РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С.Л. СОБОЛЕВА

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

СОБОЛЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ

Международная школа-конференция

Новосибирск, Россия, 20–23 августа 2017 г.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

НОВОСИБИРСК

2017

УДК 517
ББК В16
С545

Соболевские чтения. Международная школа-конференция (Новосибирск, 20–23 августа 2017 г.): Тез. докладов / под ред. Г. В. Демиденко. — Новосибирск: Изд-во Института математики, 2017. — 135 с.

ISBN 978-5-86134-208-7

Организаторы

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Новосибирский государственный университет

Ответственный редактор: Г. В. Демиденко

Organizers

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS

Novosibirsk State University

Editor-in-Chief: G. V. Demidenko

С $\dfrac{1602070100 - 03}{Я82(03) - 2017}$ Без объявл.

ISBN 978-5-86134-208-7

Программный комитет

Г. В. Демиденко — *председатель*, И. И. Матвеева — *секретарь*, В. С. Белоносов, О. В. Бесов, А. М. Блохин, В. Л. Васкевич, С. К. Годунов, П. И. Плотников, Ю. Г. Решетняк, В. Г. Романов, В. Д. Степанов, А. А. Толстоногов, H. Begehr, E. Feireisl, L. Hatvani, A. Laptev, R. McOwen

Организационный комитет

Г. В. Демиденко — *сопредседатель*, М. П. Федорук — *сопредседатель*, Л. Н. Бондарь — *секретарь*, Е. Ю. Балакина, М. А. Скворцова, И. А. Уварова, Т. К. Ыскак, В. Э. Эйснер

Program Committee

G. V. Demidenko (*Chairman*), I. I. Matveeva (*Secretary*), H. Begehr, V. S. Belonosov, O. V. Besov, A. M. Blokhin, E. Feireisl, S. K. Godunov, L. Hatvani, A. Laptev, R. McOwen, P. I. Plotnikov, Yu. G. Reshetnyak, V. G. Romanov, V. D. Stepanov, A. A. Tolstonogov, V. L. Vaskevich

Organizing Committee

G. V. Demidenko (*Co-Chairman*), M. P. Fedoruk (*Co-Chairman*), L. N. Bondar (*Secretary*), E. Yu. Balakina, V. E. Eisner, M. A. Skvortsova, I. A. Uvarova, T. K. Yskak

Школу-конференцию поддержали:

Российский фонд фундаментальных исследований (проект № 17-31-10222)

Сибирское отделение Российской академии наук

Мэрия города Новосибирска

Авиакомпания “Аэрофлот”

Механико-математический факультет Новосибирского государственного университета

The School-Conference is supported by:

Russian Foundation for Basic Research (project no. 17-31-10222)

Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences

The Mayor’s Office of Novosibirsk

Airline Aeroflot

Department of Mechanics and Mathematics, Novosibirsk State University

СОДЕРЖАНИЕ

ЦИКЛЫ ЛЕКЦИЙ
LECTURE COURSES

СЕКЦИОННЫЕ ДОКЛАДЫ
SHORT COMMUNICATIONS

ЦИКЛЫ ЛЕКЦИЙ

Тезисы

LECTURE COURSES

Abstracts

О ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА МНОГООБРАЗИЯХ РАЗМЕРНОСТИ 2 И 3

Гринес В. З.

Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Нижний Новгород, Россия;
vgrines@yandex.ru

Мини-курс посвящен изложению результатов по топологической классификации структурно устойчивых дискретных динамических систем (каскадов), заданных на замкнутых гладких многообразиях размерности меньшей или равной трем. Для знакомства с тематикой, ссылками на источники и основными результатами полезно обратиться к статьям, обзорам и монографиям [1–5].

Первый классификационный результат был получен А. Г. Майером в 1939 г. для структурно устойчивых (грубых) диффеоморфизмов окружности. Он показал, что неблуждающее множество такого диффеоморфизма состоит из конечного числа гиперболических периодических точек и дал полную топологическую классификацию грубых диффеоморфизмов окружности.

Благодаря С. Смейлу и Д. В. Аносову в 60-х годах прошлого века стало ясно, что неблуждающее множество структурно устойчивого диффеоморфизма поверхности может иметь счетное подмножество периодических точек. Поэтому структурно устойчивые каскады, неблуждающие множества которых конечны, были определены специальным образом и получили название каскадов Морса – Смейла.

Полный топологический инвариант для диффеоморфизмов Морса – Смейла намного сложнее, чем в одномерной ситуации. Он был получен в серии работ Х. Бонатти, А. Н. Безденежных, В. З. Гринеса, Р. Ланжевена и др. в 80-х – 90-х годах прошлого столетия. Этот инвариант представляет из себя некоторый граф, оснащенный автоморфизмом и дополнительной информацией, описывающей структуру множества пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий седловых периодических точек. В недавнее время автором доклада совместно с О. В. Починкой и С. Ван Стрином предложен новый геометрический подход, который позволяет решить проблему реализации, т. е. построения в каждом классе топологической сопряженности стандартного представителя.

Согласно спектральной теореме С. Смейла неблуждающее множество структурно устойчивого каскада f, содержащего бесконечное множество периодических точек, состоит из конечного числа замкнутых инвариантных множеств, каждое из которых содержит транзитивную орбиту. Эти множества называются базисными. Свойства диффеоморфизма f во многом определяются динамикой ограничения диффеоморфизма на базисные множества.

• Если топологическая размерность базисного множества Ω структурно устойчивого диффеоморфизма $f : M^2 \to M^2$ поверхности M^2 равна 2, то несущая поверхность M^2 является двумерным тором, диффеоморфизм f является диффеоморфизмом Аносова и топологически сопряжен с автоморфизмом тора, индуцированным гиперболической унимодулярной матрицей (Я. Синай, 1968).

• Если размерность базисного множества Ω структурно устойчивого диффеоморфизма $f : M^2 \to M^2$ равна единице, то оно является аттрактором или репеллером и локально гомеоморфно прямому произведению интервала и канторовского множества. Динамика ограничения диффеоморфизмов f на одномерное базисное множество полностью определяется индуцированным автоморфизмом фундаментальной группы носителя базисного множества. Более того, ограничение диффеоморфизма на носитель топологически сопряжено с динамикой диффеоморфизма, полученного из аносовского или псевдоаносовского диффеоморфизма посредством хирургической операции, предложенной С. Смейлом. Описанные результаты были получены В. З. Гринесом, Р. В. Плыкиным, А. Ю. Жировым, Х. Х. Калаем и др. в 70-х – 90-х годах прошлого века.

• Если размерность нетривиального (отличного от периодической орбиты) базисного множества равна нулю, то ограничение диффеоморфизма f на базисное множество топологически сопряжено со сдвигом некоторой топологической цепи Маркова, и вопрос об описании ограничения диффеоморфизма на окрестность нульмерного базисного множества требует дополнительной информации. Эта проблема решалась при различных предположениях в работах Х. Бонатти, В. З. Гринеса, Х. Х. Калая, Р. Ланжевена в 80-х – 90-х годах прошлого века.

Информация о динамике ограничения диффеоморфизма на окрестности нетривиальных базисных множеств и результаты по классификации диффеоморфизмов Морса – Смейла были применены в 70-х – 90-х годах прошлого века для получения полной классификации структурно устойчивых каскадов на поверхностях с одномерными базисными множествами и нульмерными базисными множествами без сопряженных точек (В. З. Гринес, А. Ю. Жиров, Х. Х. Калай, Р. В. Плыкин), а также для произвольных структурно устойчивых каскадов (Х. Бонатти, Р. Ланжевен).

В 2000 году стало ясно, что для трехмерных каскадов Морса – Смейла не достаточно комбинаторных инвариантов. Х. Бонатти, В. З. Гринесом, Д. Пикстоном было обнаружено, что существует счетное множество не сопряженных диффеоморфизмов Морса – Смейла с неблуждающим множеством, состоящим ровно из четырех неподвижных точек (седловой точки, двух стоков и одного источника). Это явление объясняется возможностью дикого вложения сепаратрис седловой неподвижной точки. Обнаруженный феномен стал стимулом к введению новых топологических инвариантов, связанных с вложением узлов, двумерных торов и бутылок Клейна в пространство орбит ограничения диффеоморфизма Морса – Смейла на специальным образом выбранное множество блуждающих точек. Эти инварианты позволили получить к настоящему времени в серии работ Х. Бонатти, В. З. Гринеса, В. С. Медведева, Э. Пеку и О. В. Починки полную топологическую классификацию каскадов Морса – Смейла на 3-многообразиях.

Параллельно, начиная с 70-х годов прошлого века, были начаты исследования по топологической классификации структурно устойчивых каскадов на 3-многообразиях, неблуждающие множества которых содержат счетное множество периодических точек.

В качестве иллюстрации сформулируем несколько законченных результатов в этом направлении, дающих представление о достигнутом к настоящему времени прогрессе.

• Если топологическая размерность базисного множества структурно устойчивого диффеоморфизма $f : M^3 \to M^3$ трехмерного многообразия M^3 равна 3, то M^3 является трехмерным тором, и диффеоморфизм f является диффеоморфизмом Аносова, топологически сопряженным с атоморфизмом тора, индуцированным гиперболической унимодулярной матрицей (Дж. Френкс, Ш. Ньюхаус, 1970).

• Если неблуждающее множество структурно устойчивого диффеоморфизма $f : M^3 \to M^3$ состоит из базисных множеств, топологическая размерность которых равна двум, то:
1) ограничение некоторой степени диффеоморфизма f на каждое базисное множество топологически сопряжено автоморфизму Аносова двумерного тора;

2) многообразие M^3 гомеоморфно факторпространству, полученному из прямого произведения двумерного тора на единичный интервал при отождествлении границ произведения посредством некоторого гомеоморфизма;
3) найден полный топологический инвариант каскадов описанного класса, и решена задача реализации, т. е. в каждом классе топологической сопряженности построен стандартный представитель
(В. З. Гринес, В. С. Медведев, Я. А. Левченко, О. В. Починка, 2005–2015).

• Пусть $f : M^3 \to M^3$ — структурно устойчивый диффеоморфизм, неблуждающее множество которого содержит двумерный растягивающийся аттрактор. Тогда многообразие M^3 гомеоморфно трехмерному тору, а f топологически сопряжен с диффеоморфизмом, полученным из диффеоморфизма Аносова, посредством обобщенной хирургической операции С. Смейла (В. З. Гринес, Е. В. Жужома, 2002–2005).

Лекции подготовлены при поддержке РФФИ (проекты № 15-01-03687-а, № 16-51-10005-Ко_а) и в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2017 году (проект № 90).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арансон С. Х., Гринес В. З.* Топологическая классификация каскадов на замкнутых двумерных многообразиях // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45, вып. 1. С. 3–32. (Англ. перевод: *Aranson S. Kh., Grines V. Z.* The topological classification of cascades on closed two-dimensional manifolds // Russ. Math. Surv. 1990. V. 45, No 1. P. 1–35.)
2. *Гринес В. З., Починка О. В.* Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три. Москва, Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2011.
3. *Гринес В. З., Починка О. В.* Каскады Морса – Смейла на 3-многообразиях // Успехи мат. наук. 2013. Т. 68, вып. 1. С. 129–188. (Англ. перевод: *Grines V. Z., Pochinka O. V.* Morse–Smale cascades on 3-manifolds // Russ. Math. Surv. 2013. V. 68, No 1. P. 117–173.)
4. *Grines V., Levchenko Yu., Medvedev V., Pochinka O.* The topological classification of structurally stable 3-diffeomorphisms with two-dimensional basic sets // Nonlinearity. 2015. V. 28, No 11. P. 4081–4102.
5. *Grines V., Medvedev T., Pochinka O.* Dynamical systems on 2- and 3-manifolds (Developments in Mathematics, V. 46). Cham (Switzerland): Springer, 2016.

ОБ ОДНОМ НОВОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СЛАБОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ ГИДРОДИНАМИКИ

Звягин В. Г.

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия;
zvg_vsu@mail.ru

В лекциях предполагается:

1. Изложить разные варианты аппроксимационно-топологического метода исследования слабой разрешимости начально-краевых задач гидродинамики на примере системы Навье – Стокса.

2. Изложить теорию аттракторов автономных и неавтономных уравнений гидродинамики, основанную на понятии неинвариантного траекторного пространства.

3. Изложить на примерах метод исследования оптимальных задач с обратной связью для уравнений гидродинамики, основанный на топологической теории степени многозначных отображений банаховых пространств.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Звягин В. Г., Дмитриенко В. Т.* Аппроксимационно-топологический подход к исследованию задач гидродинамики. Система Навье – Стокса. М.: Едиториал УРСС, 2004.
2. *Zvyagin V. G.* On solvability of some initial-boundary problems for mathematical models of the motion of nonlinearly viscous and viscoelastic fluids // J. Math. Sci., New York. 2004. V. 124, No 5. P. 5321–5334.
3. *Zvyagin V. G., Vorotnikov D. A.* Topological approximation methods for evolutionary problems of nonlinear hydrodynamics (de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, V. 12). Berlin: de Gruyter, 2008.
4. *Звягин В. Г., Турбин М. В.* Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред. М.: КРАСАНД, 2012.
5. *Zvyagin V. G.* Topological approximation approach to study of mathematical problems of hydrodynamics // J. Math. Sci., New York. 2014. V. 201, No 6. P. 830–858.

MATHEMATICS OF FLUIDS IN MOTION

Feireisl E.

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic, Prague, Czech Republic;
feireisl@math.cas.cz

This is a series of lectures on recent development of the mathematical theory of compressible fluids, both viscous and inviscid.

1. We start by reviewing some results on existence of solutions of the initial/boundary value problem for the compressible Navier–Stokes and Euler system:

- Existence theory in the framework of regular (smooth) solutions. Local in time existence for arbitrary data and global existence for small data in the viscous case.
- Existence of weak (distributional) solutions for the Navier–Stokes system.
- Existence of weak (distributional) solutions for the (barotropic) Euler system.

Recommended preliminary reading: [1, 2].

2. We discuss some recent results on ill/posedness of the Euler system in the class of weak solutions:

- Method of convex integration and its adaptation to problems in fluid mechanics.
- Existence of infinitely many global-in-time weak solutions to the compressible Euler system.
- Infinitely many weak solutions that comply with entropy criteria. Solutions emanating from regular initial data.

Recommended preliminary reading: [3, 4].

3. Finally, we introduce the concept of oscillatory – (dissipative) measure-valued solution and discuss some applications:

- Dissipative measure-valued solutions.
- Weak-strong uniqueness.
- Applications to singular limits and numerical analysis.

Recommended preliminary reading: [5, 6].

The research of E.F. leading to these results has received funding from the European Research Council under the European Union's Seventh Framework Programme (FP7/2007–2013)/ ERC Grant Agreement 320078. The Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic is supported by RVO:67985840.

REFERENCES

1. *Lions P.-L.*, Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Vol. 2: Compressible Models (Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, Vol. 10), Clarendon Press, Oxford (1998).
2. *Feireisl E.*, Dynamics of Viscous Compressible Fluids (Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, Vol. 26), Oxford University Press, Oxford (2004).
3. *De Lellis C., Székelyhidi L. (jr.)*, “On admissibility criteria for weak solutions of the Euler equations,” Arch. Ration. Mech. Anal., **195**, No. 1, 225–260 (2010).
4. *Chiodaroli E., De Lellis C., Kreml O.*, “Global ill-posedness of the isentropic system of gas dynamics,” Commun. Pure Appl. Math., **68**, No. 7, 1157–1190 (2015).
5. *Gwiazda P., Świerczewska-Gwiazda A., Wiedemann E.*, “Weak-strong uniqueness for measure-valued solutions of some compressible fluid models,” Nonlinearity, **28**, No. 11, 3873–3890 (2015).
6. *Feireisl E., Gwiazda P., Świerczewska-Gwiazda A., Wiedemann E.*, “Dissipative measure-valued solutions to the compressible Navier–Stokes system,” Calc. Var. Partial Differ. Equ., **55**, No. 6, Article ID 141 (2016).

О ПЕРВОЙ НАУЧНОЙ РАБОТЕ С. Л. СОБОЛЕВА

Чечкина А. Г.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; chechkina@gmail.com

В лекциях будет рассказано о первой научной работе Сергея Львовича Соболева [1]. Эта работа была написана в студенческие годы. Поводом послужили результаты Н. Н. Салтыкова, о которых рассказывал профессор Н. М. Гюнтер на лекциях по уравнениям с частными производными. Некоторые их них вызвали сомнения у студента С. Соболева. Пытаясь разобраться в работах Н. Н. Салтыкова, С. Соболев нашел неточности и построил контрпримеры.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Замечание по поводу работ проф. Салтыкова “Исследования по теории уравнений с частными производными первого порядка одной неизвестной функции” и “О развитии теории уравнений с частными производными первого порядка одной неизвестной функции”. Рукопись. 1927. Семейный архив.

СЕКЦИОННЫЕ ДОКЛАДЫ

Тезисы

SHORT COMMUNICATIONS

Abstracts

ЛИНЕЙНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ПАРАМЕТРОМ

Абашеева Н. Л.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
anl@math.nsc.ru

Рассматривается линейная обратная задача: найти функции $u(t,p)$ и $\varphi(t)$, удовлетворяющие уравнению

$$Bu_t + pLu = \varphi(t) + f(t,p), \quad p \in D, \quad t \in (0,T), \tag{1}$$

и краевым условиям

$$u(0,p) = u(T,p) = 0.$$

Здесь $T < \infty$, $D \subset \mathbb{C}$ — измеримое множество, имеющее предельную точку $p_0 \in \mathbb{C}$, L, B — самосопряженные операторы в данном комплексном гильбертовом пространстве E со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$. Оператор B имеет произвольное расположение спектра, а спектр оператора L полуограничен.

В работе на основе известных результатов для прямых задач исследована обратная задача нахождения свободного члена для уравнения с параметром (1). Здесь доказательство проводится методом разложения в ряд по собственным и присоединенным элементам соответствующей спектральной задачи

$$Lu = \lambda Bu,$$

и дано явное представление решения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-06582).

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ РАСХОДА РЕСУРСА

Александров В. М.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; vladalex@math.nsc.ru

Пусть управляемый объект описывается линейным дифференциальным уравнением $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$, $x(t_0) = x_0$, $x_0 \in D$, где u — m-мерный вектор управления, компоненты которого подчинены ограничениям $|u_j| \leqslant M_j$, $j = \overline{1,m}$. Предполагается, что система покомпонентно полностью управляема и переводима в заданное конечное состояние из ограниченной области начальных условий D.

Задача. Найти допустимое управление $u^0(t)$, переводящее за фиксированное время $T = t_k - t_0$ (где $T \geqslant T_0$) систему из начального состояния $x(t_0) = x_0$ в конечное состояние $x(t_k) = x_k$ и минимизирующее функционал $J(u) = \int\limits_{t_0}^{t_k} \sum_{j=1}^{m} |u_j(\tau)| d\tau$. Здесь T_0 — время оптимального по быстродействию перевода системы.

Разработан общий метод вычисления оптимального по расходу ресурса управления, основанный на разделении задачи на две независимые подзадачи: 1) вычисление структуры оптимального управления; 2) вычисление моментов переключений оптимального управления. Вычисление структуры основано на оригинальном методе формирования квазиоптимального управления. Вычисление моментов переключений управления основано на найденной связи между отклонениями начальных условий сопряженной системы с отклонениями фазовой траектории в конечный момент. Дан метод задания начального приближения. Разработан итерационный алгоритм и рассмотрены его особенности. Приведены результаты моделирования и численных расчетов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00592а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров В. М.* Вырожденное решение задачи минимизации расхода ресурса // Сиб. журн. вычисл. математики. 2016. Т. 19, № 1. С. 5–18.
2. *Александров В. М.* Квазиоптимальное управление динамическими системами // Автоматика и телемеханика. 2016. Вып. 7. С. 47–67.

МЕТОД ПЛОСКИХ СРЕДНИХ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Аниконов Д. С.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; anik@math.nsc.ru

Рассмотрим задачу о колебаниях однородной неограниченной мембраны при наличии внешней силы. Соответствующее уравнение колебаний имеет вид

$$u_{tt} - a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) = f(t, x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0, \tag{1}$$

где $f \in C^1((0,\infty) \times \mathbb{R}^2)$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Пусть заданы начальные данные:

$$u(0, x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2), \quad u_t(0, x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2),$$

$$\varphi(x_1, x_2) \in C^2(\mathbb{R}^2), \quad \psi(x_1, x_2) \in C^1(\mathbb{R}^2).$$

Рассмотрим следующие обратные задачи. Для этого предположим, что функция f не зависит от t, т. е. $f(t, x_1, x_2) = f_1(x_1, x_2)$, $f_1 \in C^1(\mathbb{R}^2)$, причем f_1 может принимать лишь неотрицательные значения, а множество точек, в которых функция f_1 положительна, является некоторой ограниченной областью G. Функции φ, ψ предполагаются финитными.

Задача 1. Имея в качестве исходных данных коэффициент a, функции φ, ψ, $u(t, x_1, 0)$, $u_{x_2}(t, x_1, 0)$, $u(t, 0, x_2)$, $u_{x_1}(t, 0, x_2)$, найти такой прямоугольник E, содержащий в себе область G, чтобы каждая его сторона касалась границы области G.

Задача 2. Имея в качестве исходных данных интервал $[a_1, a_2]$ для коэффициента a, функции $u(t, x_1, 0)$, $u_{x_2}(t, x_1, 0)$, $u(t, 0, x_2)$, $u_{x_1}(t, 0, x_2)$ и полагая $\varphi = 0$, $\psi = 0$, найти прямоугольник E, содержащий в себе область G.

Подразумевается, что размеры искомого прямоугольника E, по возможности, должны быть минимальны.

Смысл этих задач состоит в локализации носителя правой части уравнения (1), что с физической точки зрения означает приближенное определение места воздействия внешней силы на мембрану.

Для обеих задач построены и тестированы алгоритмы.

ЛУЧЕВОЙ МЕТОД И ВОПРОСЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Аниконов Ю. Е.[1], Аюпова Н. Б.[2], Нещадим М. В.[3]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;

[1]anikon@math.nsc.ru, [2]ayupova@math.nsc.ru, [3]neshch@math.nsc.ru

Предлагается новый способ исследования задач идентификации системы уравнений упругости, основанный на лучевом разложении решений, когда коэффициенты данной системы зависят не только от пространственной переменной, но и от времени, что представляет практический интерес. Алгебро-аналитическими методами устанавливаются новые многочисленные связи в конечных и бесконечных вариантах между амплитудами, коэффициентами и функциями источников рассматриваемых динамических систем теории упругости.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта по программе Президиума РАН “Вычислительная томография неоднородных и анизотропных сред” (проект № 0314-2015-001), РФФИ (проект № 15-01-00745).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аниконов Ю. Е., Нещадим М. В.* Алгебро-аналитические способы построения решений дифференциальных уравнений // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2015. Т. 15, вып. 2. С. 3–21.
2. *Аниконов Ю. Е., Аюпова Н. Б.* Лучевые разложения и тождества для уравнений второго порядка с приложениями к обратным задачам // Сиб. журн. чист. и прикл. матем. (принята в печать).
3. *Нещадим М. В.* Функционально инвариантные решения системы Максвелла // Сиб. журн. индустр. математики. 2017. Т. 20, № 4. С. 66–74.
4. *Аниконов Ю. Е., Аюпова Н. Б., Нещадим М. В.* Лучевой метод и вопросы идентификации уравнений теории упругости // Сиб. журн. чист. и прикл. матем. (сдана в печать).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ РАЗРЫВОВ КОЭФФИЦИЕНТОВ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Балакина Е. Ю.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
balakina@math.nsc.ru

Рассматривается нестационарное линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial f(t,r,\omega,E)}{\partial t} + \omega\cdot\nabla_r f(t,r,\omega,E) + \mu(t,r,E)f(t,r,\omega,E) = J(t,r,\omega,E).$$

Это уравнение описывает, в частности, процесс переноса частиц сквозь среду. Функция $f(t,r,\omega,E)$ интерпретируется как плотность потока частиц в момент времени t в точке r с энергией E, летящих в направлении ω. Функции μ и J характеризуют среду G, в которой протекает процесс.

Рассматривается задача о нахождении поверхностей разрывов коэффициентов уравнения μ и J. Иными словами, ставится вопрос об определении внутренней структуры среды G. Такая постановка является продолжением цикла исследований Д. С. Аниконова [1].

Для решения поставленной проблемы сначала исследуется прямая задача о нахождении плотности потока f при заданных начальном условии и плотности падающего потока (такая же постановка, но в случае непрерывных коэффициентов, была рассмотрена А. И. Прилепко [2]). Затем указывается специальная функция, которая принимает неограниченное значение только на искомых поверхностях.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-31-00112 мол_а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аниконов Д. С., Ковтанюк А. Е., Прохоров И. В.* Использование уравнения переноса в томографии. М.: Логос, 2000.
2. *Прилепко А. И., Иванков А. Л.* Обратные задачи определения коэффициента и правой части нестационарного многоскоростного уравнения переноса по переопределению в точке // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 1. С. 109–119.

УСЛОВИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Балданов Д. Ш.

Новосибирский государственный университет,
Новосибирск, Россия; 05damdin@mail.ru

В настоящей работе рассматривается вопрос об асимптотической устойчивости нулевого решения системы разностных уравнений

$$x_{n+1} = A(n)x_n + B_j(n)x_{n-\tau(n)}, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{1}$$

где

$$B_j(n) = \begin{cases} B(n) & \text{при} \quad \tau(n) = j, \\ 0 & \text{при} \quad \tau(n) \neq j, \end{cases}$$

$A(n)$, $B(n)$ — N-периодические матрицы размера $m \times m$. Мы будем предполагать, что запаздывающий аргумент ограничен $1 \le \tau(n) \le \tau < \infty$.

Имеет место следующий результат.

Теорема. *Предположим, что существуют эрмитовы положительно определенные матрицы* $H(n)$, K_j, $j = 0, 1, \dots, \tau$, *такие, что* $H(0) = H(N)$, $\Delta_j = K_{j-1} - K_j > 0$, $j = 1, \dots, \tau$, *и составные матрицы*

$$C(n) = -\begin{pmatrix} C_{00}(n) & A^*(n)H(n{+}1)B_1(n) & \dots & A^*(n)H(n{+}1)B_\tau(n) \\ B_1^*(n)H(n{+}1)A(n) & C_{11}(n) & \dots & B_1^*(n)H(n{+}1)B_\tau(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_\tau^*(n)H(n{+}1)A(n) & B_\tau^*(n)H(n{+}1)B_1(n) & \dots & C_{\tau\tau}(n) \end{pmatrix},$$

где

$$C_{00}(n) = A^*(n)H(n+1)A(n) - H(n) + K_0,$$

$$C_{jj}(n) = B_j^*(n)H(n+1)B_j(n) - \frac{1}{2}\Delta_j, \quad j = 1, \dots, \tau - 1,$$

$$C_{\tau\tau}(n) = B_\tau^*(n)H(n+1)B_\tau(n) - K_\tau,$$

также положительно определены при $n = 0, \dots, N-1$. *Тогда нулевое решение системы* (1) *асимптотически устойчиво.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демиденко Г. В., Балданов Д. Ш.* Об асимптотической устойчивости решений разностных уравнений с запаздыванием // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2015. Т. 15, вып. 4. С. 50–62.

УРАВНЕНИЯ ТИПА УРЫСОНА В ЗАДАЧАХ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ТОЧЕК ПОВЕРХНОСТИ

Белозуб В. А., Козлова М. Г., Лукьяненко В. А.

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия; art-inf@yandex.ru

Задача восстановления характерных точек изображений по данным косвенных измерений является востребованной в различных приложениях. Как правило, такие задачи моделируются линейными и нелинейными операторными уравнениями первого рода и являются некорректно поставленными. Разработка устойчивых регуляризирующих алгоритмов связана с адекватным использованием априорной и другой информации о решении, модели, способах получения данных косвенных измерений. В работе рассматриваются модели в виде разностных аналогов нелинейных интегральных уравнений типа свертки первого рода. Разнообразие регуляризирующих алгоритмов определяется выбором способа переработки доступной информации (знаний) в решение [1]. Тем самым, формируется интеллектуальная система, базовыми элементами которой являются ультрасистемы (по терминологии А. В. Чечкина) — преобразователи семантической информации — ультраоператоры. На первом этапе решается задача восстановления экстремальных точек поверхности (“блестящих”). Для этого используются асимптотические модели [2–4].

Следующий шаг состоит в синтезе интеллектуальной системы по обработке данных косвенных измерений из множества взаимодействующих интеллектуальных агентов (ИА) и соответствующей интеллектуальной системы управления (ИСУ). Информация, полученная одним ИА, может быть прецедентной, априорной для другого ИА. Например, два ИА решают задачу дистанционного зондирования выделенного участка поверхности (трассы). Решение, полученное в виде набора экстремальных точек одним ИА, может итерационно уточняться другим. ИА размещаются на одном устройстве или нескольких. Системы уравнений моделируют процесс сканирования поверхности антенными устройствами, характер сигнала и его отражение от сканируемой поверхности. Такие нелинейные системы алгебраических уравнений являются аналогами нелинейных интегродифференциальных уравнений типа Урысона 1 рода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васин В. В., Еремин И. И.* Операторы и итерационные процессы фейеровского типа (теория и приложения). Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2005.
2. *Лукьяненко В. А., Хазова Ю. А.* Решение нелинейных интегральных уравнений Урысона типа свертки // Анализ, моделирование, управление, развитие экономических систем: сборник научных трудов V Международной школы-симпозиума АМУР-2011. Симферополь: ТНУ им. В. И. Вернадского, 2011. С. 214–220.
3. *Лукьяненко В. А., Белозуб В. А.* Нелинейные уравнения типа свертки с дельтообразными ядрами // XXVI Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. Сб. тез. докл. Симферополь: ООО ФОРМА, 2015. С. 95.
4. *Lukyanenko V. A.* Some tasks for integral equations of Urison's type // Proceedings of the International Conference "Integral Equations–2010". Lviv, Ukraine: PAIS, 2010. P. 80–84.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ОБ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ОБТЕКАНИИ КРУГОВОГО КОНУСА РЕАЛЬНЫМ ГАЗОМ

Бибердорф Э. А.[1], **Блохин А. М.**[2]

Новосибирский государственный университет,
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирск, Россия; [1]biberdorf@ngs.ru, [2]blokhin@math.nsc.ru

Рассматривается задача о стационарном обтекании круглого конуса газом Ван-дер-Ваальса [1], описывающим вещество в газообразном, жидком, а также двухфазном состоянии. Актуальность данной задачи обусловлена современным уровнем развития летательных аппаратов, движущихся со сверх- и гиперзвуковыми скоростями.

Данная задача описывается системой ОДУ четвертого порядка, определенной на интервале, один конец которого (угол ударной волны) также является неизвестной величиной, и пятью граничными условиями [2]. Разработанный алгоритм на каждой итерации решает стандартную краевую задачу, используя четыре граничных условия, а затем производит корректировку решения на основе пятого граничного условия. Алгоритм быстро сходится (2–3 итерации) для достаточно больших чисел Маха набегающего потока.

Вариация алгоритма, вычисляющая число Маха набегающего потока, соответствующее заданному углу ударной волны, позволяет определить минимальное число Маха, при котором существует присоединенная ударная волна.

Произведено сравнение расчетных параметров течений газа Ван-дер-Ваальса с течениями политропного газа.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00791).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Блохин А. М., Голдин А. Ю.* Построение промежуточных областей для обобщенного газа Ван-дер-Ваальса // Журн. тех. физ. 2016. Т. 86, вып. 12. С. 49–55.
2. *Блохин А. М., Бибердорф Э. А.* Численное решение задачи о стационарном обтекании конуса реальным газом // Вычислительные технологии. 2015. Т. 20, № 2. С. 29–43.

ТРАЕКТОРНЫЙ И ГЛОБАЛЬНЫЙ АТТРАКТОРЫ ОДНОГО КЛАССА ВЯЗКОУПРУГИХ ЖИДКОСТЕЙ С ПАМЯТЬЮ

Болдырев А. С.

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия;
al-boldyrev@mail.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с локально-липшицевой границей Γ. Рассмотрим следующую систему уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_1 \operatorname{Div} \int_0^t \mathcal{L}(t,s)\mathcal{E}(v)(s, Z_\delta(v)(s;t,x))\, ds$$

$$-\mu_0 \operatorname{Div} \mathcal{E}(v) = -\operatorname{grad} p + f, \quad (t,x) \in [0,+\infty) \times \Omega, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad v\,|_\Gamma = 0, \quad v(0,x) = v^0(x), \quad \int_\Omega p\, dx = 0. \tag{2}$$

Здесь v — скорость, p — давление, f — плотность внешних сил. $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ij})$ — тензор скоростей деформации, $\mu_0 = 2\varkappa/\lambda$, $\mu_1 = 2\nu/\lambda - 2\varkappa/\lambda^2$, где λ — время релаксации, $\varkappa$ — время запаздывания, ν — вязкость жидкости. $\mathcal{L}(t,s)$ — измеримая функция, характеризующая память частицы жидкости. Предполагается, что $|\mathcal{L}(t,s)| \le e^{-(2\mu_1/\mu_0)(t-s)}$ ($s < t$, $s,t \in [0,+\infty)$). Рассмотрим траекторию, определяемую уравнением $z(\tau;t,x) = x + \int_t^\tau S_\delta v(s, z(s;t,x))ds$. В этом уравнении используется оператор регуляризации S_δ такой, что для каждого $v \in L_2(0,T;V)$ это уравнение имеет единственное решение $Z_\delta(v)$. Разрешимость в слабом смысле задачи (1)–(2) установлена в работе [1]. Подобные модели рассматриваются, например, в [2].

Теорема. *Пусть $f \in V^*$. Тогда существует минимальный траекторный аттрактор $\mathcal{U}$ и глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ пространства траекторий $\mathcal{H}^+$ задачи* (1)–(2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болдырев А. С.* Исследование одного класса вязкоупругих жидкостей с памятью // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. 2015. № 4. С. 62–77.
2. *Звягин В. Г., Дмитриенко В. Т.* О слабых решениях начально-краевой задачи для уравнений движения вязкоупругой жидкости // ДАН. 2001. Т. 380, № 3. С. 308–311.

О РАЗРЕШИМОСТИ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ СТОКСА

Бондарь Л. Н.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;

b_lina@ngs.ru

Рассматривается вторая краевая задача в полупространстве $\mathbb{R}^3_+ = \{x = (x', x_3) : x' \in \mathbb{R}^2,\ x_3 > 0\}$ для системы Стокса:

$$\begin{cases} -\nu\triangle u + \gamma u + \nabla p = f^+(x), \quad x \in \mathbb{R}^3_+, \\ \operatorname{div} u = f^-(x), \\ -\sigma_{i3}p + \nu\left(D_{x_3}u^i + D_{x_i}u^3\right)\big|_{x_3=0} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \end{cases}$$

где $u = (u^1, u^2, u^3)^T$, $f = (f^+, f^-)^T = (f^1, f^2, f^3, f^-)^T$, $\nu, \gamma > 0$, σ_{i3} — символ Кронекера. Исследуется разрешимость краевой задачи в соболевском пространстве $W^2_q(\mathbb{R}^3_+) \times W^1_q(\mathbb{R}^3_+)$.

Теорема. *Пусть $q > 3/2$. Тогда для $f^+(x) \in L_q(\mathbb{R}^3_+) \cap L_1(\mathbb{R}^3_+)$, $f^-(x) \in W^1_q(\mathbb{R}^3_+)$, $(1 + |x|)f^-(x) \in L_1(\mathbb{R}^3_+)$, $f^-(x', 0) \equiv 0$ существует единственное решение $(u(x), p(x))^T \in W^2_q(\mathbb{R}^3_+) \times W^1_q(\mathbb{R}^3_+)$ краевой задачи.*

Замечание 1. Из работы [1] вытекает, что при $f^+(x) \in L_q(\mathbb{R}^3_+)$, $f^-(x) \equiv 0$ краевая задача имеет единственное решение $u(x) \in W^2_q(\mathbb{R}^3_+)$, $\nabla p(x) \in L_q(\mathbb{R}^3_+)$, $1 < q < \infty$.

Замечание 2. Условие $q > 3/2$, указанное в теореме, является существенным. Можно показать, что при $1 < q \leq 3/2$ возникают дополнительные условия на правую часть системы $f(x)$. Аналогичный факт имеет место и для задачи Коши и первой краевой задачи для линеаризованной системы Навье – Стокса (см. [2, 3]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Солонников В. А.* Оценки решения одной начально-краевой задачи для линейной нестационарной системы уравнений Навье – Стокса // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1976. Т. 59. С. 178–254.
2. *Демиденко Г. В.* О необходимых условиях корректности задачи Коши для линеаризованной системы Навье – Стокса // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 3. С. 186–189.
3. *Александровский И. Л.* Условие разрешимости первой краевой задачи для линеаризованной системы Навье – Стокса // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 6. С. 1211–1224.

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

Боровских А. В.[1], **Платонова К. С.**[2]

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; [1]bor.bor@mail.ru, [2]kseniya-plat@yandex.ru

Проведена групповая классификация одномерного уравнения Больцмана $f_t + cf_x + \mathcal{F}(t,x,c)f_c = 0$ относительно функции $\mathcal{F} = \mathcal{F}(t,x,c)$, характеризующей внешнее силовое поле, в предположении наличия дополнительных соотношений между переменными, определяемых физическим смыслом используемых величин. Показано, что для всех $\mathcal{F}$ алгебра симметрий конечномерна и может иметь размерности 1, 2, 3, 8. Максимальная размерность реализуется при $\mathcal{F} \equiv 0$.

Теорема.

1. Алгебра симметрий уравнения $f_t + cf_x + \mathcal{F}(t,x,c)f_c = 0$ $(t,x,c \in \mathbb{R})$, сохраняющая уравнения характеристик $dx = cdt$, $dc = \mathcal{F}dt$ и прямые $dt = dx = 0$, конечномерна для любой функции $\mathcal{F}(t,x,c)$.

2. Конечномерные нетривиальные алгебры симметрий имеют уравнения с функциями $\mathcal{F}(t,x,c)$ классов, представители которых перечислены ниже. Каждый класс получается как орбита группы диффеоморфизмов в пространстве переменных (t,x). В каждом случае I–IV предполагается, что функция $\mathcal{F}$ не лежит в предыдущем классе.

I. $\mathcal{F} = 0$, группа симметрий восьмимерна;

II. $\mathcal{F} = Ac^a$, $\mathcal{F} = A\exp(ac)$, $\mathcal{F} = A\exp\int \frac{3c+a}{c^2+bc+d}dc$, $\mathcal{F} = \frac{A}{x^3}$, $\mathcal{F} = A\left(1+\frac{(t+ac)^2}{t^2+2ax}\right)^{3/2}$, $\mathcal{F} = A\left(\frac{(x-ct)^2+c^2+1}{x^2+t^2+1}\right)^{3/2}$, группа симметрий трёхмерна;

III. $\mathcal{F} = \mathcal{F}(c)$, $\mathcal{F} = T(c)/t$, группа симметрий двумерна;

IV. $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x,c)$, группа симметрий одномерна.

Для каждого случая определены алгебры симметрий соответствующей группы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-04066).

СХОДИМОСТЬ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ ВЫСОКОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ТОЧНОСТИ

Васкевич В. Л.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; vask@math.nsc.ru

В докладе дана оценка сверху порядка сходимости норм функционалов погрешности кубатурных формул высокой тригонометрической точности при увеличении числа узлов. Действие функционалов погрешности рассматривается на многомерных периодических пространствах Соболева, включая пространства дробной гладкости. Основной результат получен при выполнении общепринятых условий на гладкость пространства подынтегральных функций и на распределение узлов кубатурных формул [1–3].

При оценке порядка сходимости использованы найденные явные оценки сверху в виде степенной функции для значений кратности $r_n(p)$ собственных значений оператора Лапласа в случае периодических условий [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л., Васкевич В. Л.* Кубатурные формулы. Новосибирск: Изд-во Института математики, 1996.
2. *Васкевич В. Л.* Погрешность и гарантированная точность кубатурных формул в многомерных периодических пространствах Соболева // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 971–988.
3. *Васкевич В. Л.* Сходимость кубатурных формул высокой тригонометрической точности в многомерных периодических пространствах Соболева // Мат. труды. 2015. Т. 18, № 1. С. 3–14.
4. *Васкевич В. Л.* Мажоранта кратности собственных чисел лапласиана с периодическими условиями // Мат. труды. 2017. Т. 20, № 1. С. 75–80.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СИСТЕМ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЯМ КОШИ – РИМАНА

Волокитин Е. П.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; volok@math.nsc.ru

Мы рассматриваем плоскую полиномиальную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = P(x,y), \quad \dot{y} = Q(x,y), \tag{PCR}$$

где $P(x,y)$, $Q(x,y)$ — многочлены степени n от двух переменных x, y с действительными коэффициентами, удовлетворяющие уравнениям Коши – Римана

$$P_x(x,y) = Q_y(x,y), \quad P_y(x,y) = -Q_x(x,y).$$

Теорема 1. *Если $n \geq 2$, то полиномиальная система* (PCR) *степени n не имеет полиномиального первого интеграла.*

Теорема 2. *Пусть все точки покоя системы* (PCR) *являются или центрами, или дикритическими узлами, и собственные числа рационально соизмеримы. Тогда система* (PCR) *имеет рациональный первый интеграл.*

Теорема 3. *Однородная система* (PCR) *имеет рациональный первый интеграл.*

Наша гипотеза состоит в том, что описанные в теоремах 2, 3 классы исчерпывают список рационально интегрируемых полиномиальных систем вида (PCR).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-00745).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Volokitin E. P.* Algebraic first integrals of the polynomial systems satisfying the Cauchy–Riemann conditions // Qual. Theory Dyn. Syst. 2016. V. 15, No 2. P. 575–596.

О ТОПОЛОГИИ (q_1, q_2)-КВАЗИМЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Грешнов А. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
greshnov@math.nsc.ru

Пара (X, d), где X — некоторое множество, состоящее не менее, чем из двух элементов, d — неотрицательная функция, определенная на $X \times X$, называется (q_1, q_2)-*квазиметрическим пространством* [1], если выполняется

$d(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = y \ \ \forall x, y \in X,$

$d(x, z) \leq q_1 d(x, y) + q_2 d(y, z) \ \ \forall x, y, z \in X,$

где q_1, q_2 — некоторые положительные константы. К (q_1, q_2)-квазиметрическим пространствам относятся, в частности, эквирегулярные пространства Карно – Каратеодори с Box-квазиметриками и их обобщения [2].

Будем говорить, что (q_1, q_2)-квазиметрическое пространство удовлетворяет условию $\underline{\lim}$-слабой симметрии, если

$$\lim_{n\to\infty} d(x_0, x_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\lim}_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0.$$

Нами получены результаты о выполнении аксиом отделимости для (q_1, q_2)-квазиметрических пространств, удовлетворяющих условию $\underline{\lim}$-слабой симметрии.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00801).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнов А. В., Грешнов А. В.* Теория (q_1, q_2)-квазиметрических пространств и точки совпадения // ДАН. 2016. Т. 469, № 5. С. 527–531.
2. *Грешнов А. В.* Доказательство теоремы Громова об однородной нильпотентной аппроксимации для векторных полей класса C^1 // Мат. труды. 2012. Т. 15, № 2. С. 72–88.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С ПАРАМЕТРОМ

Дворницкий В. Я.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
vladlen_dvor@mail.ru

В работе рассматриваются системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом следующего вида

$$\frac{d}{dt}y(t) = [A_0 + A_1(\omega t)]y(t) + C\frac{d}{dt}y(t-\tau), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где A_0 — постоянная матрица, спектр которой лежит в левой полуплоскости, $A_1(t)$ — T-периодическая матрица, причем $\int\limits_0^T A_1(t)\,dt = 0$, C — постоянная матрица, $\tau > 0$ — параметр запаздывания, $\omega > 0$ — параметр.

Если $C = 0$, как следует из [1], существует число $\omega_0 > 0$ такое, что при всех $\omega \geq \omega_0$ нулевое решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1) асимптотически устойчиво. При $C \neq 0$ мы указываем условие на норму матрицы C и значение $\omega_1 > 0$ такое, что при всех $\omega \geq \omega_1$ нулевое решение системы нейтрального типа (1) экспоненциально устойчиво. При проведении рассуждений мы опираемся на результаты из [2].

Автор выражает благодарность к.ф.-м.н. И. И. Матвеевой за постановку задачи и научное руководство.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-41-543365).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
2. *Матвеева И. И.* Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 2. С. 344–352.

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Демиденко Г. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
demidenk@math.nsc.ru

В монографии [1] была введена некоторая классификация уравнений, не разрешенных относительно старшей производной

$$L_0(D_x)D_t^l u + \sum_{k=0}^{l-1} L_{l-k}(D_x)D_t^k u = f(t,x), \quad t > 0, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Было выделено три класса уравнений: *уравнения соболевского типа*, *псевдопараболические* и *псевдогиперболические уравнения.* Для первых двух классов в [1] была построена L_p-теория краевых задач. Для псевдогиперболических уравнений без младших членов (в обобщенном смысле) в [1] были впервые получены энергетические оценки и доказаны теоремы о разрешимости в соболевских пространствах. Отметим, что в этот класс входят, в частности, линеаризованные уравнения, возникающие при изучении колебаний стержней, балок и др.: модели Рэлея – Бишопа, Рэлея – Лява и т.д. (см., например, [2] и имеющуюся библиографию). Обобщение результатов [1] содержится в [3, 4]. В настоящей работе мы продолжаем эти исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
2. *Герасимов С. И., Ерофеев В. И.* Задачи волновой динамики элементов конструкций. Саров: ФГУП “РФЯЦ-ВНИИЭФ”, 2014.
3. *Fedotov I., Volevich L. R.* The Cauchy problem for hyperbolic equations not resolved with respect to the highest time derivative // Russian J. Math. Physics. 2006. V. 13, No 3. P. 278–292.
4. *Демиденко Г. В.* Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1289–1303.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИЗУЧЕНИЯ КАЧЕСТВЕННЫХ СВОЙСТВ РЕШЕНИЙ ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

Денисова Т. Е.

Московский городской психолого-педагогический университет, Москва, Россия; tdenissova@mail.ru, DenisovaTE@mgppu.ru

Продолжается изучение качественных свойств (выход на полином, осцилляция, почти периодичность, монотонный рост, убывание к нулю (с определённой скоростью) с ростом времени) решений уравнений соболевского типа вида

$$D_t^2\nabla(A(x)\nabla u)+\nabla(B(x)\nabla u)=0$$

с постоянными и переменными коэффициентами; $A(x)$ и $B(x)$ — соответствующие матрицы коэффициентов.

Проблематике уравнений, не разрешённых относительно старшей производной, посвящено большое количество работ (см., например, библиографию в [1–2]).

Первым строгим и наиболее глубоким исследованием таких уравнений является пионерская работа [3] С. Л. Соболева, по имени которого эти уравнения и были названы.

Доклад продолжает исследования, изложенные в [4] и касающиеся изучения свойств решения первой начально-краевой задачи для уравнений соболевского типа с постоянными и с переменными коэффициентами.

Рассматриваемые задачи объединяет методика исследования: сначала выявляется ограниченность нормы решения полиномом в соответствующем пространстве Соболева; затем с помощью некоторого интегрального преобразования подходящего функционального пространства определяется пространство функций одной переменной, обладающих некоторым качественным свойством (осцилляция; монотонный рост; стремление к нулю с ростом времени).

Известно, что решение первой начально-краевой задачи для уравнений, не являющихся уравнениями типа Коши – Ковалевской, не зависит непрерывным образом от границы пространственной области. Рассматриваемый метод дает возможность исследовать свойства решения в пространственной области, определяемой лишь требованиями соответствующих теорем вложения пространства Соболева в пространство непрерывных функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
2. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
3. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. Т. 18, № 1. С. 3–50.
4. *Денисова Т. Е.* Асимптотическое поведение решения первой начально-краевой задачи для уравнений соболевского типа с точки зрения осцилляции // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 2. С. 196–206.

К ТЕОРИИ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ СОЛОННИКОВА – ФАЗАНО

Дженалиев М. Т.[1], **Искаков С. А.**[2], **Рамазанов М. И.**[2]

[1]*Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Республика Казахстан;* muvasharkhan@gmail.com

[2]*Институт прикладной математики, Карагандинский государственный университет им. Е. А. Букетова, Караганда, Республика Казахстан;* isagyndyk@mail.ru, ramamur@mail.ru

В докладе наряду с тривиальным решением мы устанавливаем в классе существенно ограниченных функций с заданным весом существование нетривиального решения с точностью до постоянного множителя. Как отмечено в работе [1], случай неоднородной граничной задачи “…оказывается полезным при изучении некоторых задач со свободными границами”.

Рассматривается однородный вариант граничной задачи из [1]:

$$u_t(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in G = \{(x,t) :\, 0 < x < kt,\, t > 0\}, \quad (1)$$

$$u_x(x,t)|_{x=0} = 0, \quad b u_x(x,t)|_{x=kt} + \frac{d\tilde{u}(t)}{dt} = 0, \quad (2)$$

где $\tilde{u}(t) = u(t,t)$, $b = \mathrm{const} \geq 0$, $k = \mathrm{const} > 0$.

Теорема. *Граничная задача (1)–(2) имеет наряду с тривиальным решением и нетривиальное решение* $u(x,t) = C\,\bar{u}(x,t)$, $\bar{u}(x,t) \in L_{\infty,\theta(x,t)}(G)$ *— класс существенно ограниченных функций с весом* $\theta(x,t)$, $C = \mathrm{const}$. *Здесь* $\theta(x,t) = (x + t^{1/2})^{-1}$, *если* $(x,t) \in G_T$, *и* $\theta(x,t) = \exp\left\{-k(2x+kt)/(4a^2)\right\}$, *если* $(x,t) \in G \setminus G_T$, *где* $G_T = \{(x,t) :\, 0 < x < kt,\, 0 < t < T < +\infty\}$ *— произвольный ограниченный треугольник.*

Работа выполнена при поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (проекты № 0085/ПЦФ-14, № 0823/ГФ4 и № 1164/ГФ4).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Солонников В. А., Фазано А.* Об одномерной параболической задаче, возникающей при изучении некоторых задач со свободными границами // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2000. Т. 269. С. 322–338.

СВОЙСТВА ГЁЛЬДЕРОВОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ С НЕКОТОРЫМИ НУЛЬ-ЛАГРАНЖИАНАМИ

Егоров А. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
yegorov@math.nsc.ru, a.egorov@g.nsu.ru

Рассматриваются отображения $v : U \to \mathbb{R}^m$ класса Соболева $W^1_{p,\mathrm{loc}}$, $p > 1$, определенные на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$ и удовлетворяющие дифференциальному неравенству

$$F(v'(x)) \leq KG(v'(x)) + H(x) \quad \text{для п. в. } x \in U, \quad K > 0, \tag{1}$$

где $G : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ — k-однородный нуль-лагранжиан, $F : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ — функция, удовлетворяющая неравенству $F(\zeta) \geq c_F|\zeta|^k$ для $\zeta \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $c_F > 0$, $H : U \to \mathbb{R}$ — измеримая функция. Здесь $k, n, m \in \mathbb{N}$, $2 \leq k \leq \min\{n, m\}$, $v'(x)$ — матрица Якоби отображения v в точке $x \in U$, $\mathbb{R}^{m\times n}$ — пространство вещественных $m \times n$-матриц, рассматриваемое с операторной нормой $|\cdot|$.

Найдены новые условия на функции F, G и H, степень p и коэффициент K, гарантирующие локальную гёльдеровость решений неравенства (1). Полученные результаты усиливают соответствующие теоремы работ [1, 2].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00875).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Егоров А. А.* Квазивыпуклые функции и нуль-лагранжианы в проблемах устойчивости классов отображений // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 4. С. 796–812.
2. *Egorov A. A.* Solutions of the differential inequality with a null Lagrangian: higher integrability and removability of singularities. I, II // Владикавказский мат. журн. 2014. Т. 16, № 3. С. 22–37; Т. 16, № 4. С. 41–48.

ОЦЕНИВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ АВТОНОМНЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Егоршин А. О.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; egorshin@math.nsc.ru

Рассматриваются задачи среднеквадратического приближения последовательностей отсчетов непрерывных функций из $L_2(I_T)$ на равномерной h-сетке или финитных последовательностей из $l_2(L)$. Приближение осуществляется переходными процессами автономных дифференциальных или разностных уравнений (ДУ или РУ) на конечном интервале I_T длины $T = hL$. Показано: отсчеты решений ДУ этого класса на h-сетке могут быть описаны решениями РУ этого класса. Это позволяет по отчетам решений ДУ и заданной сетке однозначно оценивать коэффициенты ДУ и приближать его решениями функции из $L_2(I_T)$.

Пусть $\mathbf{y}_k = \{y_i\}_0^k \in l_2(k)$ — вектор из E^{k+1}, где $\|\mathbf{y}\|_k^2 = \sum_{j=0}^k \alpha_j^* \left|y_j\right|^2$. Рассматриваются вариационные задачи аппроксимации: минимизировать $J_k = \|\mathbf{y} - \widehat{\mathbf{y}}\|_k^2$ при условии, что $\mathbf{D}_k(\alpha)\widehat{\mathbf{y}}_k = \left\{\sum_0^n \alpha_j^* \widehat{y}_{j+m}\right\}_{m=0}^{k-n} = 0$, $k = \overline{0, L}$. Пусть $\mathbf{S}$ — единичная сфера в E^{n+1}, а $\widehat{J}_k(\alpha)$ — значение функционалов J_k на проекциях $\widehat{\mathbf{y}}_k$ векторов $\mathbf{y}_k$ на ядра операторов $\mathbf{D}_k(\alpha)$. Показано, что функционалы $\widehat{J}_k(\alpha) = \alpha^* Q_k \alpha$ имеют вид псевдоквадратичных форм с образующей матрицей $Q_k = Q_k(\alpha)$. Показано, что проекции $\widehat{\mathbf{y}}_k$, функционалы идентификации $\widehat{J}_k(\alpha)$ и идентифицирующие матрицы $Q_k = Q_k(\alpha)$ эффективно вычисляются с помощью встречных уравнений двусторонней ортогонализации однородных систем [1].

Эксперименты показывают, что одна итерация на $\mathbf{S}$ вида $\alpha_{[1]} = Q^{-1}(\widetilde{\alpha}_{[0]})\widetilde{\alpha}_{[0]}$, $\widetilde{\alpha}_{[1]} = \alpha_{[1]}/\|\alpha_{[1]}\|$, может при определенных условиях дать оценку $\widetilde{\alpha}_{[1]}$ точного решения $\widehat{\alpha}$ с приемлемой для конкретного приложения погрешностью. Получена система встречных уравнений, реализующая эту итерацию.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00592).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Егоршин А. О.* О встречных процессах ортогонализации // Сиб. журн. вычисл. математики. 2012. Т. 15, № 4. С. 371–385.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ НА ОТРЕЗКЕ

Елеуов А. А., Закариянова Н. Б., Елеуова Р. А.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Республика Казахстан; Eleuov@mail.ru

В настоящей работе изложены некоторые результаты теории обратных спектральных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Известно, что более трудными являются обратные задачи для дифференциальных уравнений высших порядков с нераспадающимися граничными условиями. В данной работе исследуется единственность решения обратной задачи спектрального анализа для дифференциальных уравнений высших порядков с нелокальными граничными условиями. Частный случай указанных граничных условий представляют двухточечные нераспадающиеся граничные условия. Основной результат настоящей статьи обобщает результаты монографии [1], где приведены подобные теоремы единственности для распадающихся граничных условий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ДЛЯ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОЙ МОДЕЛИ КЕЛЬВИНА – ФОЙГТА

Звягин А. В.

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия;
zvyagin.a@mail.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3,$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^2. В $Q_T = [0, T] \times \Omega$ рассматривается задача:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - 2\,\mathrm{Div}\,(\nu(\theta)\mathcal{E}) - \varkappa \frac{\partial \Delta v}{\partial t}$$

$$-2\varkappa\,\mathrm{Div}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_i}\right) + \nabla p \in F(v); \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\, v = 0 \text{ в } Q_T; \qquad v|_{t=0} = v_0 \text{ в } \Omega; \qquad v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \chi \Delta\,\theta$$

$$-2\left(\nu(\theta)\mathcal{E} + \varkappa \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \varkappa \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_i}\right) : \mathcal{E}(v) \in G(\theta); \tag{3}$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0 \text{ в } \Omega; \qquad \theta|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \tag{4}$$

Здесь v, θ и p — вектор-функция скорости, функции температуры и давления среды соответственно, $\varkappa > 0$ — время ретардации, $\chi > 0$ — коэффициент теплопроводности, $\nu(\theta) > 0$ — вязкость жидкости, $\mathcal{E}$ — тензор скоростей деформаций.

Рассмотрим многозначные отображения

$$F : E_1(:= \{v : v \in L_\infty([0, T], V), v' \in L_2(0, T; V^*)\}) \multimap L_2(0, T; V^*) \quad \text{и}$$

$$G : E_2(:= \{v : v \in L_p(0, T; W_p^1(\Omega)), v' \in L_1(0, T; W_p^{-1}(\Omega)),\ 1 < p < +\infty\})$$
$$\multimap L_1(0, T; W_p^{-2(1-1/p)}),$$

удовлетворяющие условиям:
(i_1) Отображения F и G определены на пространствах E_1 и E_2 соответственно и имеют непустые компактные выпуклые значения;
(i_2) Отображения F и G полунепрерывны сверху и компактны;
(i_3) Отображения F и G глобально ограничены;
(i_4) Отображения F и G слабо замкнуты.

Обозначим через $\Sigma \subset E_1 \times E_2$ множество всех слабых решений задачи (1)–(4). Рассмотрим функционал качества $\Phi : \Sigma \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий условиям:
(j_1) Φ ограничено снизу;
(j_2) Если $v_m \rightharpoonup v_*$ в E_1, $\theta_m \to \theta_*$ в $L_p(0,T;L_p(\Omega))$, то $\Phi(v_*,\theta_*) \leqslant \varliminf\limits_{m\to\infty} \Phi(v_m,\theta_m)$.

Теорема. *Пусть отображения F и G удовлетворяют условиям (i_1)–(i_4), а функционал Φ — (j_1)–(j_2). Тогда задача оптимального управления с обратной связью (1)–(4) имеет хотя бы одно слабое решение (v_*,θ_*) такое, что $\Phi(v_*,\theta_*) = \inf\limits_{(v,\theta)\in\Sigma} \Phi(v,\theta)$.*

АТТРАКТОРЫ МОДЕЛИ БИНГАМА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ПЕРЕМЕННЫМ В ТРЁХМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Звягин В. Г.[1], **Турбин М. В.**[2]

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия;
[1]zvg_vsu@mail.ru, [2]mrmike@mail.ru

Модель движения среды Бингама применяется для описания движения вязкопластичных сред. Она исследована с точки зрения существования решений [1]. Аттракторы этой модели в двумерной области изучались в [2] с использованием классической теории динамических систем, для которой необходимым условием является единственность решения рассматриваемой задачи. Однако для системы уравнений модели Бингама в трехмерном случае единственность слабых решений неизвестна. Нами для автономной ситуации доказывается существование траекторного и глобального аттракторов в трехмерном случае при периодических условиях по пространственным переменным. Для доказательства существования аттракторов была использована абстрактная теория траекторных и глобальных аттракторов (см. [3]), в которой единственности не требуется.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 14.Z50.31.0037).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Shelukhin V. V.* Bingham viscoplastic as a limit of non-Newtonian fluids // J. Math. Fluid Mech. 2002. V. 4, No 2. P. 109–127.
2. *Серегин Г. А.* О динамической системе, порожденной двумерными уравнениями движения среды Бингама // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1991. Т. 188. С. 128–142.
3. *Zvyagin V. G., Vorotnikov D. A.* Topological approximation methods for evolutionary problems of nonlinear hydrodynamics. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2008.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СОСТАВНОГО ТИПА

Зикиров О. С.

Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Республика Узбекистан; zikirov@yandex.ru

В данной работе рассматривается задача типа Дирихле для линейного уравнения третьего порядка составного типа

$$Mu \equiv \left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial}{\partial y}\right)(u_{xx}+u_{yy})+Lu=g(x,y), \tag{1}$$

где α, β — заданные постоянные числа, причем $\alpha^2+\beta^2\neq 0$, а L — линейное дифференциальное выражение вида

$$Lu \equiv a(x,y)u_{xx}+2b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_{yy}+d(x,y)u_x+e(x,y)u_y+f(x,y)u.$$

Пусть Ω — односвязная область в плоскости (x,y), ограниченная гладким жордановым контуром σ, который обладает следующими свойствами:

а) всякая прямая, параллельная характеристике $\beta x-\alpha y=\mathrm{const}$, пересекает его в двух точках;

б) прямые $\beta x-\alpha y=c_1$ и $\beta x-\alpha y=c_2$ $(c_1<c_2)$ имеют с ним единственные общие точки (точки касания) M и N соответственно.

Разобьем кривую σ на две части σ_1 и σ_2 следующим образом:

$$\sigma_1=\{(x,y)\in\sigma:\ \alpha x_n+\beta y_n>0\},\quad \sigma_2=\sigma\backslash\sigma_1,$$

где $x_n=\cos(n,x)$, $y_n=\cos(n,y)$ и n — внешняя нормаль к границе.

Для уравнения (1) изучается следующая задача: требуется найти функцию, удовлетворяющую внутри Ω уравнению (1) и краевым условиям:

$$u(x,y)\big|_{\sigma}=\varphi_1(x,y),\qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\Big|_{\sigma_2}=\varphi_2(x,y),$$

где $\varphi_1(x,y)$ и $\varphi_2(x,y)$ — заданные функции.

Доказаны теоремы существования и единственности классического решения для рассматриваемой задачи. Доказательство основано на энергетических неравенствах и на теории интегральных уравнений фредгольмовского типа.

ИССЛЕДОВАНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА С ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

Золототрубова Г. О.

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия;
Galinazolototrubowa@yandex.ru

Система уравнений Навье – Стокса для жидкости с переменной плотностью в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с локально-липшицевой границей Γ имеет вид:

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)-\mu\Delta v+\operatorname{grad} p=\rho f, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i}=0, \quad \operatorname{div} v=0, \tag{2}$$

$$v|_{t=0}=v_0, \quad \rho|_{t=0}=\rho_0, \quad v(x,t)=0 \quad \forall (x,t)\in\Gamma\times[0,T]. \tag{3}$$

Определение. *Слабым решением* задачи (1)–(3) называется пара (v,ρ): $v\in L_2(0,T;V)\cap C_\omega(0,T;H)$, $v'\in L_1(0,T;V^*)$, $\rho\in L_\infty(0,T;L_\infty)$, $0<m<\rho<M$, где m и M — константы, если (v,ρ) удовлетворяет (3) и для любых $\varphi\in V$, $\psi\in H^1$ при почти всех $t\in[0,T]$ выполняются два интегральных равенства:

$$\left(\rho(v)\frac{\partial v}{\partial t},\varphi\right)(t)+\sum_{i=1}^{n}\left(v_i\rho\frac{\partial v}{\partial x_i},\varphi\right)(t)+\mu(\nabla v,\nabla\varphi)(t)=(\rho f,\varphi)(t),$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t},\psi\right)(t)+\sum_{i=1}^{n}\left(v_i\frac{\partial \rho}{\partial x_i},\psi\right)(t)=0.$$

Теорема. *Пусть $f\in L_2(0,T;V)$, $v_0\in V$, $\rho_0\in L_\infty(\Omega)$, $0<m<\rho<M$. Тогда существует хотя бы одно слабое решение задачи (1)–(3).*

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ B-ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Ибрагимова Н. А.

Казанский государственный энергетический университет, Казань, Россия; NAI.liya@yandex.ru

В работе строится фундаментальное решение одного многомерного вырождающегося B-эллиптического уравнения с положительным параметром. Дается интегральное представление решения уравнения и изучаются свойства решения.

Пусть $\mathbb{E}_p^{++}$ — часть p-мерного евклидова пространства, где $x_{p-1} > 0$, $x_p > 0$, D — конечная область в $\mathbb{E}_p^{++}$, ограниченная поверхностью Γ и частями Γ_0 и Γ_1 плоскостей $x_{p-1} = 0$, $x_p = 0$, соответственно. Обозначим через $x = (x', x_p)$, $x' = (x'', x_{p-1})$, $x'' = (x_1, x_2, \ldots, x_{p-2})$ точки евклидова пространства, а через $C^k_{B^l}(D)$ — множество функций, k раз непрерывно дифференцируемых в D и удовлетворяющих условию $\frac{\partial u}{\partial x_l} = \mathrm{o}(1)$ при $x_l \to 0$.

Рассмотрим в $\mathbb{E}_p^{++}$ вырождающееся B-эллиптическое уравнение с положительным параметром вида

$$x_p^m \left(\sum_{l=1}^{p-2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_l^2} + B_{x_{p-1}} u \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_p^2} + \lambda^2 x_p^m u = 0, \tag{1}$$

где $B_{x_{p-1}} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_{p-1}^2} + \dfrac{k}{x_{p-1}} \dfrac{\partial}{\partial x_{p-1}}$ — оператор Бесселя, $m > 0$, $k > 0$, $p \geqslant 3$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Фундаментальным решением уравнения (1) с особенностью в точке x_0 является функция

$$\Omega(x, x_0) = \alpha C_k \int\limits_0^\pi \left(C_\gamma \int\limits_0^\pi \rho_\varphi^{-\nu} \mathrm{H}_\nu^{(1)}(\lambda \rho_\varphi) \sin^{\gamma-1} \varphi \, d\varphi \right) \sin^{k-1} \varphi \, d\varphi,$$

где $\mathrm{H}_\nu^{(1)}(\lambda \rho_\varphi)$ — функция Ханкеля,

$$\rho_\varphi = \Big(|x'' - x_0''|^2 + x_{p-1}^2 + x_{p-1_0}^2 - 2 x_{p-1} x_{p-1_0} \cos \varphi$$

$$+\frac{4}{(m+2)^2}\left(x_p^{m+2}+x_{p_0}^{m+2}-2x_p^{\frac{m+2}{2}}x_{p_0}^{\frac{m+2}{2}}\cos\varphi\right)\Bigg)^{1/2},$$

$C_\gamma = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$, $C_k = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$, $\alpha = \frac{2^{2-\nu+\gamma}\lambda^\nu}{i\,(m+2)^\gamma\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\pi^{\frac{p-4}{2}}}$, $\nu = \frac{p+k+\gamma-2}{2}$, $\gamma = \frac{m}{m+2}$.

Для любого решения $u(x)$ из класса $C^2_{B^{p-1}}(D)\cap C^2_{B^p}(D)\cap C^1(\overline{D})$ и любой точки $x_0\in D$ имеет место следующее интегральное представление:

$$u(x_0) = \int\limits_{\Gamma}\left[\Omega(\xi,x_0)A[u(\xi)] - u(\xi)A[\Omega(\xi,x_0)]\right]\xi_{p-1}^k d\Gamma. \tag{2}$$

Из интегрального представления (2) вытекает следующее свойство решения уравнения (1):

- существует решение $u(x)$ уравнения (1) в области $D_e = \mathbb{E}_p^{++}\setminus\overline{D}$, удовлетворяющее условию

$$u(x) = \mathrm{O}\left(r^{-\frac{p+k+\gamma-1}{2}}\right) \quad \text{при} \quad r=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_p^2}\to\infty.$$

ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ ПАРЫ НЕЗАВИСИМЫХ ФОРМ ПФАФФА

Иванов В. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; iva@math.nsc.ru

Здесь указаны условия, необходимые и достаточные для того, чтобы две гладкие дифференциальные формы ω_1 и ω_2 первой степени вблизи точки, где они независимы, имели общий интегрирующий множитель. Это такая гладкая положительная функция μ, что формы $\mu\omega_1$ и $\mu\omega_2$ служат дифференциалами du_1 и du_2 некоторых функций u_1 и u_2. Легко понять, что наши формы должны удовлетворять трем условиям

$$\omega_1 \wedge d\omega_1 = 0, \quad \omega_2 \wedge d\omega_2 = 0, \quad \omega_1 \wedge d\omega_2 + \omega_2 \wedge d\omega_1 = 0,$$

из которых первые два — это классические условия Фробениуса полной интегрируемости [1] каждого из уравнений Пфаффа $\omega_1 = 0$ и $\omega_2 = 0$, для трехмерного случая указанные еще Эйлером. При этих и только этих трех условиях существует такая форма Ω, что $\omega_1 \wedge \Omega = d\omega_1$ и $\omega_2 \wedge \Omega = d\omega_2$. Такая форма Ω ровно одна и явно выражается через ω_1 и ω_2 при помощи арифметических действий и дифференцирования. Формы ω_1 и ω_2 имеют общий множитель тогда и только тогда, когда форма Ω точна, что для дважды гладких исходных форм равносильно ее замкнутости, и если это так, прямым интегрированием мы найдем функцию L, для которой $dL = \Omega$. Ясно, что функция $\mu = \exp L$ будет общим интегрирующим множителем форм ω_1 и ω_2, так что функции u_1 и u_2, чьи множества уровня описывают интегральные многообразия форм ω_1 и ω_2, выражаются через эти две формы в квадратурах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

МЕТОД ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КЛЕТОК НОВООБРАЗОВАНИЯ И ИММУНИТЕТА В УСЛОВИЯХ РАДИОТЕРАПИИ

Кабанихин С. И.[1,2], Криворотько О. И.[1,2], Кондакова Е. А.[2]

[1] *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;*

[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*

kabanikhin@sscc.ru, olga.krivorotko@sscc.ru, ekondak95@mail.ru

Численно исследована задача Коши для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которая характеризует взаимодействие новообразований и иммунных клеток в условиях радиотерапии [1]. Параметры исследуемой математической модели характеризуют степень новообразования, а также скорость иммунного ответа.

В работе, опираясь на исследования фазовых портретов системы [2], рассматриваются вопросы устойчивости задачи Коши для системы нелинейных ОДУ. Установлено влияние члена на устойчивость, отвечающего за лечение. Цель работы состоит в разработке и исследовании численного алгоритма определения оптимального лечения для математической модели взаимодействия иммунных клеток с новообразованиями с периодическим лечением радиотерапией [3, 4]. Приведены и проанализированы численные расчеты, демонстрирующие преимущество оптимального лечения перед неэффективным полным лечением или его отсутствием.

Работа проводилась при частичной поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (4.1.3 совместные лаборатории НГУ – ННЦ СО РАН), грантом Президента Российской Федерации МК-1214.2017.1 и проектом с Республикой Казахстан № 1746/ГФ4 "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач естествознания".

ЛИТЕРАТУРА

1. *Liu Z., Yang Ch.* A mathematical model of cancer treatment by radiotherapy // Computational and Mathematical Methods in Medicine. 2014. Article ID 172923.

2. *Годунов С. К.* Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 1997.
3. *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.
4. *Ledzewicz U., Mosalman M. S. F., Schattler H.* Optimal controls for a mathematical model of tumor-immune interactions under targeted chemotherapy with immune boost // Discrete Contin. Dyn. Syst., Ser. B. 2013. V. 18, No 4. P. 1031–1051.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Кабанихин С. И.[1], Шишленин М. А.[2], Шолпанбаев Б. Б.[3]

[1]*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;* ksi52@mail.ru

[2]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;* mshishlenin@ngs.ru

[3]*Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы, Республика Казахстан;* Bahtygerey@mail.ru

Рассмотрим обратную задачу в области $\Omega = \Delta(L_x) \times (0, L_y)$, где $\Delta(L_x) = \{(x,t) : x \in (0, L_x),\, t \in (x, 2L_x - x)\}$:

$$u_{tt} + \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}} u_t = u_{xx} + u_{yy}, \quad (x,t) \in \Delta(L_x), \tag{1}$$

$$u_x(0,y,t) = g(y,t), \quad y \in (0, L_y), \quad t \in (0, 2L_x), \tag{2}$$

$$u(x,y,x) = q(x,y), \quad x \in (0, L_x), \quad y \in (0, L_y), \tag{3}$$

$$u(x,0,t) = u(x, L_y, t) = 0, \quad (x,t) \in \Delta(L_x). \tag{4}$$

В **прямой задаче** (1)–(4) требуется определить $u(x,y,t)$ по заданным $q(x,y)$ и $g(y,t)$.

Обратная задача заключается в определении функции $q(x,y)$ из соотношений (1)–(4) по дополнительной информации:

$$u(0,y,t) = f(y,t).$$

Алгоритм решения обратной задачи

1. Выбираем начальное приближение q_0.
2. Решаем прямую задачу (1)–(4) с заданным q_n.
3. Вычисляем значение функционала
   $J(q_n) = \int\limits_0^{L_y} \int\limits_0^{2L_x} [u(0,y,t;q_n) - f(y,t)]^2 dydt.$

4. Если значение целевого функционала не достаточно мало, тогда решаем сопряженную задачу.

5. Вычисляем градиент функционала
$J'q_n = \psi_t(x,y,x) + \dfrac{\sigma\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}}\psi(x,y,x).$

6. Вычисляем следующее приближение $q_{n+1} = q_n - \alpha J' q_n$ и переходим к пункту 2.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки МОН РК № 1746/ГФ4 "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач естествознания".

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кабанихин С. И., Нурсеитов Д. Б., Шолпанбаев Б. Б.* Задача продолжения электромагнитного поля в сторону залегания неоднородностей // Сиб. электрон. мат. изв. 2014. Т. 11. Труды V Международной молодежной школы-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач". С. C85–C102.
2. *Kabanikhin S. I., Nurseitov D. B., Shishlenin M. A., Sholpanbaev B. B.* Inverse problems for the ground penetrating radar // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2013. V. 21, No 6. P. 885–892.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

Кожанов А. И.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; kozhanov@math.nsc.ru

В докладе изучаются результаты о разрешимости в целом в классах регулярных (имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в уравнение) решений начально-краевых задач для сильно нелинейных уравнений соболевского типа. Более конкретно: будут представлены результаты о разрешимости начально-краевых задач для:

а) сильно нелинейных уравнений соболевского типа нечетного порядка (псевдогиперболических и псевдопараболических уравнений), возникающих в теории вязкоупругих сред;

б) нелинейных аналогов уравнения Буссинеска – Лява, возникающих в электродинамике;

в) нелинейных интегродифференциальных уравнений, связанных с уравнениями соболевского типа.

ОДНОМЕРНОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

Коновалова Д. С.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; dsk@math.nsc.ru

При отсутствии внешней силы уравнение поперечных колебаний струны и продольных колебаний стержня записывается в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{1}$$

К уравнению (1) присоединяются данные Коши:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x). \tag{2}$$

Функция $\varphi(x)$ имеет непрерывную вторую производную, а функция $\psi(x)$ — первую. Функция $a(x)$ предполагается кусочно-постоянной: $a(x) = a_1$ при $x \leq x_0$, $a(x) = a_2$ при $x > x_0$, a_1, a_2 — положительные числа. В полуплоскости $t > 0$ определяются области G_i, $i = 1, \ldots, 4$, полученные разделением полупространства $t > 0$ тремя лучами, исходящими из точки $(x_0, 0)$. Решение уравнения (1) понимается в следующем обобщенном смысле: оно непрерывно, удовлетворяет соотношениям (2) и в каждой области G_i имеет непрерывные производные u_{tt}, u_{xx}, удовлетворяющие уравнению (1). На вышеуказанных лучах допускаются разрывы первого рода производных обобщенного решения.

Исследование задачи производится сведением уравнения (1) к системе двух уравнений первого порядка с разрывными коэффициентами при производной по x. Система решается методом характеристик, и в итоге получается формула для $u(x,t)$, которую можно назвать обобщенной формулой Даламбера. Изученная задача является небольшим фрагментом теории зондирования неоднородных сред физическими сигналами.

Работа выполнена при поддержке программы Президиума РАН (проект № 0314-2015-0010).

О РОБАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СО СТРУКТУРИРОВАННОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ

Кононов А. Д.

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия;
my_official@rambler.ru

Рассматривается стационарная система дифференциальных уравнений

$$Ax'(t) + (B + C\Delta D)x(t) = 0, \quad t \in T = [0, +\infty), \tag{1}$$

со структурированной неопределенностью $C\Delta D$. Здесь A, B, C и D — $n \times n$ заданные матрицы, пучок $\lambda A + B$ регулярен, $\det A = 0$. Такие системы называются *дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ)*. Мерой неразрешенности ДАУ относительно производной служит целочисленная величина, называемая *индексом*.

Исследуется вопрос об асимптотической устойчивости системы (1) в условиях, когда асимптотически устойчива невозмущенная система

$$Ax'(t) + Bx(t) = 0, \quad t \in T. \tag{2}$$

Анализ проводится в предположениях, обеспечивающих существование оператора $\mathcal{R} = R_0 + R_1 \frac{d}{dt} + \cdots + R_r \left(\frac{d}{dt}\right)^r$, действие которого преобразует систему (2) к виду

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{n-d} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_1 & E_d \\ J_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = 0, \quad t \in T,$$

где r — индекс неразрешенности, E_d — единичная матрица указанного порядка; $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = Qx(t)$, Q — матрица перестановки строк; J_1 и J_2 — некоторые матрицы соответствующих размеров [1].

Основная сложность, возникающая при исследовании робастных свойств ДАУ, связана с тем, что в случае высокого индекса при возмущении входных данных может измениться внутренняя структура системы.

Для системы (1) индексов неразрешенности 1 и 2 в условиях, при которых структурированное возмущение $C\Delta D$ не меняет структуру системы, получены достаточные условия робастной устойчивости.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-31-00101) и Комплексной программы фундаментальных научных исследований СО РАН № II.2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Щеглова А. А.* Существование решения начальной задачи для вырожденной линейной гибридной системы с переменными коэффициентами // Изв. вузов. Матем. 2010. № 9. С. 57–70.

К ВОПРОСУ ОБ АНАЛИТИЧЕСКОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ С ВЫРОЖДЕНИЕМ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Кузнецов П. А.

Институт математики, экономики и информатики ИГУ, Иркутск, Россия; pav_ku@mail.ru

Представлены результаты исследования ряда специальных краевых задач вида

$$u_t = u\Delta u + \frac{1}{\sigma}(\nabla u)^2, \quad u|_\Gamma = \alpha(t, \overline{x}) \tag{1}$$

для нелинейного уравнения теплопроводности/фильтрации (“the porous medium equation”) в классе аналитических функций. Здесь $u = u(t, \overline{x})$ — неизвестная функция, $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, $\sigma > 0$ — константа. Замкнутая достаточно гладкая поверхность Γ ограничивает звездную область в $\mathbb{R}^n$. Аналитическая функция α обращается в нуль при $t = 0$, что делает уравнение (1) не разрешенным относительно старшей производной [1].

Для задачи (1) последовательно рассмотрены следующие виды стационарной границы Γ: трехмерная сфера [2], произвольная двумерная кривая [3], произвольная трехмерная поверхность. В каждом случае построено решение в виде двойного степенного ряда, а также доказана соответствующая теорема существования. Результат из [3] обобщен на случай нестационарной $\Gamma \equiv \Gamma(t)$.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 16-01-00608 и № 16-31-00291).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
2. *Казаков А. Л., Кузнецов П. А.* Краевая задача с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности в сферических координатах // Тезисы докладов Международной конференции “Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений”. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2013. С. 149.
3. *Казаков А. Л., Кузнецов П. А.* Об одной краевой задаче для нелинейного уравнения теплопроводности в случае двух пространственных переменных // Сиб. журн. индустр. математики. 2014. Т. 17, № 1. С. 46–54.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОМАССООБМЕНА

Латыпов И. И.

Бирский филиал Башкирского государственного университета, Бирск, Россия; LatypovII@rambler.ru

В докладе ставится и решается задача нахождения приближенного решения сингулярно возмущенной краевой задачи уравнения теплопроводности с нелинейными граничными условиями на подвижных границах [1, 2]:

$$T_t\left(x,t\right) = Fo\cdot T_{xx}\left(x,t\right) + q\left(x,t\right) + A\left[T\left(x,t\right)\right],\quad T\left(x,t\right) = T_0\left(x\right),\quad t\searrow 0,$$

$$T_x\left(x,t\right) = -q_i\left(t\right) + \gamma_i\cdot\left[T^4\left(x,t\right) - U_i^4\right],\quad x=\psi_i\left(t\right),\quad i=1,2,$$

$$\left(x,t\right)\in\Omega = \left\{\left(x,t\right):\ \psi_1\left(t\right) < x < \psi_2\left(t\right),\ 0<t\le t_0\right\},\quad 0<Fo\ll 1,$$

$$q_1\left(t\right) = q_{10}\cdot\exp\left\{-\frac{\left(t-\beta_0\right)^2}{{\beta_{10}}^2}\right\},\quad q_2\left(t\right) = q_{20} = \mathrm{const}.$$

Приближенное решение, используя “геометро-оптический” асимптотический метод [2], получается в виде асимптотического разложения решения в смысле Пуанкаре по степеням малых параметров в зависимости от близости рассматриваемой точки к границам [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Латыпов И. И.* Приближенный расчет распределения температурного поля активного элемента твердотельного лазера // Труды кафедры экспериментальной и теоретической физики Института физики молекул и кристаллов УНЦ РАН. Вып. 1. Уфа: Гилем, 2001. С. 82–92.
2. *Латыпов И. И., Кравченко В. Ф., Несененко Г. А.* Применение интегральных уравнений к сингулярно возмущенной нестационарной краевой задаче теплопроводности с подвижными границами // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 9. С. 1171–1178.
3. *Латыпов И. И., Бигаева Л. А.* Исследование нестационарных тепловых процессов в материале при воздействии ультракороткими лазерными импульсами // Концепции фундаментальных и прикладных научных исследований. Сборник статей Международной научно-практической конференции. Ч. 3. Уфа: Омега Сайнс, 2016. С. 11–15.

МЕТОДЫ ПРАКТИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТИ НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ БИОЛОГИИ

Латышенко В. А.[1], Криворотько О. И.[2], Кабанихин С. И.[2]

[1] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
Latushenko_varia@mail.ru

[2] *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;*
krivorotko.olya@mail.ru, ksi52@mail.ru

В данной работе исследованы некоторые методы практической (апостериорной) идентифицируемости параметров математических моделей биологии [1]. Данные методы позволяют определить единственный набор параметров математических моделей биологии по результатам измерения определенных выходных величин в течение оптимального интервала времени.

Цель данной работы — выявить неидентифицируемые параметры некоторых математических моделей биологии и найти оптимальное количество измерений, которое необходимо брать в течение некоторого интервала времени, чтобы достаточно точно определять параметры математической модели. Для этого используется метод собственных значений и метод, основанный на анализе числа обусловленности матрицы чувствительности. Приведены и проанализированы результаты численных расчетов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, гранта Президента РФ (№ МК-1214.2017.1) и Республики Казахстан (грант № 1746/ГФ4 "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач естествознания").

ЛИТЕРАТУРА

1. *Miao H., Xia X., Perelson A. S., Wu H.* On identifiability of nonlinear ODE models and applications in viral dynamics // SIAM Rev. 2011. V. 53, No 1. P. 3–39.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ УТОК-ЦИКЛОВ ОДНОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Лашина Е. А.[1,3], **Чумакова Н. А.**[1,3], **Чумаков Г. А.**[2,3]

[1] *Институт катализа им. Г. К. Борескова СО РАН, Новосибирск, Россия;*

[2] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*

[3] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*

lashina@catalysis.ru, chum@catalysis.ru, chumakov@math.nsc.ru

Работа посвящена анализу периодических решений одной кинетической модели гетерогенной каталитической реакции, которая является системой двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений [1]. Исследование модели проводится в случае, когда в ней возможно выделение малого параметра $0 < \varepsilon \ll 1$, и система является сингулярно возмущенной. При некоторых значениях параметров (см. [1]) сосуществуют устойчивый и неустойчивый предельные циклы, которые обладают высокой параметрической чувствительностью и являются утками (см. [2]). Численное исследование утки-цикла — достаточно сложная задача, т. к. малые возмущения начальной точки могут вызывать конечные вариации решения при условии, что время нахождения фазовой точки вблизи неустойчивой части медленного многообразия достаточно продолжительно. Для анализа точности численного интегрирования в работе проводится исследование устойчивости решений системы на конечном интервале времени и предлагаются оценки глобальной погрешности численного интегрирования.

Работа выполнена в рамках государственного задания ФГБУН ИК СО РАН (проект № 0303-2016-0003).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chumakov G. A., Lashina E. A.,Chumakova N. A.* On estimation of the global error of numerical solution on canard-cycles // Math. Comput. Simul. 2015. V. 116. P. 59–74.
2. *Звонкин А. К., Шубин М. А.* Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1984. Т. 39, вып. 2. С. 77–127.

УСЛОВИЯ СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВА

Ломакин А. В.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
kekropius@gmail.com

В работе рассматриваются задача Коши и смешанные краевые задачи в четверти пространства для уравнения Соболева [1] при $n = 2$

$$\Delta u_{tt} + u_{x_2 x_2} = 0, \quad t > 0.$$

Исследованы асимптотические свойства решений при $t \to \infty$ для произвольных начальных данных. Доказано, что решения задач в пределе выходят на функции, зависящие только от x_1. Для каждой из задач предельные функции указаны в явном виде, установлены скорости стабилизации. Получены условия на начальные данные, при которых решения стремятся к нулю.

При получении результатов применялся вариант метода стационарной фазы, предложенный в [2, гл. 3].

Автор выражает благодарность проф. Г. В. Демиденко за постановку задачи и научное руководство.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954. Т. 18, № 1. С. 3–50.
2. *Успенский С. В., Демиденко Г. В., Перепелкин В. Г.* Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. Новосибирск: Наука, 1984.

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВА

Ломакина Е. А.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
kekropius@gmail.com

В работе рассматривается вторая краевая задача для уравнения Соболева [1]

$$\Delta u_{tt} + u_{x_2 x_2} = 0 \tag{1}$$

в цилиндрической области $Q = \{t > 0,\ x \in G \subset \mathbb{R}^2\}$. Предполагается, что область G — ограниченная и звездная относительно некоторого круга.

Одной из проблем С. Л. Соболева, поставленной им для уравнения (1), является изучение асимптотических свойств решений краевых задач при $t \to \infty$. Большой вклад в решение этой проблемы внесли его ученики Р. А. Александрян, Р. Т. Денчев, Т. И. Зеленяк, В. Н. Масленникова и др. при изучении краевых задач в областях специального вида. В случае областей произвольной конфигурации оценки на бесконечности решения первой краевой задачи для уравнения Соболева были получены в конце прошлого столетия в [2] при $n = 2$ и в [3] при $n \geq 2$. Из этих результатов, в частности, вытекает, что при $t \to \infty$ решение и его производные не могут расти быстрее некоторой степени t^γ.

В настоящей работе, следуя схеме [3], мы получаем аналогичные оценки решения второй краевой задачи.

Автор выражает благодарность проф. Г. В. Демиденко за постановку задачи и научное руководство.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954. Т. 18, № 1. С. 3–50.
2. *Сказка В. В.* Асимптотика при $t \to \infty$ смешанных задач для одного уравнения математической физики // Сиб. мат. журн. 1981. Т. 22, № 1. С. 129–143.
3. *Демиденко Г. В.* Оценки при $t \to \infty$ решения одной задачи С. Л. Соболева // Сиб. мат. журн. 1984. Т. 25, № 2. С. 112–120.

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ НА КОНЕЧНЫХ ВЫБОРКАХ ЛИНЕАРИЗАЦИЕЙ ГРАДИЕНТА ЦЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Ломов А. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
lomov@math.nsc.ru

Рассматривается система разностных уравнений

$$x[k+1] = A_\theta x[k] + B_\theta u[k] + w[k], \quad k = \overline{1, N-1},$$
$$\check{z}[k] \doteq \begin{bmatrix} \check{x}[k] \\ \check{u}[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x[k] \\ u[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_x[k] \\ \xi_u[k] \end{bmatrix} \doteq z[k] + \xi[k],$$

где $x[k] \in \mathbb{R}^n$, $u[k] \in \mathbb{R}^m$ — переменные, $A_\theta \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_\theta \in \mathbb{R}^{n\times m}$ — матрицы, зависящие от фиксированного параметра $\theta \in \mathbb{R}^v$, подлежащего идентификации по наблюдениям $\check{z}[k] \in \mathbb{R}^{n+m}$. Векторы $w[k]$ и $\xi[k]$ играют роль независимых случайных возмущений.

Для целевых функций $J_1(\theta) = \left(\widetilde{W}_1\theta + \widetilde{W}_2\right)^* \widetilde{Y}\widetilde{Y}^* \left(\widetilde{W}_1\theta + \widetilde{W}_2\right)$ [1], $J_2(\theta) = \|\check{z} - z_{\rm opt}(\theta)\|^2_{K^\#}$, $z_{\rm opt}(\theta) \doteq \arg\min_{z:\, G_\theta z = 0} \|\check{z} - z\|^2_{K^\#}$ [2], где $\widetilde{W}_{1,2} \doteq \varPhi F \check{W}_{1,2}$, $\varPhi$, F — матрицы дискретного преобразования Фурье и префильтрации, $\check{W}_{1,2}$ — матрицы из наблюдений, $\widetilde{Y} \doteq \varPhi W_1(z)$ [1], исследуется чувствительность оценок $\hat{\theta}_{1,2} = \arg\min_\theta J_{1,2}(\theta)$ к малым возмущениям $w[k]$ и $\xi[k]$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00592).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Klein V., Morelli E. A.* Aircraft system identification. Theory and practice // AIAA Education Series. Reston: AIAA, 2006.
2. *Ломов А. А.* О локальной устойчивости в задаче идентификации коэффициентов линейного разностного уравнения // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, вып. 4. С. 81–103.

ОЦЕНКИ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ИДЕНТИФИКАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕРЕЗ ЛОКАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ЦЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Ломов А. А.[1], **Федосеев А. В.**[2]

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
[1]lomov@math.nsc.ru, [2]alexeyfedoseev.nsk@gmail.com

В докладе исследуются свойства трех методов идентификации параметров разностных уравнений в условиях нетипичных возмущений в наблюдениях с использованием теории чувствительности по локальным разложениям целевых функций. Теоретические результаты проверяются вычислительным моделированием на примере уравнений продольного движения летательного аппарата, параметры которого идентифицируются линейным методом наименьших квадратов, методом инструментальных переменных в частотной области, вариационным методом (STLS, GTLS).

Исследование свойств оценок параметров разностных уравнений путем линеаризации градиента целевой функции имеет ряд ограничений, как принципиальных (невозможность изучить смещение оценок), так и связанных с недостаточным развитием теории, в частности, с чрезвычайно сильными предположениями о малости возмущений. Тем не менее, в докладе показано, что линеаризованные модели зависимости отклонений оценок от возмущений демонстрируют хорошее совпадение с результатами вычислительного эксперимента на реальных данных. Это дает основания использовать локальный подход в качестве инструмента исследования свойств оценок на конечных выборках.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00592).

НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С ЧАСТИЧНО ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Лукина Г. А.

Политехнический институт (филиал) Северо-Восточного федерального университета им. М. К. Аммосова, Мирный, Россия;
lukina-g@mail.ru

Исследуется разрешимость нелокальных задач с интегральными граничными условиями по пространственной переменной для вырождающихся уравнений с кратными характеристиками.

Пусть Ω есть интервал $(0,1)$ оси Ox, Q есть прямоугольник $\Omega\times(0,T)$, $0<T<+\infty$, $N(x)$, $K(t)$, $\alpha(t)$ — заданные функции, определенные при $x\in\overline{\Omega}$, $t\in[0,T]$.

Нелокальная задача I. Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$K(t)u_t + u_{xxx} + c(x,t)u = f(x,t) \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняются условия:

$$u(x,0) = 0, \quad x\in\Omega, \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0<t<T, \tag{3}$$

$$u_x(1,t) = \int\limits_0^1 N(x)u(x,t)dx, \quad 0<t<T.$$

Нелокальная задача II. Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2), (3), а также условие

$$u_x(1,t) = \alpha(t)u_x(0,t), \quad 0<t<T.$$

Для рассматриваемых задач доказываются теоремы существования регулярных решений.

ПЕРИОДИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ ПЕРВОГО РОДА

Малютина М. В.[1], **Орлов С. С.**[2]

Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия;
[1]fanofevanescence2008@yandex.ru, [2]orlov_sergey@inbox.ru

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)dt = f(x), \quad x \geq 0, \tag{1}$$

относительно неизвестной функции φ, в котором $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера фиксированного аргумента $\alpha > 0$, f — заданная функция. Это уравнение при $0 < \alpha < 1$ имеет слабую (интегрируемую) особенность, в современной математической литературе оно называется *обобщенным интегральным уравнением Абеля.* Классы уравнений Абеля сохранили актуальность как объекты исследования, им посвящено множество журнальных публикаций и даже отдельные монографии, например [1]. Прежде всего, высокий интерес вызван запросами естественных наук, где уравнения Абеля находят широкое применение [1, с. 26–60]. В то же время он продиктован интенсивным развитием направлений самой математики, в данном случае — дробного интегро-дифференцирования, именуемого за рубежом как fractional calculus.

Настоящий доклад посвящен проблеме существования непрерывных периодических решений уравнения (1), которой уделено незаслуженно малое внимание в современной научной литературе, причем касается это как уравнений Абеля, так и интегральных уравнений Вольтерра в целом. Доказаны критерии существования единственного непрерывного на луче периодического решения уравнения (1) для $\alpha \in \mathbb{N}$ и $\alpha \notin \mathbb{N}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-31-00291).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gorenflo R., Vessella S.* Abel integral equations: analysis and applications. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1991.

ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ МНОГОСКОРОСТНЫХ СМЕСЕЙ

Мамонтов А. Е.[1], **Прокудин Д. А.**[2]

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия;

[1]aemamont@hydro.nsc.ru, [2]prokudin@hydro.nsc.ru

Рассматривается модель многокомпонентных многоскоростных смесей. Для нее теоремы о глобальном существовании слабых решений многомерных задач были получены совсем недавно, благодаря чему состояние этой теории стало сопоставимым с таковым для однокомпонентных моделей. При этом открылись проблемы, характерные именно для смесей, и отличающие их принципиально от однокомпонентных моделей. В определенной степени эти трудности описаны в [1, 2]. Для многих из них пока неясны пути преодоления.

Как и в многомерном случае, классические результаты для однокомпонентного вязкого газа не переносятся на многокомпонентный одномерный случай каким-то автоматическим образом, в частности, в силу принципиально иной структуры вязких членов: наличия недиагональной матрицы вязкостей. Это отличие по своей сложности не зависит от размерности движения.

В докладе будет представлена теорема о существовании и единственности сильного решения начально-краевой задачи для одномерных уравнений движения многокомпонентных многоскоростных смесей с недиагональной матрицей вязкостей, будут обсуждаться перспективы и трудности дальнейшего развития теории.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 15-11-20019).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mamontov A. E., Prokudin D. A.* Viscous compressible multi-fluids: modeling and multi-D existence // Methods Appl. Anal. 2013. V. 20, No 2. P. 179–195.
2. *Mamontov A. E., Prokudin D. A.* Viscous compressible homogeneous multi-fluids with multiple velocities: barotropic existence theory // Sib. Electron. Math. Reports. 2017. V. 14. P. 388–397.

РОБАСТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С НЕСКОЛЬКИМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

Матвеева И. И.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
matveeva@math.nsc.ru

В работе исследуется робастная устойчивость решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа следующего вида

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \sum_{j=1}^{m} B_j(t)y(t-\tau_j) + \sum_{j=1}^{m} C_j(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau_j), \quad t \geq 0,$$

где $A(t)$, $B_j(t)$, $C_j(t)$ — матрицы размера $n\times n$ с непрерывными периодическими элементами, $\tau_j > 0$ — параметры запаздывания, $j = 1, \ldots, m$.

Предполагая экспоненциальную устойчивость нулевого решения невозмущенной системы, указываются условия на возмущения матриц $A(t)$, $B_j(t)$, $C_j(t)$, при которых нулевое решение возмущенной системы экспоненциально устойчиво. Для решений возмущенной системы установлены оценки, характеризующие скорость убывания на бесконечности. При доказательстве используется функционал Ляпунова – Красовского специального вида [1].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00592).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Матвеева И. И.* Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа с несколькими запаздываниями // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53, № 6. С. 730–740.

НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ

Миренков В. Е.

Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, Новосибирск, Россия; mirenkov@misd.ru

Рассматриваются некорректные задачи механики деформируемого твердого тела для кусочно-однородных областей со значительным числом управляющих параметров, которые идентифицируются, используя натурные данные о смещениях границы.

Граничные задачи механики являются многопараметрическими и зависимость искомых решений от них может быть сложной. Характер зависимости решения от параметров становится известным после обращения граничной задачи. Исследование поведения решения, как правило, достигается численными методами, при этом встаёт ряд вопросов относительно точности решения, описания влияния параметров на решение при одновременном их изменении. В настоящее время известны численные решения частных обратных задач в зависимости от идентификации одного параметра. Предлагается принципиально новый метод решения обратных многопараметрических задач, основанный на полученных точных уравнениях, связывающих граничные значения компонент напряжений и смещений и исключающих регуляризацию. Использование экспериментальных данных, определенных с погрешностью, дискретизация сплошной среды при численном счёте, априорные предположения на характер деформирования конструкции (идеальное проскальзывание, скачок смещений, нарушение конформности в конечном числе точек и т. п.) вносят погрешность в граничные условия при формулировке задачи и расширяют класс обратных задач. Предложена система сингулярных интегральных уравнений, позволяющая получить аналитические решения для произвольной области компонент смещений и напряжений в квадратурах, что даёт возможность исключить процесс регуляризации и определить на стадии формулировки любой из задач: корректна, если система сводится к уравнениям типа Фредгольма второго рода; некорректна, если — типа Фредгольма первого рода. Для проведения натурных измерений процесса деформирования достаточно замерять смещения на доступных участках границы исследуемой области (дополнительная информация, необходимая для обратных задач). Алгоритм решения представляет собой переборный процесс, с помощью которого восстанавливаются параметры, наилучшим образом удовлетворяющие заданным условиям. Предлагаемый метод основан на решении одной отдельной обратной задачи для каждого из варьируемых параметров. Условие получения решения с достаточной точностью последовательными приближениями приводит к выполнению большого объёма вычислений. Показано, что неединственность решения многопараметрических некорректных задач на первых шагах приближений может быть связана с последовательностью выбранного пути приближения. Вся последовательность в конечном счёте сходится к единственному решению, если не ставить вопрос о количестве итераций, т. е. проблема переходит в разряд труднорешаемых задач. Любым численным методом такого класса задачи решить нельзя. В качестве примера некорректной проблемы рассмотрен класс решений теории упругости, приводящий к бесконечным напряжениям в угловых точках областей и связанных с объяснением феномена разрушения в механике через коэффициенты интенсивности напряжений.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

Никитенко Е. В.

Рубцовский индустриальный институт (филиал) Алтайского государственного технического университета им. И. И. Ползунова, Рубцовск, Россия; evnikit@mail.ru

В докладе предполагается изложить новые результаты по асимптотическим свойствам решений задачи Коши для неоднородного уравнения внутренних волн

$$\Delta u_{tt} + u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = e^{i\lambda t} f(x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0,$$

где $f(x) \in S(\mathbb{R}^3)$, $\lambda \geq 0$ — параметр. Решение данной задачи однозначно определяется в классе функций, убывающих при $|x| \to \infty$ [1]. При выводе асимптотических разложений при $t \to \infty$ решений $u(t, x, \lambda)$ используется вариант метода стационарной фазы, изложенного в [2].

В настоящее время имеется большое число работ, в которых проводились исследования поведения асимптотики при $t \to \infty$ решений краевых задач для конкретных уравнений и систем, не разрешенных относительно старшей производной. Среди них отметим работу [3], в которой рассматривалась задача Коши для неоднородного уравнения Соболева

$$\Delta u_{tt} + u_{x_nx_n} = e^{i\lambda t} f(x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0,$$

где $f(x) \in S(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \geq 0$ — параметр, $n \geq 3$. В данной работе были установлены асимптотические разложения при $t \to \infty$ решений $u(t, x, \lambda)$ в зависимости от значений параметра λ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Секерж-Зенькович С. Я.* Теорема единственности и явное представление решения задачи Коши для уравнения внутренних волн // ДАН СССР. 1981. Т. 256, № 2. С. 320–324.

2. *Успенский С. В., Демиденко Г. В., Перепелкин В. Г.* Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. Новосибирск: Наука, 1984.
3. *Булдыгерова Л. Н., Демиденко Г. В.* Асимптотические свойства решений неоднородного уравнения Соболева // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2005. С. 50–59.

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

Орлов С. С.[1], **Шеметова В. В.**[2]

Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия;
[1]`orlov_sergey@inbox.ru`, [2]`valentina501@mail.ru`

Пусть E — вещественное банахово пространство, u и f — неизвестная и заданная функции неотрицательного действительного аргумента t со значениями в E. Рассмотрим уравнение

$$u'(t) = Au(t) + Bu(t-h) + f(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

где $A, B : E \to E$ — линейные непрерывные операторы, h — заданное положительное число. По аналогии со скалярным случаем ($E = \mathbb{R}$) для уравнения (1) поставим начальную задачу

$$u(t) = \varphi(t), \quad -h \leq t \leq 0, \tag{2}$$

с заданной функцией $\varphi \in C([-h, 0]\,; E)$. *Классическим* решением этой задачи назовем функцию $u \in C(t \geq -h;\, E) \cap C^1(t > 0;\, E)$, которая удовлетворяет уравнению (1) и начальному условию (2).

Проблема разрешимости задачи (1), (2) изучается на основе теории обобщенных функций Соболева – Шварца со значениями в банаховом пространстве E. Используется концепция фундаментального решения (фундаментальной оператор-функции [1]) дифференциального оператора с отклоняющимся аргументом. Этот подход позволяет доказать существование и единственность решения рассматриваемой задачи в классе распределений с ограниченным слева носителем и дает способ построения обобщенного решения, а также позволяет найти условия, при которых обобщенное и классическое решения совпадают.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-31-00291).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M.* Lyapunov–Schmidt methods in nonlinear analysis and applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002.

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МИКРОЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА ТИПА "ПЛАТФОРМА"

Пиманов Д. О.[1], Фадеев С. И.[1,2], Косцов Э. Г.[3]

[1]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;* pimanov-daniil@yandex.ru

[2]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;* fadeev@math.nsc.ru

[3]*Институт автоматики и электрометрии СО РАН, Новосибирск, Россия;* kostsov@iae.nsk.su

Приводятся результаты численного исследования математической модели микроэлектромеханического высокочастотного резонатора типа "платформа" класса МЭМС (микроэлектромеханические системы). Математические модели прибора представлены нелинейными начально-краевыми задачами, описывающими колебания подвижного электрода в виде недеформируемой платформы, присоединённой к пружине с цилиндрической формой изгиба. В качестве пружины используются упругая балка с жёстко закреплёнными концами, упругая балка консольного типа или натянутая плёнка. При запуске резонатора под воздействием электростатического притяжения между платформой и неподвижным электродом, покрытым слоем диэлектрика, возникают колебания платформы, которые затем продолжаются в виде высокочастотных собственных колебаний.

Численно определены условия возникновения колебаний, оказавшиеся, как показало исследование модели, близкими к случаю, когда масса платформы много больше массы пружины. Это дало возможность получить в аналитическом виде формулы, достаточно хорошо описывающие основные особенности работы резонатора. Приведён пример расчёта параметров микрорезонатора, определяющих заданный режим работы, который показывает, что найденные в рамках математической модели значения параметров характерны для МЭМС.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фадеев С. И., Косцов Э. Г., Пиманов Д. О.* Исследование математической модели микроэлектромеханического резонатора типа платформа // Вычислительные технологии. 2016. Т. 21, № 2. С. 63–87.

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Постнов С. С.

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва, Россия; postnov.sergey@inbox.ru

В работе исследованы задачи оптимального управления линейными динамическими системами дробного порядка с распределёнными параметрами на примере систем, описываемых уравнением диффузии с дробной производной по времени.

Рассматривается система следующего вида:

$$ {}_0^C D_t^{\alpha} Q(x,t) = K\frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2} + u(x,t), \quad (x,t) \in \Omega = [0,\infty) \times [0,L], $$

где $Q(x,t)$ — состояние, $u(x,t) \in L_p(\Omega)$ — распределённое управление, $1 < p < \infty$, ${}_0^C D_t^{\alpha}$ — оператор дробного дифференцирования в смысле Капуто [1], $\alpha \in (0,1]$, K — коэффициент. Начальное и граничные условия для данной системы задаются в виде:

$$ Q(x,0+) = Q_0(x), \quad x \in [0,L], $$

$$ \left[b_{1,2}\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} + a_{1,2}Q(x,t) \right]_{x=0,L} = h_{1,2}(t) + u_{1,2}(t), \quad t \geq 0, $$

где a_i и b_i, $i = 1,2,$ — коэффициенты, $u_{1,2}(t) \in L_p[0,T]$ — граничные управления. Желаемое конечное состояние определяется условием:

$$ Q(x,T) = Q^*(x), \quad T > 0, \quad x \in [0,L]. $$

В работе исследуются две разновидности задачи оптимального управления: поиск управления с минимальной нормой при заданном времени управления и поиск управления, оптимального по быстродействию, при заданном ограничении (в виде неравенства) на норму управления. Обе задачи сводятся к бесконечномерной l-проблеме моментов, для которой строится конечномерная аппроксимация.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006.
2. *Кубышкин В. А., Постнов С. С.* Задача оптимального управления для линейных распределённых систем дробного порядка // Вестн. РУДН. Сер. Математика, физика, информатика. 2014. № 2. С. 381–385.
3. *Kubyshkin V. A., Postnov S. S.* The optimal control problem for linear systems of non-integer order with lumped and distributed parameters // Discontin. Nonlinearity Complex. 2015. V. 4, No 4. P. 429–443.
4. *Kubyshkin V. A., Postnov S. S.* Optimal boundary controls for the systems described by diffusion-type equation with fractional-order time derivative // Proc. Int. Conf. “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conference). Moscow: IEEE, 2016. P. 168–170.

ТОЧНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПРОДОЛЖЕНИЯХ С МИНИМАЛЬНОЙ НОРМОЙ

Рамазанов М. Д.

Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН, Уфа, Россия; ramazanovmd@yandex.ru

Пусть B является банаховым пространством определенных на $\mathbb{R}^n$ функций. Требуется заданную на произвольном множестве $\omega \subset \mathbb{R}^n$ функцию продолжить на все пространство с минимальной нормой. Полагая, что такое продолжение возможно, мы даем его формулу.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

Сабитов К. Б.[1], **Сидоров С. Н.**[2]

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, Стерлитамакский филиал Института стратегических исследований, Стерлитамак, Россия;
[1]sabitov_fmf@mail.ru, [2]stsid@mail.ru

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$L_{n,m}u = F(x,t), \tag{1}$$

здесь

$$L_{n,m}u = \begin{cases} t^n u_{xx} - u_t - b^2 t^n u, & t > 0, \\ (-t)^m u_{xx} - u_{tt} - b^2(-t)^m u, & t < 0, \end{cases}$$

$$F(x,t) = \begin{cases} f_1(x)g_1(t), & t > 0, \\ f_2(x)g_2(t), & t < 0, \end{cases}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t) : 0 < x < l, -\alpha < t < \beta\}$, где $n \geq 0$, $m \geq 0$, $b \geq 0$, $l > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ — заданные действительные числа, и следующие обратные задачи.

Задача 1. Найти функции $u(x,t)$ и $g_1(t)$, удовлетворяющие условиям:

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C_t^1(D) \cap C_x^1(\overline{D}) \cap C_x^2(D_+) \cap C^2(D_-); \tag{2}$$

$$g_1(t) \in C[0,\beta]; \tag{3}$$

$$L_{n,m}u(x,t) \equiv F(x,t), \quad (x,t) \in D_+ \cup D_-; \tag{4}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta; \qquad u(x,-\alpha) = 0, \quad 0 \leq x \leq l; \tag{5}$$

$$u(x_0,t) = h_1(t), \quad 0 < x_0 < l, \quad 0 \leq t \leq \beta, \tag{6}$$

где $f_i(x)$, $i = 1,2$, $g_2(t)$, $h_1(t)$ — заданные функции, x_0 — заданная точка из интервала $(0,l)$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$.

Задача 2. Найти функции $u(x,t)$ и $g_2(t)$, удовлетворяющие условиям (2), (4), (5) и

$$g_2(t) \in C[-\alpha, 0]; \qquad u(x_0, t) = h_2(t), \quad 0 < x_0 < l, \quad -\alpha \leq t \leq 0, \tag{7}$$

где $f_i(x)$, $i = 1, 2$, $g_1(t)$, $h_2(t)$ — известные функции.

Задача 3. Найти функции $u(x,t)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$, удовлетворяющие условиям (2)–(7), здесь $f_i(x)$, $h_i(t)$, $i = 1, 2$, — заданные функции.

Отметим, что исследование задач 1–3 базируется на прямой начально-граничной задаче (2), (4), (5), изученной в работе [1]. Поставленные задачи для уравнения (1) при $n = m = 0$ изучены в [2, с. 228–238].

В данной работе доказаны соответствующие теоремы единственности и существования решений задач 1–3 для уравнения (1) при $n = 0$, $m > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сабитов К. Б., Сидоров С. Н.* Начально-граничная задача для неоднородных вырождающихся уравнений смешанного параболо-гиперболического типа // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2017. Т. 137. С. 26–60.
2. *Сабитов К. Б.* Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа. М.: Наука, 2016.

ОБ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНОГО ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Седова Н. О.

Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия;
sedovano@ulsu.ru

Для систем с запаздыванием даже в линейном случае критерии устойчивости известны лишь для очень небольшого класса скалярных уравнений; в общем случае разработаны лишь способы получения достаточных условий устойчивости и построения оценок для решений некоторых типов систем. Проверка имеющихся условий, в свою очередь, может оказаться достаточно серьезной самостоятельной задачей даже для линейной системы с постоянными параметрами, а преимущества того или иного способа зависят от конкретного вида системы. Поэтому универсальных рецептов в этой области по сей день не существует, и исследования в этом направлении продолжаются.

При этом многие известные результаты опираются на свойства скалярного уравнения вида

$$\dot{x}(t) = -a(t)x(t - r(t)), \tag{1}$$

которому посвящены многочисленные исследования, начиная с работ А. Д. Мышкиса и К. Кука [1, 2]. Значительная доля полученных к настоящему времени результатов об оценках решений уравнения (1) использует в том или ином виде так называемые “3/2-признаки” (некоторые ссылки на соответствующие источники представлены в статье [3]). В форме таких признаков представлены и “точные” (неулучшаемые в общем случае) условия устойчивости и ограниченности решений для уравнения (1), которые, однако, могут быть существенно ослаблены при наличии некоторых специальных свойств функций $a(t)$ и $r(t)$.

В докладе предлагается обзор и сравнение результатов об устойчивости и оценках решений для уравнения (1), а также обсуждаются возможности их модификации при различных дополнительных условиях. Для обоснования используются “неклассические” функции Ляпунова. Рассматриваются, в том числе, способы получения оценок решений на основе использования функций, производная которых при условиях Разумихина может быть знакопеременной (см., например, [4]). При этом допускаются, вообще говоря, как ограниченные, так и неограниченные функции $r(t) \geq 0$ (при условии, что $t - r(t)$ неограниченно возрастает при $t \to +\infty$) в предположении, по крайней мере, локальной интегрируемости коэффициента $a(t)$. Получены также результаты об устойчивости для некоторых видов линейных систем с запаздыванием с переменными параметрами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мышкис А. Д.* О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом // Мат. сб. 1951. Т. 28, № 3. С. 641–658.
2. *Cooke K. L.* Asymptotic theory for the delay-differential equation $u'(t) = -au(t - r(u(t)))$ // J. Math. Anal. Appl. 1967. V. 19. P. 160–173.
3. *Knyazhishche L. B., Shcheglov V. A.* On the sign definiteness of Liapunov functionals and stability of a linear delay equation // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 1998. No 8. P. 1–13.
4. *Zhou B., Egorov A. V.* Razumikhin and Krasovskii stability theorems for time-varying time-delay systems // Automatica. 2016. V. 71. P. 281–291.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГОРМОНАЛЬНОГО ЛЕЧЕНИЯ ОНКОЛОГИЧЕСКИХ ЗАБОЛЕВАНИЙ В УСЛОВИЯХ ГОРМОНОРЕЗИСТЕНТНОСТИ

Серовайский С. Я.[1], **Нурсеитов Д. Б.**[2], **Азимов А. А.**[3]

[1]*Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Республика Казахстан;* serovajskys@mail.ru

[2]*Казахский национальный исследовательский политехнический университет им. К. Сатпаева, Алматы, Республика Казахстан;* ndb80@mail.ru

[3]*Казахский национальный исследовательский политехнический университет им. К. Сатпаева, Алматы, Республика Казахстан;* anvar.aa@mail.ru

Для лечения некоторых форм рака, связанных с действием гормонов, применяется гормональное лечение. Подавляя выработку организмом гормонов, оно позволяет затормозить развитие опухоли. Однако действие гормонального лечения носит временный характер ввиду постепенного привыкания клеток рака к действию гормонов, т. е. явления гормонорезистентности. Это объясняется тем, что опухоль состоит из двух типов клеток — чувствительных и резистентных к действию гормональных препаратов. В условиях гормонального лечения происходит постепенное замещение чувствительных раковых клеток резистентными, что приводит к дальнейшему развитию опухоли. Предлагается математическая модель процесса, базирующаяся на однофазной задаче Стефана.

При выводе модели используются следующие предположения. Опухоль обладает сферической симметрией и состоит из двух типов раковых клеток, одни из которых являются чувствительными к действию гормонов, а другие являются резистентными. В отсутствии лечения наблюдается рост опухоли в соответствии с моделью Ферхюльста. Распространение раковых клеток внутри опухоли имеет диффузионную природу. Гормональное лечение подавляет рост чувствительных к гормонам раковых клеток. Раковые клетки могут приобретать и терять гормонорезистентность. В результате получаем следующие уравнения

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = D_s \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho}\Big(\rho^2 \frac{\partial u_s}{\partial \rho}\Big) + \Big[\frac{a_s}{1 + f(t) u_s^\theta} - b_s(u_s + u_r)\Big] u_s + c_{rs} u_r,$$

$$\rho_0 < \rho < \xi(t), \quad t > 0,$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = D_r \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}\Big(\rho^2 \frac{\partial u_r}{\partial \rho}\Big) + \big[a_r - b_r(u_s + u_r)\big]u_r + c_{sr}u_s,$$

$$\rho_0 < \rho < \xi(t), \quad t > 0,$$

с определенными начальными условиями, условием Неймана на левой границе и условиями Стефана на правой границе, где u_s — концентрация чувствительных раковых клеток, u_r — концентрация резистентных раковых клеток, $\xi = \xi(t)$ — граница опухоли.

Расчеты показывают, что в отсутствии лечения, что соответствует случаю равенства нулю концентрации $f(t)$ лекарственных препаратов, функция ξ, характеризующая размеры опухоли, растет. С началом лечения наблюдается значительное уменьшение концентрации u_s чувствительных клеток, существенно преобладающих изначально. Вследствие этого происходит сокращение размеров опухоли. Однако постепенно начинается рост концентрации u_r резистентных клеток, на которые лечение не оказывает воздействия. Тем самым сокращение опухоли сменяется ее увеличением, а эффективность лечения постепенно сходит на нет.

Уточнение математической модели осуществляется в процессе решения соответствующих обратных задач, связанных с восстановлением ее параметров по результатам измерения состояния системы.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ В ОДНОЙ МОДЕЛИ ЗАБОЛЕВАНИЯ

Скворцова М. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
sm-18-nsu@yandex.ru

Рассматривается система дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, описывающая взаимодействие клеток здорового организма с вирусами [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = \lambda - dx(t) - \beta x(t)v(t), \\ \dfrac{d}{dt}y(t) = \beta x(t-\tau)v(t-\tau)e^{-\alpha\tau} - ay(t), \\ \dfrac{d}{dt}v(t) = ky(t) - uv(t), \end{cases} \tag{1}$$

где $x(t)$ — количество (концентрация) здоровых клеток, $y(t)$ — количество (концентрация) зараженных клеток, $v(t)$ — количество (концентрация) вирусов. Изучается асимптотическое поведение решений в окрестности положений равновесия системы (1). Получены условия на коэффициенты системы, при которых положения равновесия являются асимптотически устойчивыми. Используя модифицированные функционалы Ляпунова – Красовского [2], установлены оценки скорости сходимости решений к положениям равновесия и оценки на области притяжения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-41-543365).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Herz A. V. M., Bonhoeffer S., Anderson R. M., May R. M., Nowak M. A.* Viral dynamics in vivo: limitations on estimates of intercellular delay and virus decay // Proc. Natl. Acad. Sci. USA (Medical Sciences).1996. V. 93. P. 7247–7251.
2. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, вып. 3. С. 20–28.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ И КРАТНЫЕ ВОЛНЫ

Талышев А. А.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
tal@academ.org

Решение $U = (u^1, \dots, u^m)$ системы дифференциальных уравнений

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{m} a_{\beta j}^{\alpha}(u) \frac{\partial u^{\beta}}{\partial x_{\alpha}} = 0, \quad j = 1, \dots, k, \tag{1}$$

называется *p-кратной волной* [1, §23], если

$$\operatorname{rank} \frac{\partial(u^1, \dots, u^m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = p < \min\{n, m\}.$$

Система (1) допускает $(n+1)$-параметрическую локальную группу Ли G^{n+1}, порождаемую преобразованиями сдвигов и растяжения независимых переменных. В работе [1, § 23] отмечается, что каждая p-кратная волна системы (1) является частично инвариантным G^{n+1}-решением ранга p.

Множество частично инвариантных решений является объединением нескольких классов дифференциально-инвариантных решений [2]. В настоящей работе p-кратные волны изучаются как дифференциально-инвариантные решения локальной группы Ли G^{n+1}. Приводятся примеры дифференциально-инвариантных G^{n+1}-решений волнового уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. *Талышев А. А.* О дифференциально-инвариантных решениях // Сиб. журн. чист. и прикл. матем. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 75–84.

ЛИНЕЙНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА С ГРАНИЧНЫМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЕМ В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Телешева Л. А.

Бурятский государственный университет, Улан-Удэ, Россия;
love_20_09@mail.ru

В цилиндре $Q = \{(x,t) : x \in \Omega, t \in (0,T), T < \infty\}$ для уравнения вида

$$u_t + \Delta^2 u + c(x)u = f(x,t) + q(t)h(x,t)$$

рассмотрена обратная задача с граничным переопределением в многомерном случае. Методы исследования рассматриваемой задачи основаны на переходе от обратной задачи к новой, уже прямой, но при этом нелокальной (гранично-нелокальной) краевой задаче для нагруженного дифференциального уравнения, доказательстве её разрешимости и построении решения исходной обратной задачи. Возникающую при редукции изучаемой обратной задачи нелокальную задачу можно трактовать как обобщение одного из случаев нелокальной краевой задачи А. А. Самарского, предложенной для одномерного уравнения теплопроводности [1], причем обобщение как многомерное, так и обобщение на параболические уравнения высокого порядка. Представляется, что полученные в настоящей работе результаты о разрешимости многомерных аналогов задачи А. А. Самарского, а также связанных с ними краевых задач для нагруженных уравнений имеют и самостоятельное значение.

По постановкам задач и по методам решений как наиболее близкие можно отметить статьи [2–4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самарский А. А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 11. С. 1925–1935.
2. *Кожанов А. И.* О разрешимости некоторых нелокальных и связанных с ними обратных задач для параболических уравнений // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, вып. 2. С. 64–78.
3. *Телешева Л. А.* О разрешимости линейной обратной задачи для параболического уравнения высокого порядка // Мат. заметки ЯГУ. 2013. Т. 20, вып. 2. С. 186–196.
4. *Кожанов А. И., Телешева Л. А.* Параболические уравнения высокого порядка: обратные задачи с граничным переопределением и гранично-нелокальные краевые задачи // Докл. АМАН. 2015. Т. 17, № 4. С. 42–60.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Уварова И. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; sibirochka@ngs.ru

В работах Г. В. Демиденко и его учеников (см., например, обзорную работу [1]) были установлены связи между решениями классов систем обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности n

$$\frac{dx}{dt} = A_n x + F_n(t,x) \tag{1}$$

и решениями уравнения с запаздывающим аргументом

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau. \tag{2}$$

Используя полученные ранее оценки для решений (1), (2) (см. [2, 3]), в данной работе мы исследуем асимптотическое поведение решений уравнения (2) при $t \to \infty$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-41-543365).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демиденко Г. В.* О классах систем дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнениях с запаздывающим аргументом // Итоги науки. Юг России. Сер.: Математический форум. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011. Т. 5. С. 45–56.
2. *Демиденко Г. В., Мельник (Уварова) И. А.* Об одном способе аппроксимации решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Сиб. мат журн. 2010. Т. 51, № 3. С. 528–546.
3. *Уварова И. А.* Предельные теоремы на полуоси для одного класса систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности // Международная конференция “Математика в современном мире”. Тезисы докладов. Новосибирск: Изд-во Института математики, 2017. С. 255.

РАЗРЕШИМОСТЬ В СЛАБОМ СМЫСЛЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОСКОЛКОВА – ПАВЛОВСКОГО

Устюжанинова А. С.[1], **Турбин М. В.**[2]

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия;
[1]nastyzhka@gmail.com, [2]mrmike@mail.ru

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ с границей $\partial\Omega$ класса C^3. На промежутке времени $[0, T]$, $0 < T < \infty$, рассматривается следующая система уравнений:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu\Delta v + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \varkappa \frac{\partial \Delta v}{\partial t} - \varkappa \sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial \Delta v}{\partial x_k} + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} v = 0. \quad (1)$$

Для системы (1) рассмотрим начально-краевую задачу с начальным и граничным условиями

$$v|_{t=0} = a(x), \ x \in \Omega, \quad v|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0. \quad (2)$$

Пусть $f \in L_2(0, T; V^{-1})$, $a \in V^2$.

Определение. *Слабым решением* начально-краевой задачи (1)–(2) называется функция $v \in W = \big\{u : u \in C([0, T]; V^2),\ u' \in L_2(0, T; V^2)\big\}$, удовлетворяющая для любого $\varphi \in V^1$ и почти всех $t \in (0, T)$ равенству

$$\int_\Omega v'\varphi dx - \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \varkappa \int_\Omega \nabla(v') : \nabla\varphi dx +$$
$$+ \nu \int_\Omega \nabla v : \nabla\varphi dx + \varkappa \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega v_i \Delta v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx = \langle f, \varphi \rangle$$

и начальному условию $v|_{t=0} = a$.

Теорема. *Существует хотя бы одно слабое решение начально-краевой задачи* (1)–(2).

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037).

ПРИМЕНЕНИЕ СТАЦИОНАРНОГО МЕТОДА ГАЛЕРКИНА К ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ

Федоров В. Е.

Научно-исследовательский институт математики Северо-Восточного федерального университета им. М. К. Аммосова, Якутск, Россия; vefedorov58@mail.ru

В цилиндрической области рассматривается уравнение порядка $2s+1$ по времени и второго порядка по пространственным переменным. Старший коэффициент уравнения может менять свой знак внутри области произвольным образом. Поэтому этот класс уравнений включает в себя эллиптико-параболические уравнения, уравнения с меняющимся направлением времени и другие уравнения. Для одного из случаев знакоопределенности старшего коэффициента уравнения на основаниях цилиндра с помощью стационарного метода Галеркина доказана однозначная регулярная разрешимость в пространстве Соболева одной краевой задачи для данного уравнения, которая в работе [1] была исследована для этого же случая с помощью нестационарного метода Галеркина в сочетании с методом регуляризации. Установлена оценка погрешности приближенных решений относительно точного решения задачи через собственные значения самосопряженной спектральной задачи для квазиэллиптического уравнения порядка $2s+2$ по времени. Собственные функции этой задачи выбираются в качестве базиса при построении приближенных решений.

Для другого случая знакоопределенности старшего коэффициента уравнения на основаниях цилиндра тем же стационарным методом Галеркина впервые доказана однозначная разрешимость рассматриваемой задачи в весовом пространстве Соболева. Здесь в качестве базиса при построении приближенных решений выбираются собственные функции самосопряженной спектральной задачи для квазиэллиптического уравнения порядка $2s$ по времени. Получена оценка погрешности стационарного метода Галеркина и в этом случае.

Замечание. Отметим, что в работе [2] получены результаты, аналогичные второму случаю, для первой краевой задачи.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках базовой части государственного задания на выполнение НИР на 2017–2019 гг. (проект № 6069).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Egorov I. E.* On one boundary value problem for an equation with varying time direction // Мат. заметки ЯГУ. 1998. Т. 5, вып. 2. С. 77–84.
2. *Ефимова Е. С.* Применение стационарного метода Галеркина к неклассическому уравнению высокого порядка с меняющимся направлением времени // Мат. заметки ЯГУ. 2012. Т. 19, вып. 2. С. 32–38.

РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ПОВОРОТА НА ОКРУЖНОСТИ

Хазова Ю. А.

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Таврическая академия, Симферополь, Россия;
hazova.yuliya@hotmail.com

Исследуются случаи рождения решений типа бегущей волны в параболической задаче на окружности с преобразованием поворота пространственной переменной. Найдены представления для орбитально устойчивой и неустойчивой бегущих волн. Для построения периодических решений применяется метод Галеркина.

Рассматривается параболическое уравнение на окружности S^1:

$$\dot{u} = \mu \triangle u - u - \Lambda Q u + \frac{\Lambda}{6} Q u^3, \ \ u(\varphi + 2\pi, t) = u(\varphi, t).$$

Будем использовать галеркинскую аппроксимацию в виде:
$u = \sum_{k=1}^{N} (z_k e^{ik\varphi} + \overline{z}_k e^{-ik\varphi})$. Сведем исследование исходной задачи к исследованию системы уравнений

$$\begin{gathered} \dot{z_k} = \lambda_k z_k + g_k(z, \overline{z}), \\ \dot{\overline{z}}_k = \overline{\lambda}_k \overline{z}_k + \overline{g}_k(z, \overline{z}), \ \ k = \overline{1, N}. \end{gathered}$$

При уменьшении параметра μ и его переходе через критическое значение μ_1^* нулевое решение теряет устойчивость колебательным образом. В результате от нуля ответвляется периодическое по t решение типа бегущей волны. Применяя метод Галеркина, были построены представления для рождающихся периодических решений и исследована их устойчивость.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хазова Ю. А.* Стационарные структуры в параболической задаче с отражением пространственной переменной // Таврический вестник информатики и математики. 2015. № 3. С. 82–95.
2. *Хазова Ю. А.* Стационарные структуры в параболической задаче с отражением пространственной переменной // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. 2015. Т. 8-4, № 3. С. 314–317.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОШИ В ГЕОМЕХАНИКЕ

Чанышев А. И.[1,2], **Абдулин И. М.**[1], **Белоусова О. Е.**[1]

[1] *Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, Новосибирск, Россия;*

[2] *Новосибирский государственный университет экономики и управления, Новосибирск, Россия;* a.i.chanyshev@gmail.com

Строятся аналитические и численные решения задачи Коши для основных уравнений математической физики, включая упругость, пластичность. Восстанавливаются напряженно-деформированные состояния, тепловое и др., определяются внутренняя структура тела, сосредоточенные источники в нем.

Примеры аналитических решений.

1. Уравнение Лапласа для полуплоскости: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Граничные условия: $u\big|_{y=0} = 2g_1(x)$, $\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = 2g_2'(x)$.

Решение $u = f(z) + \overline{f(z)}$, где $f(z) = g_1(z) - ig_2(z)$, $z = x + iy$, g_1, g_2 — заданные граничные функции.

2. Волновое уравнение для полубесконечного стержня: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

Граничные условия $u\big|_{x=0} = 2\beta(t)$, $\frac{\partial u}{\partial x}\big|_{x=0} = 2\frac{\gamma'(t)}{a}$.

Решение $u = [\beta(t - x/a) + \beta(t + x/a)] + [\gamma(t + x/a) - \gamma(t - x/a)]$, где β, γ — заданные граничные функции.

3. Плоская задача теории упругости для полуплоскости.

Граничные условия при $y = 0$: $\sigma_y = f_1(x)$, $\tau_{xy} = f_2(x)$, $u_x = f_3(x)$, $u_y = f_4(x)$, где f_1, f_2, f_3, f_4 — произвольные функции.

Решение для потенциалов Колосова – Мусхелишвили:

$$\varphi(z) = \frac{\int [f_1(z) - if_2(z)]dz}{1 + \aleph} + \frac{2\mu}{1 + \aleph}[f_3(z) + if_4(z)] + C_1,$$

$$\psi(z) = \frac{\aleph}{1 + \aleph}\int [f_1(z) + if_2(z)]dz - \frac{z}{1 + \aleph}[f_1(z) - if_2(z)]$$

$$-\frac{2\mu}{1 + \aleph}[f_3(z) - if_4(z) + z(f_3'(z) + if_4'(z))] + C_2, \quad \aleph = 3 - 4\nu$$

(C_1, C_2 — постоянные). Исследуется устойчивость решений от входных данных.

УРАВНЕНИЕ КдФ ПЯТОГО ПОРЯДКА

Чуешева Н. А.

Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия;
chuesheva@ngs.ru

В статье Z. Bing-Yu, Z. Deqin [1] рассматривается начальная задача для уравнения КдФ пятого порядка

$$u_t - u_{xxxxx} = c_1 u u_x + c_2 u^2 u_x + 2b u_x u_{xx} + b u u_{xxx}. \tag{1}$$

В этой заметке рассмотрим задачу, сформулируем теорему и приведём несколько примеров решений уравнения (1).

Задача. Пусть дан прямоугольник $\Pi = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,a),\ t \in (0,b)\}$, в котором задано уравнение (1), Γ — граница прямоугольника, $n = (n_x, n_t)$ — вектор внутренней нормали к гладким участкам границы Γ. Пусть решение уравнения (1) удовлетворяет граничным условиям

$$u|_{x=0,x=a} = u_x|_{x=0,x=a} = u_{xx}|_{x=0} = u|_{t=0} = 0. \tag{2}$$

Теорема. *Пусть коэффициенты дифференциального уравнения* (1) c_1, c_2, b *будут комплексными или вещественными постоянными. Тогда решение граничной задачи* (2) *для уравнения* (1) *почти всюду в прямоугольнике* Π *будет равно нулю.*

Пример. Если: **1)** $c_1 = 12b$, $c_2 = 0$, $b \neq 0$, то решением уравнения (1) будет аналитическая на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ функция $u(z) = -\frac{4b+16-i}{8b} + \sin^2(x+it)$, где $z = x+it$;
2) $c_1 = 12b$, $c_2 = 0$, $b \neq 0$, то решением уравнения (1) будет функция $u(z) = -\frac{4b+16+i}{8b} + \sin^2(x-it)$ $(\overline{z} = x - it)$, которая $\mathbb{R}$-дифференцируема на $\mathbb{R}^2$, но не $\mathbb{C}$-дифференцируема на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$;
3) $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $b = -1/42$, то решением уравнения (1) будет разрывная на оси x вещественная функция $u(x,t) = \frac{x^3}{t} \in C^\infty\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{t=0\}\right)$;
4) $c_1 = 0$, $c_2 = 120$, $b = -20$, то решением уравнения (1) будет аналитическая на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ без точек $z_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, функция $u(z) = a + \tan^2(x+it)$, $a = \frac{2}{3} + \frac{1}{60}\sqrt[4]{7300} \cdot e^{i\varphi}$, $\varphi = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{1}{2}\arctan\frac{3}{8}\right)$. Точки z_k являются полюсами второго порядка этого решения уравнения (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bing-Yu Z., Deqin Z.* Initial boundary value problem of the Hamiltonian fifth-order KdV equation on a bounded domain // Adv. Differ. Equ. 2016. V. 21, No 9/10. P. 977–1000.

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ

Шадрина Н. Н.

Бурятский государственный университет, Улан-Удэ, Россия;
shadrinann8@yandex.ru

В работе исследуется влияние параметров, входящих в условия сопряжения, а также параметров, определяющих граничные условия, на единственность и неединственность, существование и несуществование решений некоторой задачи сопряжения для уравнения эллиптического типа.

Рассматривается следующая задача: найти функцию $u(x, y)$, являющуюся в цилиндрах Q_1 и Q_2 решением уравнения

$$\Delta u = \lambda u,$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, y)|_{S_1 \cup S_2} = 0,$$

$$u(x, a) = u(x, 1) = 0, \quad x \in \Omega,$$

а также условия

$$u(x, -0) = \beta u(x, +0), \quad u_y(x, +0) = \alpha u_y(x, -0)$$

(α, β — заданные действительные числа).

Показано, что свойство данного действительного числа λ_0 быть или не быть собственным числом данной задачи, свойство отрицательного числа a быть или не быть критическим для той же задачи определяются произведением параметров α и β.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шадрина Н. Н.* О влиянии параметров на разрешимость некоторых задач сопряжения для эллиптических уравнений // Сиб. электрон. мат. изв. 2016. Т. 13. С. 411–425.

ЛОКАЛЬНАЯ АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

Шаманаев П. А., Язовцева О. С.

Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва, Саранск, Россия; kurinaos@gmail.com

Идея разбиения множества систем обыкновенных дифференциальных уравнений на классы эквивалентности на основе асимптотического поведения их решений принадлежит А. М. Ляпунову. В работах [1–3] для классификации нелинейных систем введены понятия покомпонентной асимптотической эквивалентности по Брауэру и Левинсону относительно некоторых эталонных функций. Введенные определения локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности позволяют распространить методику на более широкий класс нелинейных систем, чем в работах [1–3], получены достаточные условия эквивалентности для нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с возмущениями в виде векторных полиномов.

В настоящей работе проведено исследование устойчивости по части переменных нетривиального положения равновесия системы нелинейных уравнений, представляющих собой кинетическую модель химической реакции, сведенное к исследованию устойчивости тривиального положения равновесия линейного приближения системы на основании установления локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности по Брауэру. Нелинейная система представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений с возмущениями в виде векторных полиномов.

Метод исследования основан на построении оператора, переводящего решения нелинейной системы в решения ее линейного приближения. В соответствии с методикой, представленной в [1], доказательство существования оператора основано на принципе Шаудера о неподвижной точке. Доказательство проводится с использованием оценок элементов фундаментальной матрицы линейного приближения и возмущений нелинейной системы [2].

Существование оператора позволяет построить отображение, связывающее начальные точки исследуемой системы и ее линейного приближения, что обеспечивает локальную покомпонентную асимптотическую эквивалентность по Брауэру.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Воскресенский Е. В.* Асимптотические методы: теория и приложения. Саранск: СВМО, 2000.
2. *Воскресенский Е. В., Артемьева Е. Н., Белоглазов В. А., Мурюмин С. М.* Качественные и асимптотические методы интегрирования дифференциальных уравнений. Саранск: Изд-во Саратовск. ун-та (Саранский филиал), 1988.
3. *Воскресенский Е. В.* Методы сравнения в нелинейном анализе. Саранск: Изд-во Саратовск. ун-та (Саранский филиал), 1990.
4. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966.

ВНЕЦЕНТРЕННОЕ НАГРУЖЕНИЕ ШТАМПА С ДВУСВЯЗНОЙ ОБЛАСТЬЮ КОНТАКТА

Шишканова А. А.

Запорожский национальный технический университет, Запорожье, Украина; shganna@mail.ru

Математическая модель задачи оценки напряженно-деформируемого состояния и прогнозирования отрыва штампа (стойки или опоры инженерных конструкций) при внецентренном нагружении включает необходимость решения системы уравнений, состоящей из двумерного интегрального уравнения типа Фредгольма со слабой особенностью, выражающего зависимость между вертикальными перемещениями и нормальными напряжениями, и еще трех уравнений равновесия.

Разработано численно-аналитическое решение, использующее регуляризацию основного уравнения. Параметр регуляризации имеет определенный механический смысл коэффициента шероховатости упругого полупространства [1]. Задача о вдавливании некруговых кольцевых штампов с использованием разложения потенциалов простого слоя сведена к решению последовательности аналогичных контактных задач вдавливания штампов в форме кругового кольца, после чего применяются квадратурные формулы. Для многосвязной области при учете шероховатости предлагается численное решение, использующее кубатурные формулы для дискретизации двумерного интегрального оператора, в результате чего получена система алгебраических уравнений, для решения которой применяем метод последовательных приближений.

Исследован конкретный случай внецентренного нагружения штампа с двусвязным основанием, ограниченным гладкими кривыми, близкими к квадрату. Определена зона “устойчивости”. При выходе линии действия силы за пределы этой зоны подошва штампа займет наклонное положение и произойдет отрыв от грунта, что может привести к аварии. Найдены величина заглубления, угол наклона и функция распределения нормальных давлений под штампом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Shyshkanova G., Zaytseva T., Frydman O.* The analysis of manufacturing errors effect on contact stresses distribution under the ring parts deformed asymmetrically // Metallurgical and Mining Industry. 2015. No 7. P. 352–357.

ОБ ОДНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ МЕХАНИКИ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Щербаков В. В.

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
victor@hydro.nsc.ru

Рассматривается вариационная задача о равновесии композиционного материала, состоящего из упругой матрицы и тонкого упругого волокна, напряженно-деформированное состояние которого моделируется уравнениями Тимошенко [1]. Предполагается, что волокно частично отслаивается от матрицы, что приводит к существованию межфазной трещины. На берегах трещины заданы условия одностороннего ограничения, препятствующие взаимному прониканию берегов. Изучаются возникающие в механике разрушения вопросы, связанные с анализом сингулярности поля напряжений в вершине трещины. В частности, выписана формула для скорости высвобождения энергии при продвижении трещины вдоль направления армирования и построены интегралы энергии, инвариантные относительно замкнутого контура, охватывающего одну или обе вершины трещины [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Itou H., Khludnev A. M.* On delaminated thin Timoshenko inclusions inside elastic bodies // Math. Methods Appl. Sci. 2016. V. 39, No 17. P. 4980–4993.
2. *Shcherbakov V. V.* The Griffith formula and J-integral for elastic bodies with Timoshenko inclusions // Z. Angew. Math. Mech. 2016. V. 96, No 11. P. 1306–1317.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Ыскак Т. К.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
istima92@mail.ru

В работе рассматривается система дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием с параметром

$$\frac{d}{dt}y(t) = \mu A(t)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t, t-s)y(s)ds, \quad t > 0,$$

где $\mu > 0$ — параметр, $\tau > 0$ — запаздывание, $A(t)$ — непрерывная T-периодическая матрица, $B(t,\xi)$ — непрерывная по совокупности переменных матрица, T-периодическая по переменной t. Предполагается, что спектр матрицы $A(t)$ лежит в левой полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < 0\}$ при всех $t \in [0,T]$. В [1] в случае $B(t,\xi) \equiv 0$ и в [2] в случае уравнения с запаздыванием показано, что нулевое решение экспоненциально устойчиво при всех достаточно больших параметрах μ. В данной работе указаны условия на параметр μ, при которых нулевое решение экспоненциально устойчиво, установлена оценка, характеризующая экспоненциальную скорость убывания решений на бесконечности. При исследовании была использована модификация функционала Ляпунова – Красовского, введенного в [3, 4].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-41-543365).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. М.: Наука, 1970.
2. *Demidenko G. V., Matveeva I. I.* Asymptotic stability of solutions to a class of linear time-delay systems with periodic coefficients and a large parameter // J. Inequal. Appl. 2015. V. 2015, No 331. P. 1–10.
3. *Demidenko G. V.* Stability of solutions to linear differential equations of neutral type // J. Anal. Appl. 2009. V. 7, No 3. P. 119–130.
4. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 1059–1077.

ON LONG TIME BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF THE NORMALIZED RICCI FLOW ON SPECIAL GENERALIZED WALLACH SPACES

Abiev N. A.

Taraz State University named after M. Kh. Dulaty, Taraz, Republic of Kazakhstan; abievn@mail.ru

The authors of [1] obtained that the normalized Ricci flow equation $\dot{\mathbf{g}}(t) = -2\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}} + 2n^{-1}\mathbf{g}(t)S_{\mathbf{g}}$, where $\mathbf{g}(t)$ means a 1-parameter family of Riemannian metrics, $\mathrm{Ric}_{\mathbf{g}}$ and $S_{\mathbf{g}}$ are respectively the Ricci tensor and the scalar curvature of $\mathbf{g}$, can be reduced to the following system of ODEs in the case of some very specific generalized Wallach spaces:

$$\dot{w_1} = (w_1 - 1)(2w_1 - w_1w_2 - w_2), \quad \dot{w_2} = (w_2 - 1)(2w_2 - w_1w_2 - w_1). \quad (1)$$

We will discuss some results of [2] relating to asymptotic properties of solutions of (1) with respect to a connected domain in $\mathbb{R}^2$ bounded by the curves

$$\begin{aligned} w_1^2w_2^2 + w_1^2 - w_2^2 - 4w_1^2w_2 &= 0,\\ w_1^2w_2^2 - w_1^2 + w_2^2 - 4w_1w_2^2 &= 0,\\ w_1^2w_2^2 - w_1^2 - w_2^2 + 4w_1w_2 &= 0. \end{aligned}$$

Note that geometrically such a domain describes the set of invariant Riemannian metrics on generalized Wallach spaces under consideration which admit positive Ricci curvature.

The author was supported by the Grant of MES of the Republic of Kazakhstan for 2015–2017 (project no. 1452/GF4).

REFERENCES

1. *Abiev N. A., Nikonorov Yu. G.*, “The evolution of positively curved invariant Riemannian metrics on the Wallach spaces under the Ricci flow,” Ann. Global Anal. Geom., **50**, No. 1, 65–84 (2016).
2. *Abiev N. A.*, “On evolution of invariant Riemannian metrics on one class of generalized Wallach spaces under the normalized Ricci flow” [in Russian], Matematicheskie trudy, **20**, No. 1, 3–20 (2017).

A CLASS OF ELECTROMAGNETIC p(x, t)-CURL SYSTEMS: EXISTENCE AND UNIQUENESS, BLOW-UP AND FINITE TIME EXTINCTION

Antontsev S. N.

University of Lisbon, Lisbon, Portugal;

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russia;

antontsevsn@mail.ru

We consider in $Q_T = \Omega\times(0,T)$, $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, the following class of $p(x,t)$-curl systems arising in electromagnetism

$$\partial_t \boldsymbol{h} + \nabla\times\Big(|\nabla\times\boldsymbol{h}|^{p(x,t)-2}\nabla\times\boldsymbol{h}\Big) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{h}),\quad \nabla\cdot\boldsymbol{h}=0 \quad \text{in } Q_T, \tag{1}$$

$$|\nabla\times\boldsymbol{h}|^{p(x,t)-2}\nabla\times\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}=0 \text{ on } \Sigma_T, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{h}(\,\cdot\,,0) = \boldsymbol{h}_0 \text{ in } \Omega, \tag{3}$$

where $\boldsymbol{h}$ is the unknown magnetic field and $\boldsymbol{h}_0$ is a given function. The given log-continuous function $p(x,t)$ satisfies $\frac{6}{5} < p^- \le p(x,t) \le p^+ < \infty$. The nonlinear function $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{h})$ can model either a source term of the type $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h}\left(\int\limits_\Omega |\boldsymbol{h}|^2\right)^{\frac{\sigma-2}{2}}$ with $\sigma>1$ or a sink term $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{h}) = -\boldsymbol{h}\left(\int\limits_\Omega |\boldsymbol{h}|^2\right)^{-\lambda}$ with $\lambda>0$. We prove existence and uniqueness of a solution for (1)–(3).

Blow-up of local solutions is studied in the case of source term and finite time extinction of the solution is proved in the case of sink term. The detailed proofs can be found in [1–3] (joint work with F. Miranda and L. Santos).

The author was supported by the Russian Science Foundation (project no. 15-11-20019).

REFERENCES

1. *Antontsev S. N., Shmarev S. I.,* Evolution PDEs with Nonstandard Growth Conditions: Existence, Uniqueness, Localization, Blow-up; Series: Atlantis Studies in Differential Equations, Vol. 4, Atlantis Press, Paris, 2015.
2. *Antontsev S. N., Miranda F., Santos L.,* "A class of electromagnetic p-curl systems: blow-up and finite time extinction," Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., **75**, 3916–3929 (2012).
3. *Antontsev S. N., Miranda F., Santos L.,* "Blow-up and finite time extinction for $p(x,t)$-curl systems arising in electromagnetism," J. Math. Anal. Appl., **440**, 300–322 (2016).

TOPOLOGICAL BARRIERS FOR LOCALLY HOMEOMORPHIC QUASIREGULAR MAPPINGS IN 3-SPACE

Apanasov B. N.

University of Oklahoma, Norman, USA; apanasov@ou.edu

Here we address three sides of the M. A. Lavrentiev problem and the Zorich map with an essential singularity at infinity: on locally homeomorphic spatial quasiregular mappings defined in the (almost) whole sphere S^3, mapping it onto the whole sphere S^3, and their essential (topological) singularities. We construct a new type of such mappings defined in the 3-sphere S^3 except a dense Cantor subset in $S^2 \subset S^3$ as mappings equivariant with the standard conformal action of uniform hyperbolic lattices in the unit 3-ball and its complement in S^3 (by using our non-trivial compact 4-dimensional cobordisms).

REFERENCES

1. *Apanasov B.*, “Nontriviality of Teichmüller space for Kleinian group in space,” in: Riemann Surfaces and Related Topics: Proc. 1978 Stony Brook Conference (Ann. Math. Stud., Vol. 97), Princeton Univ. Press, 1981, pp. 21–31.
2. *Apanasov B., Tetenov A.*, “Nontrivial cobordisms with geometrically finite hyperbolic structures,” J. Differ. Geom., **28**, 407–422 (1988).
3. *Apanasov B.*, “Nonstandard uniformized conformal structures on hyperbolic manifolds,” Invent. Math., **105**, 137–152 (1991).
4. *Apanasov B.*, Conformal Geometry of Discrete Groups and Manifolds (de Gruyter Expo. Math., Vol. 32), W. de Gruyter, Berlin, New York (2000).
5. *Apanasov B.*, “Quasisymmetric embeddings of a closed ball inextensible in neighborhoods of any boundary points,” Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. AI, **14**, 243–255 (1989).
6. *Apanasov B.*, “Group actions, Teichmuüller spaces and cobordisms,” Lobachevskii J. Math., **38**, 213–228 (2017).
7. *Apanasov B.*, “Topological barriers for locally homeomorphic quasiregular mappings in 3-space,” arxiv.org/abs/1510.08951.

ON THE UNIQUE SOLVABILITY OF PERIODIC PROBLEM FOR THE SOBOLEV-TYPE PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

Assanova A. T.

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling MES RK, Almaty, Republic of Kazakhstan; anarasanova@list.ru

Consider the periodic problem for the Sobolev-type differential equation of the third order on the domain $\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = A(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + D(t,x)u + f(t,x), \quad (1)$$

$$\frac{\partial u(0,x)}{\partial x} = \frac{\partial u(T,x)}{\partial x} + \varphi(x), \qquad x \in [0,\omega], \quad (2)$$

$$u(t,0) = \psi_1(t), \qquad t \in [0,T], \quad (3)$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=\omega} + \psi_2(t), \qquad t \in [0,T], \quad (4)$$

where $u(t,x)$ is unknown function, functions $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, $D(t,x)$, and $f(t,x)$ are continuous on Ω, function $\varphi(x)$ is continuously differentiable on $[0,\omega]$, functions $\psi_1(t)$ and $\psi_2(t)$ are continuously differentiable on $[0,T]$.

Periodic and nonlocal problems for the Sobolev-type partial differential equations appear in various physical processes [1].

In present communication, we investigate conditions of existence and uniqueness of a classical periodic solution to problem (1)–(4). For this goal we use the method of introduction of new functions [2]. Problem (1)–(4) is reduced to equivalent problem consisting of periodic problem for hyperbolic equation with unknown function and integral relation. Periodic problem for hyperbolic equation is studied by method of introduction special functional parameters [3]. This problem reduced to an equivalent problem involving Goursat problem for hyperbolic equation with parameters and periodic problems for ordinary differential equations. Algorithms for finding approximate solutions to equivalent problems are constructed and it is proved their convergence.

Also we propose the approach for finding periodic solution to problem (1)–(4) based on these algorithms. Sufficient conditions of existence unique periodic solution for the Sobolev-type partial differential equations (1)–(4) are established in terms of coefficients of equation (1) and numbers T, ω.

The author was supported by the Grant of Ministry of Education and Sciences of the Republic of Kazakhstan (project no. 0822/ГФ4).

REFERENCES

1. *Soltanalizadeh V., Roohani Ghehsareh H., Abbasbandy S.*, “A super accurate shifted Tau method for numerical computation of the Sobolev-type differential equation with nonlocal boundary condition,” Appl. Math. Comput., **236**, 683–692 (2014).
2. *Asanova A. T., Dzhumabaev D. S.*, “Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations,” J. Math. Anal. Appl., **402**, No. 1, 167–178 (2013).
3. *Assanova A. T.*, “Periodic solutions in the plane of systems of second-order hyperbolic equations,” Math. Notes, **101**, No. 1, 17–26 (2017).

CONFORMAL INVARIANCE OF THE ELASTOSTATICS EQUATIONS

Chirkunov Yu. A.

Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering, Novosibirsk, Russia; chr101@mail.ru

We fulfilled a group foliation of the system of n-dimensional ($n > 1$) Lame equations of the classical static theory of the elasticity with respect to the infinite subgroup contained in normal subgroup of main group of this system. It permitted us to move from the Lame equations to the equivalent unification of two first-order systems: automorphic and resolving. We obtained a general solution of the automorphic system. This solution is n-dimensional analogue of the Kolosov–Muskhelishvili formula. We found the main Lie group of transformations of the resolving system of this group foliation. It turned out that in two-dimensional and three-dimensional cases, which have a physical meaning, this system is conformally invariant, while the Lame equations admit only a group of the similarities of Euclidean space. This is a big success, since in the method of group foliation resolving equations usually inherit Lie symmetries subgroup of the full symmetry group that was not used for the foliation. In three-dimensional case for the solutions of the resolving system we found the general form of the transformations similar to the Kelvin transformation, that are the consequence of the conformal invariance of the resolving system. In three-dimensional case with the help of the complex dependent and independent variables, the resolving system is written as a simple complex system. For this complex system, all the essentially distinct invariant solutions of the maximal rank we have found in explicit form, or we reduced finding those solutions to solving the classical one-dimensional equations of the mathematical physics: the heat equation, the telegraph equation, the Tricomi equation, the generalized Darboux equation, and other equations.

The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00446).

REFERENCES

1. *Chirkunov Yu. A.*, “Conformal invariance and new exact solutions of the elastostatics equations,” J. Math. Phys., **58**, No. 3, 031502 (2017).

INVARIANT MODELING OF THE MODEL OF THERMAL MOTION OF GAS IN A RAREFIED SPACE

Chirkunov Yu. A.[1], **Pikmullina E. O.**[2]

[1] *Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering, Novosibirsk, Russia;* chr101@mail.ru

[2] *Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia;* elena187@list.ru

A model describing the thermal motion of gas in a rarefied space is investigated in [1]. This model can be used in the study of the motion of gas in outer space, and the processes occurring inside the tornado, and the state of the medium behind the shock front of the wave after a very intense explosion [2–4]. The multi-dimensional model was investigated in [5–7]. The two-dimensional model was investigated in [8]. Exact solutions and conservation laws for the three-dimensional model were obtained in [9]. For a given initial pressure distribution, a special choice of mass Lagrange variables leads to a reduced system of differential equations describing this motion, in which the number of independent variables is one less than the original system. This means that there is a stratification of a highly rarefied gas with respect to pressure. Namely, in a strongly rarefied space for each given initial pressure distribution, at each instant of time all gas particles are localized on a two-dimensional surface moving in this space. At each point of this surface, the acceleration vector is collinear with its normal vector. The resulting system admits an infinite Lie transformation group. All significantly various submodels that are invariant with respect to the subgroups of its eight-parameter subgroup generated by the transfer, extension, rotation, and hyperbolic rotation operators (the Lorentz operator) are found. For invariant submodels of rank 1, the basic mechanical characteristics of the gas flow described by them are obtained. Conditions for the existence of these submodels are given. For invariant submodels of rank 2, integral equations describing these submodels are obtained. For some submodels, the problem of describing the gas flow from the initial location of its particles and the distribution of their velocities has been investigated.

The reported study was funded by the Russian Foundation for Basic Research according to the research project no. 16-01-00446 a.

REFERENCES

1. *Ovsyannikov L. V.*, “The “PODMODELI” program. Gas dynamics,” J. Appl. Math. Mech., **58**, No. 4, 601–627 (1994).
2. *Sedov L. I.*, “Propagation of strong blast waves” [in Russian], J. Appl. Math. Mech., **10**, No. 2, 241–250 (1946).
3. *Taylor G.*, “The formation of a blast wave by a very intense explosion. I. Theoretical discussion,” Proc. R. Soc. Lond. A, **201**, No. 1065, 159–174 (1950).
4. *von Neuman J.*, “The point source solution,” in: *Bethe H. A., Fuchs K., Hirschfelder J. O., Magee J. L., Peierls R. E., von Neumann J.*, Blast Wave, Los-Alamos Scientific Laboratory Report LA–2000, 1958, pp. 27–55.
5. *Chirkunov Yu. A.*, “The conservation laws and group properties of the equations of gas dynamics with zero velocity of sound,” J. Appl. Math. Mech., **73**, No. 4, 421–425 (2012).
6. *Chirkunov Yu. A.*, Group Analysis of Linear and Quasi-Linear Differential Equations [in Russian], NSUEM, Novosibirsk (2007).
7. *Chirkunov Yu. A., Khabirov S. V.*, Elements of Symmetry Analysis of Differential Equations of Continuum Mechanics [in Russian], NSTU, Novosibirsk (2012).
8. *Khabirov S. V.*, “The plane isothermal motions of an ideal gas without expansions,” J. Appl. Math. Mech., **78**, No. 3, 287–297 (2014).
9. *Chirkunov Yu. A.*, “Exact solutions of the system of the equations of thermal motion of gas in the rarefied space,” Int. J. Non-Linear Mech., **83**, 9–14 (2016).

ON LUZIN N-PROPERTY FOR SOBOLEV MAPPINGS

Ferone A.[1], **Korobkov M. V.**[2], **Roviello A.**[3]

[1]*Second University of Naples, Caserta, Italy;*
Adele.FERONE@unicampania.it
[2]*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;*
korob@math.nsc.ru
[3]*Second University of Naples, Caserta, Italy;*
albaroviello@msn.com

We say that mapping $v:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^d$ satisfies the (τ,σ)-N-property, if $\mathcal{H}^\sigma(v(E))=0$ whenever $\mathcal{H}^\tau(E)=0$, where $\mathcal{H}^\tau$ means the Hausdorff measure. We prove that every mapping v of Sobolev class $W^k_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^d)$ with $kp>n$ satisfies (τ,σ)-N-property for every $0<\tau\neq\tau_*:=n-(\alpha-1)p$ with

$$\sigma=\sigma(\tau):=\begin{cases}\tau, & \text{if } \ \tau>\tau_*,\\ \dfrac{p\tau}{\alpha p-n+\tau}, & \text{if } \ 0<\tau<\tau_*.\end{cases}$$

We prove also, that for $k>1$ and for the critical value $\tau=\tau_*$ the corresponding (τ,σ)-N-property fails in general. Nevertheless, this (τ,σ)-N-property holds for $\tau=\tau_*$, if we assume in addition that the highest derivatives $\nabla^k v$ belong to the Lorentz space $L_{p,1}(\mathbb{R}^n)$ instead of L_p.

We extend these results to the case of fractional Sobolev spaces and for the Besov spaces as well. Also, we establish some Fubini type theorems for N-properties and discuss their applications to the Morse–Sard theorem and its recent extensions.

The most results are contained in the recent preprint [1]. The proofs of the most results are based on our previous joint papers with J. Bourgain (Princeton) and J. Kristensen (Oxford), see [2, 3].

Similar results were announced by G. Alberti, M. Csörnyei, E. D'Aniello, and B. Kirchheim (private communication, see also [4]).

REFERENCES

1. *Ferone A., Korobkov M. V., Roviello A.*, “On Luzin N-property and uncertainty principle for the Sobolev mappings,” arxiv.org/abs/1706.04796.
2. *Bourgain J., Korobkov M. V., Kristensen J.*, “On the Morse–Sard property and level sets of $W^{n,1}$ Sobolev functions on $\mathbb{R}^n$,” J. Reine Angew. Math., **700**, 93–112 (2015).
3. *Hajlasz P., Korobkov M. V., Kristensen J.*, “A bridge between Dubovitskii–Federer theorems and the coarea formula,” J. Funct. Anal., **272**, No. 3, 1265–1295 (2017).
4. *Alberti G.*, “Generalized N-property and Sard theorem for Sobolev maps,” Atti Accad. Naz. Lincei, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., IX. Ser., Rend. Lincei, Mat. Appl., **23**, No. 4, 477–491 (2012).

ON MODELS OF CIRCULAR GENE NETWORKS

Golubyatnikov V. P.[1,2], **Kirillova N. E.**[2]

[1]*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;*
vladimir.golubyatnikov1@fulbrightmail.org

[2]*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;*
n.kirillova@g.nsu.ru

We study 10-dimensional nonlinear dynamical system

$$\frac{dm_j}{dt} = -k_j m_j + f_j(p_{j-1}), \quad \frac{dp_j}{dt} = \mu_j m_j - \nu_j p_j, \quad j = 1, \ldots, 5, \tag{1}$$

as a model of a circular gene network functioning. Here $j-1=5$ if $j=1$, the non-negative variables p_j, m_j denote concentrations of proteins and mRNA, the coefficients k_j, μ_j, ν_j are positive, and the functions $f_j(p)$ are assumed to be positive, smooth and monotonically decreasing. This corresponds to negative feedbacks in the gene network. Similar 6-dimensional symmetric system ($f_1 = f_2 = f_3$, $k_j = 1$, $\nu_1 = \mu_1 = \nu_2 = \mu_2 \ldots$, etc.) was introduced in [1], see also [2]; its 6D asymmetric version was studied in [3].

Theorem 1.

1. *The system* (1) *has a unique equilibrium point.*

2. *If this point is hyperbolic, then the system* (1) *has at least one cycle.*

Let (2) be 18-dimensional partially symmetric system analogous to (1), i.e., $f_s = f_{s+3}$, $k_s = k_{s+3}$, $\mu_s = \mu_{s+3}$, $\nu_s = \nu_{s+3}$, $s = 1, \ldots, 6$.

Theorem 2.

1. *The system* (2) *has a unique equilibrium point.*

2. *If this point is hyperbolic, then the system* (2) *has at least two cycles.*

The authors were supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 15-01-00745).

REFERENCES

1. *Elowitz M. B., Leibler S.*, “A synthetic oscillatory network of transcriptional regulator existence,” Nature, London, **403**, 335–338 (2000).
2. *Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh., Sadovnichii V. A.*, “Periodic solutions of travelling-wave type in circular gene networks,” Izv. Math., **80**, No. 3, 523–548 (2016).
3. *Ayupova N. B., Golubyatnikov V. P., Kazantsev M. V.*, “On existence of a cycle in one asymmetric model of a molecular repressilator” [in Russian], Sib. Zh. Vychisl. Mat., **20**, No. 2, 121–129 (2017).

BINARY CORRESPONDENCES AND PROBLEMS OF CHEMICAL KINETICS WITH MANY-SHEETED SLOW SURFACE

Gutman A. E.[1], **Kononenko L. I.**[2]

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia;
[1]gutman@math.nsc.ru, [2]larak@math.nsc.ru

Formally, a problem is a binary correspondence $P = (A, B, C)$ with $C \subseteq A \times B$. The sets A, B, and C are treated as *the domain of data*, *the domain of unknowns*, and *the condition* of the problem P. The containment $(a, b) \in C$ is written as $P(a, b)$ and means that the unknown $b \in B$ is a *solution* to P for data $a \in A$. This approach provides a simple and adequate formalization for components of problems, their properties and constructions, makes it possible to formalize topological problems, their parametrizations, and dependence of solutions on parameters (see [1]).

As an example, we consider a singularly perturbed system of ordinary differential equations which describes a process of chemical kinetics with many-sheeted slow surface (see [2]). Suppose that $n \in \mathbb{N}$, $0 < \varepsilon_0 \in \mathbb{R}$, X is a domain in $\mathbb{R}^n$, $F := C(X^2 \times \mathbb{R} \times [0, \varepsilon_0], \mathbb{R}^n)$. Let P be the problem with data $F^2 \times [0, \varepsilon_0]$, unknowns $C^1(\mathbb{R}, X)^2$, and condition $P\big((f, g, \varepsilon), (x, y)\big) \Leftrightarrow \dot{x}(t) = f\big(x(t), y(t), t, \varepsilon\big)$, $\varepsilon\,\dot{y}(t) = g\big(x(t), y(t), t, \varepsilon\big)$ for all $t \in \mathbb{R}$. The formal inverse P^{-1} to the problem P is impractical and can be corrected by means of composition with the auxiliary problem Q with data $(\mathbb{R}^m)^3$, unknowns $C^1(\mathbb{R}, X)^2$, and condition $Q\big((t, \alpha, \beta), (x, y)\big) \Leftrightarrow x(t_i) = \alpha_i$, $\dot{x}(t_i) = \beta_i$, $i \in \{1, \dots, m\}$. In [1], solvability of the composition problem $P^{-1} \circ Q$ is studied in a particular case.

The second author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 15-01-00745).

REFERENCES

1. *Gutman A. E., Kononenko L. I.,* “Formalization of inverse problems and applications to systems of equations with parameters,” in: Geometric Analysis and Control Theory: Abstracts, Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, 2016, pp. 40–42.
2. *Gol’dshtein V. M., Sobolev V. A.,* Qualitative Analysis of Singularly Perturbed Systems [in Russian], Institute of Mathematics, Novosibirsk (1988).

CRITERION FOR THE POTENTIALITY OF A VECTOR FIELD IN THE SUB-RIEMANNIAN GEOMETRY

Isangulova D. V.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia; dasha@math.nsc.ru

We consider a subset M of $\mathbb{R}^N$ with completely non-integrable horizontal distribution H. Suppose C^∞-smooth horizontal vector fields $X_1, \dots, X_n$ form a basis of H_x at each point $x \in M$. Complete the fields $X_1, \dots, X_n$ to a basis of the whole TM so that $X_{n+1}, \dots, X_N$ are formed by commutators of fields from H: $X_k = \sum_I e_I^k(x) X^I$, where $I = (i_1, \dots, i_m) \in \{1, \dots, n\}^m$, $X^I = X_{i_1} \dots X_{i_m}$, $k = n+1, \dots, N$, $[X_i, X_j] = \sum\limits_k c_{ijk}(x) X_k$.

The subgradient of a function f is a horizontal vector field $\nabla_{\mathcal{L}} f = X_1 f X_1 + \dots + X_n f X_n \in H$. We solve the problem posed in [1]. What conditions should satisfy the functions $a_1, \dots, a_n$ so that the horizontal vector field $a_1 X_1 + \dots + a_n X_n \in H$ is the subgradient of some function f?

Theorem. *Let $a_1, \dots, a_n$ be C^∞-smooth functions on a simply connected domain Ω of sub-Riemannian manifold M. Horizontal vector field $a_1 X_1 + \dots + a_n X_n \in H$ is a subgradient of some function if*

$$X_i a_j(x) - X_j a_i(x) = \sum_k c_{ijk}(x) a_k(x), \quad x \in \Omega, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant N, \qquad (1)$$

where $a_{n+1}, \dots, a_N$ can be calculated as

$$a_k(x) = \sum_I e_I^k(x) X_{i_1} \dots X_{i_{m-1}} a_{i_m}(x), \quad x \in \Omega, \quad k = n+1, \dots, N. \qquad (2)$$

Note that $N(N-1)/2$ conditions (1) are not always independent. Usually they include $N - n$ conditions (2). In the case of Carnot groups, the number of conditions can be further reduced: we must check no more than $(n-1)(2N-n)/2$ conditions. In the talk we write out the criterion of potentiality on several examples of sub-Riemannian manifolds and Carnot groups.

REFERENCES

1. *Calin O., Chang D. C.*, Sub-Riemannian Geometry: General Theory and Examples, Encycl. Math. Appl., Vol. 126, Cambridge University Press, Cambridge (2009).

HARDY TYPE INEQUALITIES FOR MONOTONE AND QUASI-MONOTONE FUNCTIONS

Jain P.

South Asian University, New Delhi, India;
pankaj.jain@@sau.ac.in

We shall discuss inequalities of the type

$$\int_0^\infty (S_\phi f)^p (x)\, w(x)\, dx \leq C \int_0^\infty f^p(x)\, w(x)\, dx, \quad 1 < p < \infty,$$

and its reverse inequality, where S_ϕ is the Hardy type operator

$$S_\phi f(x) := \frac{1}{\Phi(x)} \int_0^x f(t)\phi(t)dt, \quad \Phi(x) := \int_0^x \phi(t)dt,$$

ϕ is a suitable function. We shall deal with the cases when in these inequalities functions f are monotone as well as quasi-monotone. All these inequalities will be also discussed in the framework of grand Lebesgue spaces.

LINEAR CANONICAL TRANSFORM CONNECTED WITH VARIOUS CONVOLUTIONS

Kanjilal S.

South Asian University, New Delhi, India;
saikat.kanjilal.07@gmail.com,
saikatkanjilal@students.sau.ac.in

We consider various types of convolutions given as:

- $(f \star_1 g)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)g(t-x)\,dx;$
- $(f \star_2 g)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x-t)}\,dx;$
- $(f \star_3 g)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}g(t+x)\,dx;$
- $(f \star_4 g)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \overline{f(x)g(-x-t)}\,dx.$

In connection with these convolutions, we shall talk about the corresponding Linear Canonical Transform (LCT).

The above-mentioned convolutions and LCT will be discussed for functions as well as distributions. Various properties in this regard will be derived.

ZAYED TYPE FRACTIONAL CONVOLUTIONS AND DISTRIBUTIONS

Kumar R.

University of Delhi, New Delhi, India;
rkumar@db.du.ac.in

The present talk focuses on three types of fractional convolutions, two of which were given by A. Zayed. Our first consideration is to extend the famous Young's inequality in the context of fractional convolutions. Then for these convolutions weighted iterated L^p-L^q inequalities will be discussed. Finally, the notion of fractional convolutions between functions and distributions and also between distributions will be considered and various corresponding properties will be discussed.

ENTROPY SOLUTIONS OF GENUINELY NONLINEAR FORWARD-BACKWARD ULTRA-PARABOLIC EQUATIONS

Kuznetsov I. V.[1], **Sazhenkov S. A.**[2]

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russia;
[1]kuznetsov_i@hydro.nsc.ru, [2]sazhenkovs@yandex.ru

Let vector functions $\boldsymbol{a}(z)$ and $\boldsymbol{\varphi}(z)$ satisfy the following conditions.

Conditions on $\boldsymbol{a}$&$\boldsymbol{\varphi}$. *Let* $\boldsymbol{a}(z) = (a_1(z), \dots, a_m(z))$, $a_i \in C^2(\mathbb{R})$, $i = 1, \dots, m$, $\boldsymbol{a}(0) = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\varphi}(z) = (\varphi_1(z), \dots, \varphi_d(z))$, $z \in \mathbb{R}$, $\varphi_j \in C^2(\mathbb{R})$, $j = 1, \dots, d$, $\boldsymbol{\varphi}(0) = \mathbf{0}$. *At least one component of $\boldsymbol{a}$ is a non-monotonic function. Moreover, $\boldsymbol{a}'$ satisfies the genuine nonlinearity condition*

$$\operatorname{mes}\left\{\lambda \in \mathbb{R} : \ \sum_{i=1}^{m} a_i'(\lambda)\xi_i = 0\right\} = 0$$

for every $(\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{S}^{m-1}$.

Let $G_{T_1,\dots,T_m} = \Omega \times (0, T_1) \times \ldots \times (0, T_m)$, $\Gamma_0^1 = \overline{\Omega} \times \{t_1 = 0\} \times [0, T_2] \times \ldots \times [0, T_m]$, $\Gamma_{T_1}^1 = \overline{\Omega} \times \{t_1 = T_1\} \times [0, T_2] \times \ldots \times [0, T_m]$, $\Xi^1 = \Omega \times (0, T_2) \times \ldots \times (0, T_m)$,..., $\Gamma_0^m = \overline{\Omega} \times [0, T_1] \times \ldots \times [0, T_{m-1}] \times \{t_m = 0\}$, $\Gamma_{T_m}^m = \overline{\Omega} \times [0, T_1] \times \ldots \times [0, T_{m-1}] \times \{t_m = T_m\}$, $\Xi^m = \Omega \times (0, T_1) \times \ldots \times (0, T_{m-1})$, $\Gamma_l = \partial G_{T_1,\dots,T_m} \backslash (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_{T_1}^1 \cup \ldots \cup \Gamma_0^m \cup \Gamma_{T_m}^m)$. A bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($\operatorname{mes}\Omega < \infty$) has smooth boundary $\partial\Omega$.

Problem $\boldsymbol{\Pi}_0$. *For arbitrary initial and final conditions* $u_0^i, u_{T_i}^i \in L^\infty(\Xi^i) \cap W_0^{1,2}(\Xi^i)$, $i = 1, \dots, m$, *the unknown function* $u : G_{T_1,\dots,T_m} \to \mathbb{R}$ *satisfies*

$$\operatorname{div}_t \boldsymbol{a}(u) + \operatorname{div}_x \boldsymbol{\varphi}(u) = \Delta_x u, \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) \in G_{T_1,\dots,T_m},$$

$$u|_{\Gamma_0^i} \approx u_0^1, \quad u|_{\Gamma_{T_i}^i} \approx u_{T_i}^i, \quad i = 1, \dots, m, \quad u|_{\Gamma_l} = 0,$$

where $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_d)$, $\boldsymbol{t} = (t_1, \dots, t_m)$, *the sign $\approx$ means the equality only on a part of the boundary.*

Under Conditions on $\boldsymbol{a}$&$\boldsymbol{\varphi}$ and the additional restriction on C^1-norm of $\boldsymbol{\varphi}'$, we have proved the existence and the uniqueness of the entropy solution to problem $\boldsymbol{\Pi}_0$. The existence of quasi-solutions is also discussed.

The authors were supported by the grant no. III.22.4.2.

DUALITY OF SOME GENERALIZED GRAND LEBESGUE SPACES

Singh M.

University of Delhi, New Delhi, India;
monikasingh@lsr.du.ac.in

Let $I = (0,1)$. The grand Lebesgue space, denoted by $L^{p)}(I)$, is the space of all finite a.e. measurable functions f for which

$$\|f\|_{L^{p)}(I)} := \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\varepsilon \int_I |f(x)|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \infty, \quad 1 < p < \infty.$$

These spaces are originated by Iwaniec and Sbordone [1] in 1992 and have undergone several generalizations during the recent past. The most recent generalization is the fully measurable grand Lebesgue spaces. In this talk we shall be dealing with the properties of these spaces, viz., duality and reflexivity. Also we shall talk about grand Bochner–Lebesgue spaces and their properties.

REFERENCES

1. *Iwaniec T., Sbordone C.*, "On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses," Arch. Ration. Mech. Anal., **119**, No. 2, 129–143 (1992).

DISCRETIZATION OF TWO-DIMENSIONAL GELFAND–LEVITAN INTEGRAL EQUATION

Temirbekova L. N.

Abai Kazakh National Pedagogical University,
Almaty, Republic of Kazakhstan; laura-nurlan@mail.ru

In this work, we consider numerical method of solving inverse problems for two-dimensional hyperbolic equations. The coefficient inverse problem is numerically solved using the method of the two-dimensional Gelfand–Levitan integral equation [1]. To numerically solve the two-dimensional Gelfand–Levitan integral equation, which is the Fredholm integral equation of first kind, we use parallel algorithms [2].

Consider the following sequence of the direct problems [3]

$$u_{tt}^{(k)} = u_{xx}^{(k)} + u_{yy}^{(k)} - q(x,y)u^{(k)}, \quad x > 0, \quad y \in (-\pi, \pi), \quad t \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$u^{(k)}|_{t=0} = 0, \quad u_t^{(k)}|_{t=0} = h(y)\delta(x),$$
$$u^{(k)}|_{y=\pi} = u^{(k)}|_{y=-\pi}.$$

The inverse problem is to restore continuously function $q(x,y)$ by the next additional information

$$u^{(k)}(0,y,t) = f^{(k)}(y,t), \quad y \in (-\pi, \pi), \quad t > 0, \quad k \in \mathbb{Z},$$

where $\mathbb{R}$ is a set of real numbers, $\mathbb{Z}$ is a set of integer numbers, δ is Dirac delta function, k is some fixed number, and $h(y) = e^{iky}$; $f^{(k)}(y,0) = 0$ is necessary condition. The problem considered above is solved by two-dimensional Gelfand–Levitan integral equation of the first kind, which has the form [1–4]

$$\frac{1}{2}\Big[f^{(k)}(y,t+x)+f^{(k)}(y,t-x)\Big]+\int\limits_{-x}^{x}\sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(t-s)\widetilde{\omega}^{(m)}(x,y,s)ds = 0, \ \ x > |t|.$$

The integral equation is numerically solved by parallel algorithms.

The author was supported by the project “Theory and numerical methods of solving inverse and ill-posed problems of natural science” of the Ministry of Education and Science of Kazakhstan (project no. 1746/GF4).

REFERENCES

1. *Gelfand I. M., Levitan B. M.*, “On the determination of a differential equation from its spectral function” [in Russian], Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat., **15**, 309–360 (1951).
2. *Kabanikhin S. I.*, Inverse and Ill-Posed Problems [in Russian], Siberian Scientific Publishers, Novosibirsk (2009).
3. *Romanov V. G.*, Inverse Problems of Mathematical Physics [in Russian], Nauka, Moscow (1984).
4. *Kabanikhin S. I., Satybaev A. D., Shishlenin M. A.*, Direct Methods of Solving Inverse Hyperbolic Problems, VSP/BRILL, the Netherlands (2004).

LOTKA–VOLTERRA COMPETITION MODELS IN ADVECTIVE ENVIRONMENTS

Vasilyeva O. I.

Memorial University of Newfoundland, Grenfell Campus, Corner Brook, Canada; ovasilyeva@grenfell.mun.ca

The flow speed in streams and rivers can change due to natural causes or human activities. Any change in flow speed can impact biological communities that are shaped not only by their biotic interactions but also by their response to water flow. Population dynamics of several competing species in such habitats can be described by spatial Lotka–Volterra competition models given by reaction-diffusion-advection equations subject to Danckwerts boundary conditions. We use the dominant eigenvalue of the diffusion-advection operator to reduce the original models to the corresponding systems of ordinary differential equations.

Our analysis illustrates that at relatively high flow speed, each species' intrinsic growth rate is the crucial factor that determines the outcome of competition. In contrast, at low flow speeds the strength of interspecific competition determines community composition. We show that changes in flow speed can facilitate different types of coexistence among multiple species.

REFERENCES

1. *Vasilyeva O., Lutscher F.*, "How flow speed alters competitive outcome in advective environments," Bull. Math. Biol., **74**, No. 12, 2935–2958 (2012).
2. *Vasilyeva O., Lutscher F.*, "Competition of three species in an advective environment," Nonlinear Anal., Real World Appl., **13**, No. 4, 1730–1748 (2012).
3. *Vasilyeva O.*, "Competition of multiple species in advective environments," Bull. Math. Biol., **79**, No. 6, 1274–1294 (2017).

SOBOLEV SPACES AND QUASI-CONFORMAL MAPPINGS IN (SUB)-RIEMANNIAN GEOMETRY

Vodopyanov S. K.

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;
vodopis@math.nsc.ru

In this talk we describe metric properties of measurable mappings of domains in (sub)-Riemannian manifolds inducing isomorphisms on Sobolev spaces by the composition rule. We show that any such mapping can be redefined on a set of measure zero to be quasi-isometric, when the exponent of summability is different from the Hausdorff dimension of a (sub)-Riemannian manifold, or to coincide with a quasi-conformal mapping otherwise [1, 2].

We give a sketch for proving the following

Theorem. *Let $p \in [1,\infty) \setminus \{n\}$, and D, D' be domains in the Riemannian manifold $\mathbb{M}$ of the topological dimension n. A measurable mapping $\varphi\colon D \to D'$ induces an isomorphism of Sobolev spaces L^1_p by the composition rule if and only if φ coincides with some quasi-isometry $\Phi\colon D \to \Phi(D)$ almost everywhere, for which the domains $\Phi(D)$ and D' are $(1,p)$-equivalent.*

For proving a similar result on (sub)-Riemannian manifolds we provide additional tools like differentiability, etc. [3].

The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 17-01-00801).

REFERENCES

1. *Vodopyanov S. K.*, "On admissible changes of variables for Sobolev functions on (sub)Riemannian manifolds," Dokl. Math., **93**, No. 3, 318–321 (2016).
2. *Vodopyanov S. K.*, "Composition operators on Sobolev spaces," in: Contemporary Mathematics, **382**, AMS, Ann Arbor, 2005, pp. 327–342.
3. *Vodopyanov S. K.*, "Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings," in: Contemporary Mathematics, **424**, AMS, Ann Arbor, 2007, pp. 247–302.

АВТОРСКИЙ ИНДЕКС

Научное издание

СОБОЛЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ

Международная школа-конференция
Новосибирск, Россия, 20–23 августа 2017 г.

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Подписано в печать 04.08.2017 г.
Формат 60×84 1/16. Уч.-изд. л. 8,5. Усл. печ. л. 7,9.
Тираж 120 экз. Заказ № 132

Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре НГУ,
ул. Пирогова, 2, 630090 Новосибирск, Россия.