для любой точки $x \in X \setminus C$ множество $\operatorname{ent}_x C$ является конусом.

(2) Множество C архимедово тогда и только тогда, когда $\operatorname{ent} C = \{0\}$.

(3) Множество C является конусом тогда и только тогда, когда разность $C \setminus \{0\}$ выпукла и $\operatorname{ent}_0(C \setminus \{0\}) = C$.

Теорема 2 (критерий архимедовости клина). *Пусть* $W \subseteq X$ — клин и пусть f — такой линейный функционал на X, что $f \geqslant 0$ на W и $f(y) > 0$ для некоторого элемента $y \in W$. Клин W архимедов в том и только в том случае, если $y \notin \operatorname{ent} W$ и множество $\{x \in W : f(x) = 1\}$ архимедово.

Ниже приведены критерии существования функционала f и вектора y, удовлетворяющих условию теоремы 2.

Предложение 3. *Пусть* $W \subseteq X$ — клин и пусть $\overline{W}$ — замыкание W в слабой топологии, наведенной пространством $X^{\#}$ всех линейных функционалов на X. Следующие условия равносильны:

(1) существуют $f \in X^{\#}$ и $y \in W$ такие, что $f \geqslant 0$ на W и $f(y) > 0$;

(2) существует такой вектор $y \in W$, что $-y \notin \overline{W}$;

(3) $\operatorname{lin} W \nsubseteq \overline{W}$, где $\operatorname{lin} W$ — линейная оболочка W.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Aliprantis C. D., Tourky R.* Cones and Duality. Providence: American Mathematical Society, 2007.
2. *Гутман А. Е., Емельянов Э. Ю., Матюхин А. В.* Незамкнутые архимедовы конусы в локально выпуклых пространствах // Владикавказский мат. журн. 2015. Т. 17, № 3. С. 36–43.